Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Trainingsblatt: Interpolation

1) Polynominterpolation

Befassen wir uns mit der regulären Polynominterpolation mithilfe von Basisfunktionen. Gegeben seien folgende Stützpunkte:

$$P_0(0|0); \quad P_1(2|5); \quad P_2(4|6)$$

a) Wenn wir obige Punkte interpolieren, was für eine Art Funktion kommt dabei heraus?

b) Berechnen Sie die Interpolationspolynomfunktion und geben Sie als Rechenweg die entsprechenden Lagrange-Basisfunktionen an.

c) Schätzen Sie den »worst-case« Interpolationsfehler an der Stelle $x = 3$ ab. Hierfür seien folgende Ableitungen gegeben:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 4$$
$$f'''(x) = \frac{3}{2}$$

d) Welchen Wert muss ein neuer, vierter Stützpunkt an der Stelle $x = -2$ besitzen, damit sich die resultierende Interpolationspolynomfunktion aus b) nicht ändert?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Da wir drei Stützpunkte haben und diese nicht auf einer Gerade liegen, erhalten wir eine Polynomfunktion zweiten Grades, also eine Parabelfunktion.

回点

Polynomfunktion dritten Grades

b) Aus der Angabe lesen wir:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \quad & y_0 &= 0 \\ x_1 &= 2 \quad & y_1 &= 5 \\ x_2 &= 4 \quad & y_2 &= 6 \end{aligned}$$

x_0 x_1 x_2

$0;0$ $2;5$ $4;6$

Wir berechnen zuerst die Lagrange-Bassifunktionen.

$$\begin{aligned} L_j &= \prod_{i=0;i\neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \\ L_0 &= \prod_{i=0;i\neq 0}^{2} \frac{x - x_i}{0 - x_i} \\ &= \frac{x - x_1}{0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{0 - x_2} \\ &= \frac{x - 2}{0 - 2} \cdot \frac{x - 4}{0 - 4} \\ &= \frac{2 - x}{2} \cdot \frac{4 - x}{4} \\ &= \frac{(2 - x) \cdot (4 - x)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \\ &= \frac{x-2}{-2} \cdot \frac{x-4}{-4} \\ &= \frac{(x-2)\cdot(x-4)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x-0}{2} \cdot \frac{x-4}{-2} \\ &= \frac{x(x-4)}{-4} \end{aligned}$$

Analog sind die anderen zwei Basisfunktionen:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x - 0}{2 - 0} \cdot \frac{x - 4}{2 - 4} \\ &= \frac{x(x - 4)}{-4} \\ L_2 &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x - 0}{4 - 0} \cdot \frac{x - 2}{4 - 2} \\ &= \frac{x(x - 2)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x-0}{4} \cdot \frac{x-2}{2} \\ &= \frac{x(x-2)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 \\ &= 0 L_0 + 5 L_1 + 6 L_2 \\ &= -\frac{5}{4} x(x-4) + \frac{3}{4} x(x-2) \\ &= -\frac{5}{4}x^2 + 5x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{6}{4}x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \end{aligned}$$

Jetzt noch die Interpolationsfunktion aufstellen:

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 \\ &= 0 \cdot L_0 + 5 \cdot L_1 + 6 \cdot L_2 \\ &= 5 \cdot \frac{x(x - 4)}{-4} + 6 \cdot \frac{x(x - 2)}{8} \\ &= -\frac{5}{4} \cdot (x^2 - 4x) + \frac{6}{8} \cdot (x^2 - 2x) \\ &= -\frac{5}{4}x^2 + 5x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x) \\ &= \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

c) Wir setzen in unsere Fehlerabschätzungsformel ein:

$f'''(x) = \frac{3}{2}$

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \right|$$

右侧:

Wir setzen ein: $x = 3$, $n = 3$:

$(x-0)(x-2)(x-4)$

$= 3 \times 1 \times (-1) = -3$

左侧

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| \\
&= \left| \frac{3}{2 \cdot 6} (x - 0)(x - 2)(x - 4) \right| \\
&= \left| \frac{1}{4} (3 - 0)(3 - 2)(3 - 4) \right| \\
&= \left| \frac{1}{4} 3 \cdot 1 \cdot (-1) \right| \\
&= \left| \frac{-3}{4} \right| \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

取 $\rightarrow \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4}$

$\frac{f''(3)}{3!} = \frac{\frac{3}{2} \times 3 - 4}{6} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{4} \times (-3)\right| = \frac{3}{4}$

Der maximale Fehler der Interpolation aus b) beträgt also $\frac{3}{4}$.

d) Damit sich die Polynomfunktion nicht mehr ändert, muss ein neuer Stützpunkt schon auf der Parabel aus b) liegen. Wir setzen also $p(-2)$ ein.

$$\begin{aligned}
p(-2) &= \frac{7}{2} \cdot -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \\
&= -7 - 2 \\
&= -9
\end{aligned}$$

$p(-2) = -\frac{1}{2} \times 4 + \frac{7}{2}(-2)$

$= -7 - 2 = -9$

Der neue Stützpunkt müsste einen y-Wert von -9 besitzen.

2) Dreiecksschema

Betrachten wir nun die Interpolation mit einem Dreiecksschema und gucken uns etwas Verständnis an.

a) Gegeben seien die Stützstellen einer uns unbekannten Funktion $f(x)$:

$$f(0) = 3; \quad f(1) = 2; \quad f(8) = 2$$

Berechnen Sie die Interpolation mithilfe des Newton-Verfahrens und stellen Sie das Dreiecksschema auf.

b) Bei gleichbleibenden Stützstellen, wie unterscheidet sich (ganz allgemein) das Ergebnis einer Interpolation mit den Lagrange-Basisfunktionen gegenüber dem eines Newton-Verfahrens?

c) Gilt bei Polynominterpolation immer »Je mehr Stützstellen, desto höher ist die Genauigkeit der Interpolation«?

d) Welcher Vorteil bietet eine stückweise Interpolation gegenüber einer nicht-stückweisen?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung. . .

Lösung:

a) Stellen wir zuerst das Dreiecksschema auf:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
0	1	$\boxed{3}$	$\boxed{C_{0,1}}$	$C_{0,2}$
1	2	2	$C_{1,1}$	
8	3	2		

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
0	0	3	$c_{0,1}$	$c_{0,2}$
1	1	2	$c_{1,1}$	
8	2	2		

① $C_{0,1} = \dfrac{2-3}{1-0} = -1$

② $C_{1,1} = \dfrac{2-2}{8-1} = \dfrac{0}{7}$

③ $C_{0,2} = \dfrac{0-(-1)}{8-0} = \dfrac{1}{8}$

$$
\begin{aligned}
c_{0,1} &= \frac{2-3}{1-0} = -1 \\
c_{1,1} &= \frac{2-2}{8-1} = 0 \\
c_{0,2} &= \frac{0+1}{8-0} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

$x_0 = 0$ $\quad$ $x_1 = 1$ $\quad$ $x_2 = 8$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 3 + (-1)(x - x_0) + \frac{1}{8}(x - x_0)(x - x_1) \\
&= 3 + (-1)x + \frac{1}{8}x(x-1) \\
&= 3 - x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x \\
&= \frac{1}{8}x^2 - \frac{8}{8}x + 3
\end{aligned}
$$

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
0	0	3	-1	$1/8$
1	1	2	0	
8	2	2		

Jetzt noch die Interpolationsfunktion aufstellen:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 3 + (-1) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{8} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \\
&= 3 + (-1) \cdot (x - 0) + \frac{1}{8} \cdot (x - 0)(x - 1) \\
&= 3 + (-x) + \frac{1}{8} \cdot (x^2 - x) \\
&= \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + 3
\end{aligned}
$$

b) Es unterscheidet sich gar nicht, denn Interpolationspolynome sind stets eindeutig!

c) Theoretisch erstmal schon, aber bei vielen Stützstellen kommt der Runge-Effekt zum Vorschein und macht Ergebnisse deutlich ungenauer.

d) Stückweise Interpolation wirkt dem Runge-Effekt entgegen, da man seine Anzahl Stützstellen in Stücke unterteilt (und damit jedes Stück mit weniger Stützstellen arbeitet und somit der Runge-Effekt schlechter auftreten kann).