Numerisches Programmieren

Übung #03

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Interpolation

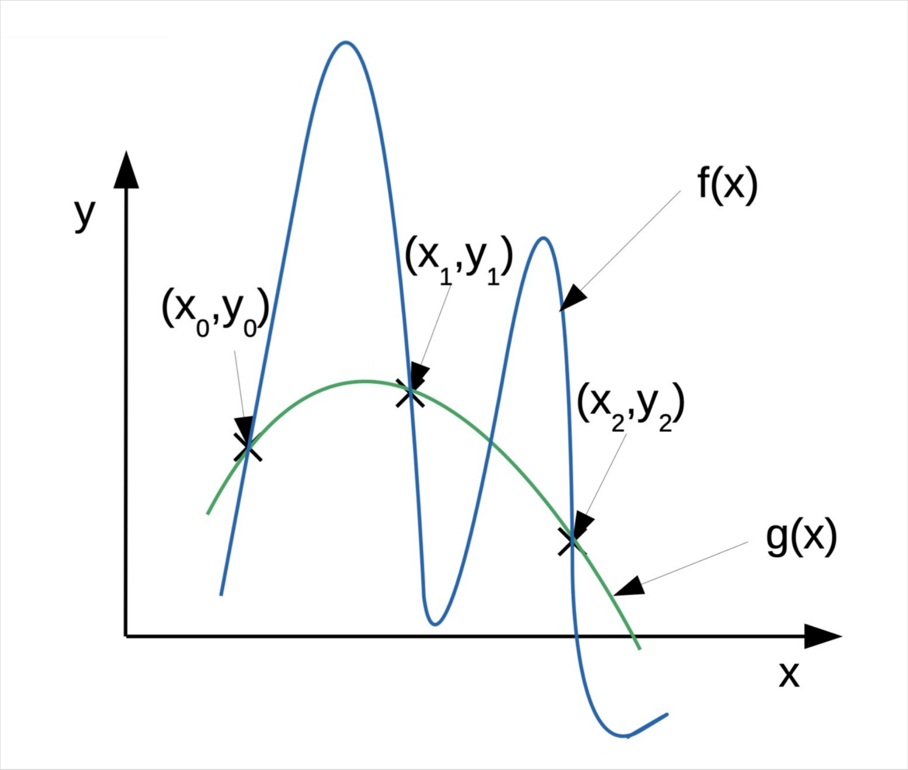
Interpolation

- Abschätzung einer unbekannten Funktion $f(x)$
- **Stützpunkte** $(x_i,\ f(x_i))$ sind gegeben

→ Konstruiere eine **Interpolante** $\boldsymbol{G(x)}$

  - Soll durch alle Stützpunkte gehen: $G(x_i) = f(x_i), \quad \forall i$
  - Idealerweise: $G(x) \approx f(x)$

- Verschiedene Ansätze dafür 😎



Mit **Basisfunktionen**

- Als gewichtete Summe von **Basisfunktionen** $g_i(x)$:

$$G(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \cdot c_i$$

→ Koeffizienten c_i der Basisfunktionen gesucht

- Diese Summe kann als Matrixmultiplikation formuliert werden

Mit **Basisfunktionen**

Algorithmus:

- gegeben: Basisfunktionen, Stützpunkte
- gesucht: Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_o \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

→ Lösung des LGS entspricht den gesuchten Koeffizienten c_i

1. Funktionswerte der Basisfunktionen $g_i(x)$ an den Stützstellen x_j in der Matrix einsetzen
2. Stützwerte $f(x_j)$ einsetzen
3. LGS lösen → c_i
4. Berechnung der Interpolante $G(x)$ mithilfe der gewichteten Summe

Basisfunktionen

- Basisfunktionen meist Polynome
  - Grad k eines Polynoms entspricht dem max. Exponenten
  - Bei n Stützstellen: Interpolante vom Grad $n-1$
- **Monome:**
  - $g_0(x) = 1; \quad g_1(x) = x; \quad g_2(x) = x^2; \quad \dots \quad g_n(x) = x^n$
- **Lagrange-Polynombasis** (gleich mehr dazu)

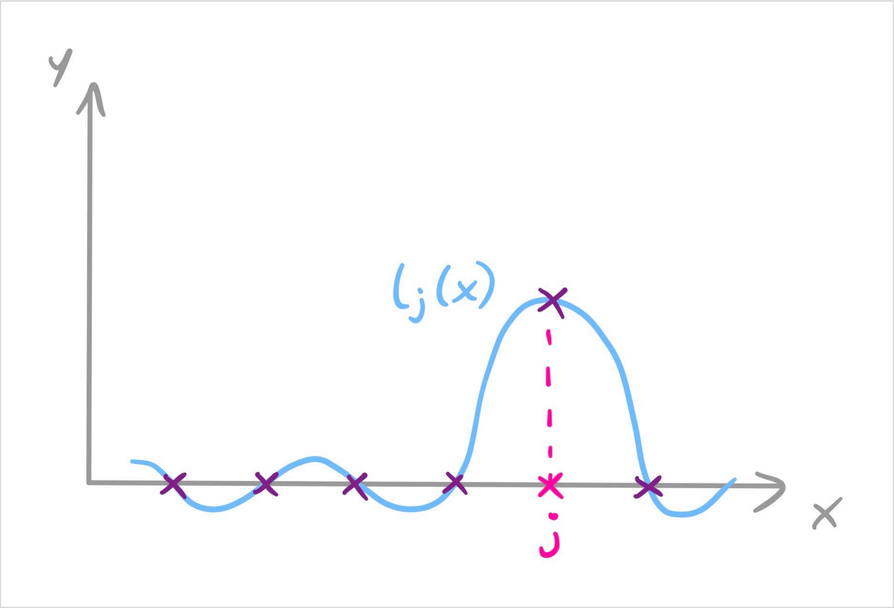
Wichtig: Bei Polynombasen ist die Interpolante immer eindeutig!
(unabhängig von der Basis)

Lagrange-Basis

- „Schlaue Basispolynome“
- Lagrange-Polynom l_j gegeben durch:

$$l_j(x) = \prod_{i=0;\ i\neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

  - Für jede Stützstelle j ein zugehöriges Lagrange-Polynom l_j
  - l_j beträgt 1 an Stützstelle j
  - Und 0 an jeder anderen Stützstelle



Aufgabe 1)

1) Interpolation mit unterschiedlichen Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekannten Funktion f sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie für die folgenden Basisfunktionen jeweils

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion G,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

an.

Aufgabe 1)

a) Die Polynom-Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = x^2,$$

b) Die trigonometrischen Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

c) Die Tchebycheff-Polynombasis:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

d) die Lagrange-Polynombasis l_0, l_1, l_2 für x_0, x_1, x_2 (berechnen Sie diese zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i=0;\, i \neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie die Antworten zu a), c) und d).

The Meme Polynomial

$$f(x) = \frac{3007x^5}{60} - \frac{1513x^4}{3} + \frac{21913x^3}{12} - \frac{8090x^2}{3} + \frac{6729x}{5} + 21$$

$$f(0) = 21$$
$$f(1) = 42$$
$$f(2) = 69$$
$$f(3) = 420$$
$$f(4) = 1337$$
$$f(5) = 9000$$

pbs.twimg.com/media/E3rHzB-XOAEaGHV.jpg

Newton Verfahren

- „Dreiecksschema“
- Initialisierung: $c_{i,0} = f(x_i) = y_i$
- Iterationsvorschrift: $c_{i,k} = \dfrac{c_{i+1,\,k-1} - c_{i,\,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$ $\left(\dfrac{c_{linksUnten} - c_{links}}{x_{i+k} - x_{links}}\right)$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2		$\cdots$
x_0	0	$c_{0,0} = y_0$	$\rightarrow$	$c_{0,1}$	$\rightarrow$	$c_{0,2}$	$\rightarrow$	$\cdots$
			$\nearrow$		$\nearrow$			
x_1	1	$c_{1,0} = y_1$	$\rightarrow$	$c_{1,1}$	$\rightarrow$	$\vdots$		
			$\nearrow$					
x_2	2	$c_{2,0} = y_2$	$\rightarrow$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						

Newton Verfahren

Algorithmus:

1. Stützwerte $c_{i,0} = f(x_i)$ in Spalte $k = 0$ für eintragen
2. Zellen $c_{i,k}$ ausrechnen
3. Koeffizienten in oberster Zeile rauslesen
4. Polynom aufstellen:

$$G(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \cdots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Vorteil: Neue Stützpunkte können einfach hinzugefügt werden

Aufgabe 2)

In dieser Aufgabe soll zu den Punkten aus Aufgabe 1)

$$P_0 = (0, 3), \qquad P_1 = (1, 0) \quad \text{und } P_2 = (2, 1)$$

ein Interpolationspolynom bestimmt werden.

a) Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den Gleichungen (1) - (2). Stellen Sie dazu auch das Dreiecksschema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (3)!

b) Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Dreiecksschema aus Teilfaufgabe b) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (3) an!

Aitken-Neville Verfahren

- Auswertung **direkt an einer Stelle x**
  - Polynom selbst nicht ausgerechnet
- Tabellarisch ähnlich wie beim Newton Verfahren
- Iterationsvorschrift:

$$p[i,k] \coloneqq p[i,k-1] + \frac{x - x[i]}{x[i+k] - x[i]} \cdot (p[i+1,k-1] - p[i,k-1])$$

$$p_{neu} \coloneqq p_{links} + \frac{x - x_{links}}{x_{i+k} - x_{links}} \cdot (p_{linksUnten} - p_{links})$$

Aitken-Neville Verfahren

$$\begin{array}{c|c|ccccccc} x_i & i\backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\ \hline x_0 & 0 & p[0,0]=y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \boxed{\cdots} \\ & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\ x_1 & 1 & p[1,0]=y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\ & & & \nearrow & & & & & \\ x_2 & 2 & p[2,0]=y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \end{array}$$

→ Lösung ist der Eintrag **rechts oben**

- Auch hier können Stützpunkte einfach hinzugefügt werden

Aufgabe 3)

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

Aufgabe 4)

4) Runge-Effekt

Bisher haben wir uns mit Polynominterpolation mit gleichverteilten Stützpunkten beschäftigt. Hierfür wurde z.B. das Newtonverfahren verwendet, um ein eindeutiges Polynom $n-1$. Grades, oder geringer, zu konstruieren, welches durch alle n gegebenen Stützpunkte verläuft.

a) Überlegen Sie sich wie das Interpolationspolynom von $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (siehe auch Abb. 1) mit wachsender Zahl von Stüzstellen aussieht.

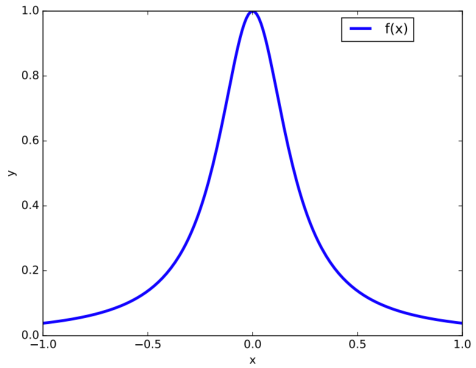


Abbildung 1: Runge Funktion f(x)

b) Was könnte man machen, um das Interpolationsergebnis zu verbessern?

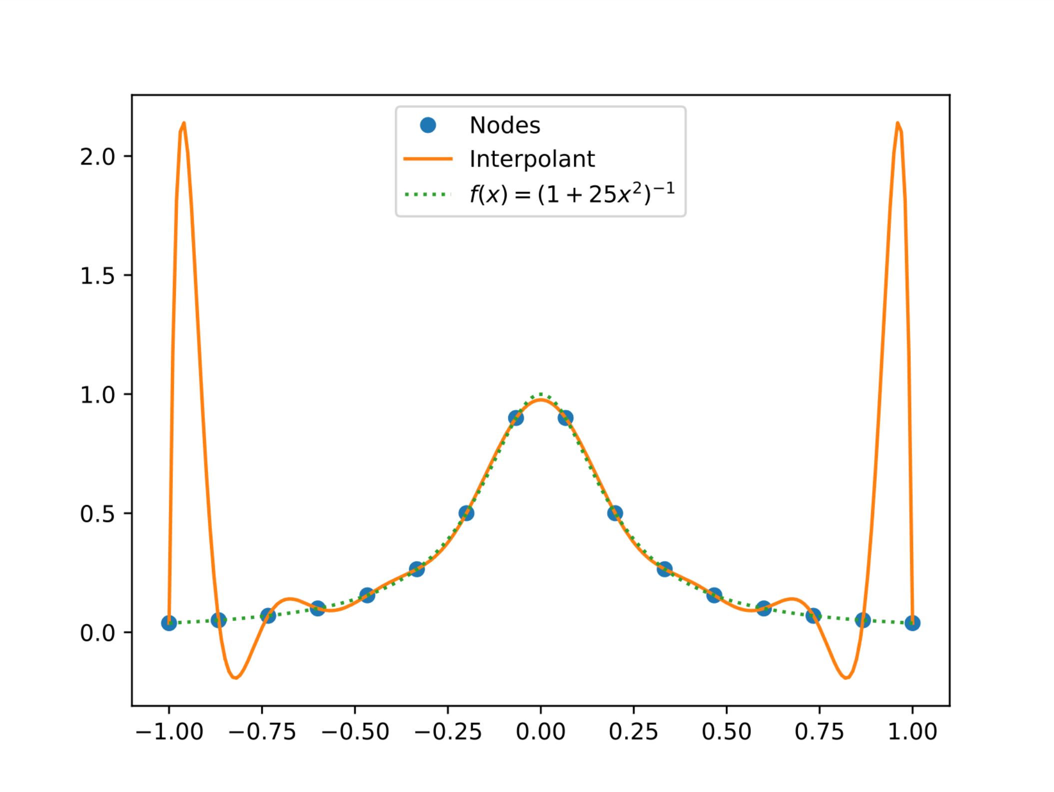
c) Zeichnen Sie das Ergebnis der verbesserten Methoden in die Abbildung 1 ein!

Runge Effekt

- Bei Interpolation mit Polynomen hohen Grads bei gleichverteilten Stützstellen

→ Starke Abweichung von $f(x)$ an bestimmten Stellen

- Möglichkeiten
  - Bessere Wahl der Interpolationspunkte (z.B. Chebyshev Punkte)
  - Stückweise Interpolation



johndcook.com/runge_cauchy.svg

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg