Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Huckle
Sebastian Wolf
Shuo Sun
Hayden Liu Weng

SoSe 2023

# Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 7. Übungsblatt: Quadratur II

## 1) Quadratur nach Romberg

Bei Quadratur nach Romberg kombiniert man zwei Trapezsummen unterschiedlicher Schrittweiten $Q_{\mathrm{TS}}(f,h_1), Q_{\mathrm{TS}}(f,h_2)$ um das exakten Ergebnis

$$I(f) = \lim_{h\to 0} Q_{\mathrm{TS}}(f,h)$$

besser zu approximieren[1]. Die Kombinationsregel lautet so:

$$Q_{i,k} = Q_{i,k-1} + \frac{Q_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1} \quad ,1 \le i \le k$$

Diese Kombinationsregel ist ähnlich wie die von das Aitken-Neville und Newton Polynominterpolation. Wir können ein ähnliches Dreiecksschema aufbauen:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
h_i & i\backslash k & 0 & & 1 & & \dots & & n \\
\hline
\frac{b-a}{1} & 0 & Q_{\mathrm{TS}}(f;\frac{b-a}{1}) = Q_{00} & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
\frac{b-a}{2} & 1 & Q_{\mathrm{TS}}(f;\frac{b-a}{2}) = Q_{10} & \to & Q_{11} & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\frac{b-a}{4} & 2 & Q_{\mathrm{TS}}(f;\frac{b-a}{4}) = Q_{20} & \to & Q_{21} & \to & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
\frac{b-a}{2^n} & n & Q_{\mathrm{TS}}(f;\frac{b-a}{2^n}) = Q_{n0} & \to & Q_{n1} & \to & \dots & \to & Q_{nn}
\end{array}$$

Das Ergebnis steht in $Q_{nn}$.

In dieser Aufgabe werden wir Quadratur nach Romberg verwenden um das Integral

$$\int_{-2}^{2} -x^2 + 4\mathrm{d}x$$

zu berechnen.

a) Füllen Sie die erste Spalte der Tabelle bis $i = 2$ aus! Für $i > 0$ können Sie die folgende Eigenschaft von Trapezsummen verwenden:

$$Q_{\mathrm{TS}}(f;h) = \frac{Q_{\mathrm{TS}}(f;2h)}{2} + h\cdot(f_1 + f_3 + \ldots + f_{N-3} + f_{N-1}), \tag{1}$$

[1] Es wird Richardson-Extrapolation verwendet.

b) Füllen Sie den Rest der Tabelle aus! Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2c) von Blatt 6 !

c) Machen Sie sich das Ergebnis von $Q_{11}$ grafisch anschaulich, indem Sie die Extrapolation zeichnerisch berechnen.

**Lösung:**

a) Erste Spalte:

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{TS}}(f;4) &= 4\left(\tfrac{f(-2)+f(2)}{2}\right) &&= 0\\
Q_{\mathrm{TS}}(f;2) &= \tfrac{Q_{\mathrm{TS}}(f;4)}{2} + 2f(0) = 0 + 4\cdot 2 &&= 8\\
Q_{\mathrm{TS}}(f;1) &= \tfrac{Q_{\mathrm{TS}}(f;2)}{2} + 1(f(-1)+f(1)) = 4 + 2\cdot 3 &&= 10
\end{aligned}$$

Die Eigenschaft

$$Q_{i,k} = Q_{i,k-1} + \frac{Q_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1} \quad ,1 \le i \le k$$

verwendet man öfters bei Romberg-Quadratur. Damit kann man die Tabelle mit geringem Aufwand erweitern.

b)

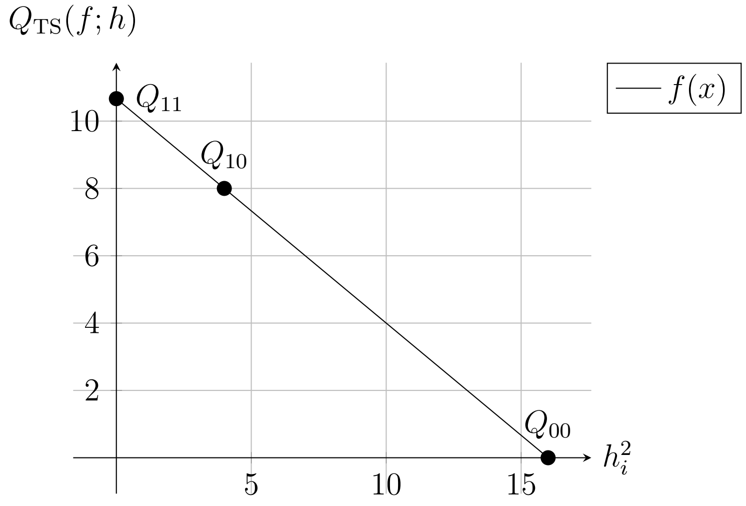
$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{10} + \tfrac{Q_{10}-Q_{00}}{\frac{16}{4}-1} = 8 + \tfrac{8}{3} &&= 10\frac{2}{3}\\
Q_{21} &= Q_{20} + \tfrac{Q_{20}-Q_{10}}{\frac{4}{1}-1} = 10 + \tfrac{2}{3} &&= 10\frac{2}{3}\\
Q_{22} &= Q_{21} + \tfrac{Q_{21}-Q_{11}}{\frac{16}{1}-1} = 10\tfrac{2}{3} + 0 &&= 10\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Dargestellt als Tableau (analog zum Schema von Aitken und Neville) sieht das Ganze wie folgt aus:

$$\begin{array}{c|c|ccccc}
h_k & k & Q_{k0} & & Q_{k1} & & Q_{k2}\\
\hline
4 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
2 & 1 & 8 & \rightarrow & 10\frac{2}{3} & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
1 & 2 & 10 & \rightarrow & 10\frac{2}{3} & \rightarrow & 10\frac{2}{3}
\end{array}$$

Das mit Hilfe des Romberg-Verfahrens berechnete Integral ist in diesem Fall schon im $Q_{11}$ exakt! Bis dahin haben wir nur 3 Auswertungen der Funktion verbraucht, im vergleich zu 9 bei der Trapezsumme im 2c), die noch nicht exakt war!

c) Wir zeichnen die Ergebnisser der zwei Punkte in ein Koordinatensystem ein, bei der die eine Achse $h_i^2$ und die andere die Ergebnisse der Trapezsummen enstricht:




Von der Grafik können wir daher schon auf den Wert $Q_{11} = 10 + \frac{2}{3}$ schließen. Rein rechnerisch ist das (bei zwei Stützpunkten) eine lineare Interpolation.

## 2) Integration mit der Gauß Quadratur

Auf dem lertzten Übungsblatt haben wir bereits Verfahren für die numerische Integration kennengelernt. Alle Verfahren basierten bisher auf gleichmäßig verteilten Stützstellen (x-Werte) und variablen Stützwerten (y-Werte) welche mit Gewichten multipliziert werden mussten, um das Integral der Interpolationsfunktion zu berechnen. Hierfür wurden die Lagrangepolynome verwendet, da hier die einfache Korrelation $w_i = \int_a^b l_i(x)dx$ gilt. Die Gauß Quadratur geht hier noch einen Schritt weiter und variiert auch die Position der Stütztstellen, um die Anzahl der Bedingungen zu verdoppeln. Wir erhalten somit je Stützpunkt 2 Bedingungen, eine für den x-Wert ($x_i$) und eine für das Gewicht $w_i$. Somit ist der resultierende Polynomgrad, den wir mit der Gaußquadratur noch korrekt Berechnen können $2 \cdot n - 1$ bei $n$ Stützstellen. Eine Einschränkung der konventionellen Gauß Quadratur ist, dass das Integrationsgebiet immer von -1 bis 1 ist. Durch passende Skalierung und Verschiebung kann jedoch jedes Integral in diese Form gebracht werden.

Wir verwenden in dieser Aufgabe eine alternative Methode für die Bestimmung der Gewichte, in welcher wir die zusätzlichen Bedingungen der Gauß Quadratur leicht integrieren können. Die sogenannte Methode der unbestimmten Koeffizienten fordert, dass die Gewichte exakte Ergebnisse für alle Polynome bis zu einem gewissen Grad ergeben und erzeugt hieraus ein Gleichungssystem.

Ein Beispiel für die Bestimmung der Trapezregel, welche bis Grad 1 korrekt integriert, wäre folgendes (mit a=-1, b=1):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$ :

$$f_0(-1) \cdot w_0 + f_0(1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} 1 \; dx = 2$$

Grad 1 mit $f_1(x) = x$ :

$$f_1(-1) \cdot w_0 + f_1(1) \cdot w_1 = -w_0 + w_1 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} x \; dx = 0$$

mit der Lösung $w_0 = 1$ und $w_1 = 1$, wie in der klassischen Trapezregel. Allgemein gilt für die einfache Polynombasis, dass $f_k(x) = x^k$ für Grad $k$. Die Gleichungen haben dann immer folgende Form:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i \overset{!}{=} \int_a^b f_k(x)\ dx$$

a) Berechnen sie die Stützpunkte und Gewichte für eine Gauß Quadratur mit 2 Stützpunkten! Hinweis: Sie können hierfür in dem obigen Beispiel die Stützwerte $x_i$ variabel lassen und die entsprechenden weiteren Gleichungen hinzufügen. Zur Vereinfachung der Rechnung dürfen Sie Sie die Tatsache verwenden, dass in der resultierenden Formel $x_0 = -x_1$ sein wird.

b) Berechnen sie $\int_{-1}^{1} x^3 - x^2\ dx$ mit der Gauß Quadratur und der Trapezregel. Bewerten Sie das Ergebnis!

**Lösung:**

a) Grad 0 mit $f(x) = 1$ :

$$f(x_0) \cdot w_0 + f(x_1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} 1\ dx = 2$$

Grad 1 mit $f(x) = x$ :

$$f(x_0) \cdot w_0 + f(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} x\ dx = 0$$

Grad 2 mit $f(x) = x^2$ :

$$f(x_0) \cdot w_0 + f(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{2}{3}$$

Grad 3 mit $f(x) = x^3$ :

$$f(x_0) \cdot w_0 + f(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} x^3\ dx = 0$$

Zusätzlich verwenden wir den Fakt, dass $x_0 = -x_1$. Somit folgen wir aus der ersten Gleichung: $w_0 = 2 - w_1$. Hieraus ergibt sich mit der 2. Gleichung und dem Hinweis, dass $x_1(2 - 2w_1) = 0$ und somit $w_1 = 1$ udn $w_2 = 1$, da nicht $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ sein können. Mithilfe der 3. Gleichung folgt nun, dass $2x_0^2 = \frac{2}{3}$ und somit, dass $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $Q_{\mathrm{T}}(x^3 - x^2) = 1 \cdot (-1 - 1) + 1 \cdot (1 - 1) = -2$

$Q_{\mathrm{G}}(x^3 - x^2) = 1 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + 1 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$

Man sieht hier sehr gut, dass die Gauß Quadratur das exakte Ergebnis berechnet, wogegen die Trapezregel hier noch sehr ungenaue Werte erzeugt.

## 3) Quadratur nach Archimedes

Wir betrachten den divide-et-impera-Algorithmus zur Integration nach Archimedes. Die Grundidee ist dabei eine hierarchische Sichtweise, so dass in jedem neuen Schritt des Algorithmus jeweils ein zusätzlicher Anteil zum Gesamtergebnis hinzukommt. Das hat zur Folge, dass bei eventueller adaptiver Rechnung nie die vorigen Ergebnisse weggeworfen sondern mitgenutzt werden.

Konkret berechnet dieser Algorithmus immer Dreiecksflächen, die dann aufsummiert werden und so eine Approximation der gesamten Fläche unter dem Funktionsgraphen ergeben (vgl. Abb. 1). Die Fläche eines Dreiecks ist nach der Formel $A = g \cdot h/2$ bestimmt, wobei $g$ die Grundseite (in Abb. 1 vertikal) und $h$ die Höhe (horizontal) beschreibt.

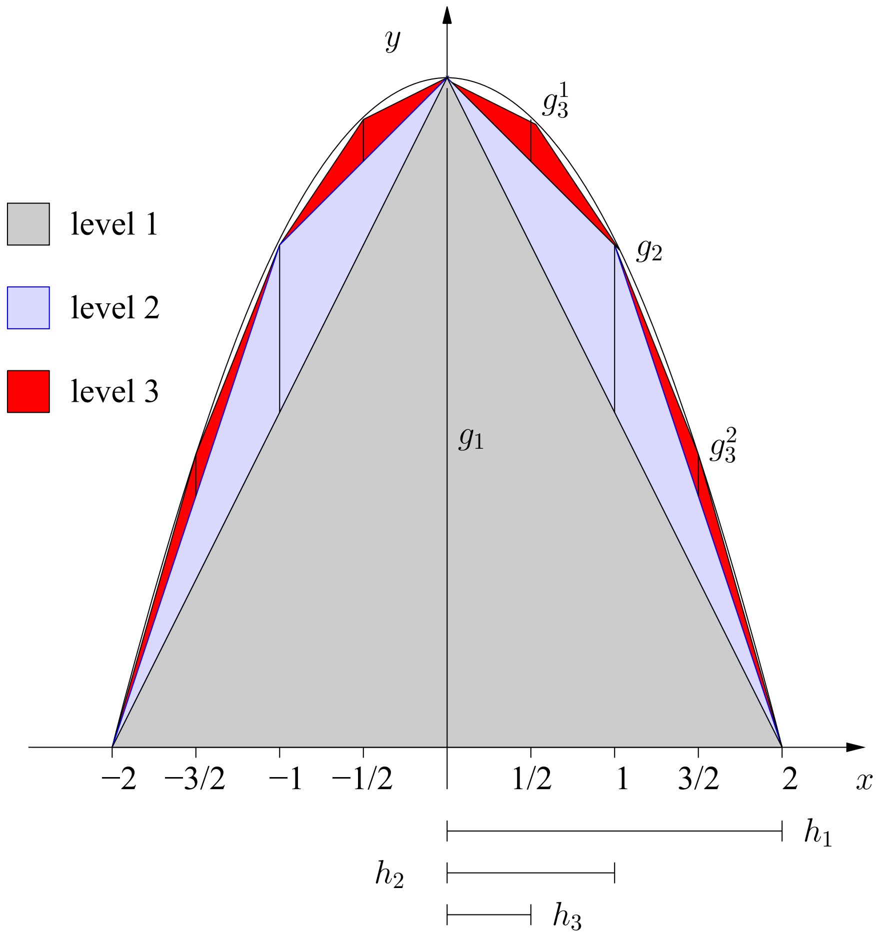



Abbildung 1: Visualisierung des Algorithmus nach Archimedes.

Berechnen Sie nach Archimedes eine Approximation des Integrals

$$I(f) \;=\; \int_{-2}^{2} f(x)\, dx,$$

für die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$, indem Sie ausgehend vom Startdreieck zwei gleichmäßige Verfeinerungsstufen ansetzen (vgl. Abb. 1). Tipp: Nützen Sie die Achsensymmetrie der Funktion $f(x)$ aus!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 2) c) von Aufgabenblatt 6. Was stellen Sie fest?

**Lösung:** Da $f(x)$ symmetrisch zur $y$-Achse ist, genügt es die Integration für $x$ zwischen 0 und 2 zu berechnen und das Erbgebnis mit 2 zu multiplizieren.

- Fläche der rechten Seite des Startdreiecks:

$$\frac{A_1}{2} \;=\; \frac{1}{2} \cdot (g_1 \cdot h_1) = \frac{1}{2} \cdot (f(0) \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 2) = 4$$

- Fläche des ersten verfeinerten Dreiecks: Das erste verfeinerte Dreieck besteht aus zwei Dreiecken, die jeweils die Grundseite $g_2$ und die Höhe $h_2$ haben.
  $g_2$ ist die Differenz zwischen der $f(1)$ und $\frac{f(0)+f(2)}{2}$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_2 \cdot h_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ((3 - \frac{4+0}{2}) \cdot 1) = 1$$

- zweite Verfeinerung: beide Dreiecke $A_2^1$ und $A_2^2$ bestehen jeweils aus zwei Dreiecken mit Grundseite $g_3^1$ bzw. $g_3^2$ und Höhe $h_3$

$$\begin{aligned} g_3^1 = f(\frac{1}{2}) - \frac{f(0)+f(1)}{2} &= \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{1}{4} \\ g_3^2 = f(\frac{3}{2}) - \frac{f(1)+f(2)}{2} &= \frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4} \\ A_3^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_3^1 \cdot h_3) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ A_3^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (g_3^2 \cdot h_3) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

- gesamte rechte Seite:

$$A_r = \frac{A_1}{2} + A_2 + A_3^1 + A_3^2 = 4 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 5\frac{1}{4}$$

- Gesamtergebnis:

$$A = 2 \cdot A_r = 2 \cdot 5\frac{1}{4} = 10\frac{1}{2}$$

  Das Ergebnis stimmt mit dem der Trapezsumme aus Aufgabe 2) c) von Aufgabenblatt 6 überein.