Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Sebastian Wolf
Shuo Sun
Hayden Liu Weng

SoSe 2023

# Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 3. Übungsblatt: Interpolation

## 1) Interpolation mit unterschiedlichen Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekannten Funktion $f$ sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie für die folgenden Basisfunktionen jeweils

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion $G$,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

an.

a) Die Polynom-Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = x^2,$$

b) Die trigonometrischen Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

c) Die Tchebycheff-Polynombasis:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

d) die Lagrange-Polynombasis $l_0, l_1, l_2$ für $x_0, x_1, x_2$ (berechnen Sie diese zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i=0;\, i\neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie die Antworten zu a), c) und d).

**Lösung:** Für Stützpunkte $x_0, \ldots, x_n$ und Basisfunktionen $g_0, \ldots, g_n$, sieht das lineare Gleichungssystem für die Interpolation so aus:

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$G(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

b) "trigonometrische" Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$G(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x)$,

$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$G(x) = (2x^2 - 1) - 5x + 4 = 2x^2 - 5x + 3$

$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

d) Lagrange-Basispolynome

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-2)(0-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \\ l_1 &= \frac{(x-0)(x-2)}{(1-2)(1-0)} = \frac{x(x-2)}{-1} \\ l_2 &= \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Lösungsvektor $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$G(x) = 3\frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2x^2 - 5x + 3$

$$G\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Vergleich von a), c) und d): **Interpolationspolynom** ist eindeutig!

## 2) Polynominterpolation nach Newton

Die Newtonschen dividierten Differenzen bieten eine effiziente Möglichkeit, ein Interpolationspolynom $p(x)$ analytisch zu beschreiben (d.h. seine Koeffizienten zu berechnen). Mit zu interpolierenden Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$ gelten die folgenden Formeln aus der Vorlesung:

$$c_{i,0} = f(x_i) = y_i \tag{6}$$

$$c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}. \tag{7}$$

Man ordnet die dividierten Differenzen in ein Dreiecksschema:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & c_{0,0} = y_0 & \to & c_{0,1} & \to & c_{0,2} & \to & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & c_{1,0} = y_1 & \to & c_{1,1} & \to & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & c_{2,0} = y_2 & \to & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Damit kann man in der ersten Zeile direkt die Koeffizienten $c_{0,k}$ des Interpolationspolynoms $p(x)$ in der folgenden Gestalt ablesen:

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \ . \tag{8}$$

In dieser Aufgabe soll zu den Punkten aus Aufgabe 1)

$$P_0 = (0,3), \qquad P_1 = (1,0) \quad \text{und } P_2 = (2,1)$$

ein Interpolationspolynom bestimmt werden.

a) Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den Gleichungen (6) - (7). Stellen Sie dazu auch das Dreiecksschema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (8)!

b) Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Dreiecksschema aus Teilfaufgabe b) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (8) an!

**Lösung:**

a) Für die Newtonschen dividierten Differenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c_{0,0} &= f(x_0) = 3 \\
c_{1,0} &= f(x_1) = 0 \\
c_{2,0} &= f(x_2) = 1 \\
c_{0,1} &= \frac{c_{1,0} - c_{0,0}}{x_1 - x_0} = \frac{0-3}{1-0} = -3 \\
c_{1,1} &= \frac{c_{2,0} - c_{1,0}}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-1} = 1 \\
c_{0,2} &= \frac{c_{1,1} - c_{0,1}}{x_2 - x_0} = \frac{1-(-3)}{2-0} = 2
\end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 \\ \hline
0 & 0 & f(x_0) = \boxed{3} & \rightarrow & \boxed{-3} & \rightarrow & \boxed{2} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & f(x_1) = 0 & \rightarrow & 1 & & \\
 & & & \nearrow & & & \\
2 & 2 & f(x_2) = 1 & & & &
\end{array}$$

Nützen wir nun die Werte $c_{0,k}$ aus der obersten Zeile des Dreiecks als Koeffizienten des Polynoms in der Darstellung (4), so erhalten wir das Interpolationspolynom $p(x)$ zu

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \\
&= \boxed{3} + \boxed{-3}(x-0) + \boxed{2}(x-0)(x-1) \;=\; \boxed{2x^2 - 5x + 3}\,.
\end{aligned}$$

b) Ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ lässt sich (unabhängig von seiner $x-$Position) einfach unten an das Newton-Schema anhängen. Man muss nur die noch fehlenden dividierten Differenzen berechnen:

$$\begin{aligned}
c_{3,0} &= f(x_3) = 0 \\
c_{2,1} &= \frac{c_{3,0} - c_{2,0}}{x_3 - x_2} = \frac{0-1}{1.5-2} = 2 \\
c_{1,2} &= \frac{c_{2,1} - c_{1,1}}{x_3 - x_1} = \frac{2-1}{1.5-1} = 2 \\
c_{0,3} &= \frac{c_{1,2} - c_{0,2}}{x_3 - x_0} = \frac{2-2}{1.5-0} = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \hline
0 & 0 & f(x_0) = 3 & \rightarrow & -3 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & \boxed{0} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & f(x_1) = 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 2 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
2 & 2 & f(x_2) = 1 & \rightarrow & 2 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
1.5 & 3 & f(x_3) = 0 & & & & & &
\end{array}$$

Der zusätzliche Term für $q(x)$ besteht dann aus

$$c_{0,3} \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Dass dieser Anteil verschwindet, ist nötig, da der Zusatzpunkt (1.5,0) auch schon auf dem ersten Interpolationspolynom $p(x)$ liegt! Deswegen muss aufgrund der Eindeutigkeit der Polynominterpolation $p(x) = q(x)$ gelten.

## 3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Das Aitken-Neville Verfahren gibt uns eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu den Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ **direkt an einer Stelle $x$ auszuwerten**, ohne die tatsächliche Koeffizienten des Polynomes zu berechnen:

```
for i=0:n; p[i,0]:=f_x[i]; end
for k=1:n
   for i=0:n-k
      p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
   end
end
```

Die sukzessive Berechnung der $p[i,k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann wieder mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & p[0,0] = y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & p[1,0] = y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & p[2,0] = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle $x$ steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0,n]$.

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte $P_0, P_1, P_2$ aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

**Lösung:** Die zu interpolierenden Punkte (**hier für alle vier Punkte**) sind:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x_0 &=& 0\ , & f(x_0) &=& 3 \\
x_1 &=& 1\ , & f(x_1) &=& 0 \\
x_2 &=& 2\ , & f(x_2) &=& 1 \\
x_3 &=& 1.5\ , & f(x_3) &=& 0.
\end{array}
$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i,0] = f(x_i)$ ist ja klar):

<u>$k = 1$</u>:

$$
\begin{array}{rcl}
p[0,1] &=& p[0,0] + \dfrac{x - x[0]}{x[1] - x[0]}\left(p[1,0] - p[0,0]\right) \;=\; 3 + \dfrac{0.5-0}{1-0}(0-3) \;=\; 1.5 \\
p[1,1] &=& p[1,0] + \dfrac{x - x[1]}{x[2] - x[1]}\left(p[2,0] - p[1,0]\right) \;=\; 0 + \dfrac{0.5-1}{2-1}(1-0) \;=\; -0.5 \\
p[2,1] &=& p[2,0] + \dfrac{x - x[2]}{x[3] - x[2]}\left(p[3,0] - p[2,0]\right) \;=\; 1 + \dfrac{0.5-2}{1.5-2}(0-1) \;=\; -2
\end{array}
$$

$\underline{k=2}$:

$$\begin{aligned}
p[0,2] &= p[0,1] + \frac{x - x[0]}{x[2]-x[0]}\left(p[1,1]-p[0,1]\right) = 1.5 + \frac{0.5-0}{2-0}(-0.5-1.5) = 1\\
p[1,2] &= p[1,1] + \frac{x - x[1]}{x[3]-x[1]}\left(p[2,1]-p[1,1]\right) = -0.5 + \frac{0.5-1}{1.5-1}(-2-(-0.5)) = 1
\end{aligned}$$

$\underline{k=3}$:

$$p[0,3] = p[0,2] + \frac{x - x[0]}{x[3]-x[0]}\left(p[1,2]-p[0,2]\right) = 1 + \frac{0.5-0}{2-0}(1-1) = \boxed{1}$$

Für das Dreicksschema erhält man somit:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & 3\\
\hline
0 & 0 & f(x_0)=3 & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \boxed{1}\\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
1 & 1 & f(x_1)=0 & \rightarrow & -0.5 & \rightarrow & 1 & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
2 & 2 & f(x_2)=1 & \rightarrow & -2 & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
1.5 & 3 & f(x_3)=0 & & & & & &
\end{array}$$

Der Wert von $p(x=0.5)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0,3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = 2x^3 - 5x + 3$ an der Stelle $x = 0.5$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die $x_i$ mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über $i$ und $k$ höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

## 4) Runge-Effekt

Bisher haben wir uns mit Polynominterpolation mit gleichverteilten Stützpunkten beschäftigt. Hierfür wurde z.B. das Newtonverfahren verwendet, um ein eindeutiges Polynom $n-1$. Grades, oder geringer, zu konstruieren, welches durch alle $n$ gegebenen Stützpunkte verläuft.

a) Überlegen Sie sich wie das Interpolationspolynom von $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (siehe auch Abb. 1) mit wachsender Zahl von Stüzstellen aussieht.

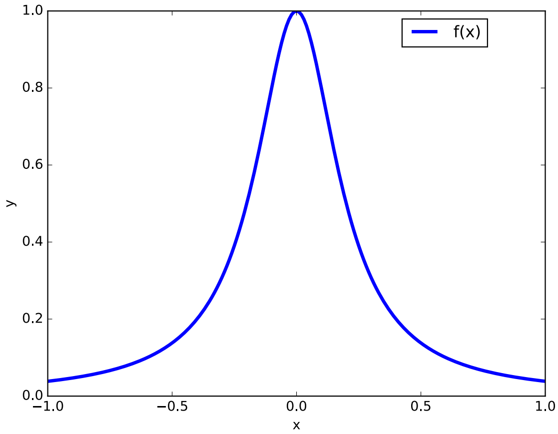


Abbildung 1: Runge Funktion f(x)

b) Was könnte man machen, um das Interpolationsergebnis zu verbessern?

c) Zeichnen Sie das Ergebnis der verbesserten Methoden in die Abbildung 1 ein!

**Lösung:**

a) Siehe fig. 2 rote Kurve.

b) Interpolationspunkte besser wählen: z.B. Chebyshev Punkte
Stückweise Interpolation: z.B. stückweise linear (oder auch höhere Ordnungen)

c) Siehe fig. 2 grüne und braune Kurven.

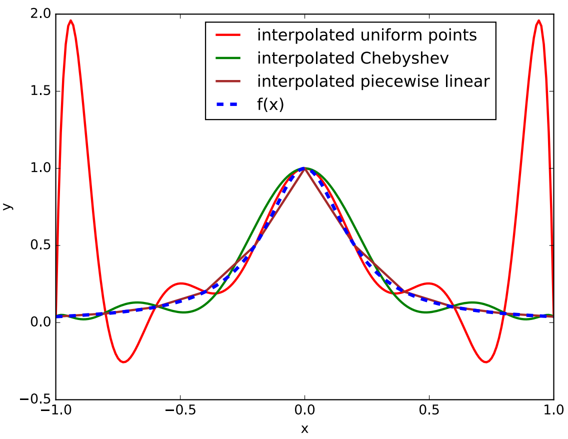


Abbildung 2: Runge Funktion f(x) with different interpolation strategies

## 5) Zusatzaufgabe: Fehlerabschätzung

Im Abbildung 3 links ist die tatsächliche Funktion $f$ gezeichnet.

a) Zeichnen Sie das berechnete Interpolationspolynom von 1) dazu. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0.5$?

b) Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}]$. Man wählt $\xi$ in der Regel derart, dass die Fehlerabschätzung maximal wird.

Werten Sie den Fehler an der Stelle $x = 0.5$ aus! Verwenden Sie dazu

$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^3 f(\xi)| = 35.43,$$
$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^4 f(\xi)| = 107.53.$$

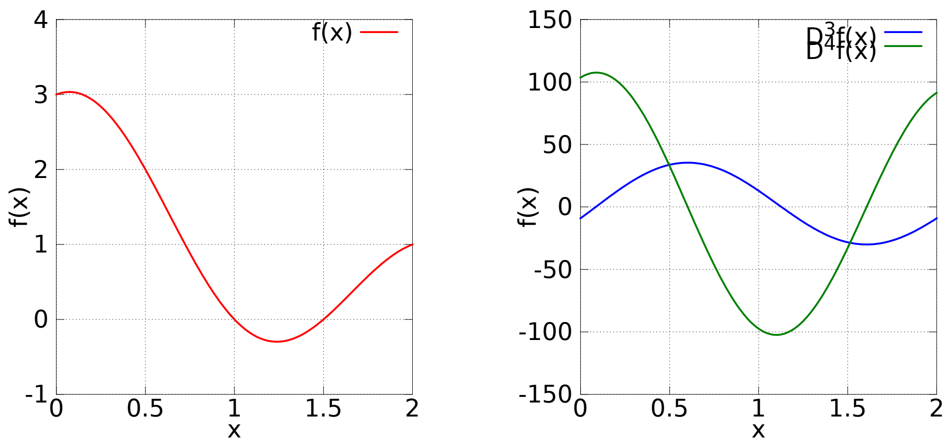


Abbildung 3: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.

**Lösung:**

a) $|f(0.5) - p(0.5)| = |2 - 1| = 1$

b) Mit den drei Punkten:

$$\begin{aligned}
|f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^3 f(\xi)}{3!} \cdot (0.5 - 0)(0.5 - 1)(0.5 - 2) \right| \\
&= \frac{1}{16} \cdot |D^3 f(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{16} \cdot \max_{x \in [0,2]} |D^3 f(x)| = \frac{1}{16} 35.43 \approx 2.21
\end{aligned}$$

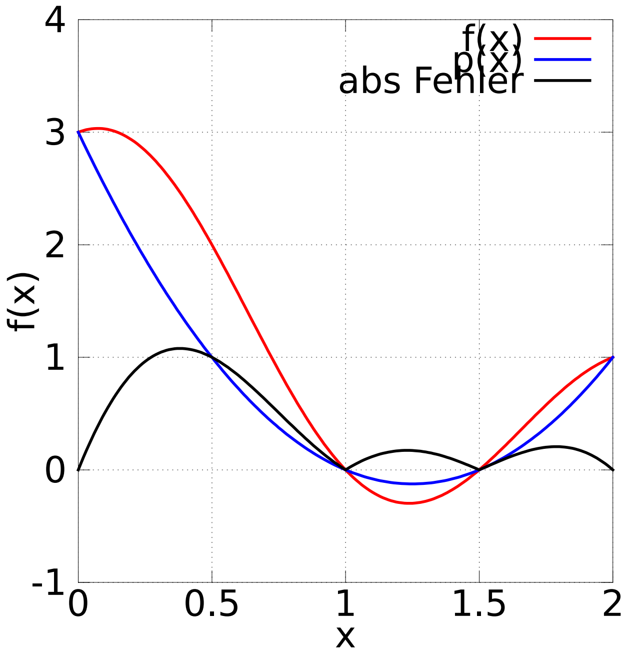


Abbildung 4: Die tatsächliche $f(x)$ und der absolute Fehler.

oder mit den vier Punkten:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)(0.5-2) \right| \\
&= \frac{1}{64} \cdot |D^4 f(\xi)| \\
&\leq \frac{1}{64} \cdot \max_{x \in [0,2]} |D^4 f(x)| = \frac{1}{64} 107.53 \approx 1.68
\end{aligned}
$$

Die tatsächliche Funktion war

$$
f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin(\pi x).
$$