Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

8. Trainingsblatt: QR-Zerlegung, Ausgleichsproblem

1) QR-Zerlegung

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 10 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

a) Zerlege die obige Matrix A mithilfe der QR-Zerlegung.

b) Berechnen Sie das Ergebnis des LGS $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wenn du mit derselben Matrix ganz viele LGS lösen musst und der Fokus auf der Laufzeit liegt, welches der Verfahren bislang würdest du anwenden?

d) Du hast eine Matrix der folgenden Form gegeben:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Du sollst die Matrix in Q und R zerlegen. Was fällt auf?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Da schon eine Null im links-unteren Bereich von A vorhanden ist, können wir uns die Rotation $G_{2,1}$ sparen.

$G_{3,1}$ – Rotation:

$$G_{3,1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= G_{3,1} \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 15 & 10 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 15 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$G_{3,2}$ – Rotation:

$$G_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= G_{3,2} \cdot A_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = R \end{aligned}$$

Aus den Rotationsmatrizen Q berechnen:

$$\begin{aligned} Q &= G_{3,1}^T \cdot G_{3,2}^T \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 12 & -16 \\ 0 & 20 & 15 \\ 20 & -9 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Jetzt müssen wir das LGS lösen:

$$Rx = Q^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 20 \\ 12 & 20 & -9 \\ -16 & 15 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 25 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 21 & 22 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt wie üblich Rückwärtssubstitution betreiben:

$$\begin{aligned} 5x_3 &= 1 \\ x_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + \frac{21 \cdot 3}{5} + \frac{22}{5} &= 2 \\ 5x_1 &= 2 - \frac{85}{5} \\ 5x_1 &= 2 - 17 \\ 5x_1 &= -15 \\ x_1 &= -\frac{15}{5} \\ x_1 &= -3 \end{aligned}$$

c) Man würde die LR-Zerlegung anwenden. Zwar ist QR stabiler (wegen der Kondition von orthogonalen Matrizen), aber leicht kostenaufwändiger.

d) Die Matrix ist schon eine rechts obere Dreiecksmatrix. Wir brauchen keine QR-Zerlegung anzuwenden, da wir mithilfe von simpler Rückwärtssubstitution auf das Ergebnis schließen können.

2) Lineares Ausgleichsproblem

Wir wollen eine Gerade finden ($y = mx + t$), die durch den Ursprung geht sowie möglichst nah durch folgende Punktemenge:

$$P_0(1|2) \qquad P_1(-2|-3)$$

a) Stellen Sie ein LGS auf, dass das obige Problem repräsentiert.

   Hinweis: Dass die Gerade zwangsläufig durch den Ursprung gehen muss streicht eine Komponente in der Funktion.

b) Lösen Sie das LGS aus a) mithilfe der Normalengleichung.

c) Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Lösen Sie es mithilfe der QR-Zerlegung!

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Dass die Gerade durch den Ursprung laufen muss streicht die t Komponente völlig.

Wir erhalten als LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot m = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Wir wenden die Normalengleichung an.

$$\begin{aligned} A^T \cdot A \cdot m &= A^T \cdot b \\ 5 \cdot m &= 8 \\ m &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Die gesuchte Gerade ist $y = \frac{8}{5}x$.

c) Wenn wir unsere Ausgangsmatrix betrachten,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass wir nur noch eine Rotation machen müssen.

$G_{3,2}$ – Rotation:

$$\begin{aligned} G_{3,2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{3,2} \cdot A &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R \end{aligned}$$

LGS mithilfe der Zerlegung lösen:

$$Rx = \beta_1 \qquad (\beta_1, \beta_2)^T = G_{3,2} \cdot b$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir können schließen, dass $x_2 = 1$ ist. x_1 berechnen wir dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3 &= 2 \\ 5x_1 &= -1 \\ x_1 &= \frac{-1}{5} \end{aligned}$$