Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Sebastian Wolf
Shuo Sun
Hayden Liu Weng

SoSe 2023

# Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 4. Übungsblatt: Stückweise Interpolation

## 1) Stückweise Hermite-Interpolation

Ziel der Interpolation nach Hermite ist es, eine Funktion $p(x)$ zu erhalten, die überall stetig differenzierbar ist ($p \in \mathcal{C}^1$ = keine Knicke). Um dies zu erreichen, müssen zusätzlich zu Stützpunkten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ auch noch die Werte der ersten Ableitung $y'_0, \ldots, y'_n$ an den Stützstellen vorgegeben werden. Damit ist es möglich, für $p(x)$ auf jedem Teilintervall $[x_i; x_{i+1}],\ i = 0, \ldots, n-1$, ein kubisches Polynom zu erzeugen und diese Einzeldarstellungen stetig differenzierbar an den $x_i$ zu »verkleben«.

a) Betrachten Sie den einfachen Fall nur eines Teilintervalls mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zusätzlich zu den Funktionswerten $y_0, y_1$ seien auch die ersten Ableitungen $y'_0, y'_1$ bei $x_0$ und $x_1$ gegeben.
Bestimmen Sie das kubische Polynom $p(x)$, das durch die Vorgabe dieser Werte

$$\begin{aligned} p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) &= y_1 \\ p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_1) &= y'_1 \end{aligned}$$

festgelegt ist! Nützen Sie hierfür den allgemeinen Ansatz für kubische Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

Bestimmen Sie anschließend mittels Koeffizientenvergleich die kubischen Basispolynome $H_0, \ldots, H_3$ des Hermite-Ansatzes

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y'_0 \cdot H_2(t) + y'_1 \cdot H_3(t), \quad t \in [0; 1] = [x_0; x_1].$$

b) Um die stückweise Hermite-Interpolation durchführen zu können, muss der Spezialfall $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ von Teilaufgabe a) auf ein beliebiges Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ übertragen werden. Geben Sie dazu zuerst die passenden vier Bedingungen für das lokale kubische Polynom an!
Überlegen Sie dann, wie mit Hilfe einer Transformationsfunktion $t_i(x)$ sowie der bereits in a) berechneten Basispolynome $H_0(t)$ bis $H_3(t)$ eine passende Interpolationsfunktion $p_i(t_i(x))$ auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ konstruiert werden kann! Insgesamt gilt dann:

$$p(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} = p_i(t_i(x)).$$

**Lösung:**

a) Mit den Interpolationsbedingungen (1)

$$p(x_0) \;=\; y_0, \quad p(x_1) \;=\; y_1, \quad p'(x_0) = y_0', \quad p'(x_1) \;=\; y_1'$$

sowie dem allgemeinen Ansatz für kubische Polynome

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in [0;1] = [x_0; x_1]$$

bzw. dessen Ableitung

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2, \quad t \in [0;1] = [x_0; x_1]$$

ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
p(t=0) & = & a_0 & & & & & & & \stackrel{!}{=} & y_0 \\
p(t=1) & = & a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & \stackrel{!}{=} & y_1 \\
p'(t=0) & = & & & a_1 & & & & & \stackrel{!}{=} & y_0' \\
p'(t=1) & = & & & a_1 & + & 2a_2 & + & 3a_3 & \stackrel{!}{=} & y_1'
\end{array}$$

Nach etwas Umsortieren erhalten wir in Matrix-Vektor-Notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_0' \\ y_0 \end{pmatrix}$$

und Umformen auf Zeilenstufenform liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -y_1' + 3y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \end{array}\right).$$

Mit Rückwärtssubstitution ergibt sich somit als Lösung

$$\begin{array}{rcl}
a_0 & = & y_0 \\
a_1 & = & y_0' \\
a_2 & = & -y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0 \\
a_3 & = & y_1 - (-y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0) - y_0' - y_0 \\
 & = & 2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1'
\end{array}$$

Damit erhalten wir das kubische Polynom

$$p(t) = y_0 + y_0' t + (-y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0)t^2 + (2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1')t^3$$

bzw. sortiert nach $y_0$, $y_1$, $y_0'$ und $y_1'$:

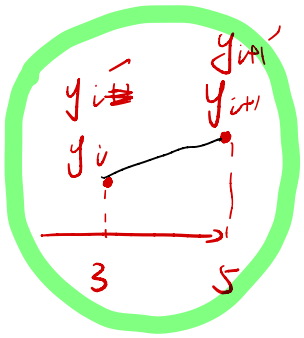
$$p(t) = y_0 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + y_1 \cdot (3t^2 - 2t^3) + y_0' \cdot (t - 2t^2 + t^3) + y_1' \cdot (-t^2 + t^3).$$

Mittels Koeffizientenvergleich bzgl. den Variablen $y_0$, $y_1$, $y_0'$ und $y_1'$ erhalten wir schließlich die kubischen Basispolynome $H_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, des Hermite-Ansatzes

$$p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t).$$

Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ H_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ H_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ H_3(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned}$$



b) Die 4 Bedingungen für das Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ lauten

$$\begin{aligned} p(x_i) &= y_i, \quad p(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ p'(x_i) &= y'_i, \quad p'(x_{i+1}) = y'_{i+1}. \end{aligned}$$

Um in $[x_i, x_{i+1}]$ die Basispolynome $H_0(t)$ bis $H_3(t)$, $t \in [0;1]$, nützen zu können, müssen wir unsere Variable $x$ vorher noch mit der Funktion $t_i(x)$ auf das Intervall $[0;1]$ transformieren. Das erreichen wir mit

$$t_i(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i} \in [0;1]$$

Damit ist die meiste Arbeit getan, es muss lediglich noch ein Detail beachtet werden: Wenn wir die transformierte Funktion ableiten, müssen wir die Kettenregel berücksichtigen. Das gibt einen zusätzlichen Faktor $h_i$, wie man folgendermaßen sieht:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(t_i(x))\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t_i(x))\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t_i(x))\right) \cdot \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t_i(x))\right) \cdot \frac{1}{h_i}.$$

Um nun das kubische Teilpolynom $p_i(t(x))$ mit Hilfe des Hermite-Ansatzes festzulegen, müssen wir bei den Summanden mit $y'_i$ und $y'_{i+1}$ einen Faktor $h_i$ dazunehmen, weil dort bei der Ableitung ein $1/h_i$ auftauchen würde, das bei der Interpolation nicht auftauchen darf! Somit erhalten wir für ein Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$:

$$p_i(t_i(x)) = y_i \cdot H_0(t_i(x)) + y_{i+1} \cdot H_1(t_i(x)) + h_i \cdot y'_i \cdot H_2(t_i(x)) + h_i \cdot y'_{i+1} \cdot H_3(t_i(x)).$$

In Abb. 1 ist beispielhaft das interpolierende Hermite-Polynom zur Funktion $\sin(x)$ auf dem Intervall $[0; 4\pi]$ dargestellt.
Dieses Bild wurde mit der **matlab**-Routine visHermiteSin.m erstellt, das auch auf der Webpage unter der Rubrik **Tutorium** zum Download bereitgestellt ist. Für die Benutzung der Datei unter **octave** muss lediglich der entsprechende plot-Bereich ein- bzw. auskommentiert werden.

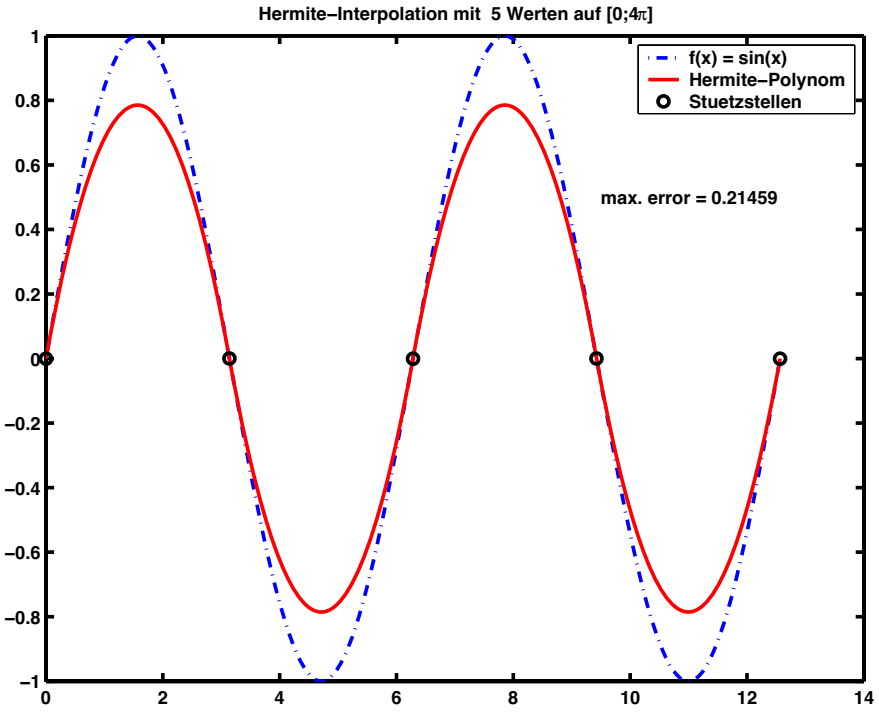



Abbildung 1: Visualisierung eines Hermite-Polynoms als Interpoland von $\sin(x)$ auf $[0; 4\pi]$.

## 2) Interpolation mit kubischen Splines

Bei der kubischen Spline-Interpolation möchte man eine interpolierende Funktion $s(x)$ erhalten, die ähnlich wie bei der Hermite-Interpolation aus kubischen Teilpolynomen $p_i(x)$ auf den Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ besteht. Allerdings soll die Splinefunktion $s(x)$ überall zweimal stetig differenzierbar sein ($s \in \mathcal{C}^2$) und dafür keine anderen Informationen benötigen als die $n+1$ zu interpolierenden Stützpunkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

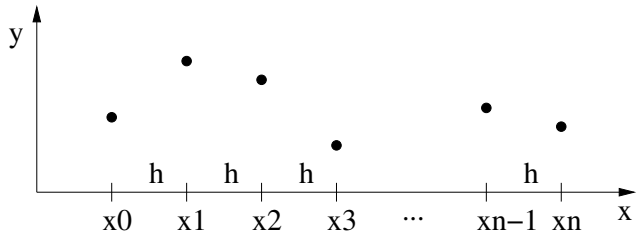



Abbildung 2: Visualisierung der äquidistanten Stützstellen $x_i$.

In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall äquidistanter Stützstellen $x_i$, d.h. alle Teilintervalle haben dieselbe Länge (vgl. Abb. 2):

$$x_{i+1} - x_i \;=\; h \;:=\; \frac{x_n - x_0}{n},\; i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

a) Geben Sie die Bedingungen an, die aus der Interpolation und der $\mathcal{C}^2$-Stetigkeit resultieren!

b) Berechnen Sie die zweiten Ableitungen $H_i''(t)$, $i = 0, \ldots, 3$, der Hermite-Basispolynome $H_i(t)$ aus Aufgabe 1) und werten Sie sie an den Stellen $t = 0$ und $t = 1$ aus!

c) Zeigen Sie, dass $s(x)$ mit Hilfe der Stützwerte $y_i$ und folgendem linearen Gleichungssystem konstruiert werden kann:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} \;=\; \frac{3}{h} \begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{h}{3} y_0' \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} - \frac{h}{3} y_n' \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Spline-Funktion $s(x)$ für die Stützpunkte

$$P_0 = (-1, 2), \quad P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 2), \quad P_3 = (2, 3)$$

und die Randbedingungen

$$s'(-1) = 9, \quad s'(2) = 0 \quad .$$

**Lösung:**

a) Ziel: Darstellung von $s(x)|_{[x_i; x_{i+1}]}$ mittels stückweiser kubischer Polynome $p_i(x)$ (analog zur Aufgabe 1)).

Interpolationsbedingung:

$$s(x_i) \;=\; y_i,\; i = 0, \ldots, n \qquad (n+1 \text{ Bedingungen})$$

$\mathcal{C}^2$-Stetigkeit: entscheidend nur die »Klebestellen« $x_1, \ldots, x_{n-1}$, dazwischen kann man jedes stückweise kubisches Polynom immer problemlos stetig ableiten:

$$\begin{aligned} s'(x_{i+1}) &= y'_{i+1},\ i = 0, \ldots, n-2 \quad (\mathcal{C}^1\text{-Stetigkeit, notwendig für } \mathcal{C}^2) && (1)\\ s''(x_{i+1}) &= y''_{i+1},\ i = 0, \ldots, n-2 \qquad (n-1 \text{ Bedingungen}). && (2) \end{aligned}$$

b) Wir werden sofort in Teilaufgabe c) sehen, warum wir die zweiten Ableitungen der Hermite-Basispolynome brauchen. Hier berechnen wir sie schnell:

$$\begin{aligned} H''_0(t) &= -6 + 12t &&= \begin{cases} -6, & \text{für } t = 0 \\ 6, & \text{für } t = 1 \end{cases} \\ H''_1(t) &= 6 - 12t &&= \begin{cases} 6, & \text{für } t = 0 \\ -6, & \text{für } t = 1 \end{cases} \\ H''_2(t) &= -4 + 6t &&= \begin{cases} -4, & \text{für } t = 0 \\ 2, & \text{für } t = 1 \end{cases} \\ H''_3(t) &= -2 + 6t &&= \begin{cases} -2, & \text{für } t = 0 \\ 4, & \text{für } t = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

c) Wie in Aufgabe 1) können wir für die stückweisen kubischen Polynome $p_i(x)$ den Hermite-Ansatz machen, auch wenn wir die ersten Ableitungen $y'_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ aus (1) noch nicht kennen. Wieder benötigen wir die Transformationsfunktion $t_i(x) = (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i) = (x - x_i)/h$, die mit unseren äquidistanten Stützstellen immer dasselbe $h$ benutzt, um unseren $x$-Wert ins Intervall $[0; 1]$ zu bekommen:

$$p_i(t_i(x)) = y_i \cdot H_0(t_i(x)) + y_{i+1} \cdot H_1(t_i(x)) + h \cdot y'_i \cdot H_2(t_i(x)) + h \cdot y'_{i+1} \cdot H_3(t_i(x)) \qquad (3)$$

Die Bedingungen (2) erlauben uns nun, die $y'_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ zu bestimmen, indem wir einfach die zweite Ableitung der Funktionen $p_i(t(x) = 1)$ und $p_{i+1}(t(x) = 0)$ an den »Klebestellen« $x_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-2)$ gleichsetzen:

$$\begin{aligned} p''_i(t = 1) &= s''(x_{i+1}) = p''_{i+1}(t = 0), \quad i = 0, 1, \ldots, n-2 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{h^2}\left[y_i \cdot H''_0(1) + y_{i+1} \cdot H''_1(1) + h \cdot y'_i \cdot H''_2(1) + h \cdot y'_{i+1} \cdot H''_3(1)\right] &= \\ = \frac{1}{h^2}\left[y_{i+1} \cdot H''_0(0) + y_{i+2} \cdot H''_1(0) + h \cdot y'_{i+1} \cdot H''_2(0) + h \cdot y'_{i+2} \cdot H''_3(0)\right] & \end{aligned}$$

Der Faktor $1/h^2$ kommt vom zweimaligen Ableiten der Basispolynome (Kettenregel mit $t_i(x)$, vgl. Aufg. 1)).

Jetzt sortieren wir das noch kurz nach Summanden mit $y'$ auf der linken und $y$ auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h^2}\left[y'_i \cdot H''_2(1) + y'_{i+1} \cdot (H''_3(1) - H''_2(0)) - y'_{i+2} \cdot H''_3(0)\right] &= \\ = \frac{1}{h^2}\left[-y_i \cdot H''_0(1) + y_{i+1} \cdot (-H''_1(1) + H''_0(0)) + y_{i+2} \cdot H''_1(0)\right]. & \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt die Werte für $H''_i$ an der Stelle 0 bzw. 1 aus Teilaufgabe b) einsetzen,

erhalten wir für $i = 0, \ldots, n-2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[y'_i \cdot 2 + y'_{i+1} \cdot (4 - (-4)) - y'_{i+2} \cdot (-2)\right] \;=\\
&= \frac{1}{h^2}\left[-y_i \cdot 6 + y_{i+1} \cdot (-(-6) + (-6)) + y_{i+2} \cdot 6\right]\\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow\\
&\left[y'_i + 4y'_{i+1} + y'_{i+2}\right] \;=\; \frac{3}{h}\left[y_{i+2} - y_i\right].
\end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n-1$ (analog zu Ergebnis aus Vorlesung, dort heißen die $H_i$ nur $\alpha_{i+1}$):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-2} \\ y'_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{h}{3}y'_0 \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} - \frac{h}{3}y'_n \end{pmatrix}.$$

Dabei müssen die Randbedingungen $y'_0$ und $y'_n$ gesetzt werden. Eine Möglichkeit ist z.B. $y'_0 = 0 = y'_n$ oder auch die echte Ableitung der zu interpolierenden Funktion bei $x_0$, $x_n$.

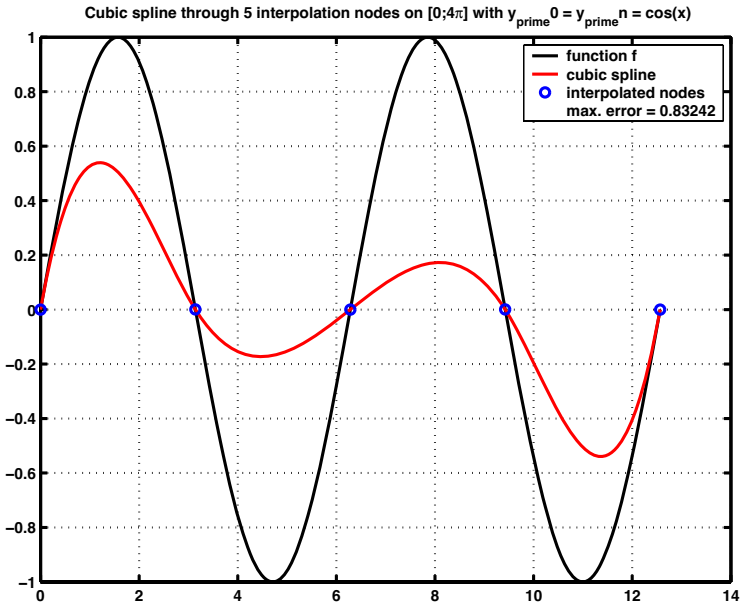



Abbildung 3: Visualisierung einer kubischen Spline-Funktion als Interpoland von $\sin(x)$ auf $[0; 4\pi]$ für 5 Punkte.

In Abb. 3 ist die kubische Splinefunktion zur Funktion $\sin(x)$ auf dem Intervall $[0; 4\pi]$ dargestellt. Man erkennt deutlich den Unterschied zur Hermite-Interpolation (selbe Situation). Allerdings hat das Hermite-Polynom mit Ableitungen an den Zwischenknoten mehr Informationen von der zu interpolierenden Funktion erhalten.
Splines sind per Konstruktion Funktionen, die möglichst glatt durch die vorgegebenen Interpolationspunkte laufen, da sie die Krümmung der Gesamtfunktion minimieren. Starke Oszillationen wie beispielsweise bei der Polynominterpolation hohen Grades können so nicht auftreten.

Abbildung 3 wurde mit der **matlab**-Routine spline_easyN.m erstellt, das auch auf der Webpage unter der Rubrik **Tutorium** zum Download bereitgestellt ist. Für die Benut-

zung der Datei unter **octave** muss lediglich der entsprechende plot-Bereich ein- bzw. auskommentiert werden.

d) Zum Abschluss bestimmen wir noch explizit eine Spline-Funktion. Als Werte sind hierfür gegeben:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | 2 | 0 | 2 | 3 |
| $y_i'$ | 9 | $-3$ | 3 | 0 |

Die Spline-Funktion $s(x)$ ist stückweise definiert über

$$s(x) = p_i(t_i(x)) \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

mit der Transformation auf das Einheitsintervall

$$[x_i, x_{i+1}] \to [0,1], \quad x \mapsto t_i(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

und den kubischen Funktionen

$$p_i(t_i(x)) = y_i \cdot H_0(t_i(x)) + y_{i+1} \cdot H_1(t_i(x)) + h \cdot y_i' \cdot H_2(t_i(x)) + h \cdot y_{i+1}' \cdot H_3(t_i(x)).$$

Es sind also noch die fehlenden Ableitungen $y_i'$ zu bestimmen, bevor wir die Funktion vollständig aufstellen können.

Da die Stützstellen äquidistant sind, können wir das lineare Gleichungssystem aus Teilaufgabe c) verwenden, um $y_1'$ und $y_2'$ zu bestimmen. Speziell für diesen Fall lautet es

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \frac{3}{h^2}\begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{h}{3}y_0' \\ y_3 - y_1 - \frac{h}{3}y_3' \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $h = 1$ sowie die $y$-Werte ein, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 - 2 - \frac{1}{3}\cdot 9 \\ 3 - 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und als Lösung ergibt sich schließlich

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit als Spline-Funktion

$$s(x) = \begin{cases} p_0(t_0(x)) & \text{für } x \in [-1, 0[ \text{ mit } t_0(x) = x + 1 \\ p_1(t_1(x)) & \text{für } x \in [0, 1[ \text{ mit } t_1(x) = x \\ p_2(t_2(x)) & \text{für } x \in [1, 2] \text{ mit } t_2(x) = x - 1 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 2 \cdot H_0(t) + 0 + 9 \cdot H_2(t) - 3 \cdot H_3(t) \\ p_1(t) &= 0 + 2 \cdot H_1(t) - 3 \cdot H_2(t) + 3 \cdot H_3(t) \\ p_2(t) &= 2 \cdot H_0(t) + 3 \cdot H_1(t) + 3 \cdot H_2(t). + 0 \end{aligned}$$

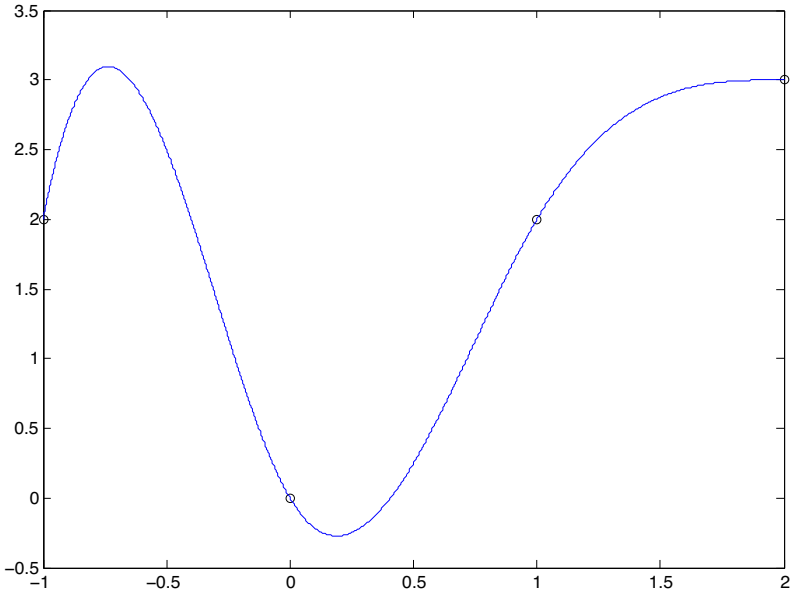



Abbildung 4: Visualisierung der berechneten Spline-Funktion $s(x)$

Zu Splines gäbe es noch viel zu sagen. Es sind eine Reihe von Verallgemeinerungen möglich (nicht äquidistant, Kontrollpunkte abseits der Kurve,...). Details hierzu werden üblicherweise in Vorlesungen zu CAD diskutiert. Eine schöne Eigenschaft der Splines soll nicht unerwähnt bleiben: Eine Veränderung in einem Kontrollpunkt wirkt sich immer nur lokal auf einen kleinen Bereich der Kurve aus, der Großteil der Kurve bleibt unverändert.

---

Zum Abschluss des Kapitels über Interpolation ist nachfolgend wieder eine Aufgabe aus einer Semestralklausur aufgeführt. Diese ist dazu gedacht, den Stoff noch einmal selbst üben zu können. Sie wird deshalb nicht in der Übung behandelt.
Die in der Angabe enthaltenen Code-Stücke entstammen einer behandelten Programmieraufgabe. Sie können jedoch auch unabhängig davon verstanden werden.

## 3) Wiederholung: Interpolation

Betrachten Sie im Folgenden die Funktion

$$f : [0, 2] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie einen Polynom-Interpolanten $p(x)$, der die Funktion $f$ interpoliert und die drei Stützpunkte $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, and $P_2 = (x_2, y_2)$ mit den zugehörigen Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

besitzt.

Berechnen Sie dazu die dividierten Differenzen und geben Sie eine geschlossene Darstellung des Interpolanten $p(x)$ an, indem Sie die Newton'sche Interpolationsformel verwenden.

b) Um eine bessere Approximation zu erzielen, werden die Stützpunkte um einen neuen Punkt $P_3 = (x_3, y_3)$ mit $x_3 = \frac{1}{3}$ erweitert. Bestimmen Sie den neuen Interpolanten, der die vier Punkte $P_0$, $P_1$, $P_2$ und $P_3$ interpoliert.

c) Sei $p_1(u)$ ein Interpolant zu beliebig gegebenen Stützstellen $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ und $p_2(u)$ ein Interpolant zu Stützstellen $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Bestimmen Sie einen Interpolanten $p_3(u)$ zu den Stützstellen $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$, basierend auf $p_1(u)$ und $p_2(u)$!

d) Welche Methode eignet sich zur Interpolation von ca. 100 äquidistanten Stützpunkten? Geben Sie zwei Vorteile gegenüber der Polynom-Interpolation an!

e) Die Methode `aitken` des folgenden Java-Codefragments soll die Polynominterpolation mit dem Schema nach Aitken-Neville berechnen. Dabei bezeichnen `xs` den Vektor der x-Koordinaten der Stützstellen, `f` den Vektor der Stützwerte und `x` die gewünschte Auswertungsstelle des Interpolationspolynoms. Zeigen Sie 2 Fehler auf und korrigieren Sie diese.

```
0  public static double aitken(double xs[], double f[], double x) {
     int n = f.length;
     assert n==xs.length;

     for(int k = 1; k <= n; k++)
5      for(int i = 0; i < n-k; i++)
         f[i] = ((x-xs[i])*f[i+1] - (x-xs[i+k])*f[i])/(xs[i]-xs[i+k]);

     return f[n-1];
   }
```

f) Erklären Sie kurz, was die Methode `foo()` des folgenden Java-Codefragments unter Verwendung der Methode `aitken` aus Teilaufgabe e) berechnet.

```
0  public static double foo(double xs[], double ys[], double f[][], double x,
       double y) {
     assert xs.length == ys.length;
     assert xs.length == f.length;
     assert ys.length == f[0].length;

5    double pHat[] = new double[xs.length];

     for(int i=0; i < xs.length; i++) pHat[i]=aitken(ys,f[i],y);
     return aitken(xs,pHat,x);
   }
```

**Lösung:**

a) Dreiecksschema:

| $x_i$ | $i\backslash k$ | 0 | | 1 | | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $y_0 = 0$ | $\rightarrow$ | 1 | $\rightarrow$ | $-1$ | |
| | | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | |
| 1 | 1 | $y_1 = 1$ | $\rightarrow$ | $-1$ | | | |
| | | | $\nearrow$ | | | | |
| 2 | 2 | $y_2 = 0$ | | | | | |

Die Berechnungen im Einzelnen:

$$\begin{aligned} [x_0]f &= \sin(0) = 0 \\ [x_1]f &= \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ [x_2]f &= \sin(\pi) = 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} [x_0,x_1]f &= \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{1-0} = 1 \\ [x_1,x_2]f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-1} = -1 \\ [x_0,x_1,x_2]f &= \frac{[x_1,x_2]f - [x_0,x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{-1-1}{2-0} = -1 \end{aligned}$$

Als Interpolant ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} p(x) &= [x_0]f + [x_0,x_1]f \cdot (x - x_0) + [x_0,x_1,x_2]f \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ &= \boxed{0} + \boxed{1}(x-0)) + (\boxed{-1})(x-0))(x-1) \\ &= 0 + 1 \cdot (x-0) - 1 \cdot (x-0)(x-1) \\ &= x - x(x-1) = x(2-x) = 2x - x^2 \end{aligned}$$

b) Erweiterung des Dreiecksschemas:

| $x_i$ | $i\backslash k$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $y_0 = 0$ | $\rightarrow$ | 1 | $\rightarrow$ | $-1$ | $\rightarrow$ | $-\frac{3}{20}$ |
| | | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |
| 1 | 1 | $y_1 = 1$ | $\rightarrow$ | $-1$ | $\rightarrow$ | $-\frac{21}{20}$ | | |
| | | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | | |
| 2 | 2 | $y_2 = 0$ | $\rightarrow$ | $-\frac{3}{10}$ | | | | |
| | | | $\nearrow$ | | | | | |
| $\frac{1}{3}$ | 3 | $y_3 = \frac{1}{2}$ | | | | | | |

Die Berechnungen im Einzelnen:

$$\begin{aligned}
[x_3]\,f &= \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \\
[x_2, x_3]\,f &= \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{3} - 2} = -\frac{3}{10} \\
[x_1, x_2, x_3]\,f &= \frac{[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f}{x_3 - x_1} = \frac{-\frac{3}{10} + 1}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{21}{20} \\
[x_0, x_1, x_2, x_3]\,f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = \frac{-\frac{21}{20} + 1}{\frac{1}{3} - 0} = \boxed{-\frac{3}{20}}.
\end{aligned}$$

Als neuer Interpolant ergibt sich damit:

$$p(x) = x(2-x) - \frac{3}{20} \cdot x(x-1)(x-2)$$

c)

$$\begin{aligned}
p_3(u) &= p_1(u) \cdot \frac{u - u_4}{u_0 - u_4} + p_2(u) \cdot \frac{u - u_0}{u_4 - u_0} \\
&= p_1(u) + \frac{u - u_0}{u_4 - u_0} \cdot (p_2(u) - p_1(u))
\end{aligned}$$

d) Spline-Interpolation

- Interpolation mit lokalen Polynomen niedrigen Grades, dadurch keine starken Oszillation an den Rändern auf Grund eines hohen Polynomgrads
- geringere Komplexität der Berechnungen ($\mathcal{O}(n)$ statt $\mathcal{O}(n^2)$, wobei in diesem Fall $n = 100$ gilt)

e) Der erste Fehler befindet sich in Zeile 07: Dort muss es in der letzten Klammer heißen:

```
/(xs[i+k]-xs[i]);
```

Der zweite Fehler steckt in Zeile 09: Die Rückgabe muss im ersten Element des f-Feldes erfolgen:

```
09 return f[0];
```

f) Die Methode `foo()` berechnet die zweidimensionale Polynominterpolation nach Aitken-Neville und testet, ob die Stützwerte passende Dimensionen haben (in x- und y-Richtung gleich viele).