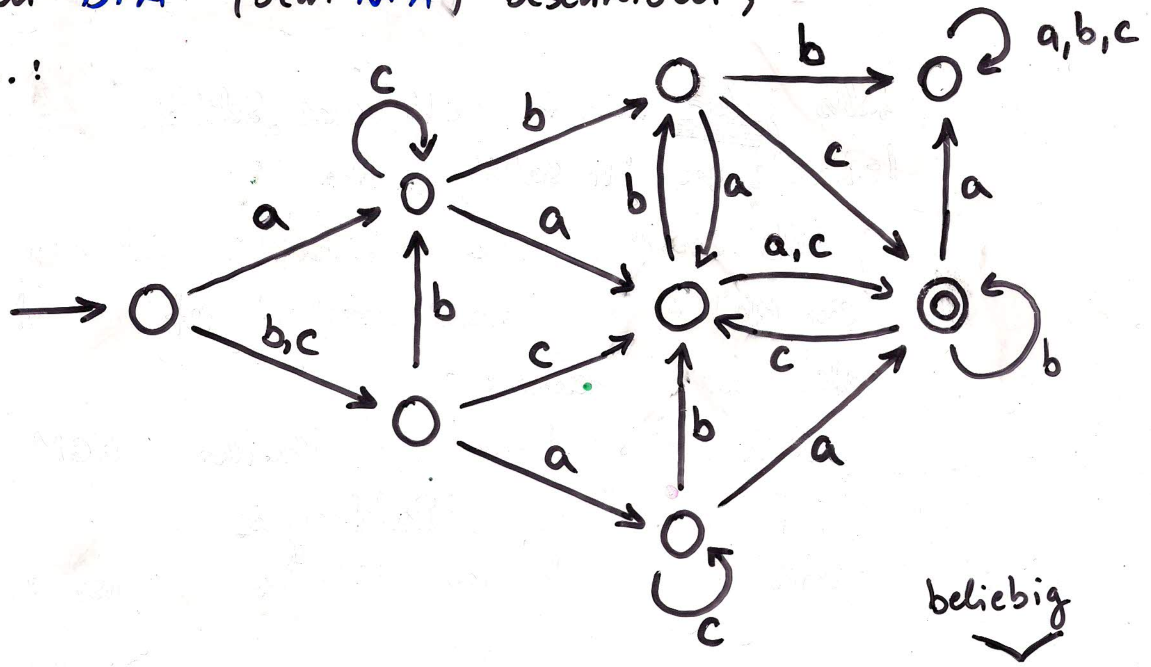
Pumping-Lemma

Idee:

Jede reguläre Sprache L lässt sich durch mindestens einen DFA (bzw. NFA) beschreiben,

z.B.:



beliebig

Bei einigen Wörtern lässt sich mind. ein Teilwort „aufpumpen":

- acbc ⇝ accbc ⇝ acccbc ⇝ ...
- bcbaa ⇝ bcbabaa ⇝ bcbababa ⇝ ...
- caab ⇝ caabb ⇝ caabbb ⇝ ...
- bcbccbc ⇝ bcbccbccbc ⇝ bcbccbccbccbc ⇝ ...

Bei anderen nicht: z.B.: baa

- baa ⇝ bbaa ⇝ bbbaa ⇝ bbbbaa ↯
- baa ⇝ baaa ↯
- baa ⇝ baaa ↯
- baa ⇝ babaa ↯
- baa ⇝ baaaa ↯
- baa ⇝ baabaa ↯

mit „↯" ist „$\notin L$" gemeint!

Wann lässt sich ein Wort also beliebig aufpumpen?

→ Wenn es im DFA/NFA mindestens einen „Loop" macht.

Sei n die Anzahl an Zuständen des DFAs/NFAs, ab welcher Wortlänge macht jedes Wort auf jeden Fall einen Loop?

→ Ab länge n. Vielleicht auch für kleiner, aber ab n aufwärts immer!

Also:

L regulär ⟹ alle Wörter in L, die mindestens eine bestimmte Wortlänge haben (n) lassen sich innerhalb der ersten n Stellen beliebig aufpumpen.

Formaler:

L regulär ⟹ $\exists n \in \mathbb{N} \; \forall z \in L$ mit $|z| \geq n \; \exists u, v, w$:

$z = uvw$ und: $v \neq \varepsilon$,
$|uv| \leq n$,
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iw \in R$

Äquivalent dazu: (was uns interessiert!!)

$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists z \in L$ mit $|z| \geq n \; \forall u, v, w$: $z = uvw$ lässt sich nicht aufpumpen

⟹ L nicht regulär

Rezept:

Wie beweise ich, dass eine Sprache L nicht regulär ist?

Schritt 1: „Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl"
n ist beliebig, also unbekannt (wegen $\forall n \in \mathbb{N}$)

Schritt 2: „Sei $z = \ldots \in L$" (in Abhängigkeit von n)
z soll strategisch gewählt werden und mind. n lang
(wir dürfen das wegen $\exists z \in L \ldots$)

Schritt 3: zeige, dass das z in den ersten n Stellen sich nirgends beliebig aufpumpen lässt.
(gerne in Prosa und oft sind Fallunterscheidungen nötig)

Beispiel:

$L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (s. Skript!)