Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

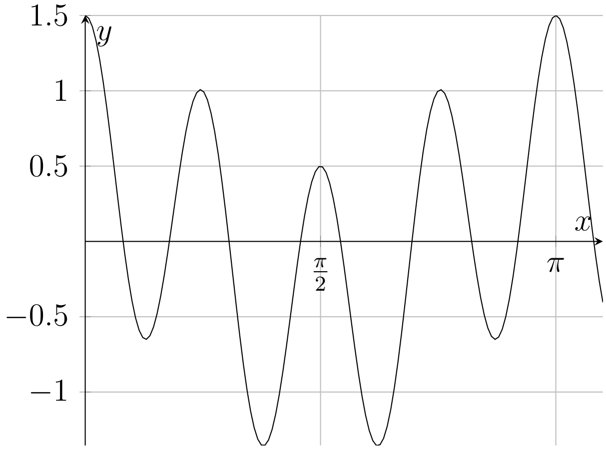
Numerisches Programmieren, Übungen

5. Trainingsblatt: Fourier Transformation

1) Frequenzanalyse

Gegeben sei folgendes Signal und Grundfrequenz $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(kx)$$



a) Bestimmen Sie grafisch, wieviele verschiedenen Frequenzen $k > 0$ sich in dem Signal überlappen.

b) Nennen Sie die größte Frequenz $k_{\max}$ von denen aus a).

c) Bestimmen Sie die Summe der Anteile aller Frequenzen des Signals:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Man kann anhand des Schwingungsverlauf zwei verschiedenen überlappende Frequenzen entdecken. Eine mit den maximalen Werten 1.5 und -0.5 und eine mit allen anderen Extremas.

b) Die größere Frequenz der beiden ist 8. Aufpassen: Hier ist das Signal von 0 bis π eingezeichnet! Wir zählen zwar 4 Perioden, aber auf den gesamten 2π Bereich sind es dann 8.

c) Da es sich hier um Kosinus Grundfrequenz handelt, können wir die einfach am Start y-Wert ablesen. Die Summe der Anteile aller Frequenzen ist 1.5.

   Geheimtipp: Es handelt sich insgesamt um die Funktion $0.5\cos(2x) + 1 \cdot \cos(8x)$.

2) Fourier

Betrachten wir die Fourier-Transformation (n ist die Größe des Eingabevektors v).

$$\omega = \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\mathrm{DFT}(v) := c_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk}$$

$$\mathrm{IDFT}(c) := v_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{jk}$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{DFT}((1, 0, 3, 0)^T)$.

b) Zeigen Sie mathematisch, was es bedeutet, dass DFT und IDFT Umkehroperationen sind.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DFT}((1,0,3,0)^T) &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega}^2 & \overline{\omega}^3 \\ 1 & \overline{\omega}^2 & \overline{\omega}^4 & \overline{\omega}^6 \\ 1 & \overline{\omega}^3 & \overline{\omega}^6 & \overline{\omega}^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+3\overline{\omega}^2 \\ 1+3\overline{\omega}^4 \\ 1+3\overline{\omega}^6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+3\exp\left(-i \cdot \frac{4\pi}{4}\right) \\ 1+3\exp\left(-i \cdot \frac{8\pi}{4}\right) \\ 1+3\exp\left(-i \cdot \frac{12\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+3\exp(-i \cdot \pi) \\ 1+3\exp(-i \cdot 2\pi) \\ 1+3\exp(-i \cdot 3\pi) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1+3\cos(\pi) - 3i \cdot \sin(\pi) \\ 1+3\cos(2\pi) - 3i \cdot \sin(2\pi) \\ 1+3\cos(3\pi) - 3i \cdot \sin(3\pi) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Es gilt: $\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(v)) = v$ und auch $\mathrm{DFT}(\mathrm{IDFT}(v)) = v$.