Numerisches Programmieren

Übung #12

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Iterative Verfahren #2

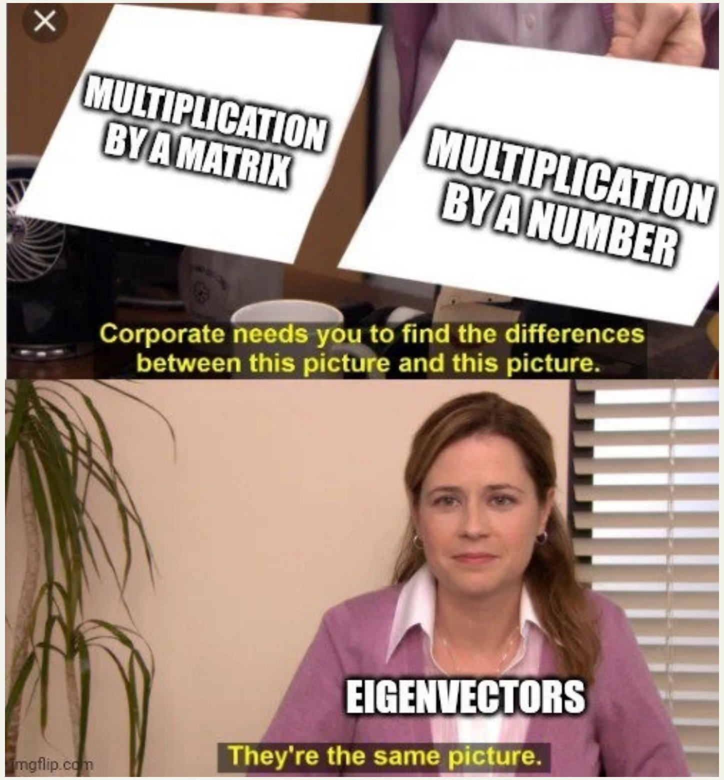
Eigenvektoren & -werte

- **Eigenvektoren**: Vektoren, die folgende Gleichung erfüllen:

$$Av = \lambda v$$

  - Lediglich Streckung/Stauchung von v um einen Faktor λ → **Eigenwert**
  - Richtung von v bleibt gleich

- Visualisierung:
  - youtube.com/watch?v=PFDu9oVAE-g&ab_channel=3Blue1Brown



i.imgur.com/cMdnYs5.jpg

Eigenvektoren & -werte

<u>Eigenwert(e)</u>:

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

2. „Nullstellen" λ bestimmen

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$
2. Polynom: $det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$

→ Nullstellen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

<u>Eigenvektor</u>: (je für Eigenwert λ_i)

1. Eigenwert λ_i einsetzen in:

$$(A - \lambda_i I) \cdot v = 0$$

2. LGS nach v lösen

→ Es entsteht eine Nullzeile!

3. $v_1 = 1$ fixieren & andere Vektoreinträge abhängig davon ermitteln

Aufgabe 1)

1) Kondition eines Eigenwertproblems

a) Finden Sie alle Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ und Eigenvektoren $v_i(\varepsilon)$ der Matrix.

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\cos(2/\varepsilon) & -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) \\ -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) & 1 - \varepsilon\cos(2/\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhalten sich $A(\varepsilon)$, $\lambda_i(\varepsilon)$, und $v_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$? Ist das Eigenwert- bzw. Eigenvektorproblem für kleine ε gut konditioniert?

Matrixnorm

- Verstärkung relativer Eingabefehler von x durch eine Matrixmultiplikation Ax
- **Spektralnorm:**

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

  - Max. mögliche Vervielfachung des Vektorbetrags

- Ohne Beweis:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

  - $\lambda_i(\blacksquare)$ hier eine Funktion!

Spezialfälle:

a. Symmetrische Matrizen:

$$\|A\|_2 = \max_{i \in [n]} |\lambda_i|$$

b. Diagonalmatrizen:

$$\|A\|_2 = \max_{i \in [n]} |A_{i,i}|$$

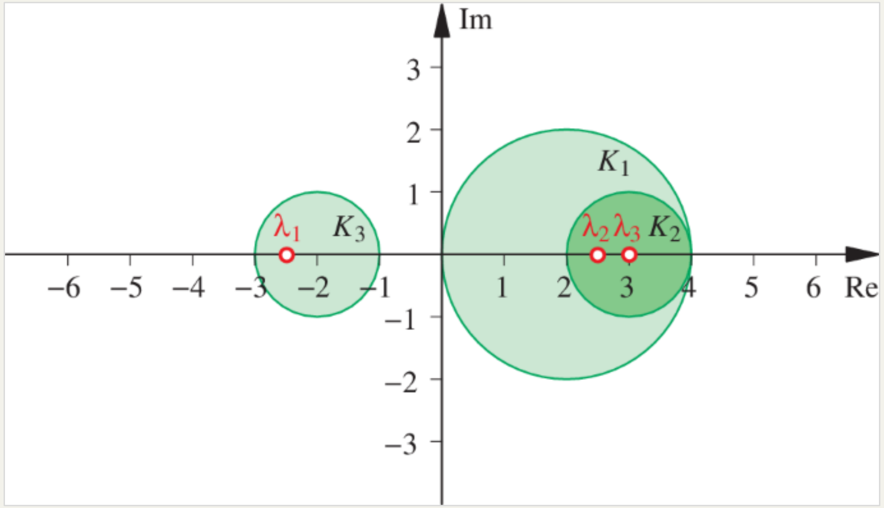
- Eigenwert der Inversen A^{-1}:

$$\lambda_i(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i(A)} \qquad (\lambda_i(A) \neq 0)$$

Satz von Gerschgorin

- Jeder Eigenwert in mind. einem **Gerschgorin-Kreis**
- Bei reellen Eigenwerten der Kreismittelpunkt ausschließlich auf der reellen Achse
- A symmetrisch $\rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

Gerschgorin-Kreise in der Komplexebene



media.springernature.com/lw685/springer-static/image/chp%3A10.1007%2F978-3-662-58358-6_6/MediaObjects/465037_1_De_6_Fig4_HTML.png

Satz von Gerschgorin

Algorithmus: (A muss symmetrisch sein!)

1. Für jede Zeile in A: Radius r & Mittelpunkt o des Gerschgorin-Kreises

   $o =$ Diagonaleintrag $A_{i,i}$

   $r =$ Summe der Einträge in Zeile i ohne $A_{i,i}$

2. Für jede Kreis: Intervall konstruieren: $[o - r,\ o + r]$
3. Alle Intervalle vereinigen

→ Untere & obere Schranke für alle Eigenwerte ($\lambda \in I_1 \cup I_2 \cup \cdots$)

Kondition einer Matrix

- Matrix A invertierbar!

a. Mithilfe der Spektralnorm:

$$cond(A) = \left| \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)} \right|$$

b. Mithilfe euklidischer Norm:

$$cond(A) = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2$$

Aufgabe 2)

2) Satz von Gerschgorin

a) Beweisen Sie den **Satz von Gerschgorin**:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Dann liegt jeder Eigenwert λ von A in mindestens einer der Kreisscheiben K_j, die durch

$$K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k\neq j}^{n} |a_{jk}| \right\}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

definiert sind.

Hinweis: Betrachten Sie die $j$te Komponente der Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$, wobei x_j der maximale Eintrag von x ist.

b) Zeichnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gerschgorin-Kreise und finden Sie eine obere Schranke für die Kondition $\kappa_2(A)$. Hinweis: Benutzen Sie die Euklidische Norm.

Rayleigh Quotient

- Eigenvektor v von Matrix A bekannt
- Direkte Berechnung des zugehörigen Eigenwertes:

$$\lambda = \frac{v^T \cdot A \cdot v}{v^T \cdot v}$$

- Herleitung:

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad v^T A v = \lambda v^T v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{v^T A v}{v^T v}$$

Aufgabe 3)

3) Rayleigh Quotient

a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenwerte λ mit Hilfe des Rayleigh Quotienten berechnet werden können:

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

b) Sei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ der kleinste bzw. größte Eigenwert einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge gelten:

$$\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad , \qquad \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Hinweis: Wegen

$$\lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_{x \neq 0} \left(\frac{1}{||x||_2} x \right)^T A \left(\frac{1}{||x||_2} x \right) = \min_{||y||_2 = 1} y^T A y$$

ist es ausreichend, folgende Zusammenhänge zu zeigen:

$$\lambda_{\min} = \min_{||x||_2 = 1} x^T A x \quad \text{and} \quad \lambda_{\max} = \max_{||x||_2 = 1} x^T A x.$$

Direct Power Iteration

- Verfahren um Eigenvektor mit betragsmäßig größtem Eigenwert anzunähern

$$x_{k+1} = \frac{A \cdot x_k}{||A \cdot x_k||}$$

  - Vektor nach jedem Schritt normalisiert (zur Stabilität)
  - **Wichtig:** Keine Konvergenz, wenn mehrere betragsmäßig größte Eigenwerte!

- Eigenwert selbst mithilfe des Rayleigh Quotienten berechnet

Shifted Power Iteration

- Verwendung eines **Shifts $\boldsymbol{\mu}$**:

$$x_{k+1} = \frac{(A - \mu \cdot I) \cdot x_k}{\|(A - \mu \cdot I) \cdot x_k\|}$$

  - Matrix manipuliert, sodass μ von den Eigenwerten von A subtrahiert
    → Dadurch andere Eigenwerte betragsmäßig am größten

- Rayleigh Quotienten anpassen:

$$\lambda = \frac{v^T \cdot (A - \mu \cdot I) \cdot v}{v^T \cdot v} + \mu$$

Inverse Power Iteration

- Konvergenz gegen Eigenvektor mit betragsm. kleinstem Eigenwert
- Matrix $B = (A - \mu \cdot I)^{-1}$

$$x_{k+1} = \frac{B \cdot x_k}{||B \cdot x_k||}$$

  - **Wichtig:** Eigenwert darf nicht 0 sein!

- Trick: Um den Mittleren von drei Eigenwerten anzunähern, verwendet man den Shift:

$$\mu = (\lambda_{min} + \lambda_{max})/2$$

Konvergenzrate

$\underline{\boldsymbol{Definition}}$: $Geschwindigkeit, mit\ der\ die\ Lösung\ angenähert\ wird$

$$q = \left| \frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_{max} - \mu} \right|, \qquad \in [0,1]$$

- λ_2 betragsmäßig zweitgrößter, λ_{max} größter Eigenwert
- q soll möglichst klein sein

<u>Konvergenzrate</u>:

- Eigenvektoren: linear $(\varepsilon_{k+1} = q \cdot \varepsilon_k)$
- Eigenwerte: quadratisch

Aufgabe 4)

4) Iterationsverfahren

a) Berechnen Sie analytisch alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Führen Sie zwei Iteration der direkten Vektoriteration (power iteration) für A

   a) ohne Shift,

   b) mit Shift $\mu = 1.5$ und

   c) mit Shift $\mu = 3.5$

   durch und berechnen Sie die zugehörige Eigenwertapproximation. Benutzen Sie dazu $x_0 = (1, 0)^T$ als Startvektor. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Iteration? Wie ist die Konvergenzrate für den jeweiligen Fall?

c) Für welchen Shift μ konvergiert die direkte Vektoriteration (power iteration) gegen den ersten bzw. zweiten Eigenwert von A? Was passiert, falls $\mu = 3$ gewählt wird?

Viel Glück bei der Klausur! 🍀

Du schaffst das! 😉

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg