机器人学中的状态估计 - 作业 2

peng00bo00

May 21, 2020

1. 状态方程:

$$x_k = x_{k-1} + v_k + w_k \tag{1}$$

观测方程:

$$y_k = x_k + n_k \tag{2}$$

各个矩阵对应形式为:

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] \tag{3}$$

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} \check{P}_0 & & & & & & & & & & & \\ & Q & & & & & & & & & & \\ & & Q & & & & & & & & & \\ & & & Q & & & & & & & & \\ & & & & Q & & & & & & & \\ & & & & & Q & & & & & & \\ \hline & & & & & & R & & & & & \\ & & & & & & & R & & & & \\ & & & & & & & & R & & & \\ & & & & & & & & & R & & \\ & & & & & & & & & & R & \\ & & & & & & & & & & & R \end{array}\right] \tag{4}$$

$$\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c} \check{x}_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \hline y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array}\right], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中未填写的部分均为 0.
系统状态可通过求解方程:

$$(\mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\check{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{z} \tag{6}$$

来获得

本例中 $\mathbf{H}$ 矩阵各列非 0 开头均为 1，故 $\mathbf{H}$ 为列满秩矩阵。因此即使未知初始状态方程 $(\mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\check{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{z}$ 仍具有唯一解。

2. 将 $Q=R=1$ 条件代入 W，此时各行非 0 开头除首项 $\check{P}_0$ 外 W 退化为一单位阵。由于题目中未给出初始状态的先验方差，这里假定 $\check{P}_0=0$。因此

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H} &= \mathbf{H}^T\mathbf{H} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

对其进行 Cholesky 分解，得到

$$L = \begin{bmatrix} 1.73205081 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.57735027 & 1.63299316 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.61237244 & 1.62018517 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6172134 & 1.61834719 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.61791438 & 1.61807967 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.61801654 & 1.27202813 \end{bmatrix} \tag{8}$$

显然 L 具有下三角矩阵的形式，而且对于每行仅有对角元及其左边的元素有非 0 值。

3. 将 2 个矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \\ \mathbf{A}^2 & \mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{A}^{K-1} & \mathbf{A}^{K-2} & \mathbf{A}^{K-3} & \dots & \mathbf{1} & \\ \mathbf{A}^{K} & \mathbf{A}^{K-1} & \mathbf{A}^{K-2} & \dots & \mathbf{A} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ -\mathbf{A} & \mathbf{1} & & & & \\ & -\mathbf{A} & \mathbf{1} & & & \\ & & -\mathbf{A} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \mathbf{1} & \\ & & & & -\mathbf{A} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

左边矩阵第 i 行为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{i-1} & \mathbf{A}^{i-2} & \dots & \mathbf{1} & 0 & \dots \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中第 i 个元素为 $\mathbf{1}$

右边矩阵第 j 列为

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \mathbf{1} & -\mathbf{A} & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \tag{11}$$

其中第 j 个元素为 $\mathbf{1}$

当 $i < j$ 时二者相乘为 0；
当 $i = j$ 时二者相乘为单位阵 $\mathbf{1}$；
当 $i > j$ 时二者相乘为 $\mathbf{A}^{i-j} - \mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{A} = 0$；
因此相乘得到的矩阵为单位阵，即 2 个矩阵互为逆阵。