

## Numerisches Programmieren, Übungen

### Musterlösung 10. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE) II

#### 1) Begriffe

Was versteht man unter den folgenden Begriffen:

- |                                     |                |
|-------------------------------------|----------------|
| a) lokaler Diskretisierungsfehler,  | d) Konsistenz, |
| b) globaler Diskretisierungsfehler, | e) Stabilität, |
| c) Konvergenz,                      | f) Steifheit?  |

Machen Sie sich insbesondere den Unterschied zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler klar. Nutzen Sie hierfür eine Skizze!

#### Lösung:

##### a) lokaler Diskretisierungsfehler:

Größter Fehler, der durch die Verwendung des Differenzenquotienten anstatt der Ableitung entsteht.

Lokaler Diskretisierungsfehler der Eulermethode:

$$l(\delta t) := \max_{a \leq t \leq b - \delta t} \left\{ \left| \frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t} - f(t, y(t)) \right| \right\}$$

Oft wird anstatt dieser eher unhandlichen Definition des lokalen Diskretisierungsfehlers (der Eulermethode) eine andere (nicht äquivalente) Darstellung verwendet, die in der Praxis leichter handhabbar ist. Sie verwendet als lokalen Diskretisierungsfehler die Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung am Ende eines einzelnen Zeitschritts:

$$|y_{k+1} - y(t_{k+1})|,$$

wobei  $y_k = y(t_k)$  gilt.

##### b) globaler Diskretisierungsfehler:

Größter Fehler zwischen den numerischen Approximationen  $y_k$  und den korrespondierenden analytischen Werten  $y(t_k)$  zu konkreten Zeitpunkten  $t_k$ :

$$e(\delta t) := \max_{k=0, \dots, N} \{|y_k - y(t_k)|\}$$

Eine in der Praxis eher gebräuchliche (aber nicht äquivalente) Form des globalen Diskretisierungsfehlers betrachtet lediglich die Differenz zwischen numerischer und analytischer

Lösung der Differentialgleichung am Ende des betrachteten Zeitintervalls (nach  $n$  Zeitschritten zum Endzeitpunkt  $t = b$ ):

$$|y_n - y(t_n = b)|$$

wobei  $y_0 = y(t_0)$  gilt.

c) **Konvergenz:**

Konvergiert die durch ein Lösungsverfahren erzeugte Folge mit immer kleiner werdender Schrittweite ( $h \rightarrow 0$ ) gegen die exakte Lösung, so heißt dieses Lösungsverfahren *konvergent*.

Es gilt also:

$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_k = y(t_k)$$

Der globale Fehler konvergiert folglich gegen 0.

d) **Konsistenz:**

Der Begriff der *Konsistenz* ist eng mit dem lokalen Diskretisierungsfehler verbunden. Falls für  $\delta t \rightarrow 0$  der lokale Fehler  $l(\delta t)$  gegen 0 konvergiert (also  $l(\delta t) \rightarrow 0$ ), so heißt ein Verfahren *konsistent*.

e) **Stabilität:**

- *Stabilität* ist die Eigenschaft eines Verfahrens/Algorithmus.
- Ein Verfahren ist stabil, wenn es gegenüber kleinen Störungen unempfindlich ist.
- Summieren sich kleine lokale Fehler nur zu kleinen globalen Fehlern auf, so ist ein Verfahren stabil.

f) **Steifheit:**

Die Begriffe Konsistenz und Konvergenz sind eher analytischer Natur: Für ausreichend/beliebig kleine  $\delta t$  soll etwas passieren. Es gibt jedoch Differentialgleichungen, die konsistent bzw. konvergent sind, jedoch nur für sehr kleine  $\delta t$ . Ein zu kleines  $\delta t$  kann die Diskretisierung jedoch unpraktikabel machen.

Differentialgleichungen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *steif*.

Somit ist Steifheit eine Problemeigenschaft, die bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung mit expliziten Einschrittverfahren die Verwendung einer sehr kleinen Schrittweite  $\delta t$  erzwingt, die für eine vorgegebene Genauigkeit in der Approximation eigentlich nicht nötig wäre.

Für die Beziehung zwischen Stabilität, Konsistenz und Konvergenz gilt bei den expliziten Verfahren:

- ESV: Konsistenz  $\Rightarrow$  Konvergenz
- MSV: Konsistenz + Stabilität  $\Leftrightarrow$  Konvergenz

## 2) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -12(y(t))^2 & \forall t \geq 1, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass  $y(t) > 0$  für alle  $t \geq 1$  gilt. Gesucht ist eine Näherungslösung  $y_1 \approx y(t_1)$  zum Zeitpunkt  $t_1 = 1.5$ .

- Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen und berechnen Sie die exakte Lösung  $y(1.5)$ !
- Berechnen Sie  $y_1$  mit Hilfe des expliziten Eulers.
- Wenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

zur Berechnung von  $y_1$  an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

### Lösung:

- Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -12y^2 \\ -\frac{1}{y^2} dy &= 12 dt \\ -\int_{y(t_0)}^y \frac{1}{\eta^2} d\eta &= \int_{t_0}^t 12 d\tau \\ -\int_1^y \frac{1}{\eta^2} d\eta &= \int_1^t 12 d\tau \\ \frac{1}{y} - 1 &= 12t - 12 \\ y(t) &= \frac{1}{12t - 11}\end{aligned}$$

Damit gilt  $y(1.5) = \boxed{\frac{1}{7}}$

- Explizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) \\ &= 1 + 0.5(-12 \cdot 1^2) = \boxed{-5}\end{aligned}$$

- Implizites Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + h \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1}) \\ &= y_k - 12h \cdot y_{k+1}^2\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Die explizite Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}0 &= 12hy_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k \\ y_{k+1} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h} \\ \xrightarrow{y(t) > 0} y_{k+1} &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h}\end{aligned}$$

Ein Zeitschritt mit dem impliziten Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned}y_0 &= 1 \\y_1 &= y_0 - 12h \cdot y_1^2 \\y_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 24 \cdot 1}}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

### 3) Quadratur und AWP-Lösung

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal die Analogie von Quadratur und numerischer Lösung von Anfangswertproblemen (AWP) verdeutlichen. Wie in der Vorlesung definieren wir ein AWP durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (1) und einen Anfangswert (2)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad (1)$$

$$y(a) = y_0. \quad (2)$$

Ziel ist die Approximation  $y_i$  der zugehörigen Lösungsfunktion  $y(t_i)$  zu bestimmten Zeitpunkten  $t_i$ . Wenn wir **E**inschrittverfahren verwenden, interessiert uns immer ein Teilintervall  $[t_k; t_{k+1}]$ , um aus **e**inem alten Wert  $y_k$  den neuen  $y_{k+1}$  zu berechnen. Dabei können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzen, der uns folgenden Zusammenhang liefert:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t) dt \stackrel{(1)}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (3)$$

Um nun approximierte Werte  $y_k$  und  $y_{k+1}$  auf der linken Seite von (3) zu erhalten, integriert man die rechte Seite numerisch.

- a) Benutzen Sie die im Folgenden definierte »dumme Rechtecksregel«, um aus (3) das explizite Euler-Verfahren herzuleiten!

Die »dumme Rechtecksregel« arbeitet wie die normale Rechtecksregel, nur wird die Funktion am linken Rand des Intervalls ausgewertet und nicht in der Mitte:

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b - a) \cdot f(a).$$

- b) Benutzen Sie die Trapezregel sowie einen zusätzlichen Approximationsschritt, um aus (3) das Verfahren von Heun herzuleiten!

#### Lösung:

- a) Die »dumme Rechtecksregel«

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b - a) \cdot f(a).$$

liefert direkt

$$\begin{aligned}y_{k+1} - y_k &= \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{=\delta t} \cdot f(t_k, y_k) \\ \Rightarrow y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k).\end{aligned}$$

b) Die Trapezregel lautet

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a) \cdot \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] .$$

Damit ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{=\delta t} \cdot \frac{1}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})] \\ \Rightarrow y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot \frac{1}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})] . \end{aligned} \quad (4)$$

Allerdings taucht in Glg. (4) nun auch auf der rechten Seite das noch unbekannte  $y_{k+1}$  auf. Um die Lösung einer (i.A.) nichtlinearen Gleichung zu vermeiden, approximiert man diesen Wert mit Hilfe eines einfach zu berechnenden anderen Verfahrens, wie z. B. des expliziten Euler-Verfahrens. So erhalten wir:

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \frac{1}{2} \left[ f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \underbrace{y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)}_{\approx y_{k+1}}) \right] . \quad (5)$$

#### 4) Instabilität der Mittelpunktsregel

Neben den bisher betrachteten Einschrittverfahren gibt es eine weitere Klasse der sogenannten Mehrschrittverfahren. Deren Grundidee ist, die in früheren als dem letzten Schritt bereits berechneten Approximationen nicht wegzuerwerfen sondern mitzunutzen.

Ein einfacher Vertreter der Mehrschrittverfahren ist die Mittelpunktsregel (MPR). Die MPR ist ein Zweischrittverfahren der folgenden Form:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k), \quad k = 1, \dots, N-1$$

Damit ein Mehrschrittverfahren konvergiert, ist zusätzlich zur Konsistenz nun auch eine Stabilitätsbedingung notwendig. Wir wollen in dieser Aufgabe an der MPR beobachten, was passiert, wenn diese Stabilität verletzt wird.

Dazu betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Zu Beginn des Verfahrens liegt nur der Anfangswert  $y_0$  vor. Somit benötigen wir noch einen weiteren Wert  $y_1$ , bevor die Mittelpunktsregel gestartet werden kann. Typischerweise benutzt man zur Erzeugung dieses Wertes einfache Einschrittverfahren. Im Folgenden wollen wir daher  $y_1$  mit Hilfe eines Schrittes des expliziten Euler-Verfahrens berechnen.

- Berechnen Sie die analytische Lösung des AWP (6)!
- Wenden Sie die Mittelpunktsregel für  $t \in [0; 6]$ ,  $N = 3$  und  $\delta t = 2$  auf das AWP (6) an! Was stellen Sie im Vergleich mit der analytischen Lösung fest?
- Berechnen Sie nun die Ergebnisse mit halber Schrittweite ( $N = 6$  und  $\delta t = 1$ ) und vergleichen Sie sie wieder mit der analytischen Lösung!

### Lösung:

- a) Die analytische Lösung des AWP's lautet  $y(t) = e^{-t}$ . Das erkennt man entweder direkt aus dem AWP oder rechnet es beispielsweise mit der Separation der Variablen nach ( $\dot{y}(t) = -y(t) = F(t) \cdot G(y)$  mit  $F(t) = 1$  und  $G(y) = -y$ , sowie  $y(t_0 = 0) = 1$ ):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= F(t) \cdot G(y) \\ \frac{dy}{G(y)} &= F(t) dt \\ \int_{y_0}^y \frac{1}{G(\eta)} d\eta &= \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \\ \int_1^y -\frac{1}{\eta} d\eta &= \int_0^t 1 d\tau \\ -\ln(y) + \ln(1) &= t \\ y(t) &= e^{-t}, \quad t \in [0; b].\end{aligned}$$

- b) Für  $N = 3$  und  $\delta t = 2$  ergibt sich  $y_1$  mit einem Startschritt des expliziten Euler-Verfahrens zu  $y_1 = y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 2(-1) = -1$ . Damit kann die Mittelpunktsregel als Zweischrittverfahren starten und ergibt:

$$\begin{aligned}y_2 &= y_0 + 2\delta t \cdot f(t_1, y_1) = 1 - 2 \cdot 2(-1) = 5, \\ y_3 &= y_1 + 2\delta t \cdot f(t_2, y_2) = -1 - 2 \cdot 2(5) = -21.\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Werte betragsmäßig größer werden, aber das Vorzeichen wechselt. Dagegen beschreibt die analytische Lösung ein gleichmäßiges Abklingen gegen Null. Offensichtlich ist die Stabilitätsbedingung bei der Mittelpunktsregel hier verletzt.

- c) Ein zu b) analoges Ergebnis erzielt man auch mit halb so großer Schrittweite  $\delta t = 1$ . Der Euler-Startschritt liefert  $y_1 = y_0 + 1 \cdot (-y_0) = 0$ . Damit berechnet man über die Vorschrift der Mittelpunktsregel:

$$\begin{aligned}y_2 &= y_0 + 2\delta t \cdot f(t_1, y_1) = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \\ y_3 &= y_1 + 2\delta t \cdot f(t_2, y_2) = 0 - 2 \cdot 1 = -2, \\ y_4 &= y_2 + 2\delta t \cdot f(t_3, y_3) = 1 - 2 \cdot (-2) = 5, \\ y_5 &= y_3 + 2\delta t \cdot f(t_4, y_4) = -2 - 2 \cdot 5 = -12, \\ y_6 &= y_4 + 2\delta t \cdot f(t_5, y_5) = 5 - 2 \cdot (-12) = 29.\end{aligned}$$

Die Instabilität lässt sich also nicht durch Verringerung der Schrittweite beheben, sondern verschiebt lediglich den Zeitpunkt des Anschwellens der Werte nach hinten. Die Betrachtung weiterer Verfeinerungslevel mit Hilfe des matlab-Programms *vis\_midpoint.m* macht dies nochmals deutlich (vgl. Abb. 1).

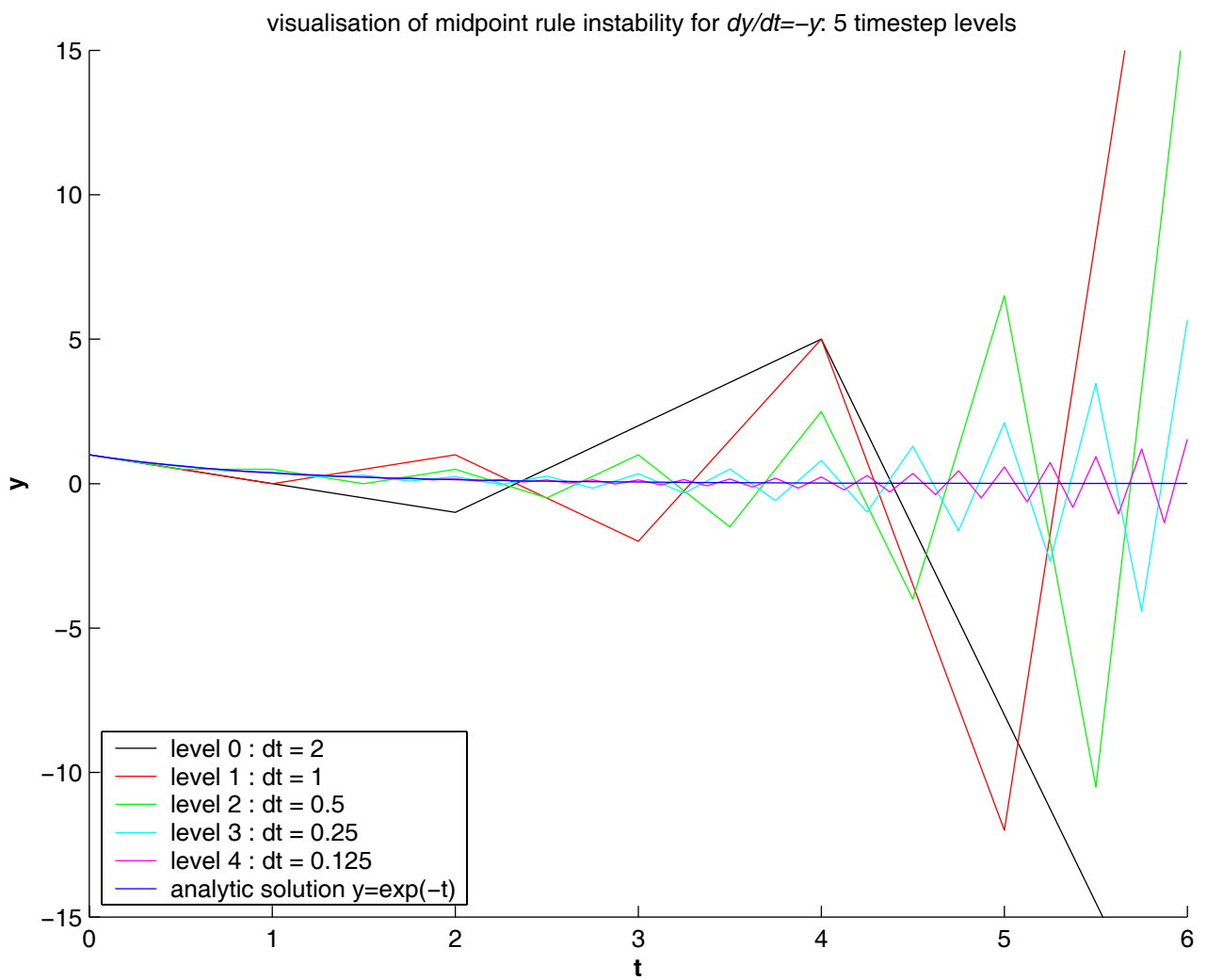


Abbildung 1: Visualisierung der Instabilität der Mittelpunktsregel: Fünf verschiedene Schrittweitenlevel und analytische Lösung.