Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

10. Trainingsblatt: Fixpunktiteration (LGS)

1) Richardson Verfahren

Betrachten wir zunächst das Richardson Verfahen, welches $M = \mathbb{1}$ anstelle von $M = \operatorname{diag}(A)$ (Jacobi-Verfahren) beim Anwenden des Splitting Prinzips wählt:

$$\Phi(x_k) = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

Gegeben sei hierzu das LGS $Ax = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das LGS mithilfe des Gauß-Eliminationsverfahrens.

b) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Richardson Verfahren. Nutzen Sie hierfür den Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$. Fällt Ihnen etwas auf? Wenn ja, was?

c) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Richardson Verfahren, bei dem Sie das »in-place« Prinzip nutzen. Verwenden Sie denselben Startvektor wie bei Teilaufgabe a).

d) Warum verwenden wir bei dem Splitting Verfahren nicht $M = A$? Damit könnten wir ja eine Konvergenz in einem Schritt praktisch garantieren.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 2 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & -2 & | & -4 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist also $x = (-1, 2)^T$.

b) Erste Iteration ($k = 0$):

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= b - Ax^{(0)} \\ &= (5, 6)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= 1 \cdot r_1^{(0)} = 5 \\ y_2^{(0)} &= 1 \cdot r_2^{(0)} = 6 \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)} = (5, 6)^T$$

Zweite Iteration ($k = 1$):

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= b - Ax^{(1)} \\ &= (5, 6)^T - (5 + 18, 10 + 24)^T \\ &= (-18, -28)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 1 \cdot r_1^{(1)} = -18 \\ y_2^{(1)} &= 1 \cdot r_2^{(1)} = -28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} + y^{(1)} \\ &= (5, 6)^T + (-18, -28)^T \\ &= (-13, -22)^T \end{aligned}$$

Nach diesen zwei Iterationen zu urteilen sieht es so aus, als würde das Verfahren divergieren, und nicht konvergieren auf die analytische Lösung $(-1, 2)^T$.

In der Tat, wenn man die dritte Iteration ausrechnet, erhält man $x^{(3)} = (-13, -22)^T + (84, 120)^T = (71, 98)^T$. Dies bestärkt die Theorie nochmals.

c) Nun mit »in-place« Prinzip:

Erste Iteration ($k = 0$):

$$\begin{aligned} r_1^{(0)} &= b_1 - (Ax^{(0)})_1 \\ &= 5 \\ x_1^{(1)} &= 0 + 5 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2^{(0)} &= b_2 - (Ax^{(0)})_2 \\ &= 6 - 10 = -4 \\ x_2^{(1)} &= 0 - 4 = -4 \end{aligned}$$

Zweite Iteration ($k = 1$):

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= (5, -4)^T \\
\\
r_1^{(1)} &= b_1 - (Ax^{(1)})_1 \\
&= 5 - (5 - 12) \\
&= 12 \\
x_1^{(2)} &= 5 + 12 = 17 \\
\\
r_2^{(1)} &= b_2 - (Ax^{(1)})_2 \\
&= 6 - (34 - 16) \\
&= -12 \\
x_2^{(2)} &= -4 - 12 \\
&= -16
\end{aligned}
$$

d) Es stimmt zwar, dass unsere Konvergenzgeschwindigkeit dann perfekt wäre, jedoch müssten wir auch eine volle Matrix (nämlich A) invertieren, und das liegt in $\mathcal{O}(n^3)$. Unsere Laufzeit ist also (gerade für größere Matrizen) viel zu hoch!