Numerisches Programmieren

Übung #10

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Differentialgleichungen #2

Aufgabe 1)

1) Begriffe

Was versteht man unter den folgenden Begriffen:

a) lokaler Diskretisierungsfehler,

b) globaler Diskretisierungsfehler,

c) Konvergenz,

d) Konsistenz,

e) Stabilität,

f) Steifheit?

Machen Sie sich insbesondere den Unterschied zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler klar. Nutzen Sie hierfür eine Skizze!

Diskretisierungsfehler

Lokaler Diskretisierungsfehler

- Fehler von y_{k+1} durch einen **einzelnen Zeitschritt** bei einem Schrittverfahren
- (Annahme ursprünglicher Wert y_k korrekt)

$$l(\delta t) \coloneqq |y_{k+1} - y(t_{k+1})|, \qquad y_k = y(t_k)$$

Globaler Diskretisierungsfehler

- Fehler von y_n zur eigentlichen Lösung $y(t_n)$ mit Anfangswert y_0

$$e(\delta t) \coloneqq |y_n - y(t_n)|$$

- Gibt an wie gut das Verfahren am Ende ist

- Globaler Diskretisierungsfehler relevanter als lokaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz vs. Konvergenz

Konsistenz

- Schrittverfahren **konsistent** wenn **lokaler** Diskretisierungsfehler für kleine Schrittweiten δt gegen 0

$$\lim_{\delta t \to 0} l(\delta t) = 0$$

Konvergenz

- Schrittverfahren **konvergent** wenn **globaler** Diskretisierungsfehler für kleine Schrittweiten δt gegen 0

$$\lim_{\delta t \to 0, n \to \infty} e(\delta t, n) = 0$$

- Konvergenz impliziert Konsistenz, aber nicht andersrum!

Stabilität vs. Steifheit

Stabilität

- Verfahren **stabil**, wenn sich kleine lokale Fehler nur zu kleinen globalen Fehlern aufsummieren

- Konsistenz + Stabilität ↔ Konvergenz

Steifheit

- Differentialgleichung die konsistent & konvergent ist, jedoch **nur für sehr kleine δt**

- Zu kleine δt jedoch unpraktikabel
  → Steifheit als **Problemeigenschaft**

Implizites Euler-Verfahren

Ansatz: Steigung im nächsten Schritt antizipieren

→ Bessere Stabilität

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow 0 = y_k + \delta t \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) - y_{k+1}$$

→ Daraus wird ein Nullstellen-Problem

Beispiel: $t_0 = 0;\ y_0 = -1;\ \delta t = 1;\ y(t) < 0$

- $f(t_k, y_k) = 2 \cdot t_k \cdot y_k^2$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_1, y_1) \\ \Leftrightarrow 0 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_1, y_1) - y_1 \\ \Leftrightarrow 0 &= -1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot y_1^2 - y_1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2y_1^2 - y_1 - 1 \end{aligned}$$

→ Lösungen $y_{1,1} = 1$ und $y_{1,2} = -\frac{1}{2}$

→ Wegen $y(t) < 0$ muss $\boldsymbol{y_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ gelten

Aufgabe 2)

2) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -12(y(t))^2 \qquad \forall\, t \geq 1, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 1$ gilt. Gesucht ist eine Näherungslösung $y_1 \approx y(t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1.5$.

a) Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen und berechnen Sie die exakte Lösung $y(1.5)$!

b) Berechnen Sie y_1 mit Hilfe des expliziten Eulers.

c) Wenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

zur Berechnung von y_1 an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Aufgabe 3)

3) Quadratur und AWP-Lösung

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal die Analogie von Quadratur und numerischer Lösung von Anfangswertproblemen (AWP) verdeutlichen. Wie in der Vorlesung definieren wir ein AWP durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (1) und einen Anfangswert (2)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Ziel ist die Approximation y_i der zugehörigen Lösungsfunktion $y(t_i)$ zu bestimmten Zeitpunkten t_i. Wenn wir **Ein**schrittverfahren verwenden, interessiert uns immer ein Teilintervall $[t_k; t_{k+1}]$, um aus **einem** alten Wert y_k den neuen y_{k+1} zu berechnen. Dabei können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzen, der uns folgenden Zusammenhang liefert:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)\ dt \overset{(1)}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\ dt\ . \tag{3}$$

Aufgabe 3)

Um nun approximierte Werte y_k und y_{k+1} auf der linken Seite von (3) zu erhalten, integriert man die rechte Seite numerisch.

a) Benutzen Sie die im Folgenden definierte »dumme Rechtecksregel«, um aus (3) das explizite Euler-Verfahren herzuleiten!
Die »dumme Rechtecksregel« arbeitet wie die normale Rechtecksregel, nur wird die Funktion am linken Rand des Intervalls ausgewertet und nicht in der Mitte:

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \approx \quad (b-a)\cdot f(a)\ .$$

b) Benutzen Sie die Trapezregel sowie einen zusätzlichen Approximationsschritt, um aus (3) das Verfahren von Heun herzuleiten!

Mehrschrittverfahren

- Verwendung der approximierten Werte aus <u>mehreren</u> früheren Schritten

- **Mittelpunktsregel:**

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k)$$

  - Mehrere Startwerte notwendig (durch Einschrittverfahren wie z.B. dem expliziten Euler berechenbar)
  - <u>Problem</u>: Ein konsistentes, aber nicht stabiles Verfahren → Nicht konvergent

Aufgabe 4)

Damit ein Mehrschrittverfahren konvergiert, ist zusätzlich zur Konsistenz nun auch eine Stabilitätsbedingung notwendig. Wir wollen in dieser Aufgabe an der MPR beobachten, was passiert, wenn diese Stabilität verletzt wird.

Dazu betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Zu Beginn des Verfahrens liegt nur der Anfangswert y_0 vor. Somit benötigen wir noch einen weiteren Wert y_1, bevor die Mittelpunktsregel gestartet werden kann. Typischerweise benutzt man zur Erzeugung dieses Wertes einfache Einschrittverfahren. Im Folgenden wollen wir daher y_1 mit Hilfe eines Schrittes des expliziten Euler-Verfahrens berechnen.

a) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs (6)!

b) Wenden Sie die Mittelpunktsregel für $t \in [0; 6]$, $N = 3$ und $\delta t = 2$ auf das AWP (6) an! Was stellen Sie im Vergleich mit der analytischen Lösung fest?

c) Berechnen Sie nun die Ergebnisse mit halber Schrittweite ($N = 6$ und $\delta t = 1$) und vergleichen Sie sie wieder mit der analytischen Lösung!

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg