航天飞行动力学战术导弹弹道设计

Pauline

1. 理想弹道设计

力学原理

为计算理想弹道，采用基于“瞬时平衡”假设的导弹在铅锤平面运动的质心方程组

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=P\cos\alpha_{\mathrm{b}}-X_{\mathrm{b}}-mg\sin\theta\\
&mV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=P\sin\alpha_{\mathrm{b}}+Y_{\mathrm{b}}-mg\cos\theta\\
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V\cos\theta\\
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=V\sin\theta\\
&\delta_{\mathrm{zb}}=-\frac{m_z^{\alpha}}{m_z^{\delta_z}}\alpha_{\mathrm{b}}\\
&\varepsilon_1=0\\
&\varepsilon_4=0
\end{aligned}\right\}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&X_b=C_{\mathrm{xb}}qS\\
&C_{\mathrm{xb}}=0.2+0.03\alpha_{\mathrm{b}}^2\\
&Y_{\mathrm{b}}=C_{y\mathrm{b}}qS=\left(C_y^{\alpha}\alpha_{\mathrm{b}}+C_y^{\delta_z}\delta_{\mathrm{zb}}\right)qS\\
&q=\frac{1}{2}\rho V^2\\
&\rho=\rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4.25588}\\
&T=T_0-0.0065H\\
&g=g_0\cdot\frac{R_{\mathrm{e}}^2}{\left(R_{\mathrm{e}}+H\right)^2}
\end{aligned}\right\}$$

质量变化规律为

$$m = m(t,x) = \begin{cases} m_0 & ,x < 9100\text{m} \\ m_0 - m_s t & ,x > 9100\text{m} \end{cases}$$

推力变化规律为

$$P = \begin{cases} 0 & ,x < 9100\text{m} \\ P_0 & ,x > 9100\text{m} \end{cases}$$

对于近程战术导弹，不考虑地球曲率，恒有

$$H = y$$

采用如下飞行方案和导引方法

当$x < 9100\text{m}$时，$H_* = 2000\cos(0.000314 \times 1.1 \cdot x) + 5000$

当$x > 9100\text{m}$时，发动机点火，$H_* = 3000\text{m}$

当$x > 24000\text{m}$时，采用比例导引法（$K = 3$ ）

则对应控制方程为

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = H - H_* = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = \arctan\left[-2 \times 3.14 \times 1.1 \cdot \sin(0.000314 \times 1.1 \cdot x)\right] \end{aligned}\right\} ① \quad x < 9100\text{m}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = H - H_* = 0，\ H_* = 3000\text{m} \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \end{aligned}\right\} ② \quad 9100\text{m} < x < 24000\text{m}$$

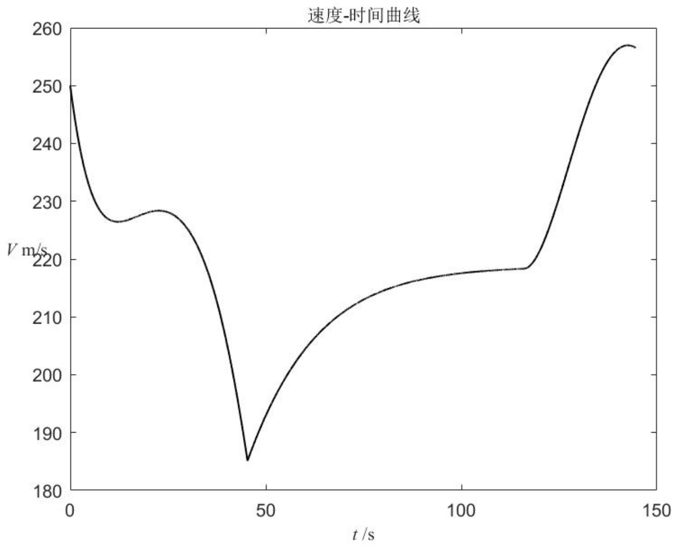
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -V\cos\eta \\ &r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = V\sin\eta \\ &q = \sigma + \eta \\ &\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - K\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned}\right\} ③ \quad x > 24000\text{m}$$

方程组中出现的常数值为

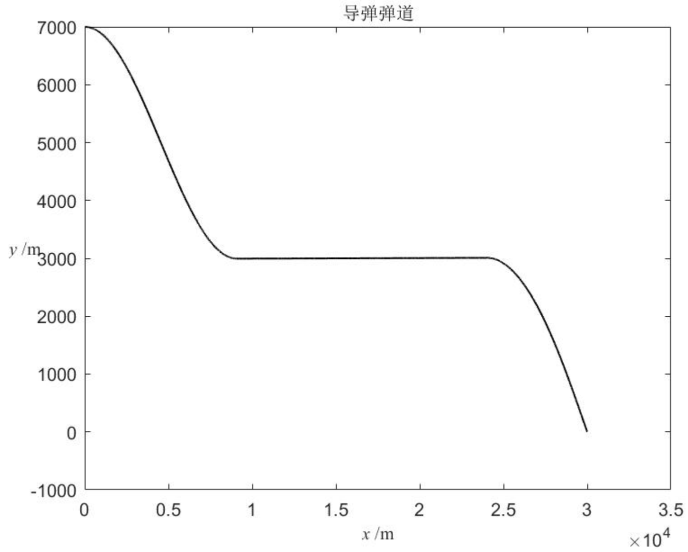
$$\left.\begin{aligned}
&C_y^{\alpha}=\frac{18}{\pi}\\
&C_y^{\delta_z}=\frac{18}{5\pi}\\
&m_z^{\alpha}=-\frac{27}{25\pi}\\
&m_z^{\delta_z}=\frac{189}{125\pi}\\
&S=S_{\mathrm{ref}}=0.45\mathrm{m}^2\\
&\rho_0=1.2495\mathrm{kg/m}^3\\
&T_0=288.15\mathrm{K}\\
&g_0=9.81\mathrm{m/s}^2\\
&R_{\mathrm{e}}=6371000\mathrm{m}\\
&m_0=320\mathrm{kg}\\
&m_{\mathrm{s}}=0.46\mathrm{kg/s}\\
&P_0=2000\mathrm{N}\\
&K=3
\end{aligned}\right\}$$

实验结果

由四阶龙格库塔法计算该微分方程组，最终得到如下要求的曲线图

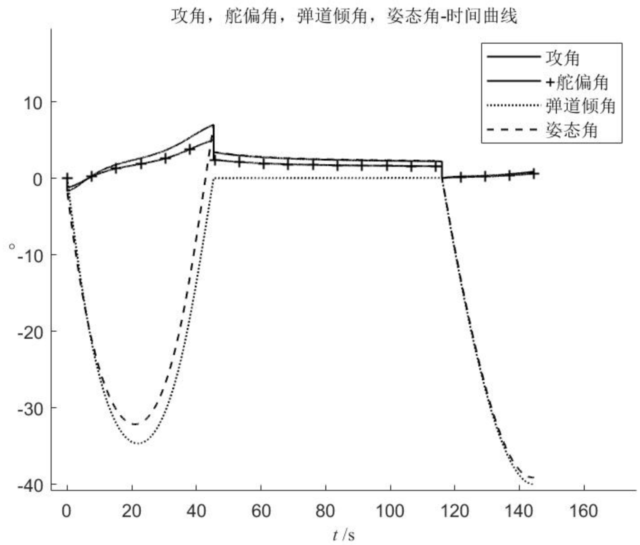


在整个飞行阶段，最小速度约为 185m/s，最大速度约为 257m/s。在 t=45.33s 处，速度变化较为剧烈，可在附近选取特征点进行分析。



最终坐标为（3000.4696，-0.3939）

该弹道根据弹道变化特点可分为三段：方案飞行两段，导引飞行一段，可分别在这三段及其转变处选取特征点进行分析。



图为各角度参数随时间变化曲线。

2. 动态特性分析

根据基准弹道特性，决定选取如下五个坐标为（*x,y,t*）的特征点进行分析：*A*（4530.3238，5010.7079，21.82），*B*（9100.6658，2994.4616，45.33），*C*（15505.8463，3000.001，76.83），*D*（24106.6079，3007.8587，116.5），*E*（29701.2464，250.2252，143.05）。

特征点计算

在 A（4530.3238，5010.7079，21.82）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=20.457$$

$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=35.163$$

$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-49.228$$

$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.690$$

$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.138$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=49.278>0$$

$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{49.228s+38.820}{s^3+21.147s^2+49.278s}$$

$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.138s^2+2.823s+38.820}{s^3+21.147s^2+49.278s}$$

$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{46.405-0.138s}{s^2+21.147s+49.278}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=0.591 \\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.142 \\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.501 \end{cases}$$

在 B（9100.6658，2994.4616，45.33）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=16.644$$
$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=28.608$$
$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-40.052$$
$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.692$$
$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.138$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=40.126>0$$
$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{40.052s+31.664}{s^3+17.336s^2+40.126s}$$
$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.138s^2+2.297s+31.664}{s^3+17.336s^2+40.126s}$$
$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{37.755-0.138s}{s^2+17.336s+40.126}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases}K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=0.789\\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.158\\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.368\end{cases}$$

在 C（15505.8463，3000.001，76.83）处

动力系数为

$$a_{22} = -\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}} = 22.138$$

$$a_{24} = -\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}} = 38.053$$

$$a_{25} = -\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}} = -53.275$$

$$a_{34} = \frac{\left(P + Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 0.930$$

$$a_{35} = \frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 0.179$$

由

$$a_{24} + a_{22}a_{34} = 58.641 > 0$$
$$m_z^{\alpha} = -0.344 < 0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right) = -\frac{a_{25}s + a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s} = \frac{53.275s + 56.357}{s^3 + 23.068s^2 + 58.641s}$$

$$W_{\theta\delta}\left(s\right) = \frac{a_{35}s^2 + a_{22}a_{35}s + a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34}}{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s} = \frac{0.179s^2 + 3.963s + 56.357}{s^3 + 23.068s^2 + 58.641s}$$

$$W_{\alpha\delta}\left(s\right) = -\frac{a_{35}s + a_{25} + a_{22}a_{35}}{s^2 + A_1 s + A_2} = \frac{49.312 - 0.179s}{s^2 + 23.068s + 58.6418}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha} = -\dfrac{a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} = 0.961 \\ T_{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 0.130 \\ \xi_{\alpha} = \dfrac{a_{22} + a_{34}}{2\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 1.506 \end{cases}$$

在 D（24106.6079，3007.8587，116.5）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=23.126$$
$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=39.751$$
$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-55.651$$
$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=1.014$$
$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.196$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=63.201>0$$
$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{55.651s+64.221}{s^3+24.140s^2+63.201s}$$
$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.196s^2+4.533s+64.221}{s^3+24.140s^2+63.201s}$$
$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{51.118-0.196s}{s^2+24.140s+63.201}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=1.016 \\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.126 \\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.518 \end{cases}$$

在 E（29701.2464，250.2252，143.05）处

动力系数为

$$a_{22} = -\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}} = 42.128$$
$$a_{24} = -\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}} = 72.413$$
$$a_{25} = -\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}} = -101.379$$
$$a_{34} = \frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 1.620$$
$$a_{35} = \frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 0.318$$

由

$$a_{24} + a_{22}a_{34} = 140.660 > 0$$
$$m_z^{\alpha} = -0.344 < 0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}(s) = -\frac{a_{25}s + a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s} = \frac{101.379s + 187.261}{s^3 + 43.748s^2 + 140.660s}$$
$$W_{\theta\delta}(s) = \frac{a_{35}s^2 + a_{22}a_{35}s + a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34}}{s^3 + A_1 s^2 + A_2 s} = \frac{0.318s^2 + 13.397s + 187.261}{s^3 + 43.748s^2 + 140.660s}$$
$$W_{\alpha\delta}(s) = -\frac{a_{35}s + a_{25} + a_{22}a_{35}}{s^2 + A_1 s + A_2} = \frac{87.982 - 0.318s}{s^2 + 43.748s + 140.660}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha} = -\dfrac{a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} = 1.331 \\ T_{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 0.084 \\ \xi_{\alpha} = \dfrac{a_{22} + a_{34}}{2\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 1.844 \end{cases}$$

结果分析

纵观五个特征点给出的传递函数特征参数，可以发现如下规律:

1）导弹传递系数 K_{α} 在飞行过程中不断增加，导致其变化的原因则是因为导弹的

高度在不断下降，因此操纵性一直在增加。

2）导弹时间常数 T_α 在飞行过程中先增加，后减少，其中在方案飞行阶段变化不大，但进入导引飞行阶段后快速下降，其原因是在导引飞行阶段，速度变化影响较大，动压增加迅速，导致动力系数 a_{24} 增加较大，因此也反映了导弹操纵性的提高。

3）导弹相对阻尼系数 ξ_α 在飞行过程中先减小，后增加，由于较大的相对阻尼系数往往对应较小的最大过载，因此导弹整体机动性较差，在飞行过程中其机动性先增加，后减小。