

# Pumping Lemma für CFLs

Idee: Jetzt pumpen wir an 2 Stellen gleichzeitig! <sup>auf</sup>  
↓

Gegeben sei  $G$  mit Produktionen:

$S \rightarrow AA \mid BA$

$A \rightarrow BC \mid a$

$B \rightarrow AB \mid b$

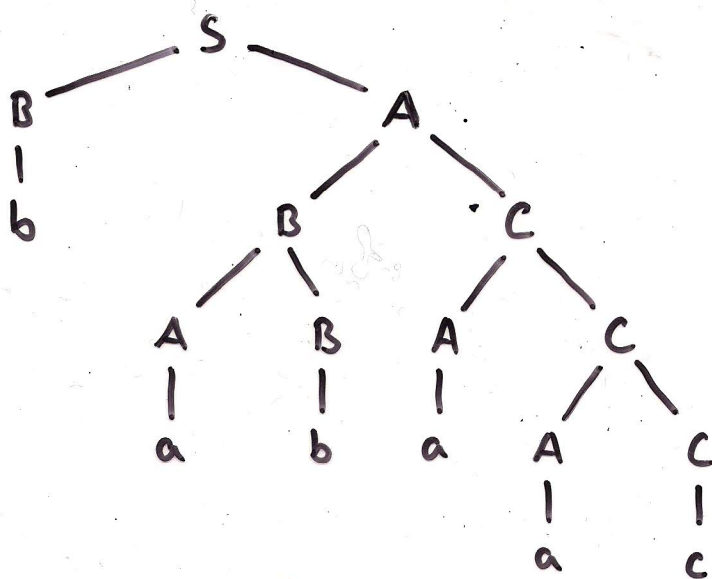
$C \rightarrow AC \mid c$

Chomsky Normal form!

und das Wort  $w = b a b a a c \in L(G)$

Wieso gilt  $b (ab)^i a (ac)^i \in L(G)$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ ?

Syntaxbaum für  $w$ :



Wann kann man also auf jeden Fall aufpumpen?

# Pumping Lemma für CFLs

Idee: Jetzt pumpen wir an 2 Stellen gleichzeitig! <sup>auf</sup>  
↓

Gegeben sei  $G$  mit Produktionen:

$$S \rightarrow AA \mid BA$$

$$A \rightarrow BC \mid a$$

$$B \rightarrow AB \mid b$$

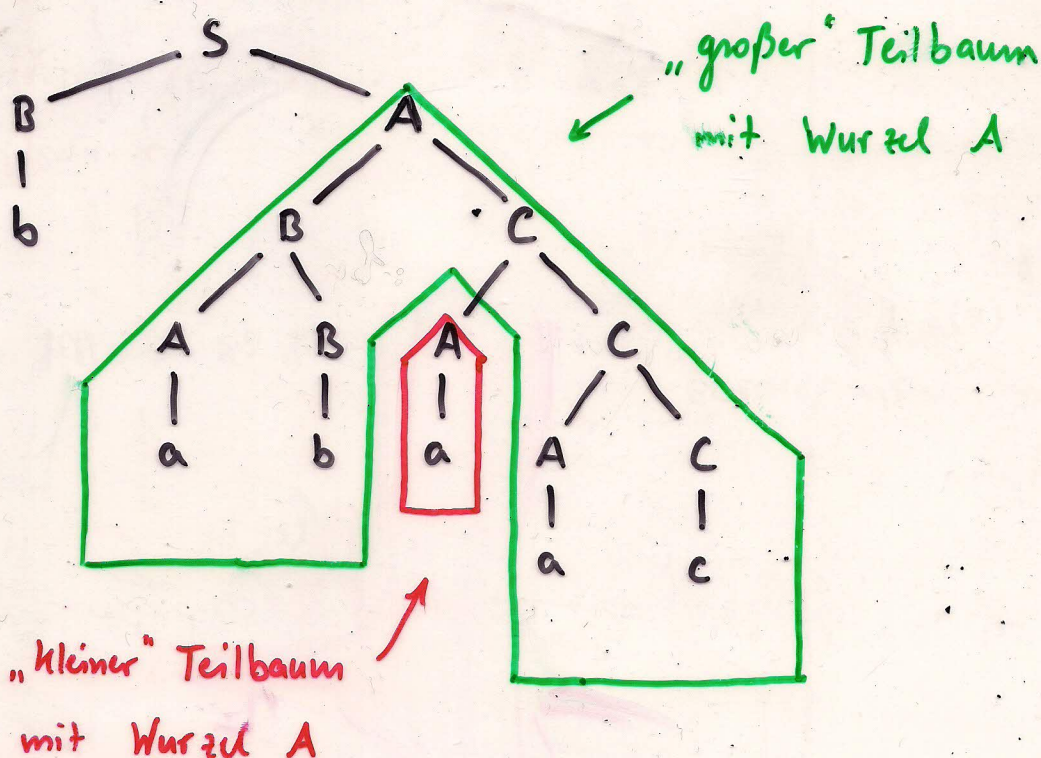
$$C \rightarrow AC \mid c$$

} Chomsky Normalform!

und das Wort  $w = b a b a a c \in L(G)$

Wieso gilt  $b (ab)^i a (ac)^i \in L(G)$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ ?

Syntaxbaum für  $w$ :



Man kann den großen Teilbaum beliebig oft „an sich selbst“  
dranhängen oder auch weglassen.

Wann kann man also auf jeden Fall aufpumpen?

→ Wenn auf dem Pfad zwischen Wurzel und einem  
Blatt mind. eine Variable mind. 2 mal vorkommt.



### Leitfragen:

- Wieso kann man für jedes Wort aus einer CFL annehmen, dass es einen binären Syntaxbaum hat?
- Was kann man über die Höhe eines Binärbaums sagen wenn er mind.  $2^k$  Blätter hat?
- Wenn unsere Grammatik in Chomsky Normal form ist und  $|V|$  viele Variablen besitzt, ab welcher Wortlänge lassen sich alle Wörter auf jeden Fall beliebig auf pumpen?

## Leitfragen:

- Wieso kann man für jedes Wort aus einer CFL annehmen, dass es einen binären Syntaxbaum hat?

→ wegen Satz 3.25

- Was kann man über die Höhe eines Binärbaums sagen wenn er mind.  $2^k$  Blätter hat?

→ die Höhe (größter Abstand zw. Wurzel und Blätter) ist mind.  $k$ .

D.h. der längste Pfad zwischen Wurzel und Blättern hat Länge  $k$  und besitzt  $k+1$  Knoten.

- Wenn unsere Grammatik in Chomsky Normalform ist und  $|V|$  viele Variablen besitzt, ab welcher Wortlänge lassen sich alle Wörter auf jeden Fall beliebig auf pumpen?

→ Ab Länge  $n \geq 2^{|V|}$ . Dann gibt bei jedem Syntaxbaum mind. einen Pfad wo sich mind. eine Variable wiederholt.

## Ziel:

Das Pumping Lemma für CFLs funktioniert analog zu dem für reguläre Sprachen.