智能汽车路径规划与轨迹跟踪系列算法精讲及Matlab程序实现

第8讲　B样条曲线法

创作者：Ally

时间：2021/2/17

1 学习课程大纲目录


路径规划与轨迹跟踪系列学习视频
自动驾驶汽车定位-感知-规划-决策-控制概述
全局路径规划
Dijkstra算法
蚁群算法
动态规划算法
A*算法
局部路径规划
多项式曲线法
势场法
贝塞尔曲线
B样条曲线
轨迹跟踪与控制
纯跟踪法
Stanley法
PID法
MPC法

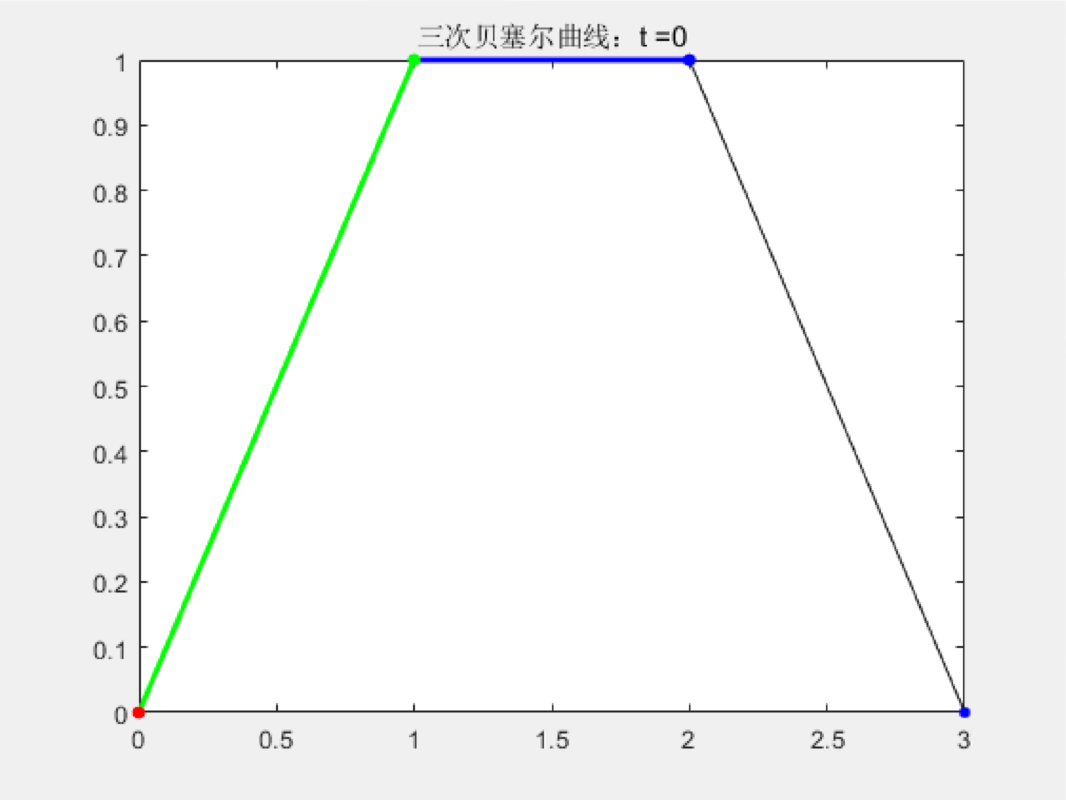
3 局部路径规划算法——B样条曲线法

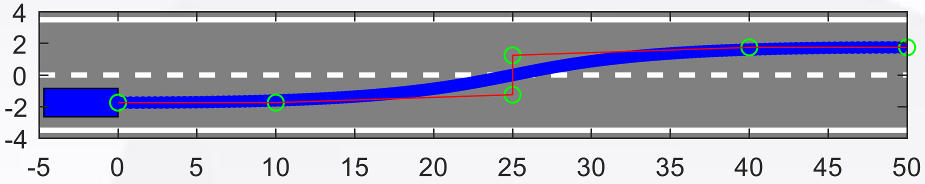
算法简介

- 样条是一根富有弹性的细木条或塑料条，在应用CAD/CAM技术以前，航空、船舶和汽车制造业普遍采用手工绘制自由曲线。绘制员用压铁压住样条，使其通过所有给定的型值点，再适当地调整压铁，改变样条形态，直到符合设计要求。
- B样条曲线是B-样条基函数（给定区间上的所有样条函数组成一个线性空间。）的线性组合。

算法思想

- 贝塞尔曲线有以下缺陷：
- 1. 确定了多边形的顶点数（n+1个），也就决定了所定义的Bezier曲线的阶次（n次），这样很不灵活。
- 2. 当顶点数（ n+1 ）较大时，曲线的次数较高，曲线的导数次数也会较高，因此曲线会出现较多的峰谷值。
- 3. 贝塞尔曲线无法进行局部修改。
- B样条曲线除了保持Bezier曲线所具有的有点外，还弥补了上述所有的缺陷。





3 局部路径规划算法——B样条曲线法

算法精讲——算法推导

- 设有 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$ 一共n+1个控制点，这些控制点用于定义样条曲线的走向、界限范围，则k阶B样条曲线的定义为：

$$P(u)=\begin{bmatrix}P_0 & P_1 & \cdots & P_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,k}(u)\\ B_{1,k}(u)\\ \vdots \\ B_{n,k}(u)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,k}(u)$$

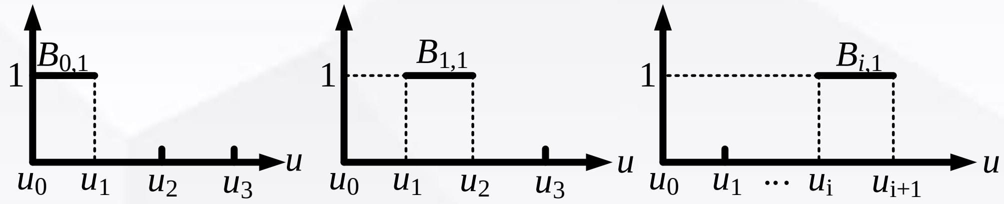
- 式中， $B_{i,k}(u)$ 是第i个k阶B样条基函数，与控制点 P_i 相对应， k≥1；u是自变量。
- 基函数具有如下德布尔-考克斯递推式：

$$B_{i,k}(u)=\begin{cases}\begin{cases}1, & u_i\le u<u_{i+1}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}, & k=1\\ \dfrac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)+\dfrac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u), & k\ge 2\end{cases}$$

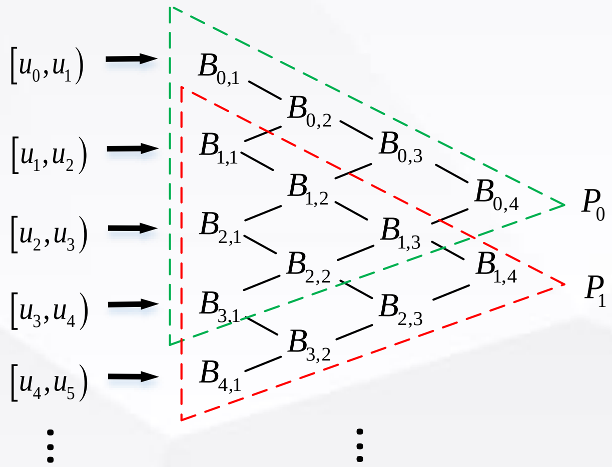
- 约定0/0=0。式中，ui是一组被称为节点矢量的非递减序列的连续变化值，首末值一般定义为0和1，该序列如下：

$$\left[u_0,u_1,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots,u_n,u_{n+1},\cdots,u_{n+k}\right]$$

- 根据递推式，当阶数k=1时，不同基函数的非零域如下图：



- 根据上式递推，有如下三角计算格式：



- K阶B样条→关于u的k-1次曲线；段数=(n+1) – (k-1) = n-k+2
- $B_{i,k}(u)$涉及到的节点为 $u_i,u_{i+1},\cdots,u_{i+k}$ 一共k+1个节点，k个区间，因此从 $B_{0,k}(u)$ 到 $B_{n,k}(u)$共涉及 一共n+k+1个节点。
- 对于open B样条，u定义域为 $[u_k,u_{n+1}]$ 。

3 局部路径规划算法——B样条曲线法

算法精讲——算法推导

- 均匀B样条曲线：当节点沿参数轴均匀等距分布，为均匀B样条曲线，如 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 。当n和k一定时，均匀B样条的基函数呈周期性，所有基函数有相同形状，每个后续基函数仅仅是前面基函数在新位置上的重复。
- 准均匀B样条曲线：两端节点具有重复度k，中间节点非递减的序列，如 $U=\{0,0,0,1,2,3,4,5,5,5\}$ 准均匀B样条曲线保留了贝塞尔曲线在两个端点处的性质：样条曲线在端点处的切线即为倒数两个端点的连线。准均匀B样条曲线用途最为广泛。
- 一般来说，次数越高，则曲线的导数次数也会较高，那么将会有很多零点存在，较多的导数零点就导致原曲线存在较多的极值，使曲线出现较多的峰谷值；次数越低，样条曲线逼近控制点效果越好。
- 另一方面，三次B样条曲线能够实现二阶导数连续，故最终选择准均匀三次B样条曲线作为轨迹规划的曲线比较合适。

$$k=\left|\frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|=$$

- 贝塞尔曲线：

$$p_n(t)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\cdot(1-t)^{n-i}\cdot t^i\cdot P_i=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\cdot P_i$$

- B样条曲线：

$$P(u)=\begin{bmatrix}P_0 & P_1 & \cdots & P_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,k}(u)\\ B_{1,k}(u)\\ \vdots \\ B_{n,k}(u)\end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,k}(u)$$