

把“隐形衣”引入课堂

——《电磁场与电磁波》课程中的案例教学
梅中磊 兰州大学信息科学与工程学院

背景

《电磁场与电磁波》是电子信息类专业本科生的主干基础课程，是《微波技术》、《光纤通信》、《天线》、《射频电路》、《无线通信》等后续课程的基石。在 5G 移动通信、卫星通信、光纤通信日益发达的今天，本课程对于培养现代通信领域的高素质人才，具有非常重要的作用。国外各知名高校如麻省理工学院、斯坦福大学等的电气工程等专业，都设置有类似课程；国内高校电子信息类专业，除开设模拟电路等“路”的课程之外，普遍开设《电磁场理论》、《电磁场与电磁波》或《电磁场与微波技术》等“场”的课程。

从内容上讲，《电磁场理论》涉及大量的场论和矢量分析方面的数学知识；覆盖内容较广，且要求有一定的深度；相对于应用型课程，课程理论分析内容较多，难度较大。长期以来，国内外高校尤其是国内高校，对于这些课程内容的传授，基本上采用“黑板加粉笔”的讲授模式（或 PPT 加板书），再加上课程本身具有理论难度，所以学生的学习积极性不太高，教学效果不理想，对后续课程也有不良影响。

对于《电磁场与电磁波》课程及其课程群来讲，尽管存在这样或者那样的问题，但也具有自身的优势：现代通信尤其是无线、移动通信的迅猛发展，对该领域的高层次人才需求非常旺盛，而掌握《电磁场与电磁波》的基础知识则是进入这一领域的必由之路；与课程教学或实验相关的电磁仿真软件，在天线、射频等工业领域也大量使用，掌握这些软件对大学生就业也颇有帮助；课程中所讲授的知识、理论或者方法，在科研工作中具有一定的普适性，更容易与科研结合，并取得成绩。从这个角度来看，在《电磁场与电磁波》课程中引入科研案例，是很好的选择，必定会对教学起到促进作用。而关于“电磁隐形衣”的引入，恰恰满足了这样的要求。

静磁隐形衣的相关理论

2012 年，美国《科学》杂志曾经报道了一种所谓的静磁“隐形衣”[1]，如图 1 所示。这是一种双层柱状结构，中心圆柱采用超导材料构成，即 $\mu_1 = 0$ ，从而任何磁场进入不到柱体内部；超导材料外部是一个内外半径分别为 a 和 b 的柱套，其磁导率为 μ_2 。当在背景材料（ μ_b ）中施加一个垂直于柱轴方向的匀强磁场 H_0 时，该磁场不会受到任何扰动，就像背景材料中没有任何东西一样。这种柱状结构，就是静磁情形下的隐形装置。可以设想，如果在超导体内部挖个空腔，放置待隐形的物体，则其不会被外界所发现。

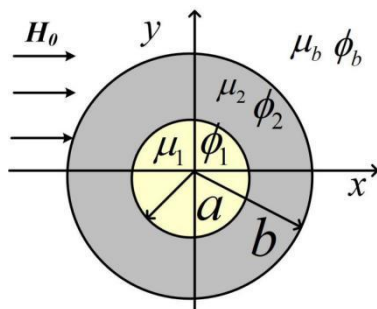


图 1 静磁隐形衣结构示意图

对静磁隐形装置的研究,可以使用柱坐标系下的分离变量开展。如图 1 所示,建立柱坐标系,假设各个区域中的磁标势分布如下

$$\begin{cases} \phi_1 = Ar \cos \varphi \\ \phi_2 = (Br + \frac{C}{r}) \cos \varphi \\ \phi_b = (-H_0 r + \frac{D}{r}) \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

这里需要注意的是背景中的磁标势分布,它由两项组成,一项是均匀磁场所对应的磁势,另外一项是双层柱被磁化之后磁化电流所产生的磁势。如果式(1)中 D 为零,则外部背景材料中只有前一项分布,此时,对应的磁场分布为匀强磁场。

在介质分界面上,有如下边界条件:

$$\text{当 } r = a \text{ 时, } \phi_1 = \phi_2 \text{ 且 } \mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \quad (2-a)$$

$$\text{当 } r = b \text{ 时, } \phi_2 = \phi_b \text{ 且 } \mu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \mu_b \frac{\partial \phi_b}{\partial r} \quad (2-b)$$

将各个区域的磁势表达式代入,则有

$$\begin{cases} Aa = Ba + C/a \\ \mu_1 A = \mu_2 (B - C/a^2) \\ Bb + C/b = -H_0 b + D/b \\ \mu_2 (B - C/b^2) = \mu_b (-H_0 - D/b^2) \end{cases} \quad (3)$$

写成矩阵方程的形式

$$\begin{bmatrix} a & -a & -\frac{1}{a} & 0 \\ \mu_1 & -\mu_2 & \frac{\mu_2}{a^2} & 0 \\ 0 & b & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ 0 & \mu_2 & -\frac{\mu_2}{b^2} & \frac{\mu_b}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_0 b \\ -H_0 \mu_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

利用 Matlab 下的符号工具箱,可以求解上述四元一次方程组,得到 D 的表达式为

$$D = H_0 b^2 \frac{(b^2 - a^2)\mu_2^2 - (a^2 + b^2)\mu_b \mu_2}{(b^2 - a^2)\mu_2^2 + (a^2 + b^2)\mu_b \mu_2} = H_0 b^2 \frac{(b^2 - a^2)\mu_2 - (a^2 + b^2)\mu_b}{(b^2 - a^2)\mu_2 + (a^2 + b^2)\mu_b} \quad (5)$$

如果要想实现隐形的功能,则 $D = 0$, 于是

$$\mu_2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \mu_b \quad (6)$$

或

$$b^2 = a^2 \frac{\mu_2 + \mu_b}{\mu_2 - \mu_b} \quad (7)$$

因此，若要实现这种静磁“隐形装置”，其套层材料要满足公式（6），或者其几何结构必须满足公式(7)。具体应用的时候，需要隐藏的物体可以放置在超导材料内部而不被外界探测到。

Matlab 下利用 PDETool 建模和数值计算

上述针对静磁隐形衣的解析分析，虽然精确，严谨，但是不直观，不宜理解。因此，采用数值仿真和可视化的展现，具有重要意义。而作为数值计算的强大工具软件，Matlab，就可以达到这一目的。Matlab 环境下提供的 PDETool 工具箱，可以基于有限元方法解决大多数二维偏微分方程的求解。下面就利用 PDETool 实现对这个静磁隐形装置的设计和数值仿真（注：PDETool 下使用矢量势 \mathbf{A} 的 z 分量，来进行计算和分析）。

假设超导材料的半径 $a = 0.2$ ，介质柱套的外半径 $b = 0.4$ ，则利用式（6）易知，柱套的介电常数为 $\mu_2 = 1.6667$ 。

首先，在 MATLAB 命令行下输入 PDETool；为了方便仿真，进入图形界面后，选择应用模式为静磁场模式。

其次，在绘图模式下，先后绘制矩形框 R1 和两个圆形 E1 和 E2；双击标签（R1 或者 E1、E2），可以修改几何图形的位置和尺寸；在 set formula 中，设置公式为：R1-E1+(E2-E1)，上述公式表示 R1 和 E2 都剪掉 E1 之后，再做并集运算，从而得到一个中间有一个圆孔的矩形区域，包围着这个小圆孔，有另外一个大圆 E2。

接下来，在边界条件模式下，设置矩形区域的上下两条边为齐次诺依曼条件，矩形左右侧边界为狄利赫里条件，左侧磁势为 5（Wb/m），右侧磁势为 0（Wb/m），从而在空间形成了一个匀强磁场。同时，设置内部圆孔的边界为狄氏条件，磁势值为 2.5（Wb/m）。

然后，进入微分方程设置模式，双击圆环区域，设置磁导率为 1.6667，电流密度为 0；再双击矩形背景区域，设置磁导率为 1，电流密度为 0。

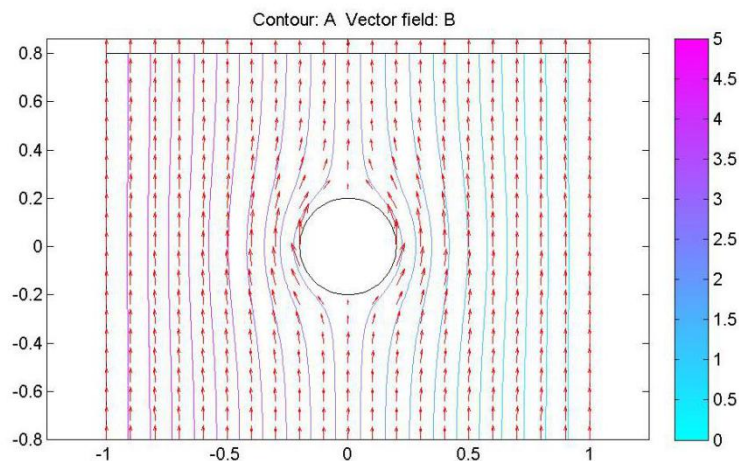
接下来，点击网格生成图标，并根据情况对其细化。

最后，点击求解按钮，PDETool 即可得到磁势分布的数值结果。

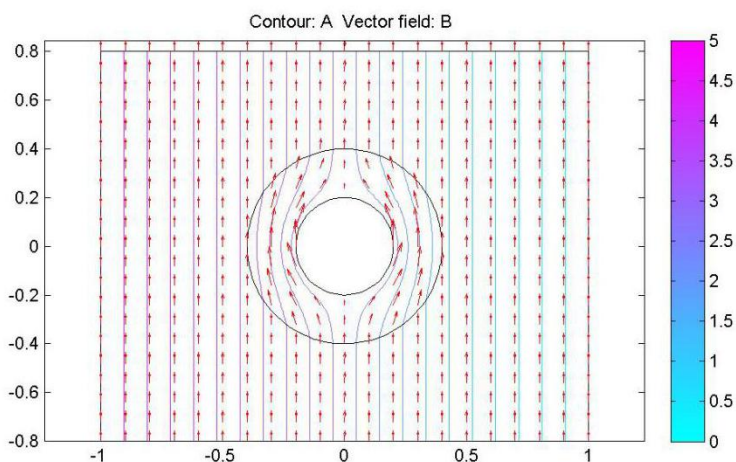
为了更好的显示隐形效果，点击绘图按钮，取消伪彩色图（color），选择等势线（contour）和箭头图（arrows），于是得到图 2 的结果。

当空气中仅有超导圆柱时，对应的设置过程类似。

图 2 给出了具体仿真结果。其中，图 2（a）是空气中仅有超导圆柱的情景。可以看出，由于超导圆柱的存在，空间的等势线分布和磁感应强度分布都不再均匀；但是，当采用了隐形柱套包裹了超导圆柱之后，由图 2（b）可见，空间背景中的磁势分布和磁感应强度分布又变得均匀，所有的扰动都发生在柱套内部。因此，设计结果达到了隐形的目的。通过对绘图方式的设置，还可以以其他形式显示静磁隐形的效果。



(a) 空间仅有超导柱的情况



(b) 用隐形材料包裹超导柱的情况

图2 二维静磁隐形衣的数值仿真效果

从上述过程可知，柱套的磁导率大于1，可以采用铁磁性材料等实现该隐形装置并进行实验测量，这也就是美国《科学》杂志所报道的静磁隐形衣的工作内容。在上述工作的启发下，关于静磁隐形装置的研究，得到了广泛关注[2-4]。

《电磁场与电磁波》立体化教材建设

通过将上述科研案例引入《电磁场与电磁波》教学中，能够极大提升学生学习的积极性和主动性，大幅度提升教学效果。基于这种思路，在我们撰写并且由清华大学出版社出版的教材[5]，《电磁场与电磁波》中，便有机嵌入了类似的电磁隐形科研案例，包括：静电场中的静电隐形衣，基于材料极化机理的极化相消隐身装置，应用于稳恒电流场的直流电型隐形装置，静磁场中的静磁隐形衣，结合“唯一性定理”的有源隐形机理，以及变换光学隐形装置等。

教材中“科技前沿”等内容的增添，紧密结合教学内容，做到水乳交融，绝非画蛇添足，哗众取宠。比如关于静电和静磁隐形衣的原理介绍，我们紧密结合柱坐标和球坐标系下的分离变量法展开，所举例题是《科学》、《物理评论快报》等著名刊物的发表内容，不超纲、提兴趣、生动活泼；此外，关于电磁超表面的介绍，密切联系平面天线阵的辐射理论，用本科生的知识阐述科学家的工作；再比如，讲解互感和法拉第电磁感应定律时，我们适时补充

无线输电的基本原理，从而让同学们有学以致用冲动！该教材受到了一线教师的好评。

在上述工作的基础上，2020 年 5 月，我们还编辑出版了《Matlab 电磁场与微波技术仿真》一书，也由清华大学出版社出版[6]。

该书以专题的形式，介绍 Matlab 在电磁场与微波技术中的应用，主要包括以下内容：场论与矢量分析，电力线和磁力线，二维电磁问题，符号工具箱及其应用，分离变量法与特殊函数，天线分析，射线追踪及其实现，常用电磁代码等。在撰写过程中，采用电磁专业知识与核心 Matlab 命令、函数交替开展的形式，便于广大读者学习。该教材适合于广大本、专科学生，研究生，教师和广大科研工作者入门使用，如果配合电磁场与电磁波等教材使用，效果最佳。

尤其值得一提的是，我们在网站上提供该书全部 Matlab 代码下载服务。广大读者可以在此基础上进行教学和科研工作。对于开展案例教学、虚拟电磁仿真、本科生科研等，本书也有重要的参考价值。

参考文献

1. Gömör F, Solovyov M, Souc J, et al. Experimental realization of a magnetic cloak.[J]. Science, 2012, 335(6075): 1466.
2. Souc, Ján, Solovyov M , Gömör F, et al. A quasistatic magnetic cloak[J]. New Journal of Physics, 2013, 15(5):053019.
3. Wei J , Yungui M , Sailing H . Static Magnetic Cloak without a Superconductor[J]. Physical Review Applied, 2018, 9(5):054041.
4. Mach-Batlle R , Parra A , Laut S , et al. Magnetic Illusion: Transforming a Magnetic Object into Another Object by Negative Permeability[J]. Physical Review Applied, 2018, 9(3):034007.
5. 梅中磊，曹斌照，李月娥，马阿宁，电磁场与电磁波[M]，清华大学出版社，2018.
6. 梅中磊，李月娥，马阿宁，Matlab 电磁场与微波技术仿真[M]，清华大学出版社，2020.