Numerisches Programmieren

Übung #06

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Quadratur

Quadratur

- Integral einer Funktion über $[a, b]$

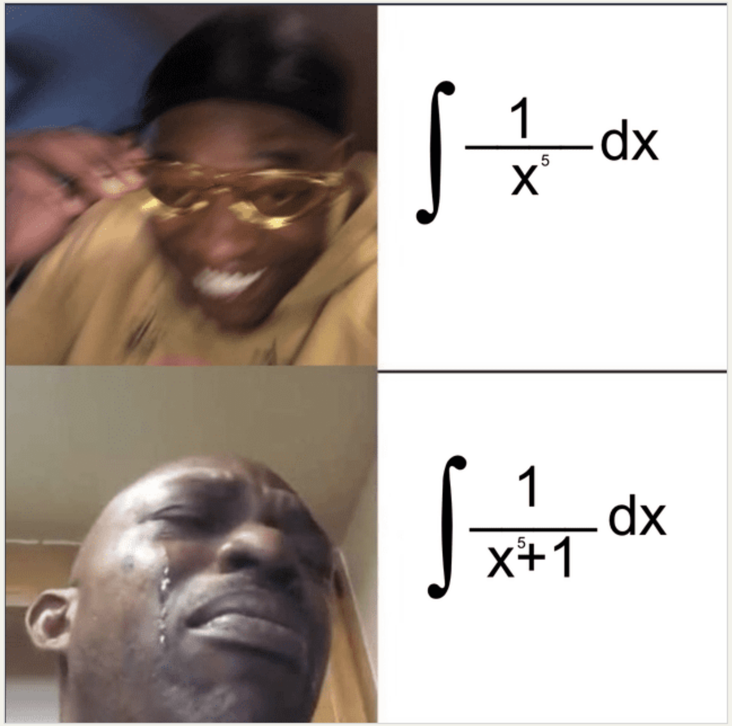
$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

  - Analytisch nicht immer möglich

- Ansatz: Integration einer Annäherung von $f(x)$ (z.B. von einem Interpolanten)

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot w_i$$

  - Stützwerte $f(x_i)$ und Gewichtungen w_i



cdn.zmescience.com/wp-content/uploads/2022/11/image-42.png

Aufgabe 1)

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel I_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

$$\text{i) } \int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ii) } \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x \text{ und} \qquad \text{iii) } \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

näherungsweise zu bestimmen!

Aufgabe 1)

c) Welche Näherung I_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

d) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel I_2 aus Teilaufgabe c) die Gleichung

$$I_2(p) \quad = \quad \int\limits_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$$

stets erfüllt!

Quadratur

- Quadratur <u>stückweise</u> angewendet
  - Weil sonst schlechte Ergebnisse für komplizierte Funktionen

<u>Wichtig</u>: Ein Interpolationspolynom vom Grad $2n$ kann ein Polynom von einem Grad höher exakt integrieren (also $2n + 1$)

  - Funktioniert nicht bei ungeradem Grad des Interpolanten

Trapezregel

a. Approximation durch ein einziges **Trapez**

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

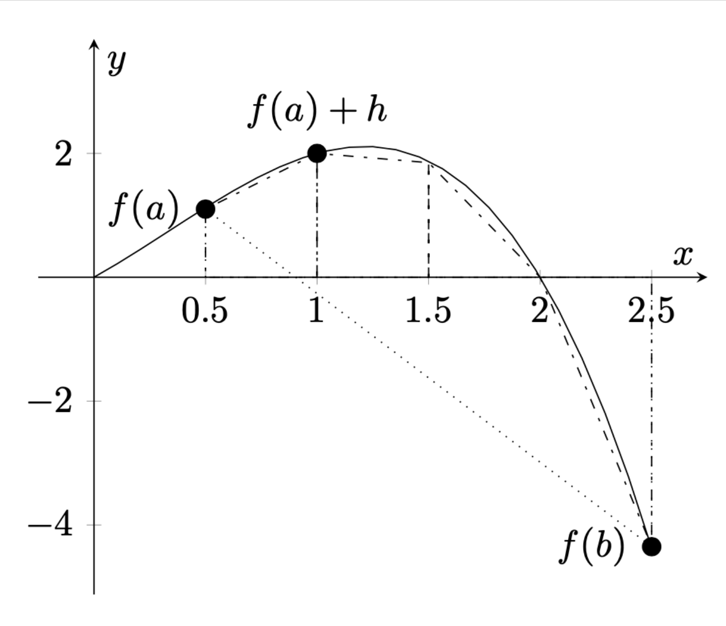
b. Verkettung einzelner Trapeze
→ **Trapezsumme**

$$Q_{TS}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

$H = b - a$ (Gesamtlänge von $[a, b]$)

$h = \frac{b-a}{n}$ (Länge der Teilintervalle); $f_i \coloneqq$ Stützwerte

Trapezregel/-summe:



Restglied

- Zur Fehlerabschätzung
  - Differenz analyt. Lösung & Abschätzung
- Beispiel: Restglied bei Trapezsumme:

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f''(\xi)}{12}$$

- Für ξ der Wert aus $[a,b]$ eingesetzt, wodurch Restglied maximal wird (Fehlerabschätzung nach oben)
  - Weil Restglied manchmal abhängig vom Intervall $[a,b]$

Aufgabe 2)

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_{\mathrm{T}}(f)$ und $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$,

$$Q_{\mathrm{T}}(f) = H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{\mathrm{TS}}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_{\mathrm{T}}(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{\mathrm{TS}}(f;h) \quad = \quad h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

c) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_{\mathrm{T}}(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

d) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

Keplersche Fassregel

- Höhere Genauigkeit als mit Trapezen

a. Approximation durch **Fassregel:**

$$Q_F(f) = H \cdot \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}$$

b. Approximation durch **Simpson-Summe:**

$$Q_{SS}(f;h) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Aufgabe 3)

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_{\mathrm{F}}(g)$ und $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_{\mathrm{F}}(g) = H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{\mathrm{SS}}(g;h) = \frac{h}{3} \cdot \left(g_0 + 4g_1 + 2g_2 + 4g_3 + \ldots + 2g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n\right), \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $g_i = g(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_{\mathrm{F}}(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{SS}}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{\mathrm{SS}}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg