Numerisches Programmieren

Übung #02

Kondition / Stabilität

Kondition

- Relative Verstärkung eines Eingabefehlers
  - „Wie stark wird $f(x)$ durch min. Fehler von x verfälscht“
- Beispiel: $f(x) = 100x$

  → Eingabefehler von 0.01 Einheiten führt zu Ausgabefehler von 1 Einheit

- **Konditionszahl** (Index (!) für ungünstigen Faktor der Störung)

$$cond(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

Kondition

- **Gute** Kondition: $cond(f, x) \leq 1$
- **Schlechte** Kondition: $cond(f, x) \gg 1$

- L'Hôpital Regel:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  - Nur wenn $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to c$ gegen gleichen Ausdruck (z.B: 0 oder ∞) laufen!

Aufgabe 1)

Berechnen Sie die relative Konditionszahl der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von x:

i) $f_1(x) = a \cdot x$, ii) $f_2(x) = \frac{a-x}{b}$, iii) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis!

Wie lautet die Konditionszahl von f_3 an der Stelle $x = 0$ (Grenzwertbetrachtung!)?

Aufgabe 2)

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1 : y = x$$
$$g_2 : y = mx + 1,$$

deren Schnittpunkt berechnet werden soll. Der tatsächliche Eingabe-Parameter $m = 1.005$ wird dabei zu $\tilde{m} = 1.01$ aufgerundet. Wir wollen nun den dadurch entstandenen Fehler im x-Wert des Schnittpunktes untersuchen.

a) Berechnen Sie den x-Wert des Schnittpunktes für ein allgemeines m, und stellen Sie diese Beziehung als Funktion $x = f(m)$ dar.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl des Problems aus a). Wann ist das Problem gut konditioniert? Wann nicht?

c) Werten Sie die Konditionszahl aus b) an der gegebenen Stelle m aus.

d) Wie sieht die tatsächliche Verstärkung des relativen Eingabefehlers aus?

Stabilität

- Fehlerverstärkung eines Berechnungs-verfahrens
    - Recap: Auch sehr einfache Operationen müssen ggf. gerundet werden
- **Stabiles** Verfahren:
    - Rundung von Zwischenergebnissen verursacht keine große Abweichung vom Endergebnis (ansonsten **instabil**)
- Analyse der Stabilität durch **Epsilontik**

img.ifunny.co/images/37ba6593a3fa34e61fa09f4f4f72a526b940df87ddf056326ef8cfc80e78f71a_1.jpg

Kondition vs. Stabilität

Eigabe: $x \rightsquigarrow \tilde{x}$

Kondition

- „**Was** will ich lösen“
- Abhängig vom **Problem**
- Auswirkung von Eingabefehlern
- $f\big(rd(x)\big) - f(x)$

对 $f(x)$ 影响

Eigabe 仍是 x

Stabilität

- „**Wie** will ich es lösen“
- Abhängig vom **Berechnungsverfahren**
- Auswirkung von internen Rundungsfehlern
- $rd\big(f(x)\big) - f(x)$

- Ein Berechnungsverfahren kann trotz guter Kondition instabil sein und andersrum

Epsilontik

- Auch sehr einfache Operationen müssen ggf. gerundet werden
  - Entstehung relat. Rundungsfehler $|\epsilon| \leq \epsilon_{Ma}$, (kleiner als Maschinengenauigkeit)

- Untersuchung **relativer Endergebnisfehler** (anhand bestimmter Regeln)

$$\left|\frac{rd(f)(x) - f(x)}{f(x)}\right|$$

Epsilontik

Regeln:

- Für jede vorkommende Operation: $rd(a\ op_M\ b) = (a\ op\ b) \cdot (1 + \epsilon)$

  对op的误差

- Fehler 2. Ordnung ignoriert $(e_i \cdot e_j = 0)$

Algorithmus:

1. Gerundete f-Auswertung $rd(f)(x)$ durch Anwendung der obigen Regeln bestimmen: $rd(f)(x) = f(x) + \cdots (\text{“}Fehlerterm\text{“})$
2. Relativen Endergebnisfehler bestimmen

1 输入x求算x^2时的误差

Epsilontik

$rd(g)(x) = x^2(1+\varepsilon) = x^2 + x^2 \cdot \varepsilon$
$= g(x) + \varepsilon g(x)$

Beispiel:

最终结果: $\left|\frac{rd(g)(x) - g(x)}{g(x)}\right| = |\varepsilon|$

- $g(x) = x^2$

  Wir haben eine Operation, nämlich die Potenz und dadurch wird ein Fehler ϵ erzeugt:

  与 $g(rd(x))$

$$\mathrm{rd}(g)(x) = x^2 \cdot (1+\epsilon) = g(x) + g(x) \cdot \epsilon$$

算 x^2 时

$x^2(1+\varepsilon)$
$= x^2 + x^2\varepsilon$
$= g(x) + g(x)\varepsilon$

$\left|\frac{g(x)\varepsilon}{g(x)}\right| = |\varepsilon|$

Endergebnisfehler:

$$\left|\frac{\mathrm{rd}(g)(x) - g(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{g(x) + g(x) \cdot \epsilon - g(x)}{g(x)}\right| = |\epsilon|$$

Als Endergebnisfehler kommt nur der Operationsfehler heraus, die Funktion ist offensichtlich stabil.

Aufgabe 3)

Untersuchen Sie die Stabilität von den Funktionen

i) $f_1(x) = a \cdot x$, ii) $f_2(x) = \frac{a-x}{b}$, iii) $f_3(x) = 3e^x - 3$.

mit Hilfe der Epsilontik. Hier nehmen wir an, dass die Eingabe x schon eine Gleitkommazahl ist und keine Rundung benötigt ($\mathrm{rd}(x) = x$). Die Auswertung von e^x erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_{Ma}$.

Danke fürs Kommen!
Bis nächste Woche! 😊

geheimtippmuenchen.de/content/uploads/2023/02/geheimtipp-muenchen-thiersch-turm-1.jpg