Numerisches Programmieren

Übung #07

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

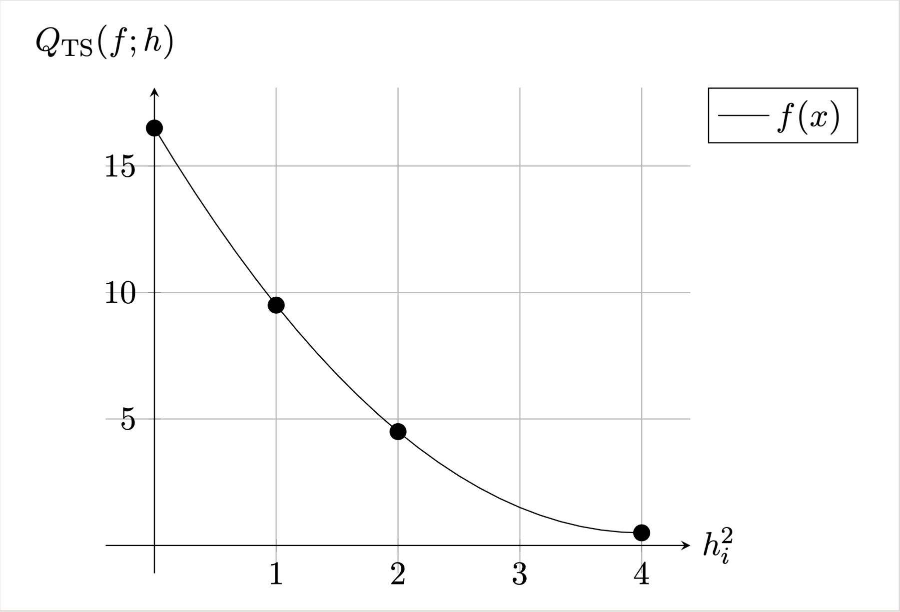
Quadratur #2

Quadratur nach Romberg

- Höhere Genauigkeit bei Abschätzung des Integrals
- Kombination von Trapezsummen unterschiedlicher Schrittweiten h

→ Abschätzung für $h = 0$ (analytisches Ergebnis)

Abhängigkeit der Trapezsumme von h:



Quadratur nach Romberg

- Initialisierung: $Q_{i,0} = Q_{TS}(f; h_i)$
- Iterationsvorschrift: $Q_{i,k} = Q_{i,k-1} + \frac{Q_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}}{(\frac{h_{i-k}}{h_i})^2 - 1}$ $\quad \left(Q_{links} + \frac{Q_{links} - Q_{linksOben}}{(\frac{h_{i-k}}{h_{links}})^2 - 1}\right)$

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
h_i & i\backslash k & 0 & & 1 & & \dots & & n \\
\hline
\frac{b-a}{1} & 0 & Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{1}) = Q_{00} & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
\frac{b-a}{2} & 1 & Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{2}) = Q_{10} & \rightarrow & Q_{11} & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\frac{b-a}{4} & 2 & Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{4}) = Q_{20} & \rightarrow & Q_{21} & \rightarrow & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
\frac{b-a}{2^n} & n & Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{2^n}) = Q_{n0} & \rightarrow & Q_{n1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \boxed{Q_{nn}}
\end{array}
$$

Quadratur nach Romberg

<u>Algorithmus</u>:

1. Relevante Stützwerte f_i berechnen
2. Trapezsummen Q_{TS} für verschiedene h_i in Spalte $k = 0$ eintragen
3. Zellen $Q_{i,k}$ ausrechnen nach Iterationsverfahren

→ Ergebnis in $Q_{n,n}$

Aufgabe 1)

In dieser Aufgabe werden wir Quadratur nach Romberg verwenden um das Integral

$$\int_{-2}^{2} -x^2 + 4 \mathrm{d}x$$

zu berechnen.

a) Füllen Sie die erste Spalte der Tabelle bis $i = 2$ aus! Für $i > 0$ können Sie die folgende Eigenschaft von Trapezsummen verwenden:

$$Q_{\mathrm{TS}}(f;h) = \frac{Q_{\mathrm{TS}}(f;2h)}{2} + h \cdot (f_1 + f_3 + \ldots + f_{N-3} + f_{N-1}) \,, \tag{1}$$

Aufgabe 1)

b) Füllen Sie den Rest der Tabelle aus! Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2c) von Blatt 6 !

c) Machen Sie sich das Ergebnis von Q_{11} grafisch anschaulich, indem Sie die Extrapolation zeichnerisch berechnen.

Gauß Quadratur

- Bisher nur Berechnung der Gewichte w_i bei äquidistanten Stützstellen
- Jetzt auch Berechnung variabler Positionen x_i

→ Polynome bis Grad $2n - 1$ exakt berechenbar bei n Stützstellen

  - Wegen 2 Bedingungen je Stützpunkt

- Integrationsgebiet immer im Intervall $[-1,1]$
  - Jedes belieb. Integral durch Skalierung/Verschiebung in diese Form transformierbar

Methode der unbestimmten Koeffizienten

- Ziel: Bestimmung der Stützstellen x_i und Gewichte w_i für bestimmtes n
- Es soll ja gelten:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

- Gewichte & Stützpunkte müssen Term für alle unterschiedlichen Polynomgrade erfüllen

Algorithmus:

1. Für jeden Grad k von 0 bis $2n-1$ Gleichung aufstellen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)\, dx$$

   - Wobei $f_k(x) = x^k$ Basismonom
2. Gleichungen jeweils soweit vereinfachen wie möglich
3. Entstandenes LGS lösen

Methode der unbestimmten Koeffizienten

- Beispiel: $n = 1$

Es soll eine unbekannte Funktion mithilfe von einer Stützstelle x_0 und der Gauß-Quadratur bestimmt werden. Mit einer Stützelle, also $n = 1$, müssen wir die Grade von 0 bis $(2 \cdot n) - 1 = 1$ aufstellen.
Alle Informationen mithilfe von der obigen Formel aufschreiben:

Grad 0 mit $f(x) = 1$:

$$f(x_0) \cdot w_0 = w_0 \stackrel{!}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = 2$$

Grad 1 mit $f(x) = x$:

$$f(x_0) \cdot w_0 = w_0 x_0 \stackrel{!}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

Daraus können wir also folgern:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2 \\ w_0 x_0 &= 0 \\ \implies x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2)

a) Berechnen sie die Stützpunkte und Gewichte für eine Gauß Quadratur mit 2 Stützpunkten! Hinweis: Sie können hierfür in dem obigen Beispiel die Stützwerte x_i variabel lassen und die entsprechenden weiteren Gleichungen hinzufügen. Zur Vereinfachung der Rechnung dürfen Sie Sie die Tatsache verwenden, dass in der resultierenden Formel $x_0 = -x_1$ sein wird.

b) Berechnen sie $\int_{-1}^{1} x^3 - x^2 \, dx$ mit der Gauß Quadratur und der Trapezregel. Bewerten Sie das Ergebnis!

Aufgabe 3)

3) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei g die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und h die Höhe (horizontal) beschreibt.

Aufgabe 3)

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) \quad = \quad \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tipp: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 2) c) von Aufgabenblatt 6. Was stellen Sie fest?

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg