深蓝学院
shenlanxueyuan.com

机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔，谢晓佳等 译
Slides by Xiang Gao

2020年春

第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计

内容回顾

- 上节课介绍了
  - 三维空间中旋转与姿态的表达方法
  - 对应的运动学
- 本节课的内容
  - 三维空间对应的李群李代数
  - 运动学、动力学
  - 李群李代数上的概率与统计

注意点：

- 与十四讲循序渐进的介绍方式不同，在本书中你会看到很多“空降”的概念，初学者可能摸不着头脑
- 例如李代数会直接给出定义而不介绍其背景，伴随也会直接给出定义而没有物理背景
- 我会在课程中稍加补充，但还是请读者习惯这种说话方式

- 本节课重点内容放在1,3部分，第2部分实用性较弱，我会酌情略去一些内容
- 对于复杂的公式，理解其结论和意义即可

第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计

几何学

- 3D旋转矩阵构成了特殊正交群（special orthogonal group）：

$$SO(3) = \{C \in \mathbb{R}^{3\times3} | CC^{\mathrm{T}} = 1, \det C = 1\}$$

  - 正交且行列式为1的矩阵称为旋转矩阵，为-1的通常称为反射旋转（rotary reflection)
  - 由于SO(3)没有良好定义的加法，它不构成向量空间，只能关于乘法成群

- 同理，姿态的变换矩阵构成特殊欧氏群（special Euclidean group)

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \middle| C \in SO(3), r \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

几何学

- 群：一个集合和二元运算组成，集合和运算满足下列关系：
  1. 封闭性
  2. 结合律
  3. 存在幺元
  4. 存在逆
- 李群：是群的同时也是一个微分流形（differential manifold）
  - 流形：局部看起来很像R^n的结构
  - 矩阵李群：元素为矩阵，运算为矩阵乘法的李群
  - SO(3)和SE(3)都为矩阵李群

性质	$SO(3)$	$SE(3)$
封闭性	$C_1, C_2 \in SO(3) \Rightarrow C_1C_2 \in SO(3)$	$T_1, T_2 \in SE(3) \Rightarrow T_1T_2 \in SE(3)$
结合律	$C_1(C_2C_3) = (C_1C_2)C_3 = C_1C_2C_3$	$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3 = T_1T_2T_3$
幺元	$C, 1 \in SO(3) \Rightarrow C1 = 1C = C$	$T, 1 \in SE(3) \Rightarrow T1 = 1T = T$
逆	$C \in SO(3) \Rightarrow C^{-1} \in SO(3)$	$T \in SE(3) \Rightarrow T^{-1} \in SE(3)$

SE(3)的逆元素：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} & -C^{\mathrm{T}}r \\ 0^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

几何学

- 李代数：由数域 $\mathbb{F}$、向量空间 $\mathbb{V}$和二元运算[,]组成。
- 若满足以下性质，则称它们构成李代数：

$$
\begin{aligned}
\text{封闭性（closure）：}\quad & [X, Y] \in \mathbb{V} \\
\text{双线性（bilinearity）：}\quad & [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \\
& [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y] \\
\text{自反性（alternating）：}\quad & [X, X] = 0 \\
\text{雅可比恒等式（Jacobi identity）：}\quad & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0
\end{aligned}
$$

- 李代数是一个向量空间，也是李群幺元处的切空间。

几何学

- SO(3)的李代数：

向量空间：$\mathfrak{so}(3) = \{\boldsymbol{\Phi} = \phi^\wedge \in \mathbb{R}^{3\times3} | \phi \in \mathbb{R}^3\}$

域：$\mathbb{R}$

李括号：$[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2] = \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1$

$$[\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2] = \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\Phi}_1 = \phi_1^\wedge\phi_2^\wedge - \phi_2^\wedge\phi_1^\wedge = \Big(\underbrace{\phi_1^\wedge\phi_2}_{\in\mathbb{R}^3}\Big)^\wedge \in \mathfrak{so}(3)$$

因为反对称算符是一一映射，也可以把so(3)看成R^3和叉乘运算

SE(3)的李代数：

向量空间：$\mathfrak{se}(3) = \{\boldsymbol{\Xi} = \xi^\wedge \in \mathbb{R}^{4\times4} | \xi \in \mathbb{R}^6\}$

域：$\mathbb{R}$

李括号：$[\boldsymbol{\Xi}_1, \boldsymbol{\Xi}_2] = \boldsymbol{\Xi}_1\boldsymbol{\Xi}_2 - \boldsymbol{\Xi}_2\boldsymbol{\Xi}_1$

上尖尖的定义需要重载：

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}, \quad \rho, \phi \in \mathbb{R}^3$$

李括号的定义：

几何学

- SE(3)上的李括号：

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 \Xi_2 - \Xi_2 \Xi_1 = \xi_1^\wedge \xi_2^\wedge - \xi_2^\wedge \xi_1^\wedge = \Big(\underbrace{\xi_1^\curlywedge \xi_2}_{\in \mathbb{R}^6}\Big)^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$$

- 其中上弯弯的计算定义为：

$$\xi^\curlywedge = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}^\curlywedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho^\wedge \\ 0 & \phi^\wedge \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \quad \rho, \phi \in \mathbb{R}^3$$

- 同样这是一个一一映射的运算符，我们可以把R^6与上弯弯运算看成se(3)

几何学

- 指数映射：
  - 指数映射把李代数元素映射到李群
  - 通常的矩阵指数映射与对数映射：

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n \qquad \ln(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\boldsymbol{A} - \mathbf{1})^n$$

  - 对于SO(3)：

$$\boldsymbol{C} = \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n \qquad \boldsymbol{\phi} = \ln(\boldsymbol{C})^\vee$$

  - so(3)到SO(3)的指数映射显然是一个满射

几何学

- SO(3)指数映射的具体计算：

$$
\begin{aligned}
\exp(\phi^\wedge) &= \exp(\phi \mathbf{a}^\wedge) \\
&= \underbrace{1}_{\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge} + \phi\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\phi^2\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge + \frac{1}{3!}\phi^3\underbrace{\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge}_{-\mathbf{a}^\wedge} + \frac{1}{4!}\phi^4\underbrace{\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge}_{-\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge} - \cdots \\
&= \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \underbrace{\left(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 - \cdots\right)}_{\sin\phi}\mathbf{a}^\wedge - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 - \cdots\right)}_{\cos\phi}\underbrace{\mathbf{a}^\wedge\mathbf{a}^\wedge}_{-\mathbf{1}+\mathbf{a}\mathbf{a}^T} \\
&= \underbrace{\cos\phi\mathbf{1} + (1-\cos\phi)\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \sin\phi\mathbf{a}^\wedge}_{\mathbf{C}}
\end{aligned}
$$

- 该式表明只要有一个φ就可以计算对应的C，且任意多转360度的整数倍，会得到同样的C
- 也表明so(3)实际就是旋转向量，其转换公式即为罗德里格斯公式

几何学

- SO(3)的对数运算： $\phi = \ln(\mathbf{C})^{\vee}$
- 可以分别定义so(3)向量的转轴与转角为：a与 ϕ
  - 对于转轴有： $\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ ，因此转轴是特征值1对应的特征向量
  - 对于转角，对罗德里格斯公式两侧取逆：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{C}) &= \operatorname{tr}(\cos\phi\mathbf{1} + (1-\cos\phi)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} + \sin\phi\mathbf{a}^{\wedge}) \\ &= \cos\phi\underbrace{\operatorname{tr}(\mathbf{1})}_{3} + (1-\cos\phi)\underbrace{\operatorname{tr}(\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}=1} + \sin\phi\underbrace{\operatorname{tr}(\mathbf{a}^{\wedge})}_{0} = 2\cos\phi + 1\end{aligned}$$

  - 解方程得：

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{C})-1}{2}\right) + 2\pi m$$

几何学

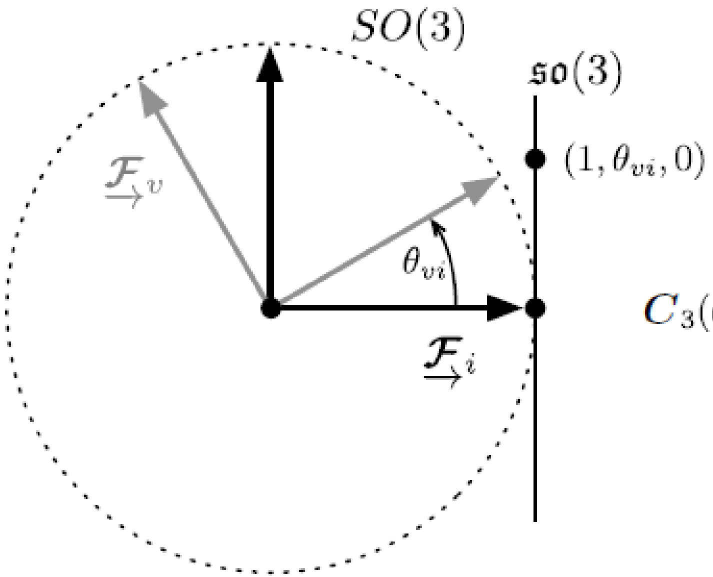
- 例子：固定在第2个轴上的旋转
  - I系经过旋转之后得到V系
  - I系第1个基向量，原生坐标为(1,0,0)，旋转之后得到：

    $$(\cos\theta_{vi}, \sin\theta_{vi}, 0)$$

  - 在角度很小时，近似于

    $$(1, \theta_{vi}, 0)$$

  - 这个位于so(3)上的向量正切于这个圆



$$C_3(\theta_{vi})\,\mathbf{1}_1 = \exp\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\theta_{vi}\end{bmatrix}^\wedge\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\approx \left(\mathbf{1} + \begin{bmatrix}0\\0\\\theta_{vi}\end{bmatrix}^\wedge\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\\theta_{vi}\\0\end{bmatrix}$$

几何学

- SE(3)上的指数映射与对数映射：

$$T = \exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\xi^\wedge)^n \qquad \xi = \ln(T)^\vee$$

- 指数映射的计算：

$$\begin{aligned}\exp(\xi^\wedge) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\xi^\wedge)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\begin{bmatrix}\rho \\ \phi\end{bmatrix}^\wedge\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix}^n \\ &= \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n\right)\rho \\ 0^T & 1\end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix}C & r \\ 0^T & 1\end{bmatrix}}_{T} \in SE(3)\end{aligned}$$

其中： $r = J\rho \in \mathbb{R}^3, \quad J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n$

J的定义后面还要用到

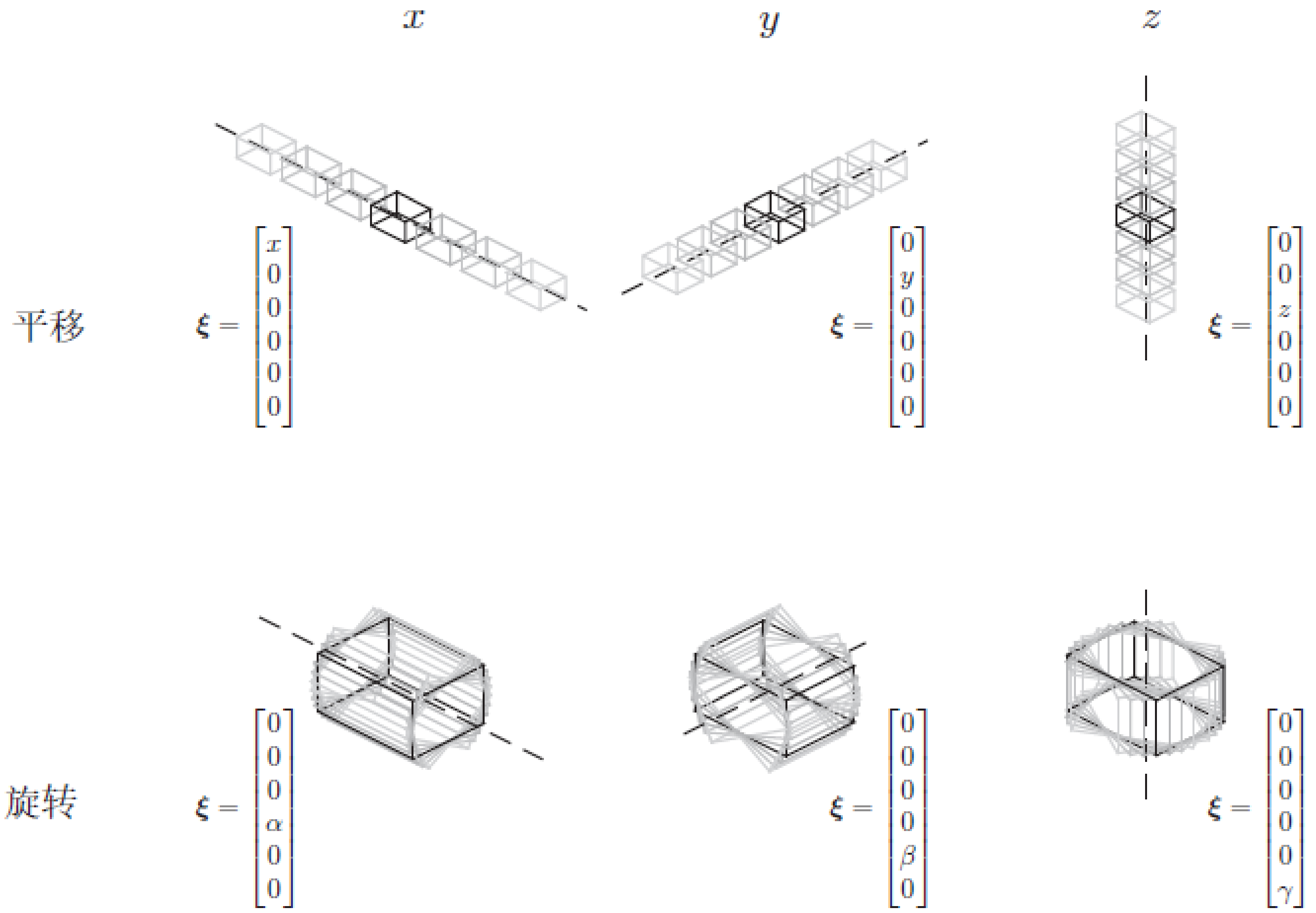
这也说明了se(3)上的平移只能称为“平移部分”，它离SE(3)的平移还相差一个J

几何学

- 对数映射：$\xi = \ln(T)^\vee$
- SO(3)部分参照SO(3)的对数映射
- 平移部分：

$$\rho = J^{-1} r$$

- 李代数各个分量的改变会影响到李群的表达



几何学

- 关于J
  - J称为SO(3)的左雅可比，定义式为： $\boldsymbol{J}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^{n}$
  - 对这个级数展开，可得
    - （VSLAM课程习题中证明过）

$$\boldsymbol{J}=\frac{\sin\phi}{\phi}\mathbf{1}+\left(1-\frac{\sin\phi}{\phi}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\frac{1-\cos\phi}{\phi}\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\mathbf{1}+\left(1-\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\frac{\phi}{2}\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

角度接近零或2π整数倍时，J逆不存在

  - 而它与自己转置乘积则为：

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\gamma\mathbf{1}+(1-\gamma)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\quad(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{\gamma}\mathbf{1}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$$

其中： $\gamma=2\frac{1-\cos\phi}{\phi^{2}}$

  - 对于不为零的x：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\gamma\mathbf{1}+(1-\gamma)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\gamma\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge})\boldsymbol{x}\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\gamma(\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{x})\\&=\underbrace{(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})}_{\geqslant 0}+\underbrace{2\frac{1-\cos\phi}{\phi^{2}}}_{>0}\underbrace{(\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{x})}_{\geqslant 0}>0\end{aligned}$$

- 所以它总是正定的，且在phi趋于零时趋于单位阵
- 在最小二乘中经常出现这种形式

几何学

- J与C的关系：

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \mathrm{d}\alpha &= \int_0^1 \exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^\alpha \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \exp\left(\alpha\boldsymbol{\phi}^\wedge\right) \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha^n \left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n\right) \mathrm{d}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\int_0^1 \alpha^n \mathrm{d}\alpha\right)\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\alpha^{n+1}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1}\right)\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n
\end{aligned}
$$

因此： $\boldsymbol{J} = \int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \mathrm{d}\alpha$

- 另一方面：

因此： $\boldsymbol{C} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{J}$

$$
\boldsymbol{J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n \qquad \boldsymbol{C} = \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n
$$

但此式并不能用于计算J，因为phi的反对称是不可逆的

几何学

- 伴随（Adjoint）
  - 我们可以从一个SE(3)矩阵定义它的伴随矩阵：

$$\mathcal{T} = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) = \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{r}^{\wedge}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$

  - 伴随矩阵的集合记为： $\mathrm{Ad}(SE(3)) = \{\mathcal{T} = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) | \boldsymbol{T} \in SE(3)\}$
  - 它也是一个李群。下面来看它的封闭性和可逆性。

几何学

- Ad(SE(3))的封闭性：

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_1)\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}_2) = \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{r}_1 \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right)\mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{r}_2 \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{r}_1^\wedge \boldsymbol{C}_1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{r}_2^\wedge \boldsymbol{C}_2 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{r}_2^\wedge \boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{r}_1^\wedge \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 & (\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1)^\wedge \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right) \in \mathrm{Ad}(SE(3))$$

第二行至第三行需要：

$$C_1 r_2^\wedge C_2 + r_1^\wedge C_1 C_2 = C_1 r_2^\wedge C_1^T C_1 C_2 + r_1^\wedge C_1 C_2$$

然后使用：$\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}^\wedge \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})^\wedge$

合并之

它的简单证明：

1. 对于叉乘有： $Ca \times Cb = C(a \times b)$
2. 对于任意矢量u，有：

$$(Cv) \times u = (Cv) \times (CC^T u) = C(v \times C^T u) = Cv^\wedge C^T u$$

3. 于是上式成立

几何学

- Ad(SE(3))的逆元素：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^{-1} &= \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})^{-1} = \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{r}^{\wedge}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^{\wedge} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & (-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})^{\wedge}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}^{-1}) \in \mathrm{Ad}(SE(3))
\end{aligned}
$$

这里一样用了“先补逆再吃掉”的技巧

- 其他几个性质与矩阵乘法相似，略过
- 于是Ad(SE(3))也是一个李群

几何学

- 对于李代数se(3)，也可以定义其伴随。对于 $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\xi}^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$，其伴随为：

$$\mathrm{ad}(\boldsymbol{\Xi}) = \mathrm{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge) = \boldsymbol{\xi}^\curlywedge$$

上弯弯运算定义为：

$$\boldsymbol{\xi}^\curlywedge = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}^\curlywedge = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^\wedge & \boldsymbol{\rho}^\wedge \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\phi}^\wedge \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \quad \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$$

- 可证明ad(se(3))也是李代数：

向量空间：$\mathrm{ad}(\mathfrak{se}(3)) = \{\boldsymbol{\Psi} = \mathrm{ad}(\boldsymbol{\Xi}) \in \mathbb{R}^{6\times 6} | \boldsymbol{\Xi} \in \mathfrak{se}(3)\}$

域：$\mathbb{R}$

李括号：$[\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2] = \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\Psi}_2 - \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_1$

李括号的计算：

$$[\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2] = \boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\Psi}_2 - \boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\Psi}_1 = \boldsymbol{\xi}_1^\curlywedge\boldsymbol{\xi}_2^\curlywedge - \boldsymbol{\xi}_2^\curlywedge\boldsymbol{\xi}_1^\curlywedge = \Big(\underbrace{\boldsymbol{\xi}_1^\curlywedge\boldsymbol{\xi}_2}_{\in\mathbb{R}^6}\Big)^\curlywedge \in \mathrm{ad}(\mathfrak{se}(3))$$

几何学

- Ad(SE(3))与ad(se(3))上也存在指数与对数映射，我们稍后讨论：

$$\mathcal{T} = \exp(\xi^{\curlywedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi^{\curlywedge})^n \qquad \xi = \ln(\mathcal{T})^{\curlyvee}$$

- 同时，SE(3), se(3), Ad(SE(3)), ad(se(3))四者之间存在联系：

$$\begin{array}{cccc} & \text{李代数} & & \text{李群} \\ 4\times 4 & \xi^{\wedge} \in \mathfrak{se}(3) & \xrightarrow{\exp} & \boldsymbol{T} \in SE(3) \\ & \downarrow \mathrm{ad} & & \downarrow \mathrm{Ad} \\ 6\times 6 & \xi^{\curlywedge} \in \mathrm{ad}(\mathfrak{se}(3)) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{T} \in \mathrm{Ad}(SE)(3) \end{array}$$

问题：先求伴随和先求指数的含义一样吗？
即是否有：

$$\underbrace{\mathrm{Ad}(\exp(\xi^{\wedge}))}_{\mathcal{T}} = \exp\left(\underbrace{\mathrm{ad}(\xi^{\wedge})}_{\xi^{\curlywedge}}\right)$$

下面给出证明

几何学

目标： $\underbrace{\mathrm{Ad}(\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge))}_{\mathcal{T}} = \exp\left(\underbrace{\mathrm{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)}_{\boldsymbol{\xi}^\curlywedge}\right)$

- 从右侧出发： $$\exp(\mathrm{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)) = \exp(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge\right)^n$$ $$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^\wedge & \boldsymbol{\rho}^\wedge \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\phi}^\wedge \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{K} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$
- 整理可得： $$\boldsymbol{K} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+1)!}\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^n \boldsymbol{\rho}^\wedge \left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)^m$$
- 对于左侧： $$\mathrm{Ad}(\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)) = \mathrm{Ad}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^\mathrm{T} & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge \boldsymbol{C} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$
- 即要证： $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge \boldsymbol{C}$

- 不是非常显然，但是可以归纳得出
- 含义：对于固定阶次的项（例如n+m+1=3的），出现rho左边0次，右边2次；左边1次，右边1次；左边2次，右边0次，依此类推

几何学

目标： $\underbrace{\mathrm{Ad}(\exp(\xi^\wedge))}_{\mathcal{T}} = \exp\left(\underbrace{\mathrm{ad}(\xi^\wedge)}_{\xi^\curlywedge}\right)$

- 根据J与C的关系，有：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge \boldsymbol{C} &= \left(\int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \mathrm{d}\alpha \boldsymbol{\rho}\right)^\wedge \boldsymbol{C} = \int_0^1 (\boldsymbol{C}^\alpha \boldsymbol{\rho})^\wedge \boldsymbol{C} \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{C}^{1-\alpha} \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \exp(\alpha\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{\rho}^\wedge \exp\left((1-\alpha)\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\alpha\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n\right)\boldsymbol{\rho}^\wedge \left(\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}((1-\alpha)\boldsymbol{\phi}^\wedge)^m\right)\mathrm{d}\alpha \\
&= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{n!m!}\left(\int_0^1 \alpha^n(1-\alpha)^m \mathrm{d}\alpha\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n \boldsymbol{\rho}^\wedge (\boldsymbol{\phi}^\wedge)^m
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{J} = \int_0^1 \boldsymbol{C}^\alpha \mathrm{d}\alpha$ ，见PPT17页
- 括号中部分：

$$\int_0^1 \alpha^n (1-\alpha)^m \mathrm{d}\alpha = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

- 它“可以证明”（但书中未给出），实际证明也比较麻烦
- 于是得到 $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge \boldsymbol{C}$,

几何学

- Baker-Campbell-Hausdorff公式
- BCH公式用于处理两个矩阵指数乘积之对数：

$$\ln(\exp(A)\exp(B)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{\substack{r_i+s_i>0,\\ 1\leqslant i\leqslant n}}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i)\right)^{-1}}{\prod_{i=1}^{n}r_i!s_i!}[A^{r_1}B^{s_1}A^{r_2}B^{s_2}\cdots A^{r_n}B^{s_n}]$$

  - 其中：

$$[A^{r_1}B^{s_1}A^{r_2}B^{s_2}\cdots A^{r_n}B^{s_n}] = [\underbrace{A,\cdots[A}_{r_1},\underbrace{[B,\cdots[B}_{s_1},\cdots\underbrace{[A,\cdots[A}_{r_n},\underbrace{[B,\cdots[B,B]\cdots]]}_{s_n}\cdots]\cdots]\cdots]]\cdots]$$

当 $s_n>1$ 或 $s_n=0$ 且 $r_n>1$ 的时候，它的值为 0。

  - 且方括号是李括号，若[A,B]=0，那么：$\ln(\exp(A)\exp(B)) = A+B$

几何学

- 完整的BCH是个很长的式子，可以观察它前几项：

$$
\begin{aligned}
\ln(\exp(A)\exp(B)) = {} & A + B + \frac{1}{2}[A, B] \\
& + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] - \frac{1}{24}[B, [A, [A, B]]] \\
& - \frac{1}{720}([[[[A, B], B], B], B] + [[[[B, A], A], A], A]) \\
& + \frac{1}{360}([[[[A, B], B], B], A] + [[[[B, A], A], A], B]) \\
& + \frac{1}{120}([[[[A, B], A], B], A] + [[[[B, A], B], A], B]) + \cdots
\end{aligned}
$$

或者还可以只保留A或B的线性项：

$$
\ln(\exp(A)\exp(B)) \approx B + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \underbrace{[B, [B, \cdots [B, A] \cdots]]}_{n}
$$

$$
\ln(\exp(A)\exp(B)) \approx A + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \underbrace{[A, [A, \cdots [A, B] \cdots]]}_{n}
$$

其中Bn是伯努利数：

$$
\begin{gathered}
B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \\
B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}, \\
B_{13} = 0, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{15} = 0, \cdots
\end{gathered}
$$

几何学

- BCH公式可以用于处理SO(3)和SE(3)上的李群李代数关系
- SO(3)：

$$\begin{aligned}\ln(C_1C_2)^{\vee} &= \ln\left(\exp(\phi_1^{\wedge})\exp(\phi_2^{\wedge})\right)^{\vee} \\ &= \phi_1 + \phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1^{\wedge}\phi_2 + \frac{1}{12}\phi_1^{\wedge}\phi_1^{\wedge}\phi_2 + \frac{1}{12}\phi_2^{\wedge}\phi_2^{\wedge}\phi_1 + \cdots\end{aligned}$$

- 若其中一个为小量，那么可使用线性近似后的BCH，得到：

$$\ln(C_1C_2)^{\vee} = \ln\left(\exp(\phi_1^{\wedge})\exp(\phi_2^{\wedge})\right)^{\vee} \approx \begin{cases} J_{\ell}(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2 & \text{若 } \phi_1 \text{ 很小} \\ \phi_1 + J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2 & \text{若 } \phi_2 \text{ 很小} \end{cases}$$

- 其中：

$$\begin{aligned}J_r(\phi)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-\phi^{\wedge})^n = \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} + \frac{\phi}{2}\mathbf{a}^{\wedge} \\ J_{\ell}(\phi)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(\phi^{\wedge})^n = \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \frac{\phi}{2}\mathbf{a}^{\wedge}\end{aligned}$$

称为左/右雅可比

几何学

- 这里的左/右雅可比是我们之前见过的（这个妹妹我之前见过的）

$$J_r(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-\phi^\wedge)^n = \int_0^1 C^{-\alpha} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{\sin\phi}{\phi}1 + \left(1 - \frac{\sin\phi}{\phi}\right)aa^{\mathrm{T}} - \frac{1-\cos\phi}{\phi}a^\wedge$$

$$J_\ell(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n = \int_0^1 C^{\alpha} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{\sin\phi}{\phi}1 + \left(1 - \frac{\sin\phi}{\phi}\right)aa^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\phi}{\phi}a^\wedge$$

左与右的关系：

$$J_\ell(\phi) = CJ_r(\phi)$$

$$J_\ell(-\phi) = J_r(\phi)$$

几何学

- SE(3)和Ad(SE(3))：我们直接给出线性化下表达式

$$
\ln(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2)^{\vee} = \ln\left(\exp(\boldsymbol{\xi}_1^{\wedge})\exp(\boldsymbol{\xi}_2^{\wedge})\right)^{\vee} \approx \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{J}}_\ell(\boldsymbol{\xi}_2)^{-1}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 & \text{若 } \boldsymbol{\xi}_1 \text{ 很小} \\ \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\mathcal{J}}_r(\boldsymbol{\xi}_1)^{-1}\boldsymbol{\xi}_2 & \text{若 } \boldsymbol{\xi}_2 \text{ 很小} \end{cases}
$$

其中：

$$
\boldsymbol{\mathcal{J}}_r(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left(-\boldsymbol{\xi}^{\curlywedge}\right)^n \qquad \boldsymbol{\mathcal{J}}_r(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(-\boldsymbol{\xi}^{\curlywedge}\right)^n = \int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{T}}^{-\alpha}\,d\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_r & \boldsymbol{Q}_r \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_r \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\mathcal{J}}_\ell(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left(\boldsymbol{\xi}^{\curlywedge}\right)^n \qquad \boldsymbol{\mathcal{J}}_\ell(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\boldsymbol{\xi}^{\curlywedge}\right)^n = \int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\alpha}\,d\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_\ell & \boldsymbol{Q}_\ell \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_\ell \end{bmatrix}
$$

$$
\ln(\boldsymbol{\mathcal{T}}_1\boldsymbol{\mathcal{T}}_2)^{\curlyvee} = \ln\left(\exp(\boldsymbol{\xi}_1^{\curlywedge})\exp(\boldsymbol{\xi}_2^{\curlywedge})\right)^{\curlyvee} \approx \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{J}}_\ell(\boldsymbol{\xi}_2)^{-1}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 & \text{若 } \boldsymbol{\xi}_1 \text{ 很小} \\ \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\mathcal{J}}_r(\boldsymbol{\xi}_1)^{-1}\boldsymbol{\xi}_2 & \text{若 } \boldsymbol{\xi}_2 \text{ 很小} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_\ell(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m+2)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n\boldsymbol{\rho}^{\wedge}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^m \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^{\wedge} + \left(\frac{\phi - \sin\phi}{\phi^3}\right)\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge} + \boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge} + \boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\phi^2 + 2\cos\phi - 2}{2\phi^4}\right)\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge} + \boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge} - 3\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2\phi - 3\sin\phi + \phi\cos\phi}{2\phi^5}\right)\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge} + \boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{\rho}^{\wedge}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{Q}_r(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{Q}_\ell(-\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_\ell(\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{J}_\ell\boldsymbol{\rho})^{\wedge}\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}_\ell
$$

- Q矩阵的形式虽然复杂，但写在程序里的话，也只是一个函数

几何学

- SE3左右雅可比之关系：　$\mathcal{J}_\ell(\xi) = \mathcal{T}\mathcal{J}_r(\xi), \quad \mathcal{J}_\ell(-\xi) = \mathcal{J}_r(\xi)$
- 花体雅可比之逆也不必直接计算，可以通过：

$$\mathcal{J}_r^{-1} = \begin{bmatrix} J_r^{-1} & -J_r^{-1}Q_r J_r^{-1} \\ 0 & J_r^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_\ell^{-1} = \begin{bmatrix} J_\ell^{-1} & -J_\ell^{-1}Q_\ell J_\ell^{-1} \\ 0 & J_\ell^{-1} \end{bmatrix}$$

- 算得

- 最后，使用左或右完全由领域习惯决定。本书以左雅可比作为代表。

几何学

- 距离、体积与积分
- 可以利用李群李代数之间的关系来定义这些常见的概念
- 旋转之间的距离：

$$\phi_{12} = \ln\left(C_1^T C_2\right)^\vee$$
$$\phi_{21} = \ln\left(C_2 C_1^T\right)^\vee$$

称为左差和右差，其结果在向量空间上

  - 如果要评估旋转估计的大小，直接取范数即可：

$$\phi_{12} = \sqrt{\langle \ln(C_1^T C_2), \ln(C_1^T C_2)\rangle} = \sqrt{\langle \phi_{12}^\wedge, \phi_{12}^\wedge \rangle} = \sqrt{\phi_{12}^T \phi_{12}} = |\phi_{12}|$$
$$\phi_{21} = \sqrt{\langle \ln(C_2 C_1^T), \ln(C_2 C_1^T)\rangle} = \sqrt{\langle \phi_{21}^\wedge, \phi_{21}^\wedge \rangle} = \sqrt{\phi_{21}^T \phi_{21}} = |\phi_{21}|$$

几何学

- 旋转的微积分
- 由于李代数是向量，于是可以在李代数上加一个小量，得到新的旋转： $C' = \exp\left((\phi + \delta\phi)^\wedge\right) \in SO(3)$.
  - 新的旋转与之前的差为（左右均可）：

$$\begin{aligned}\ln(\delta C_r)^\vee &= \ln\left(C^{\mathrm{T}} C'\right)^\vee = \ln\left(C^{\mathrm{T}} \exp\left((\phi + \delta\phi)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &\approx \ln\left(C^{\mathrm{T}} C \exp\left((J_r \delta\phi)^\wedge\right)\right)^\vee = J_r \delta\phi \\ \ln(\delta C_\ell)^\vee &= \ln\left(C' C^{\mathrm{T}}\right)^\vee = \ln\left(\exp\left((\phi + \delta\phi)^\wedge\right) C^{\mathrm{T}}\right)^\vee \\ &\approx \ln\left(\exp\left((J_\ell \delta\phi)^\wedge\right) C C^{\mathrm{T}}\right)^\vee = J_\ell \delta\phi\end{aligned}$$

于是：

$$\mathrm{d}C_r = |\det(J_r)|\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}C_\ell = |\det(J_\ell)|\,\mathrm{d}\phi$$

- 而： $\det(J_\ell) = \det(C J_r) = \underbrace{\det(C)}_{1} \det(J_r) = \det(J_r)$ 这说明使用左或右并无影响
- 所以： $\mathrm{d}C = |\det(J)|\,\mathrm{d}\phi$ 关于旋转的积分也可以用李代数替换： $\int_{SO(3)} f(C)\mathrm{d}C \rightarrow \int_{|\phi|<\pi} f(\phi)|\det(J)|\mathrm{d}\phi$

几何学

- SE(3)上的距离：

$$\xi_{12} = \ln\left(T_1^{-1}T_2\right)^{\vee} = \ln\left(\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_2\right)^{\curlyvee}$$
$$\xi_{21} = \ln\left(T_2T_1^{-1}\right)^{\vee} = \ln\left(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1^{-1}\right)^{\curlyvee}$$

大小：

$$\xi_{12} = \sqrt{\langle \xi_{12}^{\wedge}, \xi_{12}^{\wedge} \rangle} = \sqrt{\langle \xi_{12}^{\curlywedge}, \xi_{12}^{\curlywedge} \rangle} = \sqrt{\xi_{12}^{T}\xi_{12}} = |\xi_{12}|$$
$$\xi_{21} = \sqrt{\langle \xi_{21}^{\wedge}, \xi_{21}^{\wedge} \rangle} = \sqrt{\langle \xi_{21}^{\curlywedge}, \xi_{21}^{\curlywedge} \rangle} = \sqrt{\xi_{21}^{T}\xi_{21}} = |\xi_{21}|$$

- 积分变量代换关系： $\mathrm{d}T = |\det(\mathcal{J})|\mathrm{d}\xi$

$$\int_{SE(3)} f(T)\mathrm{d}T = \int_{\mathbb{R}^3, |\phi|<\pi} f(\xi)|\det(\mathcal{J})|\mathrm{d}\xi$$

几何学

- 插值
  - 向量空间上可以使用线性插值：$x=(1-\alpha)\,x_1+\alpha x_2,\quad \alpha\in[0,1]$
  - 而在李群上可重新定义为：

$$C=\left(C_2C_1^{\mathrm{T}}\right)^{\alpha}C_1,\quad \alpha\in[0,1]$$

实际上是：$C_{21}^{\alpha}=\exp\left(\phi_{21}^{\wedge}\right)^{\alpha}=\exp\left(\alpha\phi_{21}^{\wedge}\right)\in SO(3)$

  - 如果把C1看成参考系（C1=1），那么插值的过程等于：$C=C_2^{\alpha},\quad \phi=\alpha\phi_2$
  - 相当于以恒定角速度从C1转到C2
  - 类似的，SE(3)上的插值也可以定义为：$T=\left(T_2T_1^{-1}\right)^{\alpha}T_1,\quad \alpha\in[0,1]$

几何学

- 微积分和优化
- SO(3)：考虑旋转后的点对旋转量的导数：$\frac{\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{\phi}}$ 其中：$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$
- 按照定义：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})}{\partial\phi_i}=\lim_{h\to 0}\frac{\exp\left((\boldsymbol{\phi}+h\mathbf{1}_i)^\wedge\right)\boldsymbol{v}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\boldsymbol{v}}{h}$$

其中每一维中的指数部分：$\exp\left((\boldsymbol{\phi}+h\mathbf{1}_i)^\wedge\right)\approx\exp\left((\boldsymbol{J}h\mathbf{1}_i)^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\approx\left(\mathbf{1}+h(\boldsymbol{J}\mathbf{1}_i)^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)$

代回分子：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})}{\partial\phi_i}=(\boldsymbol{J}\mathbf{1}_i)^\wedge\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})^\wedge\boldsymbol{J}\mathbf{1}_i$$

拼在一起：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{\phi}}=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})^\wedge\boldsymbol{J}$$

如果在外面套一个代价函数，那么求导也只需使用链式法则：

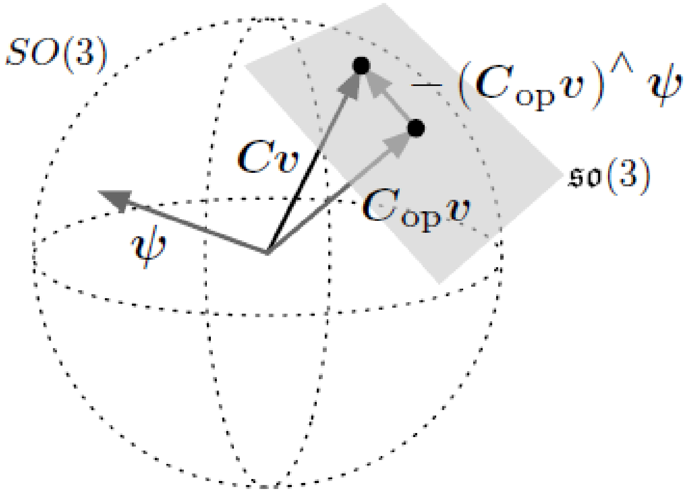
$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\phi}}=\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{x}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{\phi}}=-\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{v})^\wedge\boldsymbol{J}$$

几何学

- 另外一种求导方式：寻找C上的一个优化步长（扰动） $C=\exp\left(\psi^{\wedge}\right)C_{\mathrm{op}}$
- 求Cv关于这个扰动的变化率：

$$\frac{\partial\left(Cv\right)}{\partial\psi_i}=\lim_{h\to 0}\frac{\exp\left(h1_i^{\wedge}\right)Cv-Cv}{h}\approx\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h1_i^{\wedge}\right)Cv-Cv}{h}=-\left(Cv\right)^{\wedge}1_i$$

- 叠在一起： $\frac{\partial\left(Cv\right)}{\partial\psi}=-\left(Cv\right)^{\wedge}$
- 在很多优化过程中，我们在每步迭代中计算这个扰动，使得体误差变小
- 因此，雅可比也重新定义为针对这个扰动的变化率



$$Cv=\exp\left(\psi^{\wedge}\right)C_{\mathrm{op}}v\approx C_{\mathrm{op}}v-\left(C_{\mathrm{op}}v\right)^{\wedge}\psi$$

几何学

- SE(3)：导数模型 $\frac{\partial (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})}{\partial \xi} = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot} \mathcal{J}$ 其中⊙是4x1向量到4x4矩阵算符：$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}^{\odot} = \begin{bmatrix} \eta 1 & -\varepsilon^{\wedge} \\ 0^{\mathrm{T}} & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$
- 若使用扰动模型，那么扰动为：$\boldsymbol{T} \leftarrow \exp\left(\epsilon^{\wedge}\right) \boldsymbol{T}$
- 对扰动量的导数为：$\frac{\partial (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})}{\partial \epsilon} = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot}$

几何学

- 于是，针对带有旋转、位姿变量的优化问题，就可以使用扰动策略
- 扰动策略的优点在于：
  - 以无奇异的形式存储旋转和姿态；
  - 每次优化都是无约束的；
  - 所有的操作都以矩阵形式写出，而不像欧拉角那样拆成一个个的变量，然后带有大量的正/余弦函数

几何学

- SO(3)性质总览

表 7–2 $SO(3)$ 的性质与其近似形式

李代数	李群	（左）雅可比
$u^\wedge = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \exp(\phi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n$ $\equiv \cos\phi \mathbf{1} + (1-\cos\phi) a a^{\mathrm{T}} + \sin\phi a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \phi^\wedge$	$J = \int_0^1 C^\alpha \mathrm{d}\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\sin\phi}{\phi}\mathbf{1} + \left(1 - \frac{\sin\phi}{\phi}\right) a a^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\phi}{\phi} a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2}\phi^\wedge$
$(\alpha u + \beta v)^\wedge \equiv \alpha u^\wedge + \beta v^\wedge$	$C^{-1} \equiv C^{\mathrm{T}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\phi^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \phi^\wedge$	$J^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\mathbf{1} + \left(1 - \frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right) a a^{\mathrm{T}} - \frac{\phi}{2} a^\wedge$ $\approx \mathbf{1} - \frac{1}{2}\phi^\wedge$
$u^{\wedge\mathrm{T}} \equiv -u^\wedge$	$\phi = \phi a$	$\exp((\phi + \delta\phi)^\wedge) \approx \exp((J\delta\phi)^\wedge)\exp(\phi^\wedge)$
$u^\wedge v \equiv -v^\wedge u$	$a^{\mathrm{T}} a \equiv 1$	$C \equiv \mathbf{1} + \phi^\wedge J$
$u^\wedge u \equiv \mathbf{0}$	$C^{\mathrm{T}} C \equiv \mathbf{1} \equiv C C^{\mathrm{T}}$	$J(\phi) \equiv C J(-\phi)$
$(W u)^\wedge \equiv u^\wedge(\mathrm{tr}(W)\mathbf{1} - W) - W^{\mathrm{T}} u^\wedge$	$\mathrm{tr}(C) \equiv 2\cos\phi + 1$	$(\exp(\delta\phi^\wedge)C)^\alpha \approx (\mathbf{1} + (A(\alpha,\phi)\delta\phi)^\wedge)C^\alpha$
$u^\wedge v^\wedge \equiv -(u^{\mathrm{T}} v)\mathbf{1} + v u^{\mathrm{T}}$	$\det(C) \equiv 1$	$A(\alpha,\phi) = \alpha J(\alpha\phi) J(\phi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!}(\phi^\wedge)^n$
$u^\wedge W v^\wedge \equiv -(-\mathrm{tr}(v u^{\mathrm{T}})\mathbf{1} + v u^{\mathrm{T}})$ $\times(-\mathrm{tr}(W)\mathbf{1} + W^{\mathrm{T}}) + \mathrm{tr}(W^{\mathrm{T}} v u^{\mathrm{T}})\mathbf{1} - W^{\mathrm{T}} v u^{\mathrm{T}}$	$C a \equiv a$	
$u^\wedge v^\wedge u^\wedge \equiv u^\wedge u^\wedge v^\wedge + v^\wedge u^\wedge u^\wedge + (u^{\mathrm{T}} u) v^\wedge$	$C\phi = \phi$	
$(u^\wedge)^3 + (u^{\mathrm{T}} u) u^\wedge \equiv 0$	$C a^\wedge \equiv a^\wedge C$	
$u^\wedge v^\wedge v^\wedge - v^\wedge v^\wedge u^\wedge \equiv (v^\wedge u^\wedge v)^\wedge$	$C\phi^\wedge \equiv \phi^\wedge C$	
$[u^\wedge, v^\wedge] \equiv u^\wedge v^\wedge - v^\wedge u^\wedge \equiv (u^\wedge v)^\wedge$	$(C u)^\wedge \equiv C u^\wedge C^{\mathrm{T}}$	
$\underbrace{[u^\wedge, [u^\wedge, \cdots [u^\wedge}_{n}, v^\wedge] \cdots]] \equiv ((u^\wedge)^n v)^\wedge$	$\exp((C u)^\wedge) \equiv C \exp(u^\wedge) C^{\mathrm{T}}$	

$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u, v, \phi, \delta\phi \in \mathbb{R}^3,\ W, A, J \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ C \in SO(3)$

几何学

- SE(3)性质总览

表 7-3 $SE(3)$ 的性质与其近似形式

李代数	李群	（左）雅可比
$\mathbf{x}^\wedge = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^\wedge & \mathbf{u}\\ \mathbf{0}^T & 0\end{bmatrix}$ $\mathbf{x}^\curlywedge = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}^\curlywedge = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^\wedge & \mathbf{u}^\wedge\\ \mathbf{0} & \mathbf{v}^\wedge\end{bmatrix}$ $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})^\wedge \equiv \alpha\mathbf{x}^\wedge+\beta\mathbf{y}^\wedge$ $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})^\curlywedge \equiv \alpha\mathbf{x}^\curlywedge+\beta\mathbf{y}^\curlywedge$ $\mathbf{x}^\curlywedge\mathbf{y} \equiv -\mathbf{y}^\curlywedge\mathbf{x}$ $\mathbf{x}^\curlywedge\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ $(\mathbf{x}^\wedge)^4 + (\mathbf{v}^T\mathbf{v})(\mathbf{x}^\wedge)^2 \equiv \mathbf{0}$ $(\mathbf{x}^\curlywedge)^5 + 2(\mathbf{v}^T\mathbf{v})(\mathbf{x}^\curlywedge)^3 + (\mathbf{v}^T\mathbf{v})^2(\mathbf{x}^\curlywedge) \equiv \mathbf{0}$ $[\mathbf{x}^\wedge,\mathbf{y}^\wedge] \equiv \mathbf{x}^\wedge\mathbf{y}^\wedge - \mathbf{y}^\wedge\mathbf{x}^\wedge \equiv (\mathbf{x}^\curlywedge\mathbf{y})^\wedge$ $[\mathbf{x}^\curlywedge,\mathbf{y}^\curlywedge] \equiv \mathbf{x}^\curlywedge\mathbf{y}^\curlywedge - \mathbf{y}^\curlywedge\mathbf{x}^\curlywedge \equiv (\mathbf{x}^\curlywedge\mathbf{y})^\curlywedge$ $\underbrace{[\mathbf{x}^\wedge,[\mathbf{x}^\wedge,\cdots[\mathbf{x}^\wedge,}_{n}\mathbf{y}^\wedge]\cdots]] \equiv ((\mathbf{x}^\curlywedge)^n\mathbf{y})^\wedge$ $\underbrace{[\mathbf{x}^\curlywedge,[\mathbf{x}^\curlywedge,\cdots[\mathbf{x}^\curlywedge,}_{n}\mathbf{y}^\curlywedge]\cdots]] \equiv ((\mathbf{x}^\curlywedge)^n\mathbf{y})^\curlywedge$ $\mathbf{p}^\odot = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \eta\end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix}\eta\mathbf{1} & -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge\\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T\end{bmatrix}$ $\mathbf{p}^\circledcirc = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \eta\end{bmatrix}^\circledcirc = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon}\\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ $\mathbf{x}^\wedge\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}^\odot\mathbf{x}$ $\mathbf{p}^T\mathbf{x}^\wedge \equiv \mathbf{x}^T\mathbf{p}^\circledcirc$	$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}$ $\mathbf{T} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$ $\equiv \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge + \left(\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}\right)(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^2 + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^3$ $\approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge$ $\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{J}\boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \operatorname{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)$ $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$ $\equiv \mathbf{1} + \left(\frac{3\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi}\right)\boldsymbol{\xi}^\curlywedge + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^2$ $+ \left(\frac{\sin\phi-\phi\cos\phi}{2\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^3 + \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^4$ $\approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\curlywedge$ $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \operatorname{Ad}(\mathbf{T}) \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{C} & (\mathbf{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge\mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\end{bmatrix}$ $\operatorname{tr}(\mathbf{T}) \equiv 2\cos\phi + 2, \quad \det(\mathbf{T}) \equiv 1$ $\operatorname{Ad}(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2) = \operatorname{Ad}(\mathbf{T}_1)\operatorname{Ad}(\mathbf{T}_2)$ $\mathbf{T}^{-1} \equiv \exp(-\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}^\wedge$ $\mathbf{T}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & -\mathbf{C}^T\mathbf{r}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1} \equiv \exp(-\boldsymbol{\xi}^\curlywedge) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n \approx \mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}^\curlywedge$ $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & -\mathbf{C}^T(\mathbf{J}\boldsymbol{\rho})^\wedge\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^T\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{\xi}$ $\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\wedge\mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{T}}$ $(\boldsymbol{\mathcal{T}}\mathbf{x})^\wedge \equiv \mathbf{T}\mathbf{x}^\wedge\mathbf{T}^{-1}, \quad (\boldsymbol{\mathcal{T}}\mathbf{x})^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\mathbf{x}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$ $\exp((\boldsymbol{\mathcal{T}}\mathbf{x})^\wedge) \equiv \mathbf{T}\exp(\mathbf{x}^\wedge)\mathbf{T}^{-1}$ $\exp((\boldsymbol{\mathcal{T}}\mathbf{x})^\curlywedge) \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\exp(\mathbf{x}^\curlywedge)\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$ $(\mathbf{T}\mathbf{p})^\odot \equiv \mathbf{T}\mathbf{p}^\odot\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$ $(\mathbf{T}\mathbf{p})^{\odot^T}(\mathbf{T}\mathbf{p})^\odot \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}^{-T}\mathbf{p}^{\odot^T}\mathbf{p}^\odot\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$	$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \int_0^1 \boldsymbol{\mathcal{T}}^\alpha \mathrm{d}\alpha \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$ $= \mathbf{1} + \left(\frac{4-\phi\sin\phi-4\cos\phi}{2\phi^2}\right)\boldsymbol{\xi}^\curlywedge + \left(\frac{4\phi-5\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^3}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^2$ $+ \left(\frac{2-\phi\sin\phi-2\cos\phi}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^3 + \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5}\right)(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^4$ $\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge$ $\boldsymbol{\mathcal{J}} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{J} & \mathbf{Q}\\ \mathbf{0} & \mathbf{J}\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1} \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n \approx \mathbf{1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge$ $\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{J}^{-1} & -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1}\end{bmatrix}$ $\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(n+m+2)!}(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n\boldsymbol{\rho}^\wedge(\boldsymbol{\phi}^\wedge)^m$ $\equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^\wedge + \left(\frac{\phi-\sin\phi}{\phi^3}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$ $+ \left(\frac{\phi^2+2\cos\phi-2}{2\phi^4}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge - 3\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$ $+ \left(\frac{2\phi-3\sin\phi+\phi\cos\phi}{2\phi^5}\right)(\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge\boldsymbol{\rho}^\wedge\boldsymbol{\phi}^\wedge)$ $\exp((\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge) \approx \exp((\boldsymbol{\mathcal{J}}\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)$ $\exp((\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi})^\curlywedge) \approx \exp((\boldsymbol{\mathcal{J}}\delta\boldsymbol{\xi})^\curlywedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)$ $\boldsymbol{\mathcal{T}} \equiv \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{J}}$ $\boldsymbol{\mathcal{J}}\boldsymbol{\xi}^\curlywedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\curlywedge\boldsymbol{\mathcal{J}}$ $\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{\mathcal{T}}\boldsymbol{\mathcal{J}}(-\boldsymbol{\xi})$ $(\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\mathbf{T})^\alpha \approx (\mathbf{1} + (\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha,\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge)\mathbf{T}^\alpha$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \alpha\boldsymbol{\mathcal{J}}(\alpha\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{F_n(\alpha)}{n!}(\boldsymbol{\xi}^\curlywedge)^n$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\phi},\delta\boldsymbol{\phi}\in\mathbb{R}^3,\ \mathbf{p}\in\mathbb{R}^4,\ \mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\xi},\delta\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^6,\ \mathbf{C}\in SO(3),\ \mathbf{J},\mathbf{Q}\in\mathbb{R}^{3\times3},\ \mathbf{T},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\in SE(3),\ \boldsymbol{\mathcal{T}}\in\operatorname{Ad}(SE(3)),\ \boldsymbol{\mathcal{J}},\boldsymbol{\mathcal{A}}\in\mathbb{R}^{6\times6}$

第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计

运动学

- 前面我们介绍了几何学的结构，下面我们来关心一下运动学
- SO(3)上，旋转矩阵与角速度的关系由泊松方程刻画：$\dot{C} = \omega^\wedge C$
- 而旋转矩阵C有对应的李代数，那么也可以考虑李代数的时间导数：

$$\dot{C} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\phi^\wedge) = \int_0^1 \exp\left(\alpha\phi^\wedge\right)\dot{\phi}^\wedge \exp\left((1-\alpha)\phi^\wedge\right)\mathrm{d}\alpha \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(A\left(t\right)\right) = \int_0^1 \exp\left(\alpha A\left(t\right)\right)\frac{\mathrm{d}A\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\exp\left(\left(1-\alpha\right)A\left(t\right)\right)\mathrm{d}\alpha$$

- 右侧乘C逆，得：$\dot{C}C^{\mathrm{T}} = \int_0^1 C^\alpha \dot{\phi}^\wedge C^{-\alpha}\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \left(C^\alpha\dot{\phi}\right)^\wedge \mathrm{d}\alpha = \left(\int_0^1 C^\alpha \mathrm{d}\alpha\dot{\phi}\right)^\wedge = \left(J\dot{\phi}\right)^\wedge$

- 这显示了李代数导数与李群之间的关系：$\omega = J\dot{\phi} \quad \dot{\phi} = J^{-1}\omega$

运动学

- 积分
- $\dot{C}$ 并不能直接用来积分，因为积出来的结果不一定满足旋转矩阵约束
- 我们可以假设一小段时间内角速度为常数，那么：

$$\dot{C} = \omega^{\wedge} C$$

可以看成常微分方程，它的解为：

$$C(t_2) = \underbrace{\exp\left((t_2 - t_1)\,\omega^{\wedge}\right)}_{C_{21} \in SO(3)} C(t_1)$$

  - 该式可用于小区间的数值积分

运动学

- SO(3)的投影
- 由于数值误差，我们往往需要把一个带有误差的矩阵投回SO(3)
- 即寻找 $R \in SO(3)$ ，使得R近似于约定的C；该问题可构建为优化问题：

$$\arg\max_{\boldsymbol{R}} J(\boldsymbol{R}), \quad J(\boldsymbol{R}) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right) - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}\left(\boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_j - \delta_{ij}\right)}_{\text{拉格朗日乘子}}$$

- 此问题的解为： $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}$ 它可以用于对误差矩阵进行“归一化”
  - 过程部分略去，可以参见书本第224页

运动学

- SE(3)运动学： $\dot{r} = \omega^\wedge r + \nu$ 线速度 $\dot{C} = \omega^\wedge C$ 角速度 $T = \begin{bmatrix} C & r \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \exp(\xi^\wedge)$

- 可以把线、角速度写在一起成为广义速度：$\varpi = \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix}$，那么运动学可以写得更简单： $\dot{T} = \varpi^\wedge T$

- 同SO(3)，SE(3)的李代数也有广义速度与李代数导数的对应关系： $\varpi = \mathcal{J}\dot{\xi}$ $\dot{\xi} = \mathcal{J}^{-1}\varpi$

- 除了使用SO(3)和SE(3)之外，也可以使用SO(3)+平移的方式来表达运动学
  - 这种方式称为混合类方法，其实更为常见（可以规避一些SE(3)上的雅可比计算）

运动学

- 类似的，也可以在SE(3)上进行数值积分：

$$\boldsymbol{T}(t_2) = \underbrace{\exp\left((t_2 - t_1)\,\boldsymbol{\varpi}^{\wedge}\right)}_{\boldsymbol{T}_{21} \in SE(3)} \boldsymbol{T}(t_1)$$

- 积分误差可以通过对旋转矩阵部分进行归一化，同时对左下角进行归零化实现

运动学

- 下面考虑对SO(3), SE(3)的运动学进行线性化
- SO(3)上的标准运动学方程：

$$\dot{C} = \omega^\wedge C$$

引入扰动： $C' = \exp\left(\delta\phi^\wedge\right) C \approx \left(1 + \delta\phi^\wedge\right) C$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(1 + \delta\phi^\wedge\right) C\right)}_{\dot{C}'} \approx \underbrace{\left(\omega + \delta\omega\right)}_{\omega'}{}^\wedge \underbrace{\left(1 + \delta\phi^\wedge\right) C}_{C'}$$

扰动运动学： $\delta\dot{\phi} = \omega^\wedge \delta\phi + \delta\omega$

- SE(3)上的标准运动学方程：

$$\dot{T} = \varpi^\wedge T$$

扰动运动学： $\delta\dot{\xi} = \varpi^\curlywedge \delta\xi + \delta\varpi$

运动学

- 本节略去的内容
  - 李代数上的扰动运动学
  - 动力学

  - 原因：实用当中很少使用SE(3)上的运动学与动力学，通常是SO(3)+t的混合形式
  - 扰动运动学更为少见

第6讲 矩阵李群

- 几何学
- 运动学
- 概率与统计

概率与统计

- 接下来考虑在SO(3)和SE(3)上的概率与统计问题
- 这事关我们前几章介绍的方法应该如何应用到三维空间
- 对于向量空间，可以谈论： $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ 但是如何来描述旋转或姿态的不确定性呢？
- 显然李代数是一个向量空间，所以可以在李代数上考虑问题
  - 我们可以在李代数上使用加法，或者在李群上使用扰动，这样共三种情况：

	$SO(3)$	$\mathfrak{so}(3)$
左式	$C = \exp(\epsilon_\ell^\wedge)\bar{C}$	$\phi \approx \mu + J_\ell^{-1}(\mu)\,\epsilon_\ell$
中式	$C = \exp((\mu + \epsilon_m)^\wedge)$	$\phi = \mu + \epsilon_m$
右式	$C = \bar{C}\exp(\epsilon_r^\wedge)$	$\phi \approx \mu + J_r^{-1}(\mu)\,\epsilon_r$

左中右的关系：

$$\epsilon_m \approx J_\ell^{-1}(\mu)\,\epsilon_\ell \approx J_r^{-1}(\mu)\,\epsilon_r$$

我们默认使用左式

概率与统计

- 使用左式时，那么随机变量C的形式为： $C=\exp\left(\epsilon^{\wedge}\right)\bar{C}$
- 我们说它服从高斯分布，实际指的是：

$$p\left(\epsilon\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3}\det\boldsymbol{\Sigma}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\epsilon\right)$$

或 $\epsilon\sim\mathcal{N}(0,\boldsymbol{\Sigma})$

为了回避周期性问题，通常要假设这个噪声很小

- 如果旋转发生了改变，例如左乘固定的R： $C'=RC$ ，那么C' 也服从高斯分布：

$$C'=RC=R\exp(\epsilon^{\wedge})\bar{C}=\exp\left((R\epsilon)^{\wedge}\right)R\bar{C}=\exp(\epsilon'^{\wedge})\bar{C}'$$

C'的噪声为： $\epsilon'=R\epsilon\sim\mathcal{N}\left(0,R\Sigma R^{\mathrm{T}}\right)$

- 可见，它的性质与正常向量的高斯分布一致

概率与统计

- 对于SE(3)，同理
- SE(3)的左式： $\boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{\epsilon}^\wedge)\bar{\boldsymbol{T}}$ 其中： $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^6 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$

- 同样对于T的线性变换T' =RT，其噪声变化为：

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\exp(\boldsymbol{\epsilon}^\wedge)\bar{\boldsymbol{T}} = \exp\left((\boldsymbol{\mathcal{R}}\boldsymbol{\epsilon})^\wedge\right)\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{T}} = \exp(\boldsymbol{\epsilon}'^\wedge)\bar{\boldsymbol{T}}'$$

- 新的均值和方差为： $\bar{\boldsymbol{T}}' = \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{T}}, \quad \boldsymbol{\epsilon}' = \boldsymbol{\mathcal{R}}\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{R}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathrm{T}}\right)$

概率与统计

- **案例1**：旋转向量的不确定性
- 现在对固定向量x进行旋转，得到y，考虑当旋转不确定时，y的不确定性（y的均值和方差）

$$y = Cx \qquad\qquad C = \exp\left(\epsilon^{\wedge}\right)\bar{C}, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- 我们可以
  1. 使用蒙特卡洛方法进行模拟
  2. 使用sigma point变换
  3. 或使用解析方法来求

概率与统计

- 先来看解析方法，对exp进行泰勒展开：

$$y = Cx = \left(1 + \epsilon^\wedge + \frac{1}{2}\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge + \frac{1}{6}\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge + \frac{1}{24}\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge + \cdots\right)\bar{C}x$$

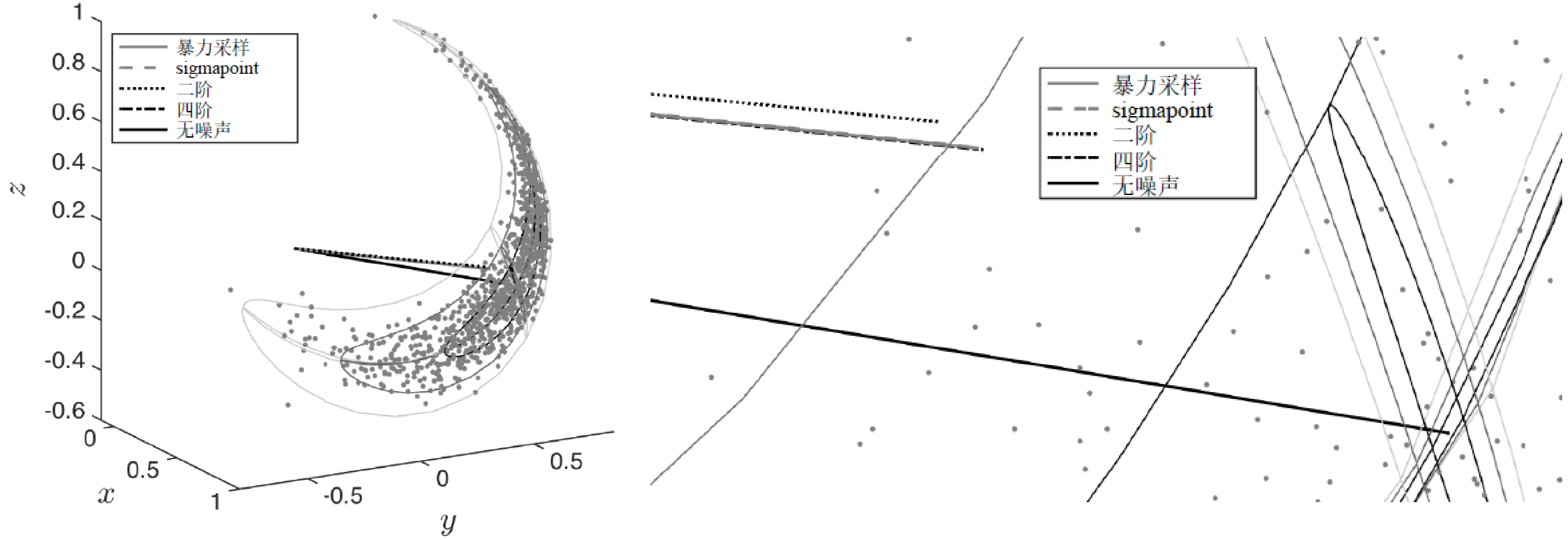
- 对y取均值时，因为噪声为高斯分布，奇数项期望为零，偶数部分计算二阶和四阶的

$$E[\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge] = E\left[-(\epsilon^T\epsilon)1 + \epsilon\epsilon^T\right] = -\mathrm{tr}\left(E\left[\epsilon\epsilon^T\right]\right)1 + E\left[\epsilon\epsilon^T\right] = -\mathrm{tr}(\Sigma)1 + \Sigma$$

$$\begin{aligned}
E[\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge] &= E\left[-(\epsilon^T\epsilon)\epsilon^\wedge\epsilon^\wedge\right] \\
&= E\left[-(\epsilon^T\epsilon)\left(-(\epsilon^T\epsilon)1 + \epsilon\epsilon^T\right)\right] \\
&= \mathrm{tr}\left(E\left[(\epsilon^T\epsilon)\epsilon\epsilon^T\right]\right)1 - E\left[(\epsilon^T\epsilon)\,\epsilon\epsilon^T\right] \\
&= \mathrm{tr}\big(\Sigma(\mathrm{tr}(\Sigma)1 + 2\Sigma)\big)1 - \Sigma(\mathrm{tr}(\Sigma)1 + 2\Sigma) \\
&= \left((\mathrm{tr}(\Sigma))^2 + 2\mathrm{tr}(\Sigma^2)\right)1 - \Sigma(\mathrm{tr}(\Sigma)1 + 2\Sigma)
\end{aligned}$$

- 高阶的需要用到isserlis定理，前面课程略掉了，所以这边也只给结论，不作解释
- 所以，E[y]并不等于Cx的均值，实际上会有一些偏移

概率与统计


暴力采样
sigmapoint
二阶
四阶
无噪声
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
z
0
0.5
1
x
-0.5
0
0.5
y
暴力采样
sigmapoint
二阶
四阶
无噪声

概率与统计

- **案例2**：姿态的组合
- 考虑两个带有不确定性的姿态进行组合：$\{\bar{T}_1, \Sigma_1\}$， $\{\bar{T}_2, \Sigma_2\}$ 组合后成为： $T = T_1 T_2$
- 按照噪声的定义，把扰动写出来：$\exp(\epsilon^\wedge)\bar{T} = \exp(\epsilon_1^\wedge)\bar{T}_1 \exp(\epsilon_2^\wedge)\bar{T}_2$
  - 利用Ad把噪声项移到一侧：$\exp(\epsilon^\wedge)\bar{T} = \exp(\epsilon_1^\wedge) \exp\left((\bar{\mathcal{T}}_1 \epsilon_2)^\wedge\right) \bar{T}_1 \bar{T}_2$ 其中 $\bar{\mathcal{T}}_1 = \mathrm{Ad}(\bar{T}_1)$
  - 令 $\epsilon_2' = \bar{\mathcal{T}}_1 \epsilon_2$，那么利用BCH展开噪声项：

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2' + \frac{1}{2}\epsilon_1^\curlywedge \epsilon_2' + \frac{1}{12}\epsilon_1^\curlywedge \epsilon_1^\curlywedge \epsilon_2' + \frac{1}{12}\epsilon_2'^\curlywedge \epsilon_2'^\curlywedge \epsilon_1 - \frac{1}{24}\epsilon_2'^\curlywedge \epsilon_1^\curlywedge \epsilon_1^\curlywedge \epsilon_2' + \cdots$$

  - 假设两个噪声项独立，那么这里列出的项里，只有第4阶是有值的
  - 故，保留到3阶项时，可以认为组合之后的均值与均值之组合是一样的
  - 协方差推导比较复杂，只给结论：

$$\Sigma_{4\text{th}} \approx \underbrace{\Sigma_1 + \Sigma_2'}_{\Sigma_{2\text{nd}}} + \underbrace{\frac{1}{4}\mathcal{B} + \frac{1}{12}\left(\mathcal{A}_1 \Sigma_2' + \Sigma_2' \mathcal{A}_1^{\mathrm{T}} + \mathcal{A}_2' \Sigma_1 + \Sigma_1 \mathcal{A}_2'^{\mathrm{T}}\right)}_{\text{额外的四阶项}}$$

概率与统计

- Pose组合的实验
  - 设两个随机Pose变量为：

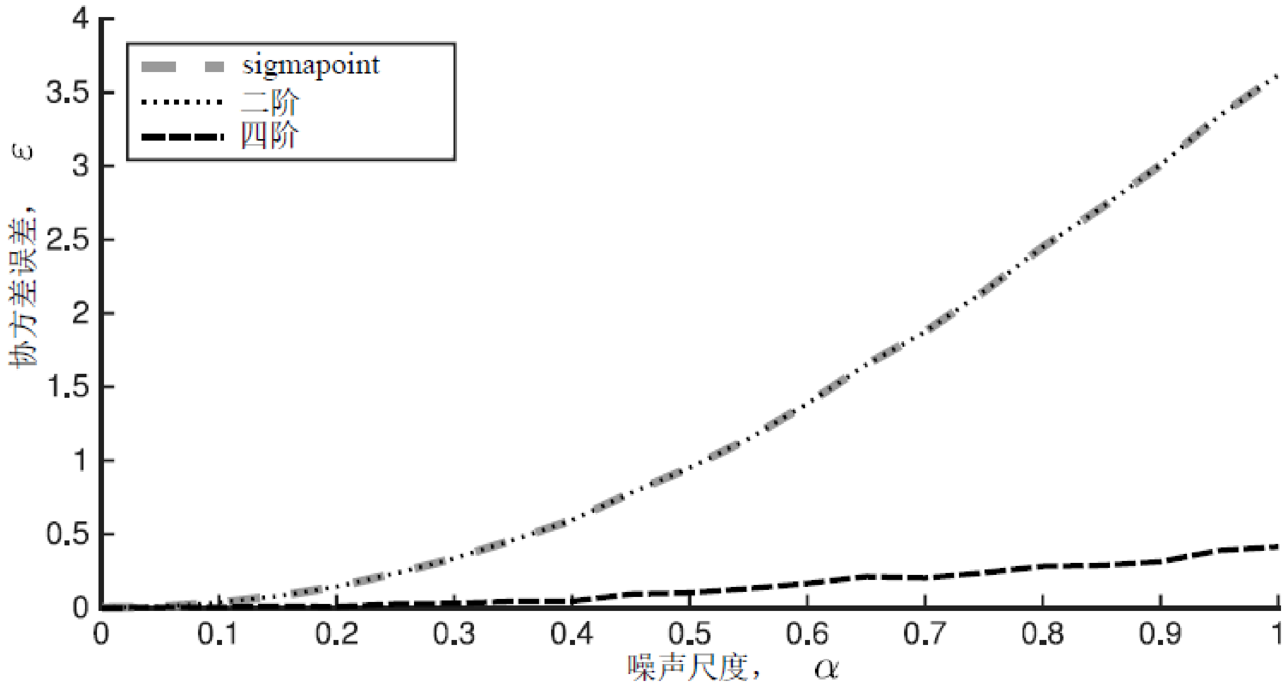
$$\bar{T}_1 = \exp(\bar{\xi}_1^\wedge), \quad \bar{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \pi/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Sigma_1 = \alpha \times \mathrm{diag}\left\{10, 5, 5, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\bar{T}_2 = \exp(\bar{\xi}_2^\wedge), \quad \bar{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \pi/4 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\Sigma_2 = \alpha \times \mathrm{diag}\left\{5, 10, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

  - 分别用蒙特卡洛、二阶、四阶和sigma point考察其组合之后的分布情况



协方差误差表明，二阶方法与sigma point方法类似，四阶方法明显优于其他

概率与统计

- 其余几个案例，请同学们自己阅读（多个Pose组合案例、相机观测路标案例）

- 小结
- 本节课介绍了：
  - 如何通过SO(3), SE(3)表达旋转和姿态；
  - so(3)、se(3)与李群的关系
  - 利用so(3)和se(3)进行求导、求差、求不确定性的方式

习题

- 课后习题1-5, 7, 8, 11, 12