Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hendrik Möller

WiSe 2022/23

Numerisches Programmieren, Übungen

11. Trainingsblatt: Differentialgleichungen (ODE)

1) Anfangswertproblem

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$y'(t) = -2t \cdot 2y(t)$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des ODEs.

b) Mit den folgenden Anfangswerten, geben Sie die Lösung des AWPs an:

$$t_0 = 0 \qquad t \geq 0 \qquad y(0) = 2$$

c) Wie ist die Kondition des AWP-Problems aus b)?

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Wir nutzen die Separation der Variablen.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -2t \cdot 2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{2y} &= -2t \cdot \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y} \frac{1}{2\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_{t_0}^{t} -2\tau\ \mathrm{d}\tau \\ \frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y_0|) &= -t^2 + t_0^2 \\ \ln|y| - \ln|y_0| &= 2 \cdot \left(-t^2 + t_0^2\right) \\ \frac{|y|}{|y_0|} &= e^{2\cdot\left(-t^2+t_0^2\right)}\end{aligned}$$

$$y(t) = \pm y_0 \cdot e^{2\cdot\left(-t^2+t_0^2\right)}$$

b) Wir setzen unsere Anfangswerte in unsere Lösung aus a) ein:

$$t_0 = 0 \qquad y_0 = 2$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \pm y_0 \cdot e^{2\cdot\left(-t^2+t_0^2\right)} \\ y(t) &= 2 \cdot e^{-2t^2}\end{aligned}$$

c) Um auf die Kondition schließen zu können, müssen wir eine verfälschte Eingabe betrachten:

$$y_\epsilon = y_0 + \epsilon$$

Diese führt auf die verfälschte Ausgabe:

$$\begin{aligned}y_\epsilon(t) &= y_\epsilon \cdot e^{-2t^2} \\ &= y_0 \cdot e^{-2t^2} + \epsilon \cdot e^{-2t^2} \\ &= y(t) + \epsilon \cdot e^{-2t^2}\end{aligned}$$

Der Ausgabefehler ist also $\epsilon \cdot e^{-2t^2}$. Diese geht für $\lim\limits_{t\to\infty}$ gegen null, das Problem ist also gut konditioniert.

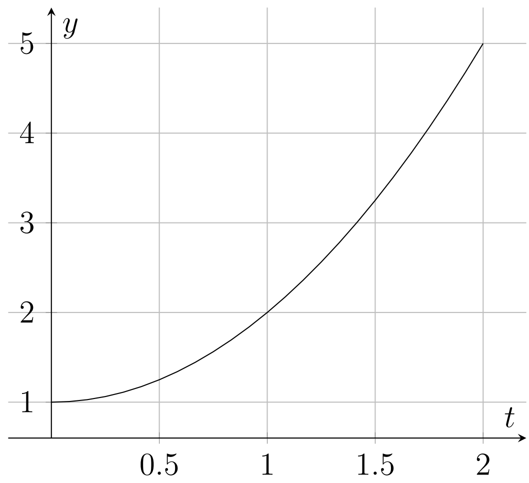
2) Anfangswertproblem

Gegeben sei das AWP aus letzter Aufgabe:

$$y'(t) = -2t \cdot 2y(t) \qquad t \geq 0 \qquad y(0) = 2$$

a) Führen Sie zwei Schritte des Heun-Verfahrens durch. Nutzen Sie hierfür eine Schrittweite $\delta t = 1$.

b) Gegeben sei folgende Grafik einer Funktion: Mithilfe des Startwertes $y_0 = y(0) = 1$ und



der Schrittweite $\delta t = 1$, zeichnen Sie zwei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens ein.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung...

Lösung:

a) Erster Schritt:

$$y_0 = 2 \qquad t_0 = 0 \qquad t_1 = 1$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2} \cdot ((-2t_0 \cdot 2y_0) + (-2t_1 \cdot 2 \cdot (y_0 + 1 \cdot (-2t_0 \cdot 2y_0)))) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot ((0 \cdot 4) + (-2 \cdot 2 \cdot (2 + 1 \cdot (0 \cdot 4)))) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot (-4 \cdot 2) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot -8 \\ y_1 &= -2 \end{aligned}$$

Zweiter Schritt:

$$y_1 = -2 \qquad t_1 = 1 \qquad t_2 = 2$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{1}{2} \cdot ((-2t_1 \cdot 2y_1) + (-2t_2 \cdot 2 \cdot (y_1 + 1 \cdot (-2t_1 \cdot 2y_1)))) \\ &= -2 + \frac{1}{2} \cdot ((-2 \cdot -4) + (-4 \cdot 2 \cdot (-2 + 1 \cdot (-2 \cdot -4)))) \\ &= -2 + \frac{1}{2} \cdot (8 + (-8 \cdot (-2 + 1 \cdot 8))) \\ &= -2 + \frac{1}{2} \cdot (8 + (-8 \cdot 6)) \\ &= -2 + \frac{1}{2} \cdot (8 - 48) \\ &= -2 + \frac{1}{2} \cdot -40 \\ &= -2 - 20 \\ y_2 &= -22 \end{aligned}$$

b) Bei der ersten Iteration ist die Steigung 0, bei der zweiten 2.