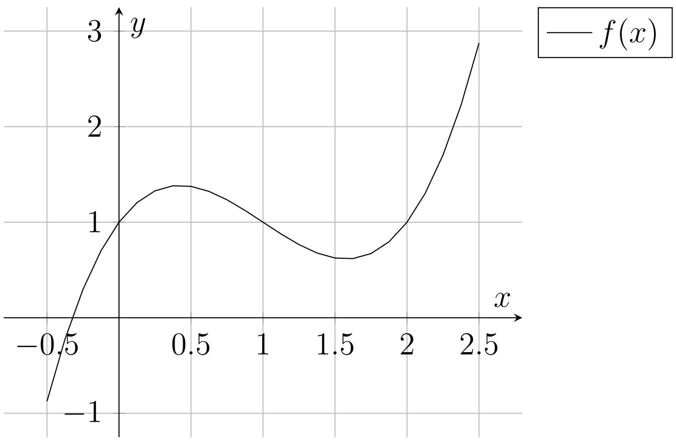
Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

9. Trainingsblatt: Fixpunktiteration

1) Fixpunktiteration



a) Zeige, wie du grafisch auf alle Fixpunkte der Funktion $g(x)$ kommen würdest.

b) Beweise deine Theorie für einen Fixpunkt rechnerisch. Nimm hierfür an, dass

$$g(x) = (x-1)^3 - x + 2$$

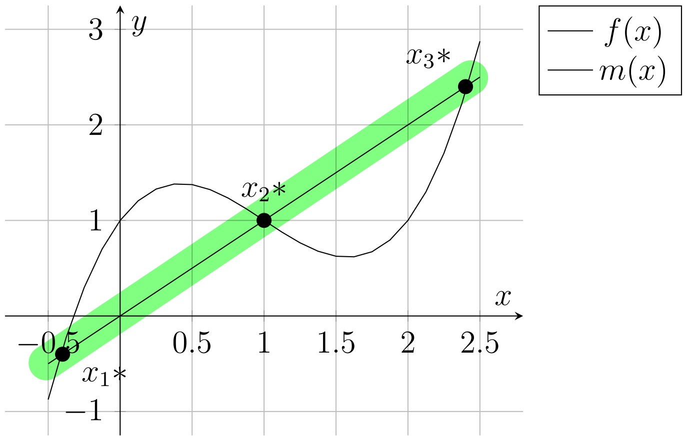
c) Eignet sich folgende Iterationsvorschrift theoretisch, um $-\frac{1}{a}$ auszurechnen?

$$\Phi(x) = \frac{a + a^2 \cdot x + x^2}{x}$$

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Wir zeichnen die Winkelhalbierende $m(x) = x$ ein. Alle Schnittpunkte von $m(x)$ mit $g(x)$ sind die Fixpunkte von $g(x)$.



b) Wir überprüfen z.B. etwa, ob $g(1) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} g(1) &= (1-1)^3 - 1 + 2 \\ &= -1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es stimmt.

c) Hierfür müssen wir überprüfen, ob $-\frac{1}{a}$ überhaupt ein Fixpunkt ist und wenn ja, ob er anziehend ist.

Fixpunkt $-\frac{1}{a}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \Phi(-\frac{1}{a}) &= \frac{a + a^2 \cdot -\frac{1}{a} + (-\frac{1}{a})^2}{-\frac{1}{a}} \\ &= (-\frac{1}{a})^2 \cdot (-a) \\ &= -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Passt. Jetzt noch überprüfen, ob dieser anziehend ist:

不取等

$$\underbrace{-1 < 1-a^3}\,\underbrace{1-a^3 < 1}$$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{x^2 - a}{x^2} \\ \left|\Phi'(-\frac{1}{a})\right| &= \left|\frac{(-\frac{1}{a})^2 - a}{(-\frac{1}{a})^2}\right| \\ &= \left|\frac{(-\frac{1}{a})^2}{(-\frac{1}{a})^2} + \frac{-a}{(-\frac{1}{a})^2}\right| \\ &= \left|1 - a^3\right| \end{aligned}$$

$-a^3 > -2$

$a^3 < 2$

$a < 2^{\frac{1}{3}}$

$1 - a^3 < 1$

$a^3 > 0$

$a > 0$

Daraus folgt: Genau dann wenn $0 < a < 2^{1/3}$, eignet sich die Vorschrift, ansonsten nicht. (In der Praxis wäre diese Einschränkung vermutlich fatal und die Vorschrift somit doch eher weniger sinnvoll.)

2) Banach'scher Fixpunktsatz

Sei

$$f(x) = (x-1)^2 - x + 2$$

a) Berechne alle Fixpunkte von $f(x)$ rechnerisch!

b) Mithilfe des Intervalls $[0.5; 1.5]$, zeigen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, ob sich in dem Intervall ein anziehender Fixpunkt befindet oder nicht.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Analytisch die Fixpunkte berechnen, indem wir $f(x) = x$ berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^2 - x + 2 &= x \\ 0 &= (x-1)^2 + 2 - 2x \\ 0 &= (x^2 - 2x + 1) + 2 - 2x \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

PQ-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} \\ &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$$

b) Gehen wir die Bedingungen des Fixpunktsatzes durch:

i) Trivial

ii) Ist streng monoton fallend in dem Intervall. Größter Wert bei

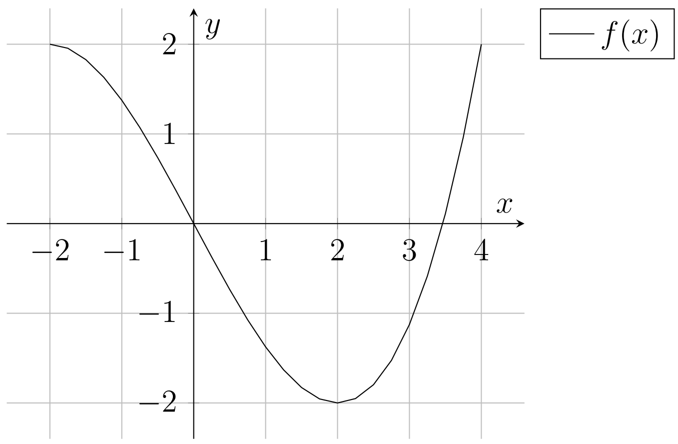
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-0.5)^2 - 0.5 + 2 = 1.75$$

Kleinster Wert bei

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = (0.5)^2 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$$

Nicht erfüllt! Der größte Wer (1.75) verletzt die Bedingung. Kein anziehender Fixpunkt in diesem Intervall!

3) Newton-Verfahren



a) Nur aus der Grafik gelesen: Wenn man das Newton-Verfahren für diese Funktion anwenden würde, entspräche $x = 0$ einem anziehenden Fixpunkt oder nicht? Warum?

b) Jemand behauptet, mit Newton wäre die Iterationsvorschrift für die Funktion $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 9$$

Warum kann das nicht stimmen?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Wenn man in der Nähe dieser Nullstelle Werte als Startwert von Newton nimmt, würde das Verfahren mit wenigen Schritten die Nullstelle erreicht haben.

b) Die Schnittstellen der Iterationsfunktion und $f(x)$ entsprechen den Fixpunkten, die damit ausgerechnet werden sollen. $x = 0$ und $x \sim 3.46$ sind weder Fixpunkte dieser Funktion noch Schnittstellen mit der Funktion $f(x)$.