机器人学中的状态估计

Timothy Barfoot 著 高翔，谢晓佳等 译
Slides by Xiang Gao

2020年春

第4讲 偏差、匹配和外点

- 输入和测量的偏差
- 数据关联
- 外点

第4讲 偏差、匹配和外点

- 输入和测量的偏差
- 数据关联
- 外点

输入和测量的偏差

- 在上两节课我们讨论了LG系统与NLNG系统中的状态估计问题
- 实际问题与理论问题还存在各种可能的偏差：
  - 实际噪声并不是零均值高斯噪声
  - 实际当中可能存在错误观测
  - 观测数据还存在匹配问题（数据关联）

- 这些都可能导致状态估计与实际相差甚远
- 本节课主要讨论这几类问题的处理方式

输入和测量的偏差

- 首先考虑LG系统下，运动和观测存在偏差的情况。系统方程为：

$$x_k = Ax_{k-1} + B(u_k + \bar{u}) + w_k$$

$$y_k = Cx_k + \bar{y} + n_k$$

其中 $\bar{u}$ $\bar{y}$ 是输入与观测量的偏差，w和n仍为白噪声

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad n_k \sim \mathcal{N}(0, R)$$

- 在LG系统中，我们使用卡尔曼滤波器获得状态估计：

预测：

$$\check{P}_k = A_{k-1}\hat{P}_{k-1}A_{k-1}^T + Q_k$$

$$\check{x}_k = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + v_k$$

卡尔曼增益：

$$K_k = \check{P}_k C_k^T \left(C_k \check{P}_k C_k^T + R_k\right)^{-1}$$

更新：

$$\hat{P}_k = (1 - K_k C_k)\,\check{P}_k$$

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k \underbrace{\left(y_k - C_k \check{x}_k\right)}_{\text{更新量}}$$

定义误差：

$$\check{e}_k = \check{x}_k - x_k$$

$$\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k$$

写出误差动态过程：

$$\check{e}_k = A\hat{e}_{k-1} - (B\bar{u} + w_k)$$

$$\hat{e}_k = (1 - K_k C)\check{e}_k + K_k(\bar{y} + n_k)$$

输入和测量的偏差

- 相比于LG系统，有偏情况下多出一项和偏差相关的项：

$$\check{e}_k = A\hat{e}_{k-1} - (B\bar{u} + w_k)$$
$$\hat{e}_k = (1 - K_k C)\check{e}_k + K_k(\bar{y} + n_k)$$

在白噪声时，卡尔曼滤波是无偏的，意味着：

$$E[\hat{e}_k] = 0, \quad E[\check{e}_k] = 0, \quad E\left[\hat{e}_k\hat{e}_k^{\mathrm{T}}\right] = \hat{P}_k, \quad E\left[\check{e}_k\check{e}_k^{\mathrm{T}}\right] = \check{P}_k$$

- 但是在有偏差存在时，误差会逐渐累积，不妨看k=1时刻：

$$E[\check{e}_1] = A\underbrace{E[\hat{e}_0]}_{0} - \Big(B\bar{u} + \underbrace{E[w_1]}_{0}\Big) = -B\bar{u}$$
$$E[\hat{e}_1] = (1 - K_1 C)\underbrace{E[\check{e}_1]}_{-B\bar{u}} + K_1\Big(\bar{y} + \underbrace{E[n_1]}_{0}\Big)$$
$$= -(1 - K_1 C)B\bar{u} + K_1\bar{y}$$

输入和测量的偏差

- 方差部分：

$$\begin{aligned}E\left[\check{e}_1\check{e}_1^{\mathrm{T}}\right] &= E\left[(A\hat{e}_0-(B\bar{u}+w_1))(A\hat{e}_0-(B\bar{u}+w_1))^{\mathrm{T}}\right]\\ &= \underbrace{E\left[(A\hat{e}_0-w_1)(A\hat{e}_0-w_1)^{\mathrm{T}}\right]}_{\check{P}_1}+(-B\bar{u})\underbrace{E\left[(A\hat{e}_0-w_1)^{\mathrm{T}}\right]}_{0}\\ &\quad+\underbrace{E[(A\hat{e}_0-w_1)]}_{0}(-B\bar{u})^{\mathrm{T}}+(-B\bar{u})(-B\bar{u})^{\mathrm{T}}\\ &= \check{P}_1+(-B\bar{u})(-B\bar{u})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$\check{P}_1 = E\left[\check{e}_1\check{e}_1^{\mathrm{T}}\right] - \underbrace{E[\check{e}_1]E[\check{e}_1]^{\mathrm{T}}}_{\text{偏差的影响}}$$

$$\begin{aligned}E\left[\hat{e}_1\hat{e}_1^{\mathrm{T}}\right] &= E\Big[((1-K_1C)\check{e}_1+K_1(\bar{y}+n_1))\\ &\qquad\times((1-K_1C)\check{e}_1+K_1(\bar{y}+n_1))^{\mathrm{T}}\Big]\\ &= \underbrace{E\left[((1-K_1C)\check{e}_1+K_1n_1)((1-K_1C)\check{e}_1+K_1n_1)^{\mathrm{T}}\right]}_{\hat{P}_1}\\ &\quad+(K_1\bar{y})\underbrace{E\left[((1-K_1C)\check{e}_1+K_1n_1)^{\mathrm{T}}\right]}_{(-(1-K_1C)B\bar{u})^{\mathrm{T}}}\\ &\quad+\underbrace{E[((1-K_1C)\check{e}_1+K_1n_1)]}_{-(1-K_1C)B\bar{u}}(K_1\bar{y})^{\mathrm{T}}+(K_1\bar{y})(K_1\bar{y})^{\mathrm{T}}\\ &= \hat{P}_1+(-(1-K_1C)B\bar{u}+K_1\bar{y})\times(-(1-K_1C)B\bar{u}+K_1\bar{y})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$\hat{P}_1 = E\left[\hat{e}_1\hat{e}_1^{\mathrm{T}}\right] - \underbrace{E[\hat{e}_1]E[\hat{e}_1]^{\mathrm{T}}}_{\text{偏差的影响}}$$

方差部分是过于确信的（overconfident）

输入和测量的偏差

- 如果已知偏差的具体值，那么显然可以直接进行修正：

预测：
$$\check{P}_k = A\hat{P}_{k-1}A^{\mathrm{T}} + Q$$
$$\check{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + \underbrace{B\bar{u}}_{\text{偏差}}$$

卡尔曼增益：
$$K_k = \check{P}_k C^{\mathrm{T}}\left(C\check{P}_k C^{\mathrm{T}} + R\right)^{-1}$$

更新：
$$\hat{P}_k = (1 - K_k C)\check{P}_k$$
$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k\left(y_k - C\check{x}_k - \underbrace{\bar{y}}_{\text{偏差}}\right)$$

- 当然这样问题也就不存在了
- 实际情况中，我们可以一边估计状态，一边估计其偏差
- 例子：GPS信号与高精地图中通常存在固定偏差，偏差值和地区相关
- 例子：IMU读取通常存在固定偏差

输入和测量的偏差

- 1. 考虑未知的输入偏差
  - 我们增广系统状态，把输入偏差考虑进来： $x'_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix}$
  - 并假设偏差随时间游走： $\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + s_k$ $\quad s_k \sim \mathcal{N}(0, W)$
  - 那么增广的运动模型和观测模型变为：

$$x'_k = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A'} x'_{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B'} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ s_k \end{bmatrix}}_{w'_k}$$

其中： $w'_k \sim \mathcal{N}(0, Q'), \quad Q' = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C'} x'_k + n_k$$

  - 那么可以继续使用卡尔曼滤波器的方式进行状态估计

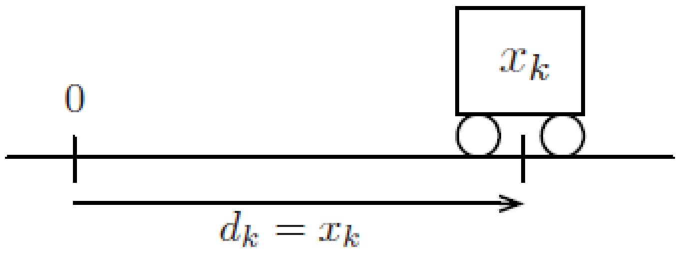
输入和测量的偏差

- 来考察上述LG系统的能观性，能观性矩阵为： $\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'A'^{(N+U-1)} \end{bmatrix}$

- 若要状态估计问题存在唯一最优解，则要求： $\underbrace{Q' > 0, \quad R > 0,}_{\text{由定义得证}} \quad \operatorname{rank} \mathcal{O}' = N + U$
- 但是在偏差存在的情况下，这一般是不成立的
- 下面举两个具体的例子

输入和测量的偏差

- 例1：水平运动的小车：状态变量为位移与速度，观测变量为位移，输入为加速度



$$x_k = x_{k-1} + v_k$$
$$v_k = v_{k-1} + a_k + \bar{a}_k$$

内部偏差

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 对于原系统和增广系统，其能观性矩阵分别为：

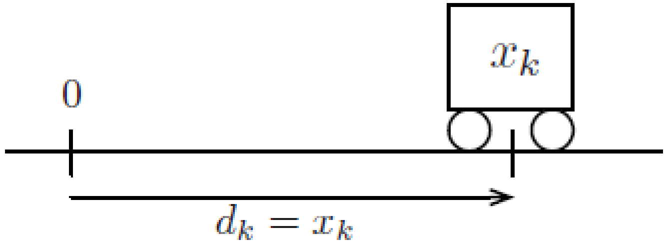
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathcal{O} = 2 = N$$

$$\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ C'A'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CB \\ CA^2 & CAB + CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathcal{O}' = 3 = N + U$$

- 这种系统在有偏差时依然是能观的

输入和测量的偏差

- 例2：上述系统中，既能控制速度，也能控制加速度：



$$x_k = x_{k-1} + v_k + \bar{v}_k$$
$$v_k = v_{k-1} + a_k + \bar{a}_k$$

内部偏差

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 原系统是能观的，但增广系统却是不能观的：

$$\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ C'A'^2 \\ C'A'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ CA & CB \\ CA^2 & C(A+1)B \\ CA^3 & C(A^2+A+1)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathcal{O}' = 3 < 4 = N + U$$

也即无法根据输入和观测唯一地推测系统状态

输入和测量的偏差

- 2. 考虑未知的测量偏差
  - 同样假设偏差为随机游走：

$$x'_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} \qquad \bar{y}_k = \bar{y}_{k-1} + s_k \qquad \text{其中：} \ s_k \sim \mathcal{N}(0, W)$$

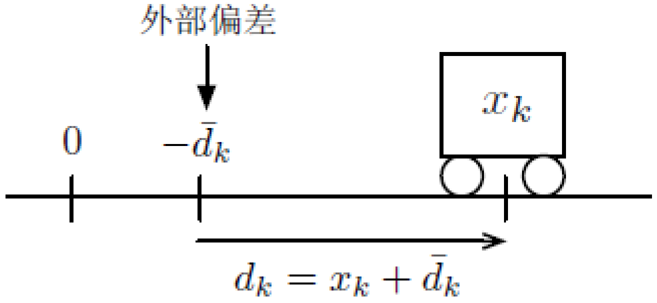
  - 增广后系统运动模型和观测模型变为：

$$x'_k = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A'} x'_{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B'} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ s_k \end{bmatrix}}_{w'_k} \qquad w'_k \sim \mathcal{N}(0, Q'), \quad Q' = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

$$y_k = \underbrace{[C \quad 1]}_{C'} x'_k + n_k$$

输入和测量的偏差

- 继续来看前面的例子，此时我们认为观测量存在偏差：
  - 车辆一直测量某个事先未知的路标，也就是我们所谓的SLAM问题



$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} + v_k \\
v_k &= v_{k-1} + a_k
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

- 原问题和增广问题的能观性矩阵为：

$$
\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathcal{O} = 2 = N
$$

$$
\mathcal{O}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & 1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} & 1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathcal{O}' = 2 < 3 = N + U
$$

- 所以此问题也不是能观的。直观上，同时移动小车与路标时，测量值不变。

输入和测量的偏差

- 偏差问题的讨论：
  - 无论是运动还是测量方程，都可以把偏差引入到状态中，形成增广的状态估计问题；
  - （大）部分情况下，引入偏差后的问题是不完全能观的；
  - 对于不完全能观的情况，对应的批量估计：

$$\left(H^{\mathrm{T}} W^{-1} H\right) \hat{x}=H^{\mathrm{T}} W^{-1} z$$

  左侧的矩阵存在零空间，使得它不能直接求逆（但可以求广义逆）

  - 我们可以引入偏差量的初始估计，并在求解过程中保持零空间不变，来计算这种情况下的状态估计；

第4讲 偏差、匹配和外点

- 输入和测量的偏差
- 数据关联
- 外点

数据关联

- 数据关联问题实际当中非常普遍，有些非常容易，有些非常困难
  - 例：GPS卫星定位需要接收自身与卫星之间的距离；而卫星是人为编码的，所以很容易确定目前的距离信息是相对于哪一颗卫星；
  - 例：星敏感器测量自身观测到各星星的位置，与星表相比较，确定自身的姿态；然而，星表与观测数据之间的关联问题难以确定；
- 数据关联问题通常认为在状态估计外部解决，即估计状态时已经知道数据关联信息
  - 例如，VSLAM中通过特征点的描述信息来确定特征点与路标的对应关系；
- 也有一些估计器，一边计算状态，一边求解数据关联问题
  - 例如，直接法的VSLAM、激光SLAM中的ICP，等等
  - 在星敏感器的例子中，常见的做法是利用数据的内部特性（各星之间的距离和夹角）来确定数据关联

- 本课程不展开各种问题中数据关联问题的讨论；

第4讲 偏差、匹配和外点

- 输入和测量的偏差
- 数据关联
- 外点

外点

- 外点：测量信息当中的错误值
  - 例如：GPS信号的多路径效应，此时GPS接收器会以高置信度返回一个错误位置信息
- 从正常的噪声模型看来，外点是非常不可能产生的数据
- 一维高斯分布中，3倍标准差以内的数据占99.7%，通常认为大于3倍标准差的数据为外点；
- 实践当中也有一些广泛使用的处理外点方法，下面我们重点介绍两种：RANSAC和M估计

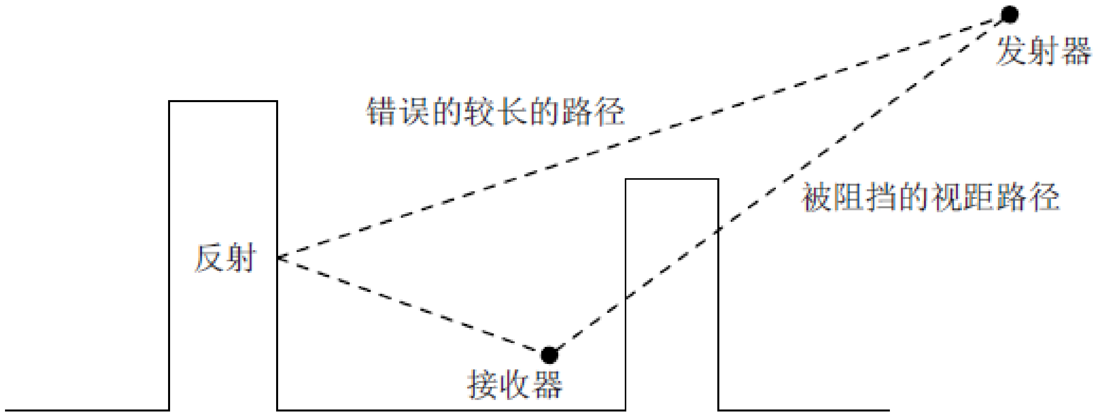
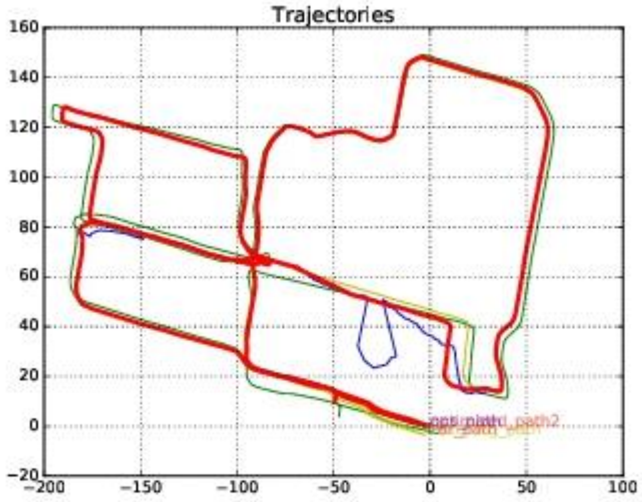


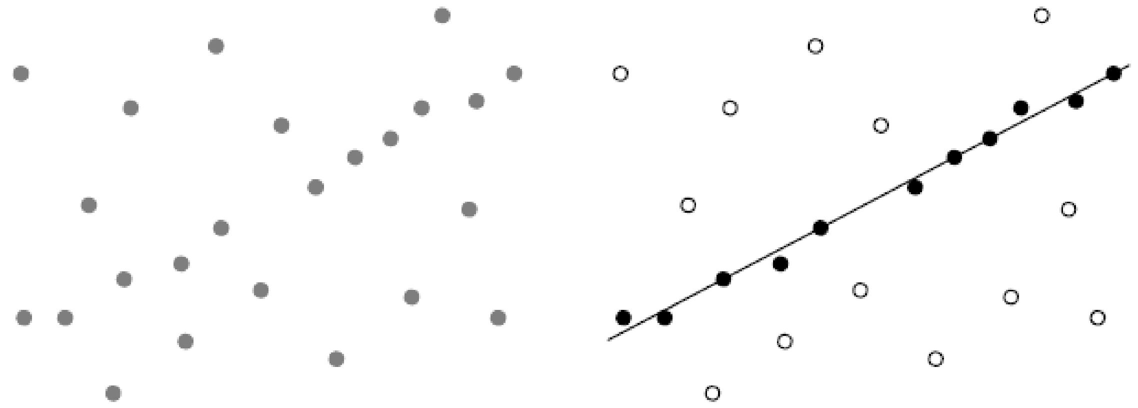
图 5–5　建筑物的复杂结构可能导致 GPS 系统产生错误的观测

实际案例：
红色（估计轨迹）
蓝色（GPS轨迹）



外点

- RANSAC（Random Sample Consensus），随机采样一致性
- 我们假设数据是由外点（outlier）和内点（inlier）混合的，内点符合预设的模型，而外点不符合



带有内点和外点的数据集合　　RANSAC拟合的拥有最多内点的直线

RANSAC算法：

1. 随机选择（最小）子集，假设它们为内点
2. 利用这些内点拟合出模型参数
3. 判断剩余的数据是否符合拟合模型，若内点太少，则放弃，回到1；
4. 根据3判断的内点，重新计算模型参数
5. 根据4计算的参数，重新判断内外点，直到收敛；

外点

- RANSAC的性能如何?
- 设我们最小需要n个内点来计算模型参数，每个点为内点的概率为w，那么，当计算了k次RANSAC后，我们有概率p选到一个全部为内点的子集。显然有：

$$1-p=(1-w^n)^k$$

- k次（至少有一个外点的概率）

- 那么k与p的关系为： $k=\dfrac{\ln(1-p)}{\ln(1-w^n)}$

- RANSAC的思想是非常简洁有效的，我们设计算法时可以参照RANSAC的思路

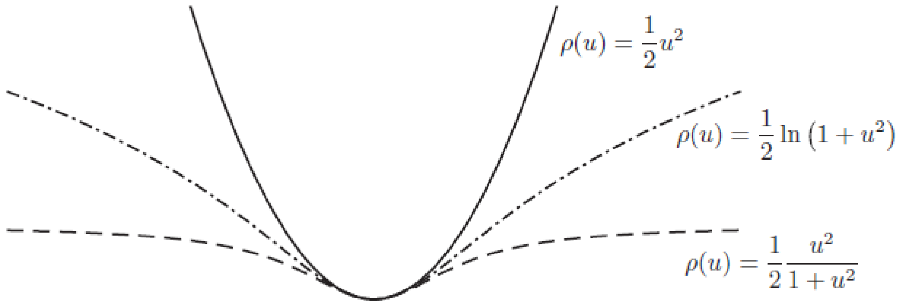
外点

- M估计：修改二次函数的形状
- 前面提到的MAP目标函数的形式为： $J(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})$
- 现在，用更一般的形式表达它：

$$J'(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \rho(u_i(\boldsymbol{x}))$$

其中 $\alpha_i > 0$ 为权重值， $u_i(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})}$

- 我们可以自由选择代价函数的形式，例如： $\underbrace{\rho(u) = \frac{1}{2}u^2}_{\text{二次（quadratic）}}, \quad \underbrace{\rho(u) = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)}_{\text{柯西（Cauchy）}}, \quad \underbrace{\rho(u) = \frac{1}{2}\frac{u^2}{1+u^2}}_{\text{Geman-McClure}}$
- 此类函数称为鲁棒代价函数（robust cost functions），除上述的两种之外还有很多
  - 相比二次函数，它们在误差较大时增长明显变慢



外点

- 鲁棒函数对自变量的导数：

$$\frac{\partial J'(x)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\partial \rho}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial x}$$

其中：

$$\frac{\partial u_i}{\partial e_i} = \frac{1}{u_i(x)} e_i(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_i^{-1}$$

- 代入之，得：

$$\frac{\partial J'(x)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N} e_i(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_i(x)^{-1} \frac{\partial e_i(x)}{\partial x}$$

其中：

$$\boldsymbol{Y}_i(x)^{-1} = \frac{\alpha_i}{u_i(x)} \left.\frac{\partial \rho}{\partial u_i}\right|_{u_i(x)} \boldsymbol{W}_i^{-1}$$

- 而原问题的导数为：

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} e_i(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_i^{-1} e_i(x)$$

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N} e_i(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_i^{-1} \frac{\partial e_i(x)}{\partial x}$$

- 故鲁棒函数可看成对协方差进行了修改，由固定的W变成了可变的Y

外点

- 在最小二乘的迭代过程中，可以使用当前的工作点计算Y：

$$\mathbf{Y}_i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})^{-1} = \frac{\alpha_i}{u_i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})} \left.\frac{\partial \rho}{\partial u_i}\right|_{u_i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})} \boldsymbol{W}_i^{-1}$$

- 这种做法也称为迭代重加权最小二乘（Iteratively Reweighted Least Squares, IRLS）
- 此类方法实际上把目标函数变为了：

$$J''(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_i(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}})^{-1} \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x})$$

- 不过这个函数的极值点与原问题在同一点，所以不影响求解

外点

- 协方差估计
  - 有时候我们无法十分确定协方差矩阵W
  - 那么可以选择同时估计状态与协方差：

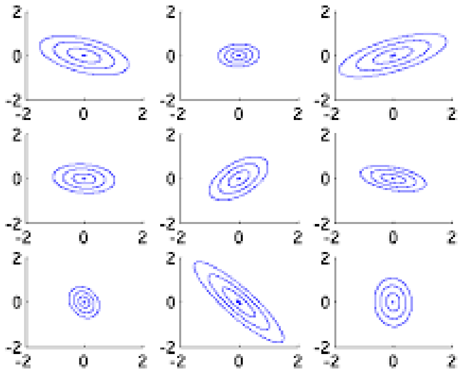
$$J(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i(x)^{\mathrm{T}} W_i^{-1} e_i(x)$$

$$\left\{\hat{x}, \hat{M}\right\} = \arg\underbrace{\min}_{\{x, M\}} J'(x, M)$$

这种做法称为自适应估计（Adaptive Estimation）

  - 假设协方差矩阵服务逆维希特分布（inverse-Wishart distribution）： $M_i \sim \mathcal{W}^{-1}(\Psi_i, \nu_i)$
  - 该分布使用参数 Ψ_i 和 ν_i 描述概率分布：

$$p(M_i) = \frac{\det(\Psi_i)^{\frac{\nu_i}{2}}}{2^{\frac{\nu_i M_i}{2}}\Gamma_{M_i}\left(\frac{\nu_i}{2}\right)} \det(M_i)^{-\frac{\nu_i+M_i+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Psi_i M_i^{-1}\right)\right)$$



  - 其中 $\Gamma_{M_i}(\cdot)$ 为多变量Gamma函数

□ 不用害怕这里的分布形式，因为MAP取对数之后和前面的系数项无关，可舍掉

外点

- 同时估计状态与协方差： $p(x, M|z) = p(x|z, M)p(M) = \prod_{i=1}^{N} p(x|z_i, M_i)p(M_i)$
- 目标函数变为：

$$J'(x, M) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(e_i(x)^{\mathrm{T}} M_i^{-1} e_i(x) - \alpha_i \ln(\det(M_i^{-1})) + \operatorname{tr}(\Psi_i M_i^{-1})\right)$$

其中： $\alpha_i = \nu_i + M_i + 2$

- 此时，问题与x和M都相关，但我们先固定x，计算最优的M，求上式关于M逆的导数，得：

$$\frac{\partial J'(x, M)}{\partial M_i^{-1}} = \frac{1}{2} e_i(x) e_i(x)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\alpha_i M_i + \frac{1}{2}\Psi_i$$

令其为零，得： $M_i(x) = \underbrace{\frac{1}{\alpha_i}\Psi_i}_{\text{常量}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_i} e_i(x) e_i(x)^{\mathrm{T}}}_{\text{膨胀}}$

- 该式表明，最优方差是先验基础上增加一个和残差相关的项
  - 把它代入目标函数中，目标函数变为：

$$J'(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln\left(1 + e_i(x)^{\mathrm{T}} \Psi_i^{-1} e_i(x)\right)$$

该式等价于IRLS中，以ψ作为先验的情况

外点

- 于是，IRLS在这种特定的情况下等效于M估计
  - 所以IRLS是一种更普遍的方法，而不是状况不好时的补救方案
  - 实际当中，IRLS也比较实用，不引入额外的假设

小结

- 现实问题与理论问题是不一样的
  - 现实问题中输入与观测不一定只带有白噪声，可能含有偏差；
  - 现实问题存在数据关联问题，也存在异常值
  - 有时候噪声的协方差也是不确定的
- 本节课的结论
  - 可以把偏差引入到增广状态中，但系统不一定是能观的；
  - 我们通常都需要单独处理外点，使得系统变得鲁棒；
  - 外点的处理方式有RASNAC、M估计（鲁棒估计）、IRLS、自适应估计，等等

作业

- 课后习题1，2，3