Numerisches Programmieren

Übung #05

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Frequenzanalyse

Komplexe Zahlen

- Beispiel: Gleichungen ohne reelle Lösung
  - $x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{-1}$ ⚡

  → Einführung **imaginäre Zahl** $\boldsymbol{i}$
- **Imaginäre Zahl:** $i = \sqrt{-1} \; \in \mathbb{C}$
  - Menge komplexer Zahlen $\mathbb{C}$
- $i \cdot i = -1; \quad (-1) \cdot i = -i; \quad (-i) \cdot i = 1$

→ $i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i^1; \quad \ldots$

img-9gag-fun.9cache.com/photo/a8oLPnQ_460s.jpg

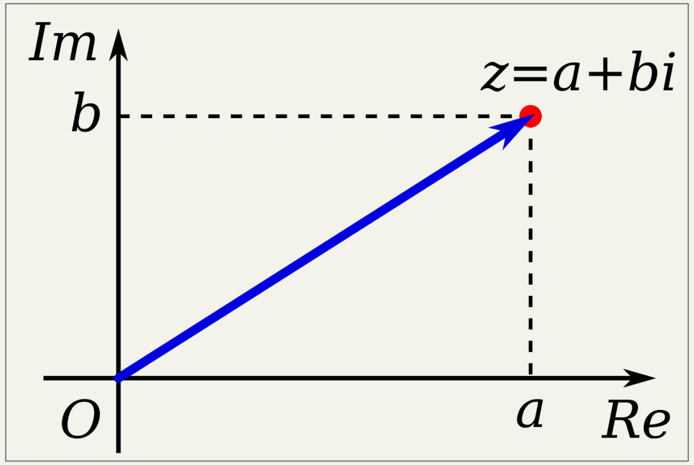
Komplexe Zahlen

- **Komplexe Zahl:** $z = x + y \cdot i \quad \in \mathbb{C}$
- **Real- & Imaginärteil :** $Re(z) = x;\ Im(z) = y$
- Beispiel:

$$z_1 = 6 + 9i \ \rightarrow \ Re(z_1) = 6;\ Im(z_1) = 9$$

- Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  - (Subtraktion analog)
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- Darstellung auf **Komplexebene**

Komplexebene:



upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/50/A_plus_bi.svg/1200px-A_plus_bi.svg.png

Komplexe Zahlen

- **Konjugiert Komplexes**: $\overline{z} = x - iy$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- **Betrag**: $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ (Abstand zum Ursprung $(0{,}0)$)
- **Eulersche Formel:** $e^{it} = cos(t) + i \cdot sin(t)$
  - e^{it} (t in Bogenmaß) durchläuft Einheitskreis gegen Uhrzeigersinn (beginnend bei $(1{,}0)$)
  - 2π-Periodizität: $e^{i \cdot 0} = e^{i \cdot 2k\pi} = 1$
  - $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + i \cdot sin(y))$

Aufgabe 0)

Aufgabe:

wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\omega^3 = 1$$

a) wenn $\omega \in \mathbb{R}$?

b) wenn $\omega \in \mathbb{C}$?

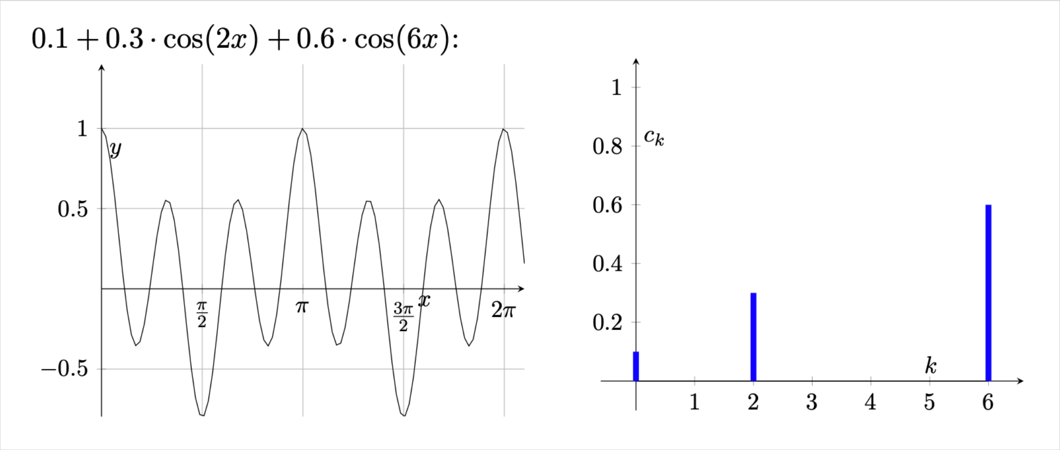
Frequenzanalyse

- Zerlegung eines periodischen Signals in ihre Grundfrequenzen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot cos(kx)$$

- Einzelne Grundfrequenzen mit **Frequenz** k und **Amplitude** c_k

Ein Signal (links) & das dazugeh. **Frequenzspektrum** (rechts):



Aufgabe 1)

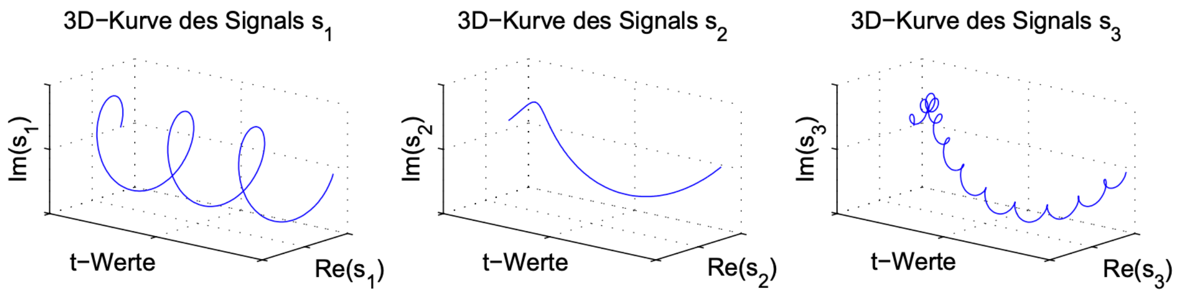


Abbildung 1: Komplexe Signale

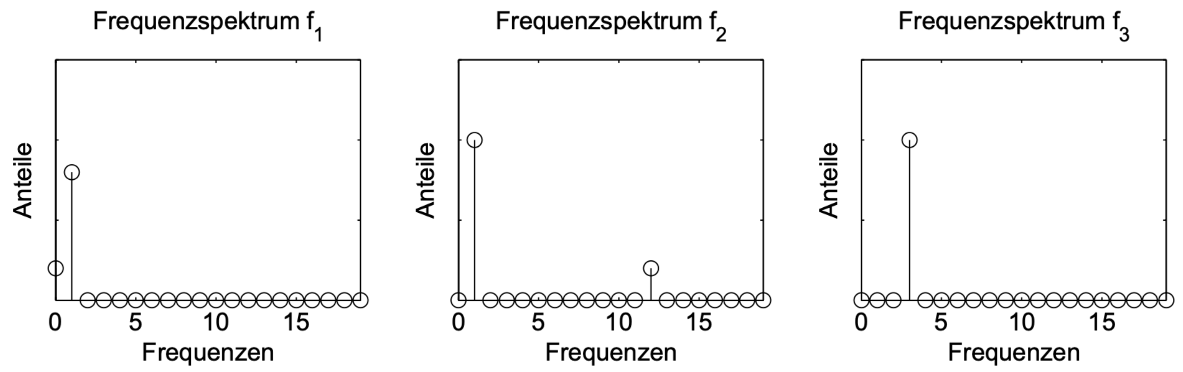


Abbildung 2: Frequenzspektren der Signale

Aufgabe 1)

Ordnen Sie den Signalen s_1 bis s_3 (Abbildung 1) die Frequenzspektren f_1 bis f_3 (Abbildung 2) zu! Begründen Sie darüber hinaus Ihre Entscheidung!

Dabei sind die Signale zum besseren Verständnis kontinuierlich dargestellt (z.B. $s_1 = e^{3it},\ t \in [0; 2\pi]$), wohingegen die Frequenzspektren den Betrag der (komplexen) Koeffizienten der DFT mit $n = 21$ gesampelten Werten des jeweiligen Signals beschreiben.

Diskrete Fourier-Transformation

- Transformation eines diskreten Signals ins Frequenzspektrum
- Eingabe: Komplexe Stützwerte $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})^T$ eines Signals
  - Stützstellen äquidistant über Intervall $[0,2\pi)$
- Ausgabe: Amplituden der Frequenzspektren $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$

- „Interpolation mit trigonometrischen Basisfunktionen im komplexen Bereich“

Diskrete Fourier-Transformation

- $\omega = e^{i \cdot 2\pi/n}$

Eigenschaften

- $\overline{\omega} = \omega^{-1}$
- Symmetrie: $\omega^{a(n-b)} = \omega^{-ab}$
- Periodik: $\omega^{ab} = \omega^{a(b+n)}$

Beispiel ($n = 3$):

$$\overline{\omega}^4 = \omega^2 = \overline{\omega}$$

$$\omega^4 = \overline{\omega}^2 = \omega$$

- **Diskrete Fourier-Transformation (DFT):**

$$DFT(v) := c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk}$$

- **Inverse Diskrete Fourier-Transformation (IDFT):**

$$IDFT(c) := v_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{jk}$$

Diskrete Fourier-Transformation

Matrix-Vektor Schreibweise:

- **DFT:**

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = c = M_{\mathrm{DFT},n} \cdot v = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{\omega}^1 & \overline{\omega}^2 & \dots & \overline{\omega}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{n-1} & \overline{\omega}^{2(n-1)} & \dots & \overline{\omega}^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

- **IDFT:**

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = v = M_{\mathrm{IDFT},n} \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie $\mathrm{DFT}(\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T)$!

b) Zeigen Sie, dass $\omega^n = 1$.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{DFT}(v) = \frac{1}{n}\overline{\mathrm{IDFT}(\bar{v})}$.

d) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{DFT}(v+u) = \mathrm{DFT}(v) + \mathrm{DFT}(u)$.

Schnelle inverse Fourier-Transformation

- Schnellere Implementierung der Fourier-Transformation

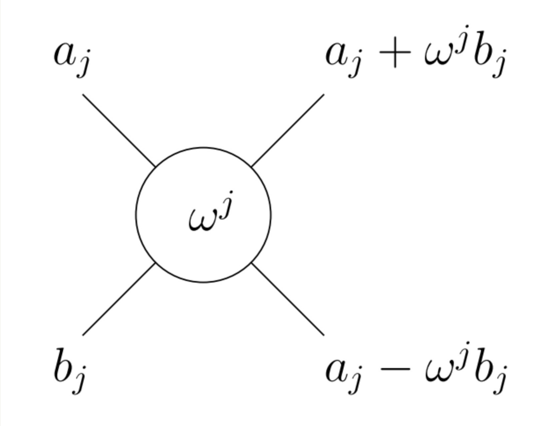
Algorithmus:

1. **Sortier-Phase**:
    - Eingabevektor nach Einträgen mit geraden/ungeraden Indizes aufteilen
    - Anhand der Indizes in 2 gleich lange Teilvektoren aufteilen
    - Rekursiv wiederholen, bis Teilvektoren je Länge 1 haben

Schnelle inverse Fourier-Transformation

2. Kombinationsphase

- Zusammenführung der Teilvektoren
- **Butterfly Operator**



cdn.vox-cdn.com/thumbor/8rF2keXrhL8sYIEbVbtaJpIC4qs=/0x10:500x291/1600x900/cdn.vox-cdn.com/uploads/chorus_image/image/59741997/n4scgse21iuz.0.jpg

→ Laufzeit $\mathcal{O}(n \cdot log(n))$

Schnelle inverse Fourier-Transformation

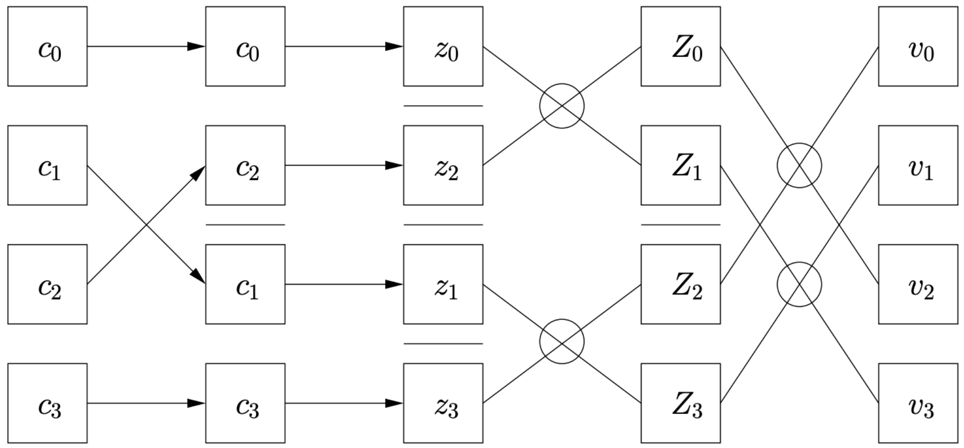


Abbildung 3: Schematischer Ablauf des FFT-Algorithmus.

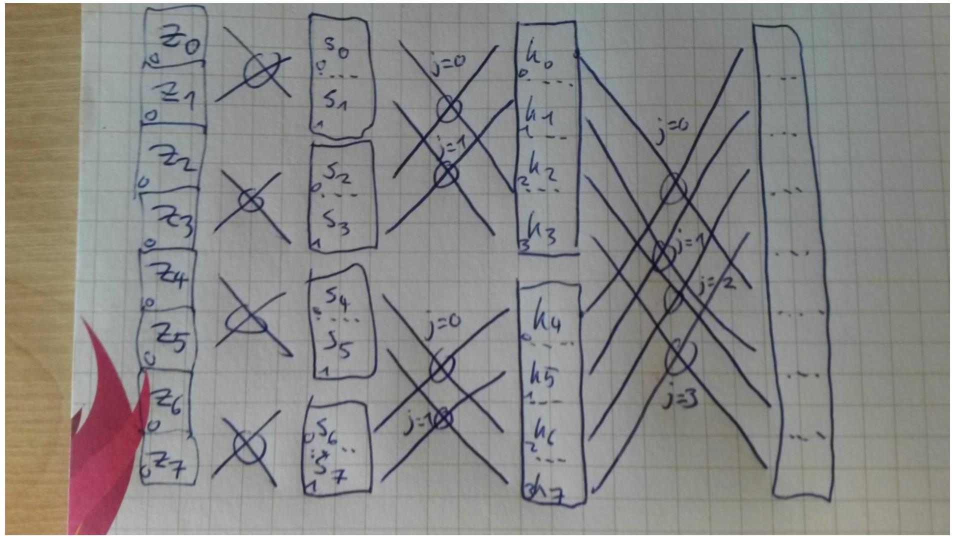


Abbildung 13: Typische Skizze einer Fast Fourier Transformation mit 8 Einträgen.

Aufgabe 3)

Der Einfachheit halber soll nun $n = 4$ sein, d.h. wir wollen mit der IDFT aus den vier Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 die zugehörigen vier Funktionswerte v_0, v_1, v_2, v_3 berechnen.

a) Berechnen Sie die v_j zunächst nach der direkten Formel $\text{IDFT}(c)$!

b) Verwenden Sie nun den IFFT-Algorithmus, um zu zeigen, dass man damit tatsächlich dasselbe Ergebnis wie in a) erhält!

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg