Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Sebastian Wolf
Shuo Sun
Hayden Liu Weng

SoSe 2023

# Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 9. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

## 1) Kondition von Anfangswertproblemen

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) mithilfe der Separation der Variablen:

$$\text{i) } \dot{y}(t) = 2y(t) \qquad \text{ii) } \dot{y}(t) = -2y(t)$$

b) Gegeben seien folgende Anfangswertbedingungen für die jeweiligen ODEs aus a). Berechnen Sie nun die analytische Lösung der daraus resultierenden Anfangswertprobleme (AWP):

$$\text{i) } \dot{y}(t) = 2y(t),\ y(0) = 3,\ t \geq 0 \qquad \text{ii) } \dot{y}(t) = -2y(t),\ y(0) = y_0,\ t \geq 0.$$

c) Diskutieren Sie jeweils die Kondition der beiden AWP aus b).

**Lösung:**

a) i) Die Lösung des ODEs bestimmen wir mittels Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= 2y \\
\frac{dy}{2y} &= dt \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{2\eta} d\eta &= \int_{t_0}^{t} d\tau \\
\frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y_0|) &= t - t_0 \\
\left|\frac{y(t)}{y_0}\right| &= e^{2(t-t_0)} \\
y(t) &= \pm y_0 \cdot e^{2(t-t_0)}
\end{aligned}$$

ii) Analog zum ODE (a) ergibt sich hier die Lösung

$$y(t) = \pm y_0 \cdot e^{-2(t-t_0)}.$$

b) i) Da für $t = 0 = t_0$ als Anfangswert $y(t = 0) = 3$ gegeben ist, muss für die AWP Lösung

$$y(t) = 3 \cdot e^{2t}$$

gelten.

ii) Analog zu i) ergibt sich mit $t_0 =$ und $y(0) = y_0$:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-2t}.$$

c) Wenden wir uns nun der Betrachtung der (absoluten) Kondition zu:

i) Im Fall von gestörten Anfangswerten

$$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$$

erhalten wir als Lösung des gestörten AWPs

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{2t} \quad .$$

Der Fehler nimmt folglich mit fortschreitender Zeit $t$ zu:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{2t} \to \infty \text{ für } t \to \infty$$

$\Rightarrow$ schlecht-konditioniertes Problem!

ii) $y(t) = y_0 \cdot e^{-2t}$.
Wir erhalten als Lösung des gestörten AWPs

$$y_\varepsilon(t) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{-2t}.$$

Der Fehler wird gedämpft:

$$|y_\varepsilon(t) - y(t)| = |\varepsilon| \cdot e^{-2t} \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

$\Rightarrow$ gut-konditioniertes Problem!

## 2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte $y_k$, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen $t_k$ approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

i) **Explizites Euler-Verfahren**:

Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt $t_k$ zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun**:

Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter $f$-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k))\right); \end{aligned}$$

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren** (Zusatz):

Analog zur Fassregel werden hier Zwischenwerte $T_i$ für die Näherung der Steigung berechnet und mit 1/6 gewichtet:

$$\begin{aligned}
t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\
T_1 &= f(t_k,\ y_k); \\
T_2 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_1); \\
T_3 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_2); \\
T_4 &= f(t_{k+1},\ y_k + \delta t T_3); \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)\,;
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse der einzelnen Verfahren mit der analytischen Lösung. Was stellen Sie fest und wie lässt sich dies deuten?

**Lösung:**

a) Wir berechnen die Separation (Trennung) der Variablen für $\dot{y}(t) = t \cdot y(t) \ = \ F(t) \cdot G(y)$ mit $F(t) = t$ und $G(y) = y$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\
\frac{dy}{G(y)} &= F(t) dt \\
\int_{y(0)}^{y} \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_0^t F(\tau) d\tau \\
\int_{y(0)}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta &= \int_0^t \tau d\tau \\
ln|y| - \underbrace{ln|y(0)|}_{=0} &= \frac{t^2}{2} \\
|y(t)| &= e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in [0; b] \\
y(t) &= \pm e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in [0; b]
\end{aligned}$$

Wegen $y(0) = 1 > 0$ gilt $y(t) = +e^{\frac{t^2}{2}},\ t > 0$.

b) Wir berechnen im Intervall $[a; b] = [0; 4]$ zu den äquidistanten Zeitpunkten $t_k = t_0 + k \cdot \delta t$, $k = 1, 2, 3, 4$ eine numerische Approximation.

i) **Explizites Euler-Verfahren**:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) &&= 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1, \\
y_2 &= y_1 + \delta t \cdot f(t_1, y_1) &&= 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \\
y_3 &= y_2 + \delta t \cdot f(t_2, y_2) &&= 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 6, \\
y_4 &= y_3 + \delta t \cdot f(t_3, y_3) &&= 6 + 1 \cdot 3 \cdot 6 = 24.
\end{aligned}$$

Die Werte der analytischen Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ betragen dagegen

$$\begin{aligned} y(t_1) &= e^{\frac{1}{2}} = 1.6487\ldots, \\ y(t_2) &= e^{\frac{4}{2}} = 7.3890\ldots, \\ y(t_3) &= e^{\frac{9}{2}} = 90.017\ldots, \\ y(t_4) &= e^{\frac{16}{2}} = 2980.9\ldots. \end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun**:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_0 \cdot y_0 + f(t_1, y_0 + \delta t \cdot t_0 \cdot y_0)) \;=\; 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 1) \;=\; \frac{3}{2}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_1 \cdot y_1 + f(t_2, y_1 + \delta t \cdot t_1 \cdot y_1)) \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2} + 2 \cdot (\frac{3}{2} + \frac{3}{2})) \\ &= \frac{21}{4} = 5.25, \\ y_3 &= y_2 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_2 \cdot y_2 + f(t_3, y_2 + \delta t \cdot t_2 \cdot y_2)) \;=\; \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{21}{2} + 3 \cdot (\frac{21}{4} + \frac{42}{4})) \\ &= \frac{21}{4} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{189}{4} + \frac{42}{4}) \;=\; \frac{273}{8} = 34.125, \\ y_4 &= y_3 + \frac{\delta t}{2} \cdot (t_3 \cdot y_3 + f(t_4, y_3 + \delta t \cdot t_3 \cdot y_3)) \\ &= \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \frac{273}{8} + 4 \cdot (\frac{273}{8} + 3 \cdot \frac{273}{8})) \\ &= \frac{273}{8} + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \frac{273}{8} + 2 \cdot 273) \;=\; \frac{21}{16} \cdot 273 = 358,3\ldots\ . \end{aligned}$$

Im Vergleich zu den Werten der analytischen Lösung erkennt man, dass das Verfahren von Heun für diese (relativ großen) Zeitschritte durchaus noch einen nicht unerheblichen Fehler im Vergleich zur analytischen Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ macht, aber schon besser ist als das explizite Euler-Verfahren.

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren**:

Um einen globalen Runge-Kutta-Schritt zu machen, sind jeweils vier Subschritte $T_1, \ldots, T_4$ auszuführen:

<u>$k = 0$:</u>

$$\begin{aligned} T_1 &= f(t_0, y_0) \;=\; t_0 \cdot y_0 = 0, \\ T_2 &= f(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \\ T_3 &= f(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}, \\ T_4 &= f(t_1, y_0 + \delta t \cdot T_3) \;=\; 1 \cdot \frac{13}{8} = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den ersten Gesamtschritt:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = 1 + \frac{1}{6} \cdot (0 + 1 + \frac{5}{4} + \frac{13}{8}) \\ &= 1 + \frac{1}{6} \cdot (\frac{31}{8}) = \frac{79}{48} = 1,645\ldots\ . \end{aligned}$$

<u>$k = 1$:</u>

$$
\begin{aligned}
T_1 &= f(t_1, y_1) \;=\; t_1 \cdot y_1 = \frac{79}{48}, \\
T_2 &= f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_1) \;=\; \frac{3}{2} \cdot (\frac{79}{48} + \frac{79}{2 \cdot 48}) = \frac{9}{4} \cdot \frac{79}{48} = \frac{711}{192} = \frac{237}{64}, \\
T_3 &= f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} \cdot T_2) \;=\; \frac{3}{2} \cdot (\frac{79}{48} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{711}{192}) \\
&= \frac{3}{2} \cdot (\frac{2 \cdot 4 \cdot 79 + 711}{2 \cdot 192}) = \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}, \\
T_4 &= f(t_2, y_1 + \delta t \cdot T_3) \;=\; 2 \cdot (\frac{79}{48} + \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}) \;=\; 2 \cdot (\frac{16 \cdot 79 + 3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}) = \frac{5293}{2 \cdot 192}.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für den zweiten Gesamtschritt:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot (\frac{79}{48} + \frac{711}{2 \cdot 48} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1343}{192} + \frac{5293}{2 \cdot 192}) \\
&= \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot (\frac{8 \cdot 79 + 4 \cdot 711 + 3 \cdot 1343 + 5293}{2 \cdot 192}) \\
&= \frac{79}{48} + \frac{12798}{2304} = \frac{16590}{48 \cdot 48} = 7,200\ldots\ .
\end{aligned}
$$

Weitere Gesamtschritte ersparen wir uns in Anbetracht der relativ unschönen Brüche und überlassen diesem dem Computer (z.B. kurzes Matlab-Programm schreiben). Wir erhalten dann als Ergebnis

$$y_3 = 77.70\ldots,$$

$$y_4 = 1856.8\ldots$$

Das Klassische Runge-Kutta-Verfahren approximiert die analytischen Werte also noch etwas besser als das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun.

Je größer die Ordnung des Verfahrens (Euler: 1, Heun: 2, kl. Runge-Kutta: 4), desto besser die numerischen Ergebnisse.

## 3) Zusatzaufgabe: Euler-Verfahren und Zinsberechnung

Die Verzinsung eines Guthabens, das am Anfang den Wert $y_0$ habe und pro Jahr $p\%$ Zinsen erhält, kann man als Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens auf ein Anfangswertproblem $\dot{y} = f(y)$ interpretieren.

a) Wiederholung: Wie sieht die Berechnungsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite $\delta t$ für das AWP $\dot{y} = f(y)$ aus?

b) Die Diga-Bank schüttet Zinsen immer zum Jahresende aus. Geben Sie die rechte Seite $f(y)$ an, so dass das Eulerverfahren mit $\delta t$=1 (Jahr) gerade diese Verzinsung beschreibt.

c) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs!

d) Nun macht die Spaßkasse das Angebot, Zinsausschüttungen vierteljährlich statt nur am Ende des Jahres durchzuführen. Geben Sie die Euler-Formel für diese neue Schrittweite an und berechnen Sie daraus eine explizite Vorschrift, um direkt den Wert des Gesamtguthabens nach einem vollen Jahr ($y_{\text{end}}$) zu ermitteln.

e) Vergleichen Sie für den konkreten Fall eines Startguthabens von $y_0$ =100000 Euro und einer Verzinsung von $p = 2$ Prozent p.a. die verschiedenen Guthaben $y_{\text{end}}$ nach einem Jahr bei der Diga-Bank, der Spaßkasse und einer virtuellen Bank mit Verzinsung nach der analytischen Lösung des AWPs! Was stellen Sie fest?

**Lösung:**

a) Explizites Euler-Verfahren für das angegebene AWP:

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(y_k) \ .$$

b) Ausgehend vom Startkapital $y_0$ soll mit $\delta t = 1$ das Startkapital plus Zinsen bei $y_1$ herauskommen. Die Zinsen für den Zeitraum eines Jahres sind $\delta t \cdot p/100 \cdot y_0$. Damit ergibt sich insgesamt:

$$y_1 = y_0 + \delta t \cdot p/100 \cdot y_0 \ ,$$

und die Funktion $f$ der rechten Seite ist $f(y) = p/100 \cdot y$.

c) Die analytische Lösung des AWPs lautet $y(t) = y_0 e^{\frac{pt}{100}}$ . Das erkennt man entweder schon direkt aus dem AWP oder rechnet es beispielsweise mit der Separation der Variablen nach ($\dot{y}(t) = p/100 \cdot y(t) \ = \ F(t) \cdot G(y)$ mit $F(t) = p/100$ und $G(y) = y$, sowie $t_0$=0):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\
\frac{dy}{G(y)} &= F(t)dt \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_{t_0}^{t} F(\tau) d\tau \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta &= \int_{t_0}^{t} \frac{p}{100} \, d\tau \\
ln(y) - ln(y_0) &= \frac{p}{100} \cdot t \\
y(t) &= y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}, \qquad t \in [0; b].
\end{aligned}$$

d) Wir verwenden nun 4 Schritte des Euler-Verfahrens zur kleineren Schrittweite $\delta t = 1/4$ (Jahr). Die Berechnungsvorschrift für $y_{k+1}$ lautet dann:

$$y_{k+1} \quad = \quad y_k + \delta t \cdot \frac{p}{100} \cdot y_k \quad = \quad \left(1 + \frac{\delta t \; p}{100}\right) \cdot y_k .$$

Wenn wir diese Definition rekursiv einsetzen, so erhalten wir die explizite Formel zur direkten Berechnung von $y_{k+1}$ aus $y_0$:

$$y_{k+1} \quad = \quad \left(1 + \frac{\delta t \; p}{100}\right) \cdot y_k \quad = \quad \left(1 + \frac{\delta t \; p}{100}\right)^2 \cdot y_{k-1} \quad = \quad \dots \quad = \quad \left(1 + \frac{\delta t \; p}{100}\right)^{k+1} \cdot y_0 .$$

e) Für die konkreten Werte $y_0$=100000 Euro und $p = 2$ erhalten wir folgende Gesamtguthabenswerte $y_{\text{end}}$ nach einem Jahr ($b = 1$):

$$\begin{aligned}
\text{Diga-Bank} : y_{\text{end}} &= 10^5 + 1 \cdot 2/100 \cdot 10^5 \;=\; 102000,00 \;, \\
\text{Spaßkasse} : \; y_{\text{end}} &= y_4 \;=\; \left(1 + \frac{\frac{1}{4} \cdot 2}{100}\right)^4 \cdot 10^5 \;=\; 102015,05 \;, \\
\text{Anal. Lsg.} : \; y_{\text{end}} &= 10^5 \cdot e^{\frac{2}{100}} \;=\; 102020,13 \;.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass mit ca. 15 Euro (0,015%) ein nicht unerheblicher Unterschied im Endkapital zwischen Diga und Spaßkasse vorliegt. Die Differenz der Spaßkasse zur analytischen Lösung beträgt nur etwa 5 Euro.