Chair of Scientific Computing
Computer Science
Technische Universität München

Ecorrection
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Numerisches Programmieren

Klausur: IN0019 / Endterm **Datum:** Freitag, 3. März 2023
Prüfer: Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz **Uhrzeit:** 14:15 – 15:45

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6
I						
II						

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **16 Seiten** mit insgesamt **6 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Klausur beträgt 47 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN-A4 Blatt
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Auch Textaufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von ____________ bis ____________ / Vorzeitige Abgabe um ____________

Aufgabe 1 **Maschinenzahlen, Kondition & Stabilität (8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x-a}{b}$ mit den Werten $a = 1.5_{(10)} = 0.110_{(2)} \cdot 2^1$ und $b = 0.25_{(10)} = 0.100_{(2)} \cdot 2^{-1}$. Wir betrachten die Gleitkommazahlen $\mathbb{F}_{2,3}$, d.h. Zahlen der Form

$$(0, m_0 m_1 m_2 \cdot 2^E)_{(2)}.$$

Dabei gilt:

- Die Basis der Darstellung ist $B = 2$.
- Die Mantisse M zur Basis B hat $t = 3$ Stellen.
- Der Exponent E liegt in beliebiger Darstellung vor.
- M muss korrekt gerundet sein. Im uneindeutigen Fall wird aufgerundet.
- Die Eindeutigkeit der Darstellung wird durch die implizite 0 vor der Mantisse sowie der Forderung $m_0 \neq 0$ sichergestellt.

0 1 2

a) Stellen Sie die Zahl $x = \frac{53}{32}$ im $\mathbb{F}_{2,3}$-System dar. *Hinweis*: $\frac{53}{32} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$.

$$x = \frac{53}{32}_{(10)} = 1,10101_{(2)}.$$

Wir runden nach der dritten Stelle und normalisieren:

$$\hat{x} = 1.11_{(2)} \cdot 2^0 = 0.111_{(2)} \cdot 2^1$$

1 Punkt für korrekte Rundung auf drei Stellen, 1 Punkt für die korrekte Darstellung mit Normierung etc.

0 1 2

b)* Werten Sie f an der Stelle $\hat{x}$ aus a) aus. Hier ist $\hat{x}$ die korrekt gerundete Darstellung von $x = \frac{53}{32}$ als Gleitkommazahl im System $\mathbb{F}_{2,3}$. Rechnen Sie im $\mathbb{F}_{2,3}$-System unter Berücksichtigung von Rundungsfehlern bei jedem Rechenschritt.
Wenn Sie die letzte Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie die Zahl $y = \frac{43}{32}$, die zu $\hat{y} = 0.101_{(2)} \cdot 2^1$ gerundet wurde.

Mit der Lösung aus a):

$$\hat{x} - a = 0.111_{(2)} \cdot 2^1 - 0.110_{(2)} \cdot 2^1 = 0.001_{(2)} \cdot 2^1 = 0.100_{(2)} \cdot 2^{-1}$$

Durch $0.25_{(10)}$ teilen bedeutet den Exponenten um zwei zu erhöhen.

$$0.100_{(2)} \cdot 2^{-1} \div 0.100_{(2)} \cdot 2^{-1} = 0.100_{(2)} \cdot 2^1$$

Damit gilt: $f(\hat{x}) = 0.100_{(2)} \cdot 2^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 1.$
Mit der angegebenen Zahl:

$$\hat{y} - a = 0.101_{(2)} \cdot 2^1 - 0.110_{(2)} \cdot 2^1 = -0.100_{(2)} \cdot 2^{-1}$$

Damit ist: $f(\hat{y}) = -0.100_{(2)} \cdot 2^1 = -1.$
1 Punkt für das Zwischenergebnis der Subtraktion und 1 Punkt für das Endergebnis. Das Ergebnis muss nicht als Dezimalzahl angegeben werden, die Binärdarstellung ist ausreichend.

c) Werten Sie $f(x)$ in exakter Arithmetik aus. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus b). Berechnen Sie den relativen Fehler. Wenn Sie in b) mit $\hat{y}$ gerechnet haben, dann vergleichen Sie hier mit der exakten Auswertung von $f(y)$.

Exakte Lösung:

$$f(x) = \left(\frac{53}{32} - 1.5\right) \div \frac{1}{4} = \left(\frac{53}{32} - \frac{48}{32}\right) \div \frac{1}{4} = \frac{5}{32} \div \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Vergleich mit der Lösung aus b), wenn mit dem Ergebnis von a) gerechnet wurde:

$$err_{rel} = \frac{rd(f(x)) - f(x)}{f(x)} = \frac{1 - \frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Bei Rechnung mit y:
Exakte Lösung:

$$f(y) = \left(\frac{43}{32} - 1.5\right) \div \frac{1}{4} = \left(\frac{43}{32} - \frac{48}{32}\right) \div \frac{1}{4} = -\frac{5}{32} \div \frac{1}{4} = -\frac{5}{8}$$

Vergleich mit der Lösung aus b), wenn mit der angegebenen Zahl gerechnet wurde:

$$err_{rel} = \frac{rd(f(y)) - f(y)}{f(y)} = \frac{-1 - (-\frac{5}{8})}{-\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

1 Punkt für das korrekte Auswerten von f, 1 Punkt für die korrekte Formel, bei Rechenfehler Folgefehler

d)* Im vorherigen Teil ergab sich ein nicht unerheblicher Fehler in der Ausgabe. Nun soll die Ursache dieses Fehlers analysiert werden. Dazu wird die Funktion $f(x) = \frac{x-a}{b}$ mit allgemeinen a, b und x betrachtet. Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $cond_f(x) = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$ von $f(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Geben Sie eine allgemein gültige Formel für die Konditionszahl in Abhängigkeit von x an.

$$f'(x) = \frac{1}{b}$$

$$cond_f(x) = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{\frac{x}{b}}{\frac{x-a}{b}}\right| = \left|\frac{x}{x-a}\right|$$

1 Punkt für das richtige Ergebnis.

0
1

e)* Untersuchen Sie die Stabilität der Auswertung von $f(x)$. Bestimmen Sie dazu den Betrag des relativen Fehlers, der durch die Gleitkomma-Arithmetik für exakte Eingangswerte hervorgerufen wird. Die Maschinengenauigkeit ε_M muss hierzu nicht explizit angegeben werden.

$$rd(f(x)) = \frac{x-a}{b}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \doteq f(x)(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$err_{rel} = \left|\frac{rd(f(x)) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq |(\varepsilon_1+\varepsilon_2)| \leq 2\varepsilon_M = \frac{1}{4}$$

1 Punkt für das richtige Ergebnis. $2\varepsilon_M$ reicht.

Aufgabe 2 Multiple-Choice Grundwissen (6 Punkte)

Bei den folgenden Fragen ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Für ein korrekt gesetztes Kreuz erhalten Sie einen Punkt. Wenn Sie ein falsches Kreuz setzen oder mehrere Optionen ankreuzen, erhalten Sie keine Punkte.

Kreuzen Sie richtige Antworten an ☒

Kreuze können durch vollständiges Ausfüllen gestrichen werden ■

Gestrichene Antworten können durch nebenstehende Markierung erneut angekreuzt werden ✕■

a) Welches Interpolationsverfahren ist besonders geeignet, wenn Sie zusätzlich zu den Interpolationspunkten auch Informationen über die Ableitung an diesen Stellen besitzen?

- ☒ Hermite-Interpolation
- ☐ Das Verfahren von Aitken-Neville
- ☐ Interpolation mit Lagrange-Polynomen
- ☐ kubische Splines

b)* Wählen Sie die Quadraturregel aus, die Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert.

- ☐ Keplersche Fassregel
- ☐ Quadratur nach Archimedes mit zwei Leveln
- ☒ Gauß-Quadratur mit 3 Stützstellen
- ☐ Trapezregel

c)* Welche der folgenden Methoden ist *nicht* geeignet um ein lineares Gleichungssystem zu lösen?

- ☐ Methode des steilsten Abstiegs
- ☒ Vektor-Iteration
- ☐ Gauß-Seidel-Verfahren
- ☐ LR-Zerlegung

d)* Welche Bedingung, muss die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllen, damit wir die Cholesky-Zerlegung zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ verwenden können?

- ☐ $\kappa(A) < n$
- ☒ symmetrisch, positv definit
- ☐ diagonal dominant
- ☐ Für alle Eigenwerte λ von A gilt: $|\lambda| < 1$.

e)* Welches Verfahren ist besonders gut geeignet um steife Differentialgleichungen zu lösen?

- [ ] Mittelpunktsregel
- [x] Implizites Euler-Verfahren
- [ ] Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4
- [ ] Explizites Euler-Verfahren

f)* Was ist das Ergebnis der *QR* Iteration, wenn man dieses Verfahren auf eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ anwendet?

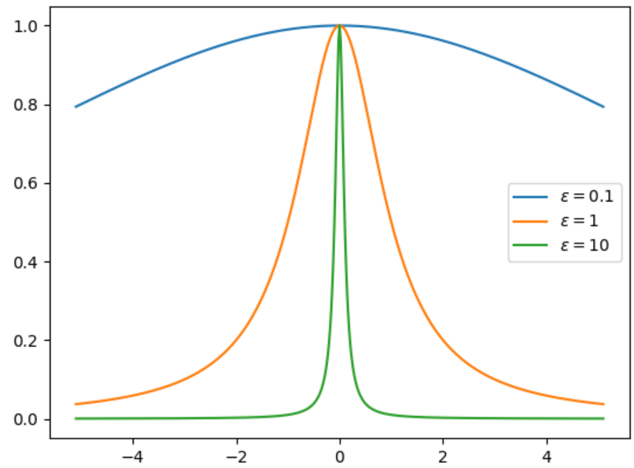
- [ ] Der größte Eigenwert von A *und* ein dazugehörender Eigenvektor
- [ ] Der größte Eigenwert von A
- [x] Alle Eigenwerte von A
- [ ] Der betragsmäßig größte Eigenwert von A

Aufgabe 3 Interpolation mit radialen Basisfunktionen (7 Punkte)

Als Alternative zur Polynominterpolation wollen wir uns hier Interpolation mit radialen Basisfunktionen anschauen. Wir definieren die Basisfunktionen

$$f_s(x) := \frac{1}{1 + \epsilon^2 (x - s)^2}. \tag{3.1}$$

Die Funktionen f_s haben folgende Eigenschaften: $f_s(s) = 1$, der Parameter ϵ variiert die *Breite* der Funktion. Die folgende Grafik zeigt die Funktion f_0 für drei verschiedene Werte von ϵ.



a) Gegeben seien die Interpolationspunkte $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (2, 3)$. Die Interpolationsfunktion hat die Form $g(x) = \alpha_{-1} f_{-1}(x) + \alpha_0 f_0(x) + \alpha_2 f_2(x)$. Stellen Sie zuerst die Basisfunktionen f_{-1}, f_0, f_2 auf. Verwenden Sie $\epsilon = 1$. Stellen Sie dann das lineare Gleichungssystem auf, mit dem Sie die Koeffizienten α berechnen können. Sie müssen die Basisfunktionen hier nicht auswerten. Geben Sie das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise an.

Hinweis: Sie müssen das Gleichungssystem nicht lösen!

0 1 2 3

Die Basisfunktionen sind:

$$f_{-1}(x) = \frac{1}{1 + (x+1)^2}, \quad f_0(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2}, \tag{3.2}$$

Die Interpolationsbedingungen besagen:

$$\begin{aligned} g(-1) &= \alpha_{-1} f_{-1}(-1) + \alpha_0 f_0(-1) + \alpha_2 f_2(-1) = 0 \\ g(0) &= \alpha_{-1} f_{-1}(0) + \alpha_0 f_0(0) + \alpha_2 f_2(0) = 1 \\ g(2) &= \alpha_{-1} f_{-1}(2) + \alpha_0 f_0(2) + \alpha_2 f_2(2) = 3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise

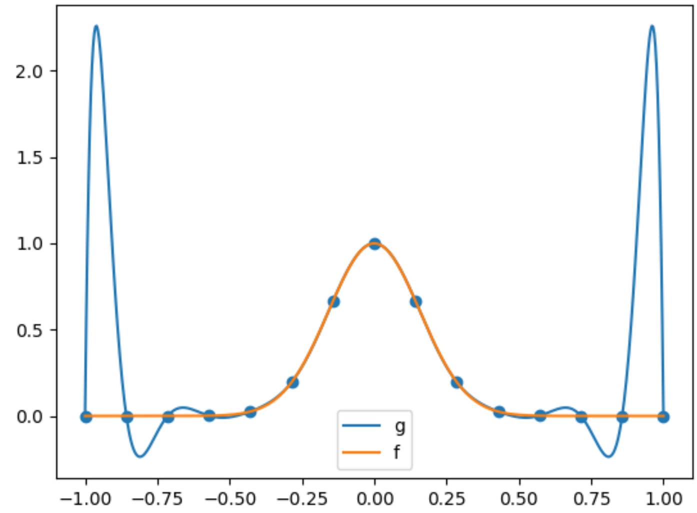
$$\begin{pmatrix} f_{-1}(-1) & f_0(-1) & f_2(-1) \\ f_{-1}(0) & f_0(0) & f_2(0) \\ f_{-1}(2) & f_0(2) & f_2(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

1 Punkt auf die richtigen Interpolationfunktionen, 2 Punkte auf das richtige LGS.

0
1
2

b)* Der Runge-Effekt ist ein typisches Problem, das bei der Interpolation mit Polynomen auftreten kann. Erklären Sie in zwei Sätzen den Runge-Effekt und wann dieser auftritt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Der Runge-Effekt tritt bei der Polynominterpolation mit äquidistanten Stützstellen bei großer Zahl an Stützstellen auf. Der Runge-Effekt beschreibt das Phänomen, dass die Interpolationsfunktion an den Rändern des Interpolationsbereiches sehr große bzw. sehr kleine Werte annimmt, obwohl die zu interpolierende Funktion beschränkt bleibt.



1 Punkt für Erklärung: Oszillation am Rand. 1 Punkt für korrekte Zeichnung.

0
1

c)* Nennen Sie eine Methode aus Vorlesung bzw. Übung, mit der der Runge-Effekt umgangen wird.

- Nicht-äquidistante Stützstellen, z.B. Chebyshev
- Stückweise Interpolation, z.B. lineare Splines

1 Punkt für korrekte Methode. Nennen reicht, keine weitere Erklärung nötig.

0
1

d)* Schätzen Sie ein, ob die Interpolation mit radialen Basisfunktionen anfällig für den Runge-Effekt ist. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Der Runge-Effekt tritt auf, weil die Lagrange-Polynome zwischen den Stützstellen beliebig groß werden können. Die radialen Basisfunktionen f_s sind unabhängig von der Wahl der Stützstellen immer beschränkt. Daher kann ein ähnliches Phänomen, wie der Runge-Effekt bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen nicht auftreten.
1 Punkt für korrekte Einschätzung, korrekte Erklärung ist nicht nötig, Intuition reicht hier.

Aufgabe 4 Programmieraufgabe: Quadratur (7 Punkte)

In dieser Programmieraufgabe soll es darum gehen, mit numerischen Methoden Integrale zu berechnen. Gegeben sei eine Implementierung einer mathematischen Funktion f:

```
public static double f(double x) {
    // gibt die Funktionsauswertung der Funktion f an der Stelle x zurück.
}
```

Im Folgenden sollen Sie verschiedene Quadraturverfahren implementieren, die eine Schätzung für das Integral $\int_a^b f(x)dx$ berechnen.

a) Implementieren Sie eine Funktion, die die Trapezsumme auswertet. Die Parameter a und b geben dabei das linke bzw. das rechte Ende des Integrationsbereiches an. Der Parameter n beschreibt die Anzahl der Intervalle.

0 1 2 3

```
public double trapezSumme(double a, double b, int n) {
    // bestimme die Intervalbreite
    double h = (b - a) / n;
    // werte am linken Rand aus
    double result = 0.5 * f(a);
    // iteriere über alle Quadraturpunkte innerhalb des Integrationsbereiches
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        // berechne den Integrationspunkt
        double s = a + i * h;
        // werte f aus und addiere zum Ergebnis
        result += f(s);
    }
    // werte am rechten Rand aus
    result += 0.5 * f(b);
    // skaliere mit der Intervalbreite
    return h * result;
```

1 Punkt für korrekte Formel $h/2 \cdot (f(a) + 2\sum f(x_i) + \cdot f(b))$
1 Punkt für Auswertung an den korrekten Stellen ($x_i = a + i \cdot h$)
1 Punkt für korrekte Anzahl an Intervallen (n Intervalle $\Rightarrow$ $n + 1$ Funktionsauswertungen).

```
}
```

0 1 2 3 4

b)* Implementieren Sie eine Funktion, die die Simpsonsumme auswertet. Die Parameter a und b geben dabei das linke bzw. das rechte Ende des Integrationsbereiches an. Der Parameter n beschreibt die Anzahl der Intervalle. `public double simpsonSumme(double a, double b, int n) {`

```
    // bestimme die Intervalbreite
    double h = (b - a) / n;
    // werte am linken Rand aus
    double result = f(a);
    // iteriere über alle Quadraturpunkte innerhalb des Integrationsbereiches
    for (int i = 1; i < 2*n; i++) {
        // berechne den Integrationspunkt
        double s = a + i * h / 2;
        // skaliere Punkte mit geraden Indizes mit 2
        if (i % 2 == 0) {
            result += 2 * f(s);
        // skaliere Punkte mit ungeraden Indizes mit 4
        } else {
            result += 4 * f(s);
        }
    }
    // werte am rechten Rand aus
    result += f(b);
    // skaliere mit der Intervalbreite / 6
    return h / 6.0 * result;
```

2 Punkte für korrekte Formel $h/6 \cdot (f(a) + (4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + ...) + \cdot f(b)$
1 Punkt für Auswertung an den korrekten Stellen ($x_i = a + i \cdot h/2$)
1 Punkt für korrekte Anzahl an Intervallen (n Intervalle $\Rightarrow 2n + 1$ Funktionsauswertungen)

```
}
```

Aufgabe 5 Nichtlineare Gleichungssysteme (8 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$p(x) = x^3 + 2.$$

Berechnen Sie einen Newton Schritt um eine Nullstelle von p zu finden. Starten Sie mit $x_0 = 1$.

Zuerst berechnen wir die Ableitung: $p'(x) = 3x$.
Die Update-Vorschrift der Newton-Iteration lautet also $x_{n+1} = x_n - p(x_n)/p'(x_n) = x_n + (x_n^3 + 2)/(x_n^2)$.
1 Punkt für die korrekte Update-Vorschrift

$$x_1 = x_0 - p(x_0)/p'(x_0) = 1 - p(1)/p'(1) = 1 - (1^3 + 2)/(3 \cdot 1^2) = 0$$

1 Punkt für die korrekte Berechnung von x_1. Wer falsch ableitet, kriegt einen Folgefehler. Wer die Update-Formel nicht explizit angibt, aber immer korrekt rechnet, kriegt volle Punktzahl.

b) Welches Problem tritt auf, wenn wir nun einen zweiten Newton-Schritt ausführen wollen?

Es gilt $x_1 = 0$ und $p'(0) = 0$.
Wir müssten also im nächsten Schritt durch null teilen, was nicht möglich ist.
1 Punkt für "Teilen durch null". Wer falsch abgeleitet hat, kann die Aufgabe nicht richtig lösen.

c)* Wir betrachten das implizite Eulerverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die Update-Vorschrift lautet: $x_{k+1} = x_k + f(x_{k+1})$.
Stellen Sie das nichtlineare Gleichungssystem in der Form $G(y) = 0$ auf, das gelöst werden muss, um x_{k+1} zu berechnen.

Wir beginnen mit der Update-Vorschrift: $x_{k+1} = x_k + f(x_{k+1})$.
Wir bringen alle Terme auf die linke Seite: $x_{k+1} - x_k - f(x_{k+1}) = 0$.
Wir wollen x_{k+1} berechnen, also lösen wir $G(y) := y - x_k - f(y) = 0$.
1 Punkt auf das Umstellen, 1 Punkt für das Aufstellen von G

0
1
2
3

d) Bestimmen Sie die Update-Vorschrift um mit dem Newton-Verfahren x_{k+1} zu berechnen. *Hinweis*: Wir suchen eine Iteration y_l, die für $l \to \infty$ gegen die Lösung von $G(y) = 0$ aus der Aufgabe c) konvergiert.

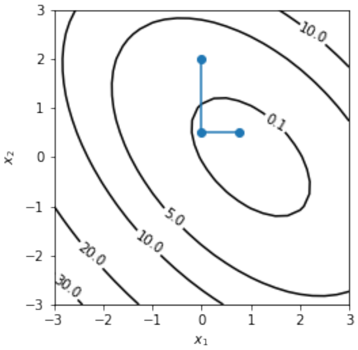
Wir lösen das nichtlineare Gleichungssystem $G(y) = y - x_k - f(y) = 0$ mit dem Newton-Verfahren.
Wir starten mit $y_0 = x_k$ und berechnen $y_{l+1} = y_l - G(y_l)/G'(y_l)$.
1 Punkt für $y_{l+1} = \dots$, der Startwert ist für die Bewertung irrelevant.
Die Ableitung lautet $G'(y) = 1 - f'(y)$, und damit lautet die Update-Vorschrift für das Newton-Verfahren:
$y_{l+1} = y_l - \frac{y_l - x_k - f(y_l)}{1 - f'(y_l)}$.
1 Punkt für die korrekte Ableitung von G.
Wenn das Newton-Verfahren konvergiert ist . d.h. $|G(y^*)| < \epsilon$, setzen wir $x_{k+1} = y^*$
1 Punkt für das korrekte Setzen von x_{k+1}

Aufgabe 6 Iterative Verfahren (11 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei Minimierungsverfahren: das Verfahren des steilsten Abstiegs (steepest descent) und die Methode der konjugierten Gradienten (conjugate gradient). Im Folgenden sei A eine symmetrische positiv definite Matrix, d.h. $A = A^T$ und $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$. In diesem Fall ist die Lösung des linearen Systems $Ax = b$ äquivalent zum Minimierung der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x + c$ mit einem beliebigen konstanten Skalar $c \in \mathbb{R}$.

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und die rechte Seite $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Führen Sie zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs zur Lösung des Problems $Ax = b$ durch und zeichnen Sie den Optimierungspfad in der folgenden Abbbildung ein. Wählen Sie $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Startvektor.



$$r^{(1)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \alpha^{(1)} = \frac{r^{(0)^T} r^{(0)}}{r^{(0)^T} A r^{(0)}} = 0.5 \qquad x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha^{(0)} r^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

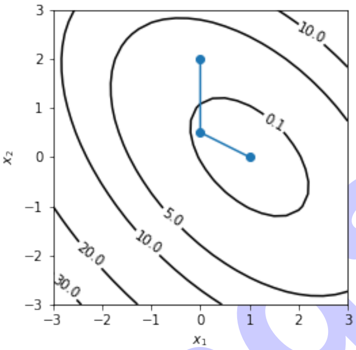
$$r^{(2)} = b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha^{(2)} = \frac{r^{(1)^T} r^{(1)}}{r^{(1)^T} A r^{(1)}} = 0.5 \qquad x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} r^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Je 1 Punkt auf korrektes $r^{(1)}, \alpha^{(1)}, x^{(1)}, r^{(2)}, \alpha^{(2)}, x^{(2)}$. 1 Punkt für Zeichnung b)* Berechnen Sie die analytische Lösung x^* des linearen Systems $Ax = b$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 Punkt für Berechnung, 1 Punkt für den richtigen Wert.

c) Tragen Sie die ersten beiden Schritte des CG-Verfahrens in die Graphik ein. *Hinweis*: Sie müssen die Schritte nicht berechnen sondern können Lösungen aus den vorherigen Aufgaben nutzen.



Der erste Schritt des CG-Verfahrens ist identisch mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs aus a). Bei einer 2×2 Matrix findet das CG Verfahren die Lösung in zwei Schritten, der zweite Schritt geht also direkt zu x^* aus b).

1 Punkt für jeden korrekt eingetragenen Schritt in der Graphik. Erklärung ist nicht nötig.

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.

Lösungsvorschlag

Korrekturanmerkungen