Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

2. Trainingsblatt: Kondition und Stabilität

1) Kondition

Betrachten wir zunächst die Kondition, ein paar Rechenaufgaben sowie Fragen zum Verständnis. Gegeben sei folgende Grafik einer Funktion $f(x)$, die im Folgenden untersucht werden soll. Die eigentlich korrekte Eingabe sei mit $x = 1$ gegeben. Durch einen Fehler wurde die Eingabe jedoch zu $\tilde{x} = 0.5$ verfälscht.

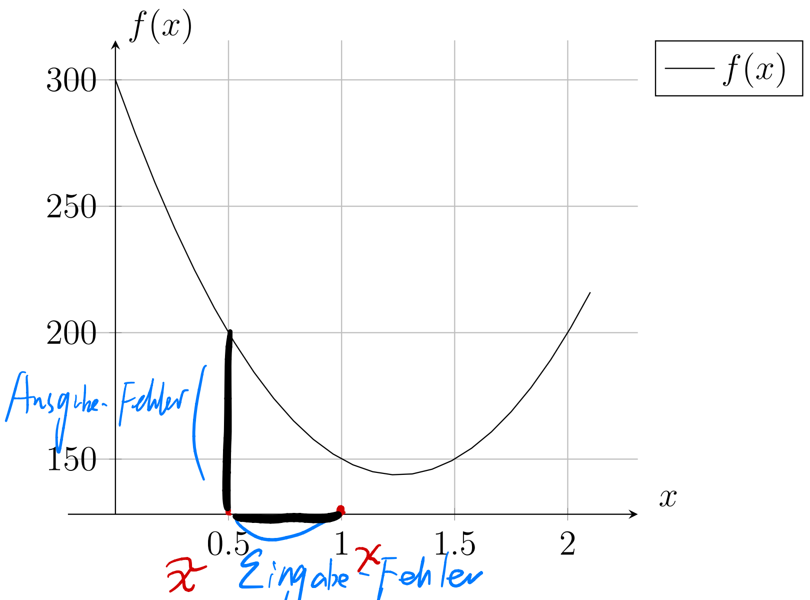

Abbildung 1: Grafische Darstellung der Funktion $f(x)$.

a) Markieren Sie in obige Grafik mit Linien, was der Eingabe- sowie Ausgabefehler der Funktion $f(x)$ an gegebener Eingabe x und verfälschter Eingabe $\tilde{x}$ ist.

b) Basierend auf der gegebenen Grafik, x und $\tilde{x}$, würden sie die resultierende Verfälschung der Ausgabe als gut oder schlecht bewerten? Lesen Sie dann aus der Grafik die entsprechenden Werte aus und bestimmen sie den absoluten Wert von Eingabe- und Ausgabefehler anhand unserer Verfälschung.

c) Die Funktion sei mit $f(x) = 100 \cdot x^2 - 250 \cdot x + 300$ gegeben. Überprüfen Sie einerseits, ob ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (b) stimmen. Berechnen Sie dann die relative Konditionszahl der Funktion an der Stelle $x = 1$. Überrascht Sie das Ergebnis? Wenn ja, analysieren Sie die Situation.

Stimmt $\begin{cases} f(1) = 100 - 250 + 300 = 150 \\ f(\frac{1}{2}) = 25 - 125 + 300 = 200 \end{cases}$

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) In die Grafik eingetragen. Rot ist der Eingabefehler, Braun der Ausgabefehler.

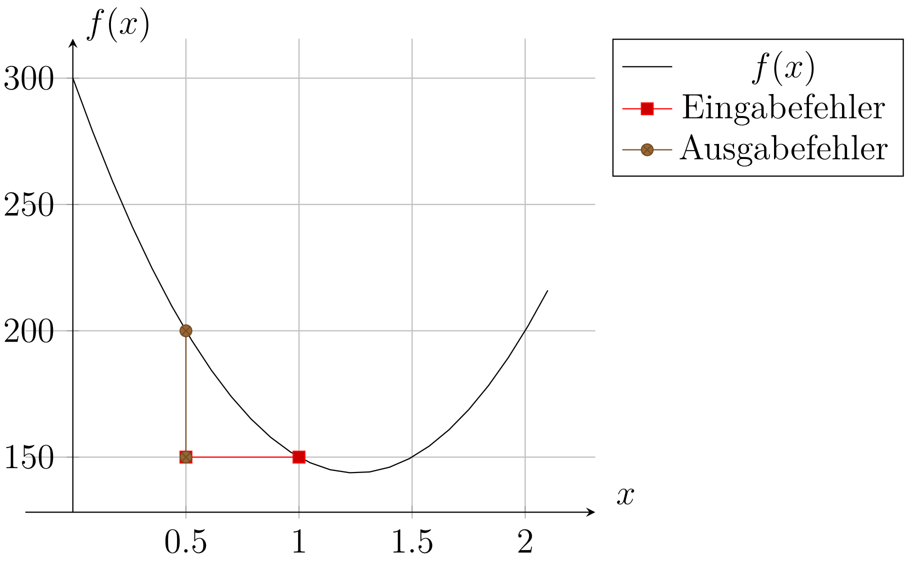

Abbildung 2: Grafische Darstellung der Funktion $f(x)$.

b) Zwar sieht es rein von der Länge der Linien so aus, als wäre der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler, aber achten Sie auf die Achsenskalierung! Der Ausgabefehler beträgt 50, während die Eingabe um lediglich 0.5 verfälscht wurde. Hier wirkte sich also der Eingabefehler um das hundertfache auf unseren Ausgabefehler aus. Man könnte also annehmen, dass diese Stelle sehr schlecht konditioniert ist. 只能暂且假设.

c) Mithilfe der gegebenen Funktion können wir die Ergebnisse überprüfen. Wenn wir jeweils $x = 1$ und $\tilde{x} = 0.5$ einsetzen, erhalten wir:

$$f(x) = 100 \cdot x^2 - 250 \cdot x + 300$$
$$f(1) = 100 - 250 + 300 = \underline{150}$$
$$f(0.5) = 25 - 125 + 300 = \underline{200}$$

Wir haben also einen Ausgabefehler von $200 - 150 = 50$, wie bei der (b) schon aus der Grafik abgelesen.

Jetzt noch die Kondition der gesamten Funktion bestimmen. Hierfür nutzen wir die relative Konditionszahl wie in der Übung kennengelernt.

$$\text{cond}(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

Wir benötigen die Ableitung, diese ist:

$$f'(x) = 200 \cdot x - 250$$

$100x^2 - 250x + 300$

$$\text{cond}(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot (200x - 250)}{100x^2 - 250x + 300} \right| = \frac{(4x-5)x}{2x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{cond}(f, 1) = \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

Jetzt alles einsetzen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond}(f,x) &= \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right| \\
&= \left|\frac{x \cdot (200 \cdot x - 250)}{100 \cdot x^2 - 250 \cdot x + 300}\right| \\
&= \left|\frac{200x^2 - 250x}{100 \cdot x^2 - 250 \cdot x + 300}\right| \\
&= \left|\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 6}\right|
\end{aligned}$$

Nur noch $x = 1$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond}(f,x) &= \left|\frac{4-5}{2-5+6}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{3}\right| \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\cancel{\Delta x}$ relative $x \cdot \frac{1}{3}$

$= \text{relative } y$

$\Delta y = \frac{1}{3} \Delta x$

Unsere Konditionszahl bestimmt $\frac{1}{3}$ als die »worst-case« Abschätzung der Fehlerverstärkung an der Stelle $x = 1$. Das könnte einen jetzt überraschen, da wir oben doch klar schlechtere Ergebnisse erhalten haben, oder etwa nicht?

Haben wir nicht. Oben haben wir uns die absoluten Fehler angeguckt, nicht die relativen. Machen wir obige Rechnung noch einmal mit den relativen Eingabefehler und Ausgabefehler. Unser relativer Eingabefehler ist

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{rel}}(x, \tilde{x}) &= \left|\frac{1 - 0.5}{1}\right| \\
&= 0.5 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

in dem Fall also äquivalent zum absoluten Eingabefehler. Der relative Ausgabefehler ist

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{rel}}(f(x), f(\tilde{x})) &= \left|\frac{200 - 150}{150}\right| \\
&= \frac{50}{150} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Insofern ist unser berechnete Verstärkung von Eingabe- zu Ausgabefehler in einem angemessenen Bereich.

$0.5 \rightarrow 50$

100倍

$1 \rightarrow 0.5$

$150 \rightarrow 200$

$\frac{0.5}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{50}{150} = \frac{1}{3}$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

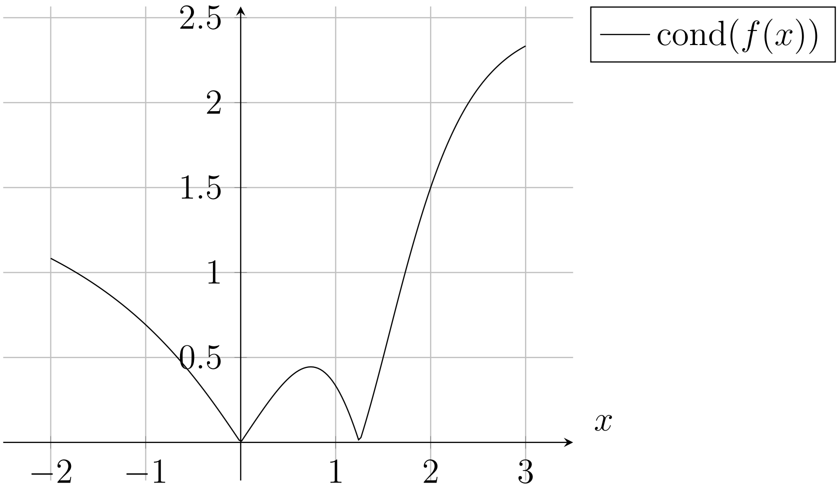

Abbildung 3: Grafische Darstellung der relativen Konditionszahl der Funktion $f(x)$.

2) Stabilität

Diese Aufgabe handelt um das Thema der Stabilität.

a) Gegeben sei $f(x) = (x \cdot a) + 1$. Untersuchen Sie die Stabilität dieser Funktion.

$$rd(f(x)) = ((x \cdot a)(1+\varepsilon_1) + 1)(1+\varepsilon_2)$$

$$= (xa + xa\varepsilon_1 + 1)(1+\varepsilon_2)$$

$$= xa + xa\varepsilon_1 + 1 + xa\varepsilon_2 + \underbrace{xa\varepsilon_1\varepsilon_2}_{} + \varepsilon_2$$

da $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$

$$\Rightarrow rd(f(x)) = xa(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \# (1+\varepsilon_2)$$

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

$(x \cdot a) + 1$

Lösung:

a) Wir beginnen damit die »verfälsche« Funktion aufzuschreiben:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rd}(f(x)) &= ((x \cdot a)(1+\epsilon_1)+1)(1+\epsilon_2) \\
&= (x \cdot a) + (x \cdot a \cdot \epsilon_1) + 1)(1+\epsilon_2) \\
&= (f(x) + (x \cdot a \cdot \epsilon_1))(1+\epsilon_2) \\
&= f(x) + (x \cdot a \cdot \epsilon_1) + f(x)\epsilon_2 + (x \cdot a \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \\
\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0 & \\
\mathrm{rd}(f(x)) &= f(x) + (x \cdot a \cdot \epsilon_1) + f(x)\epsilon_2
\end{aligned}
$$

Jetzt in unsere Endergebnisfehler Formel einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{rd}(f(x)) - f(x)}{f(x)}\right| &= \left|\frac{f(x) + (x \cdot a \cdot \epsilon_1) + f(x)\epsilon_2 - f(x)}{f(x)}\right| \\
&= \left|\frac{(x \cdot a \cdot \epsilon_1) + f(x)\epsilon_2}{f(x)}\right| \\
&= \left|\frac{(x \cdot a \cdot \epsilon_1)}{f(x)} + \epsilon_2\right| \\
&= \left|\frac{(x \cdot a \cdot \epsilon_1)}{(x \cdot a) + 1} + \epsilon_2\right|
\end{aligned}
$$

Wir sehen, die Stabilität hängt von dem Term $\frac{(x \cdot a \cdot \epsilon_1)}{(x \cdot a)+1}$ ab. Sollte er größer als ϵ_1 sein, wäre die Funktion instabil. Der Term geht aber für jede reguläre Grenzwertbetrachtung gegen ϵ_1, insofern ist die Funktion $f(x)$ stabil.

Bis auf eine Ausnahme! Bei $\lim\limits_{x->-\frac{1}{a}}$ würde der Fehler zu minus unendlich gehen. Im Großen und Ganzen (also für fast alle Bereiche für x nach festgelegtem a) ist die Funktion ohne Probleme stabil.