Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

4. Trainingsblatt: Stückweise Interpolation

1) Hermite-ische Interpolation

Betrachten wir die Polynominterpolation, nur mit etwas Transfer. Über eine sonst unbekannte polynomielle Funktion $f(t)$ seien nur folgende Werte bekannt:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = 2 \qquad f'(1) = 4$$

a) Stellen Sie die Interpolationspolynomfunktion $p(t)$ auf, die alle obigen Werte nutzt.

b) Wie häufig ist $p(t)$ global stetig differenzierbar?

c) Wählen Sie $f'(0)$ derart, dass sich $p(t)$ aus a) nicht mehr ändert.

d) Nun sei aber $f'(0) = 0$. Überprüfen Sie, ob ihr Ergebnis mit dem Standard Hermit'schen Ansatz für 4 Punkte übereinstimmt. Hierfür seien die kubischen Basispolynome gegeben:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ H_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ H_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ H_3(t) &= -t^2 + t^3 \end{aligned}$$

e) Leiten Sie für einen allgemeinen Fall die Basispolynome her, die man bei drei Stützpunkten entsprechend zu a) hätte.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

4 个点 : Kubische

($H_0(t)$, ...)

Lösung:

a) Da wir drei Datenpunkte gegeben haben, kann das Resultat $p(t)$ maximal ein Polynom zweiten Grades sein:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad , \quad t \in [0;1]$$

Setzen wir die gegebenen Informationen ein, um Gleichungen zu erhalten:

$$\begin{aligned} p(0) &= a_0 = 1 \\ p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ p'(1) &= a_1 + 2a_2 = 4 \end{aligned}$$

Stellen wir das LGS dazu auf:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -2 \quad a_2 = 3$$

Die Funktion ist also: $p(t) = 1 - 2t + 3t^2$.

b) Fiese Frage. Lasst Euch hierbei nicht davon verwirren, dass wir nur die Ableitung an einem Punkt gegeben haben. Das Ergebnis ist ein Polynom und Polynome sind stets beliebig häufig differenzierbar.

c) Wir berechnen $p'(0)$:

$$\begin{aligned} p'(t) &= -2 + 6t \\ p'(0) &= -2 \end{aligned}$$

d) Überprüfen mit dem Hermit'schen Ansatz:

$$\begin{aligned} p(t) &= y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t) \\ &= 1 \cdot H_0(t) + 2 \cdot H_1(t) + 0 \cdot H_2(t) + 4 \cdot H_3(t) \\ &= 1 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + 2 \cdot (3t^2 - 2t^3) + 4 \cdot (-t^2 + t^3) \\ &= (1 - 3t^2 + 2t^3) + (6t^2 - 4t^3) + (-4t^2 + 4t^3) \\ &= 1 - 1t^2 + 2t^3 \end{aligned}$$

Es stimmt nicht mit $p(t)$ aus a) überein! Das liegt daran, weil der gewählte Punkt nicht auf der Funktion aus a) liegt. Wir erhalten also einen Grad mehr, der quasi »zuviel« ist.

e) Berechnen der Basispolynome (nicht mehr kubisch!) für die drei Punkte aus a):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & | & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & | & y_1' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2y_0 + 2y_1 - y_1' \\ 0 & 0 & 1 & | & y_0 - y_1 + y_1' \end{bmatrix}$$

Durch Umstellen erhalten wir dann für diesen (seltsamen) Ansatz:

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_1' \cdot H_2(t)$$

mit

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 2t + t^2 \\ H_1(t) &= 2t - t^2 \\ H_2(t) &= -t + t^2 \end{aligned}$$

4 Spline: $t_0(x) = \frac{x+2}{2}$

$t_1(x) = \frac{x}{2}$

$t_2(x) = \frac{x-2}{2}$

$t_3(x) = \frac{x-4}{2}$

2) Spline Interpolation

Gegeben seien folgende Informationen über eine sonst unbekannte Funktion $f(x)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	0	2	4	6
y_i	-3	-1	1	3	$^{13}/_{3}$
y_i'	-14	? 5	? 0	? 1	1

a) Berechnen Sie die fehlenden Ableitungen!

b) Geben Sie an, wieviele Splines definiert werden, in welchem Intervall diese jeweils gültig sind und welche Transformationsfunktionen benötigt werden.

c) Stellen Sie nun die Spline-Funktion $s(x)$ auf.

解: (a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{2}{3}y_0' \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 - \frac{2}{3}y_4' \end{pmatrix}$$

$4 + \frac{28}{3}$

$h = x_{i+1} - x_i = 2$

$-1+4+3$

$2 + \frac{14}{3}$

代入数据

$-4+1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1-(-3)-\frac{2}{3}(-14) \\ y_3 - y_1 \\ \frac{13}{3} - 1 - \frac{2}{3}\times 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & \frac{20}{3} \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{4}{3} \end{array}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4+\frac{28}{3} \\ 4 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

20

6

0

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung…

5 0 1

Lösung:

a)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 10/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & | & 20 \\ 1 & 4 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & | & 20 \\ 0 & 15 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 56 & | & 56 \end{bmatrix}$$

$$y_1' = 5 \quad y_2' = 0 \quad y_3' = 1$$

b) Die Spline-Interpolation formt vier einzelne Splines, alle mit einer Intervallbreite von zwei. Die Transformationsfunktionen (Index jeweils identisch zum dazugehörigem Spline):

$$t_0(x) = \frac{x+2}{2} \quad x \in [-2; 0] \quad t_0(x) \in [0; 1]$$

$$t_1(x) = \frac{x}{2} \quad x \in [0; 2] \quad t_1(x) \in [0; 1]$$

$$t_2(x) = \frac{x-2}{2} \quad x \in [2; 4] \quad t_2(x) \in [0; 1]$$

$$t_3(x) = \frac{x-4}{2} \quad x \in [4; 6] \quad t_3(x) \in [0; 1]$$

c)

$$s(x) = \begin{Bmatrix} p_0(t_0(x)) & x \in [-2; 0] & t_0(x) = \frac{x+2}{2} \\ p_1(t_1(x)) & x \in [0; 2] & t_1(x) = \frac{x}{2} \\ p_2(t_2(x)) & x \in [2; 4] & t_2(x) = \frac{x-2}{2} \\ p_3(t_3(x)) & x \in [4; 6] & t_2(x) = \frac{x-4}{2} \end{Bmatrix}$$

$h=2$

mit

$\times 2$

$$p_0(t_0(x)) = (-3) \cdot H_0(t_0(x)) + (-1) \cdot H_1(t_0(x)) + (-28) \cdot H_2(t_0(x)) + 10 \cdot H_3(t_0(x))$$

$$p_1(t_1(x)) = (-1) \cdot H_0(t_1(x)) + 1 \cdot H_1(t_1(x)) + 10 \cdot H_2(t_1(x)) + 0 \cdot H_3(t_1(x))$$

$$p_2(t_2(x)) = 1 \cdot H_0(t_2(x)) + 3 \cdot H_1(t_2(x)) + 0 \cdot H_2(t_2(x)) + 2 \cdot H_3(t_2(x))$$

$$p_3(t_3(x)) = 3 \cdot H_0(t_3(x)) + \frac{13}{3} \cdot H_1(t_3(x)) + 2 \cdot H_2(t_3(x)) + 2 \cdot H_3(t_3(x))$$