geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Numerisches Programmieren

Übung #08

Lösen von LGS

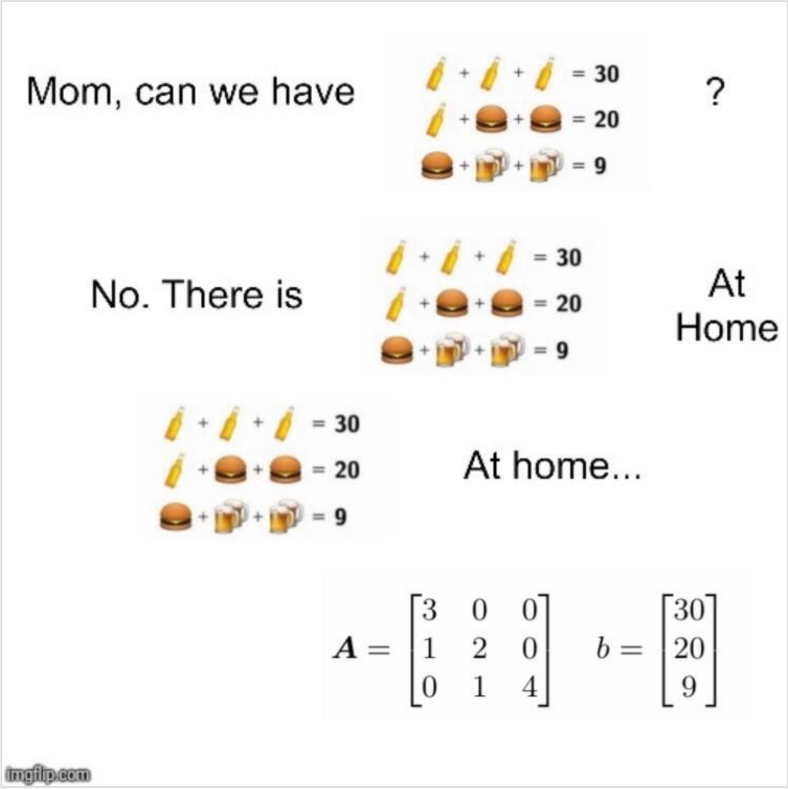
Gaußelimination

- LGS als Matrix-Vektor Produkt: $Ax = b$

→ Lösung x gesucht

- Bisher: Gauß-Elimination
    1. **Vorwärtssubstitution** → Rechts-obere Dreiecksmatrix
    2. **Rückwärtssubstitution** → Lösung x

Probleme: In $\mathcal{O}(n^3)$, mühsam und in dieser Form instabil



i.redd.it/2qno0zl215031.jpg

Pivotisierung

Recap: Zahlen müssen ggf. gerundet werden

→ Durch kleine Rundungsfehler potenziell komplett falsche Lösung x

Ansatz:

- **Pivotelement**: Element links-oben im *relevanten* Teil der Matrix
- Zeilen vertauschen, sodass Pivotelement betragsmäßig am größten

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

→ Stabil, da Faktoren beim Verrechnen der Zeilen kleiner

Aufgabe 1)

1) Gauß-Elimination und Pivotsuche

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß-Elimination:

a) Ohne Spalten-Pivotsuche in exakter Arithmetik (d.h. keine Zeilenvertauschungen und ohne Runden rechnen)

b) Ohne Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern (korrektes Runden in dezimaler Gleitkomma-Darstellung mit 3 signifikanten Stellen. Bsp.: $0.01236 = 1.236 \cdot 10^{-2}$ ergibt 0.0124).

c) Mit Spalten-Pivotsuche und mit Rundungsfehlern wie in b).

LR-Zerlegung

- Zerlegung der Matrix: $A = L \cdot R$
- $\boldsymbol{L}$ linke, untere Dreiecksmatrix (Einsen auf Diagonale)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{R}$ rechte, obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung

Algorithmus:

1. Berechne Zerlegung $A = L \cdot R$ → $\mathcal{O}(n^3)$
2. Löse Vorwärtssubstitution $Ly = b$ → $\mathcal{O}(n^2)$
3. Löse Rückwärtssubstitution $Rx = y$ → $\mathcal{O}(n^2)$

→ Dadurch lösen wir $L(Rx) = (LR)x = Ax = b$

Vorteil: Für neue b nur Schritt 2. & 3. notwendig, wenn A gleich bleibt (Zerlegung existiert bereits) → $\mathcal{O}(n^2)$

Berechnung von L und R

(Un-)bekannte Informationen:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Es gilt ja: $a_{i,j} = l_{i,1} \cdot r_{1,j} + l_{i,2} \cdot r_{2,j} + l_{i,3} \cdot r_{3,j}$ („L Zeile i“ · “R Spalte j“)

Algorithmus:

1. Wähle aus L eine Zeile i & R eine Spalte j, sodass insgesamt eine Unbekannte vorhanden
2. Stelle die Gleichung oben auf und löse nach der Unbekannten
3. Je nachdem aus welcher Matrix die Unbekannte stammt, hat man $\boldsymbol{l_{i,j}}$ oder $\boldsymbol{r_{i,j}}$ ermittelt
4. Zurück zu Schritt 1. bis alle Unbekannten ermittelt

Berechnung von L und R

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ \mathbf{0} & ? & ? \\ \mathbf{0} & 0 & ? \end{pmatrix}$$

- Wir wählen Zeile 1 aus L und Spalte 1 aus R
- Wir haben: $1 = 1 \cdot x + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \quad \rightarrow x = 1$

→ Da der unbekannte Wert aus R kommt, ergibt sich $r_{1,1} = 1$

<u>Möglichen Reihenfolge zum Lösen</u>: $r_{1,1} \rightarrow r_{1,2} \rightarrow r_{1,3} \rightarrow l_{2,1} \rightarrow l_{3,1} \rightarrow r_{2,2} \rightarrow l_{3,2} \rightarrow r_{2,3} \rightarrow r_{3,3}$

Aufgabe 2)

2) LR-Zerlegung

In dieser Aufgabe wollen wir den Algorithmus der LR-Zerlegung aus der Vorlesung an Beispielen nachvollziehen und vergleichen.

Die LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ besteht aus drei Teilen:

$$\begin{array}{llcl} \textbf{1}.\ \text{Zerlegung der Matrix } A: & A & = & L \cdot R \\ \textbf{2}.\ \text{Vorwärtssubstitution:} & Ly & = & b \\ \textbf{3}.\ \text{Rückwärtssubstitution:} & Rx & = & y \end{array}$$

a) Lösen Sie unter Verwendung der Gauß-Elimination das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (1.) der Matrix A.

c) Führen Sie nun zur Lösung von $Ax = b$ die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (2.) und (3.) durch. Verwenden Sie den Vektor b aus Teilaufgabe a).

d) Setzen Sie die LR-Zerlegung ebenfalls zur Lösung von $Ax = c$ mit $c = (2, 1, 2)^T$ ein. Wie groß ist der zusätzliche Aufwand?

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg