Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

07. Trainingsblatt: Gaußelimination, LR-Zerlegung

1) Gauß-Elimination

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

b) Seien a und b Variablen, lösen sie das folgende LGS auf und bestimmen Sie a und b:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ a & 3 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

c) Sie möchten eine Geradengleichung der Form $f(x) = m \cdot x + k$ berechnen, die durch zwei Punkte hindurchläuft. Hierfür seien $(1, 2)$ und $(4, 7)$ gegeben.

Konstruieren Sie aus dieser Problemstellung ein LGS, welches das Problem reflektiert (Sie müssen es nicht lösen). Ist es immer lösbar, egal welche zwei Punkte gewählt werden?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Wir lösen das LGS:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2.5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3.5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & | & -4.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3.5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & | & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3.5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten als Lösungsvektor $(-0.5,\ -3/2,\ 2.5,\ 3.5)^T$:

b) Nun mit Variablen im LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ a & 3 & | & b \\ 3 & 5 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ a & 3 & | & b \\ 0 & -1 & | & -4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -6 \\ a & 3 & | & b \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -6 \\ a & 0 & | & b-12 \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor ist $(-6,\ 4)^T$.

Noch a und b bestimmen, indem wir die Zeile herauslösen:

$$a \cdot -6 = b - 12$$
$$12 - 6 \cdot a = b$$

Damit obiger Lösungsvektor stimmt, muss diese Relation stimmen. Es hat also unendlich viele Lösungen, zum Beispiel mit $a = 1$ und $b = 6$.

c) Wir müssen erkennen, dass die Geradengleichung zwei Unbekannte besitzt, wenn man Punkte einsetzt (nämlich m und k). Wir setzen jeweils unsere Punkte als x und $f(x) = y$

ein:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2 & 1 & | & y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Nun zu der Frage, ob das allgemein lösbar ist. Rein grafisch kann man sich eine Lösung dazu schon denken, aber um das mathematisch zu überprüfen müssen wir die allgemeine LGS-Darstellung betrachten.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2 & 1 & | & y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 1 & | & y_1 \\ x_2 - x_1 & 0 & | & y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Wir deduzieren in Gleichenform:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)m &= y_2 - y_1 \\ m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot m + k &= y_1 \\ k &= y_1 - x_1 \cdot m \end{aligned}$$

Also ja, rein mathematisch ist das Problem immer lösbar, solange $x_2 \neq x_1$.

2) LR-Zerlegung

Gegeben sei folgende Matrix und Vektor eines LGS der Form $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zerlegen Sie A mithilfe der LR-Zerlegung.

b) Was ist der große Vorteil von diesem Verfahren?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung…

Lösung:

a) Wenn wir A zerlegen, erhalten wir

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir $Ly = b$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Wir erhalten $y = (1,\ 4,\ {}^3\!/\!_2,\ 3)^T$.

Jetzt fehlt nur noch $Rx = y$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & {}^3\!/\!_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Wir erhalten als Lösungsvektor $(-1,\ -4,\ 3,\ 6)^T$

b) Lösen wir mit derselben Matrix A mehrere LGS (also mit unterschiedlichen b Vektoren), erhöht sich die Effizienz, da wir die Zerlegung selbst nicht mehr berechnen müssen. Zerlegung in L und R liegt in $\mathcal{O}(n^3)$, ohne nur noch in $\mathcal{O}(n^2)$.