Numerisches Programmieren

Übung #09

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg

Differentialgleichungen

Ordinary differential equations (ODEs)

- **Gewöhnliche Differentialgleichung**: Zusammenhang zwischen einer Funktion & ihrer Ableitung als Gleichung

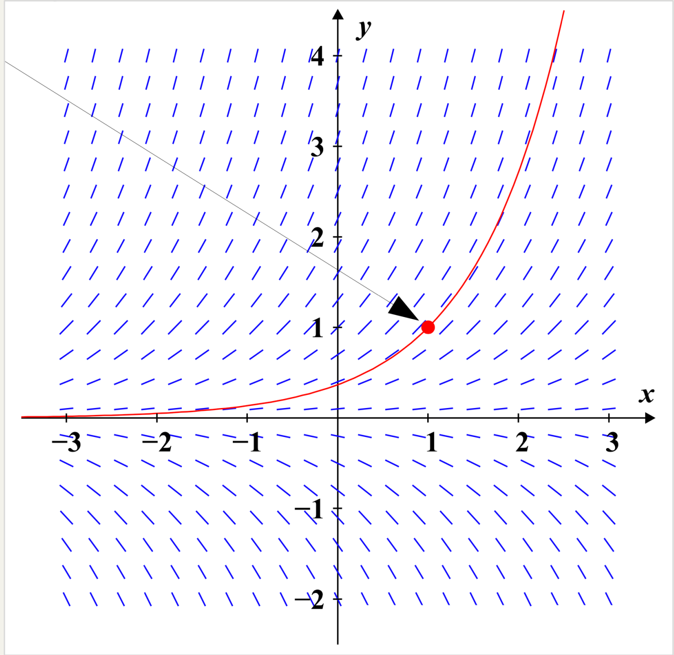
$$\dot{y}(t) = \varphi(y, t)$$

- Beispiel: Blume, wo Wachstumsrate zweimal so groß ist wie ihre aktuelle Höhe:

$$\dot{y}(t) = 2y(t)$$

Gleich: Verschiedene Möglichkeiten geschlossene Form für $y(t)$ zu bestimmen (Lösung der ODE)

Visualisierung als Richtungsfeld:



- Konkrete Funktion (rot) eindeutig durch **Anfangswert** bestimmbar

Separation der Variablen

- Möglichkeit die analytische Lösung von $y(t)$ zu finden

<u>Algorithmus</u> (mit Beispiel): $\dot{y}(t) = y(t)$

1. Leibniz Notation $\frac{dy}{dt} = y$
2. Separation der Variablen $\frac{1}{y}\,dy = 1\,dt$ (y auf eine, t auf andere Seite)
3. Integration $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta}\,d\eta = \int_{t_0}^{t} 1\,d\tau \quad \Leftrightarrow \quad ln(|y|) - ln(|y_0|) = t - t_0$
4. Auflösung nach y $ln\left(\left|\frac{y}{y_0}\right|\right) = t - t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{y}{y_0}\right| = e^{t-t_0}$

   并验证 $\rightarrow \boldsymbol{y = \pm y_0 \cdot e^{t-t_0}}$

5. Anfangswertbedingungen $y(t) = y_0 \cdot e^{t-t_0}$ (wegen $y(t_0) = y_0$)

Anfangswertproblem (AWP)

- **Anfangsbedingungen $\boldsymbol{y_0}$ und $\boldsymbol{t_0}$**
  - $t_0 :=$ Niedrigster gültiger Wert für t (steht meist für die Zeit)
  - $y_0 :=$ Wert bei Startzeitpunkt t_0

→ $y(t_0) = y_0$

- Ohne Anfangsbedingungen beschreibt die ODE nur eine „Klasse“ von Funktionen (Richtungsfeld, Folie 3)
- Spezifizierung der allgemeinen Lösung der ODE (→ roter Graph, Folie 3):

  → Einfach y_0, t_0 in $y(t)$ einsetzen (5. Schritt vorherige Folie)

Aufgabe 1)

1) Kondition von Anfangswertproblemen

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) mithilfe der Separation der Variablen:

$$\text{i) } \dot{y}(t) = 2y(t) \qquad \text{ii) } \dot{y}(t) = -2y(t)$$

b) Gegeben seien folgende Anfangswertbedingungen für die jeweiligen ODEs aus a). Berechnen Sie nun die analytische Lösung der daraus resultierenden Anfangswertprobleme (AWP):

$$\text{i) } \dot{y}(t) = 2y(t),\ y(0) = 3,\ t \geq 0 \qquad \text{ii) } \dot{y}(t) = -2y(t),\ y(0) = y_0,\ t \geq 0.$$

c) Diskutieren Sie jeweils die Kondition der beiden AWP aus b).

Explizite Verfahren

- Numerische Annäherung von ODEs
- Verschiedene Methoden:
  - **Explizites Euler-Verfahren**
  - **Verfahren von Heun**

- Im folgenden:
  - $\delta t \coloneqq$ Schrittweite
  - $f(t_k, y_k) \coloneqq$ Ableitung zum diskreten Zeitpunkt t_k und Wert y_k

Explizite Verfahren

- Es sei: $t_k = t_0 + k \cdot \delta t$
- **Explizites Euler-Verfahren** (1. Ordnung):
  - Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Bestimmung der nächsten Annäherung

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)$$

- **Verfahren von Heun** (2. Ordnung):
  - Steigung in zwei Punkten verwendet

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)\right)\right)$$

- (Einfach entsprechend rote und blaue Ausdrücke als Argumente in f einsetzen)

Aufgabe 2)

2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte y_k, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen t_k approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

   i) **Explizites Euler-Verfahren**:

   Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

   ii) **Verfahren von Heun**:

   Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter f-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)) \right); \end{aligned}$$

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg