Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

6. Trainingsblatt: Numerische Quadratur

1) Klassische Quadratur

Wir wollen $\int_{-1.5}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ berechnen. Gegeben seien hierfür folgende Stützstellen der uns sonst unbekannten Funktion $f(x)$:

$$f(-1.5) = 0 \qquad f(0) = 2 \qquad f(1.5) = 4 \qquad f(2) = 8$$

a) Lösen Sie das obige Quadraturproblem mithilfe der Trapezregel und -summe.

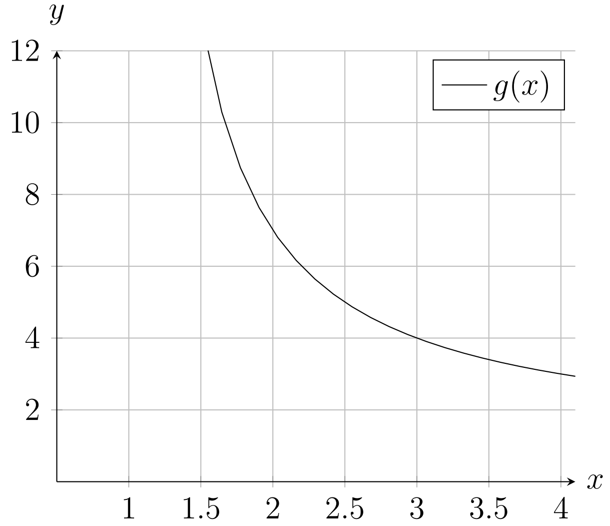
b) Nun dürfen Sie auch die Simpsonregel und -summe verwenden. Wie verändert sich das Ergebnis des Quadraturproblems, wenn Sie dieses mit bestmöglicher Genauigkeit berechnen wollen.

Gegeben sei nun folgendes Problem:

$$\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x \qquad g(x) = \frac{x+5}{x-1}$$

c) Wir wollen das Problem mithilfe einer einzigen Trapezregel lösen. Das ist aber nicht möglich, da der Punkt an der Stelle $x = 1$ undefiniert ist. Lösen Sie daher das Problem, indem Sie den Punkt an der Stelle $x = 2$ anstelle von $x = 1$ verwenden.

d) Zeichnen Sie ihre Lösung aus c) in folgende Grafik ein:



Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Hier müssen wir aufpassen. Wir können über die ersten drei Punkte eine Trapezsumme machen, nicht aber mit dem letzten Punkt, da er nicht äquidistant zum Rest ist. Also verwenden wir für das letzte Punktepaar eine Trapezregel und für den Rest eine Trapezsumme. Wir berechnen:

$$\int_{-1.5}^{2} f(x)\mathrm{d}x \approx Q_{\mathrm{TS}}(f;1.5) + Q_{\mathrm{T}}(f;0.5)$$

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{TS}}(f;1.5) &= h \cdot \left(\frac{f(-1.5)}{2} + f(0) + \frac{f(1.5)}{2}\right) \\ &= 1.5 \cdot (0 + 2 + 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{T}}(f;0.5) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f(1.5)}{2} + \frac{f(2)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1.5}^{2} f(x)\mathrm{d}x &\approx Q_{\mathrm{TS}}(f;1.5) + Q_{\mathrm{T}}(f;0.5) \\ &= 6 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

b) Wir machen über die ersten drei Punkte statt eine Trapezsumme eine Simpsonregel.

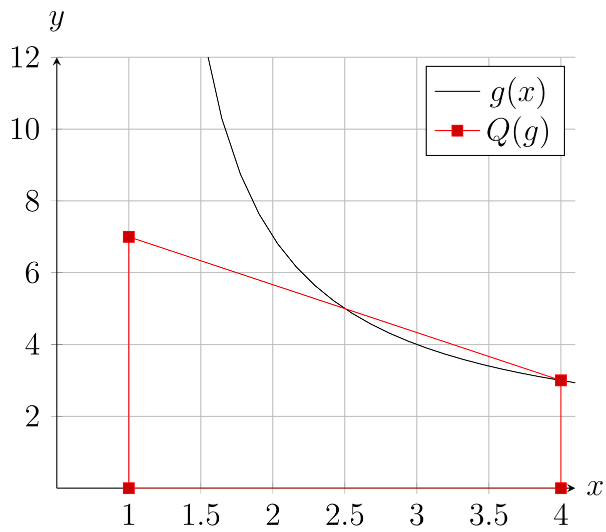
$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{SS}}(f;1.5) &= H \cdot \frac{f(-1.5) + 4f(0) + f(1.5)}{6} \\ &= 3 \cdot \frac{0 + 8 + 4}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Das Ergebnis verändert sich also gar nicht. Das liegt daran, dass die ersten drei Stützpunkte eine Gerade bilden.

c) Wir berechnen eine Trapezregel über den gesamten Bereich, werten aber nicht an der unteren Grenze aus, sondern bei $g(2)$:

$$\begin{aligned} Q(g) &= 3 \cdot \left(\frac{g(2)}{2} + \frac{g(4)}{2}\right) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= 3 \cdot 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

d) Wir zeichnen das berechnete $Q(g)$ ein:



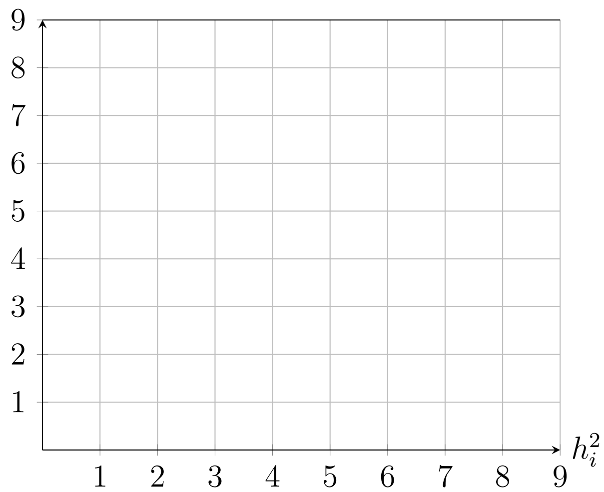
2) Quadratur nach Romberg

Für eine Romberg-Quadratur haben wir folgende zwei Trapezsummen einer Polynomfunktion $f(x)$ dritten Grades gegeben:

$$Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{1}) = 2$$ 步长为2

$$Q_{\mathrm{TS}}(f; \frac{b-a}{2}) = 5$$ 步长为

a) Mit $a = 1$ und $b = 3$, zeichnen Sie die Lösung der Romberg-Quadratur in folgende Grafik ein:



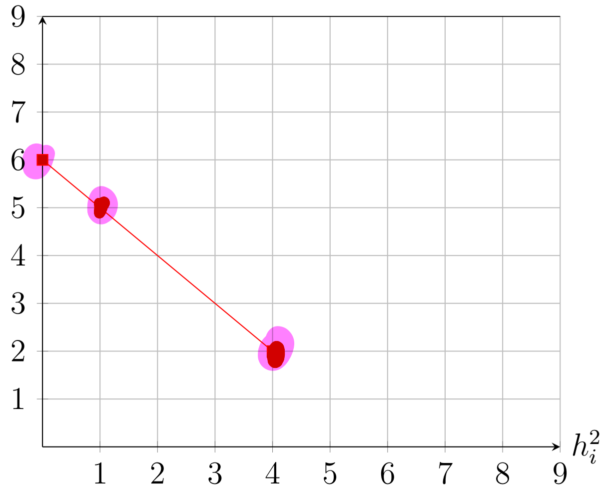
b) Diskutieren Sie die Genauigkeit Ihrer Lösung aus a). Wie weit sind Sie von der analytisch korrekten Lösung entfernt?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung. . .

Lösung:

a) Wir zeichnen beide Ergebnisse unserer gegebenen Trapezsummen ein. Unsere Schrittweiten sind:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{b-a}{1} = \frac{3-1}{1} \\ &= 2 \\ h_2 &= \frac{b-a}{2} = \frac{h_1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$



b) Die Lösung muss analytisch korrekt sein. Denn Romberg-Quadratur mit n Trapezsummen ist bis Grad $(2n-1)$ exakt. Wir haben eine Funktion dritten Grades. Und mit $n = 2$ und damit $(2 \cdot 2 - 1 = 3)$ haben wir den benötigten Grad erreicht.

3) Gauß Quadratur

Ihr Arbeitgeber möchte, dass Sie mithilfe von der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine neue Quadraturregel herleiten. Hierfür haben Sie zwei Stützpunkte zur Verfügung.

Jedoch legt Ihr Arbeitgeber vor, dass $w_0 = \frac{1}{2}$ sein muss. Nach einem Grund fragen Sie lieber nicht.

a) Leiten Sie die Quadraturregel nach Gauß mit obiger Bedingung her.

b) Wenden Sie Ihre Quadraturregel aus a) auf folgendes Problem an:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \qquad f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$$

c) Bis zu welchem Polynomgrad ist Ihre Quadraturregel aus a) exakt?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Methode der unbestimmten Koeffizienten anwenden (drei weitere Gleichungen benötigt):

Grad 0:

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= 2 \\ \frac{1}{2} + w_1 &= 2 \\ \rightarrow w_1 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Grad 1:

$$x_0 w_0 + x_1 w_1 = 0$$

Grad 2:

$$x_0^2 w_0 + x_1^2 w_1 = \frac{2}{3}$$

Nun miteinander verrechnen:

$$\begin{aligned} x_0 w_0 + x_1 w_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} x_0 + \frac{3}{2} x_1 &= 0 \\ \frac{1}{2} x_0 &= -\frac{3}{2} x_1 \\ x_0 &= -3x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{3}{2} x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ x_0^2 + 3x_1^2 &= \frac{4}{3} \\ 9x_1^2 + 3x_1^2 &= \frac{4}{3} \\ 12x_1^2 &= \frac{4}{3} \\ x_1^2 &= \frac{4}{36} \\ x_1 &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also haben wir:

$$x_0 = -1 \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad w_0 = \frac{1}{2} \qquad w_1 = \frac{3}{2}$$

b) Achtung! Hier ist der Integralbereich von 0 bis 2. Wir müssen unsere Regel aus a) also transformieren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{G}}(f) &= w_0 \cdot f(x_0 + 1) + w_1 \cdot f(x_1 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Stützpunkte mithilfe der Funktion holen und dann einsetzen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ f\left(\frac{4}{3}\right) &= -2 + 4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{G}}(f) &= \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 2 \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

c) Können wir durch unseren Eingriff ($w_0 = \frac{1}{2}$) in das Optimierungsverfahren nicht mehr nach Gauß-Qaudratur ($2n - 1$) sagen. Wir können aber wissen, dass wir bis Grad 2 noch exakt sein müssen.