航天飞行动力学战术导弹弹道设计

Pauline

1. 理想弹道设计

力学原理

为计算理想弹道，采用基于“瞬时平衡”假设的导弹在铅锤平面运动的质心方程组

$$
\left.\begin{aligned}
& m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=P\cos\alpha_{\mathrm{b}}-X_{\mathrm{b}}-mg\sin\theta \\
& mV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=P\sin\alpha_{\mathrm{b}}+Y_{\mathrm{b}}-mg\cos\theta \\
& \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V\cos\theta \\
& \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=V\sin\theta \\
& \delta_{\mathrm{zb}}=-\frac{m_z^{\alpha}}{m_z^{\delta_z}}\alpha_{\mathrm{b}} \\
& \varepsilon_1=0 \\
& \varepsilon_4=0
\end{aligned}\right\}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
& X_b=C_{\mathrm{xb}}qS \\
& C_{\mathrm{xb}}=0.2+0.03\alpha_{\mathrm{b}}^2 \\
& Y_{\mathrm{b}}=C_{y\mathrm{b}}qS=\left(C_y^{\alpha}\alpha_{\mathrm{b}}+C_y^{\delta_z}\delta_{\mathrm{zb}}\right)qS \\
& q=\frac{1}{2}\rho V^2 \\
& \rho=\rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4.25588} \\
& T=T_0-0.0065H \\
& g=g_0\cdot\frac{R_{\mathrm{e}}^2}{\left(R_{\mathrm{e}}+H\right)^2}
\end{aligned}\right\}
$$

质量变化规律为

$$m = m(t,x) = \begin{cases} m_0 & ,x < 9100\text{m} \\ m_0 - m_s t & ,x > 9100\text{m} \end{cases}$$

推力变化规律为

$$P = \begin{cases} 0 & ,x < 9100\text{m} \\ P_0 & ,x > 9100\text{m} \end{cases}$$

对于近程战术导弹，不考虑地球曲率，恒有

$$H = y$$

采用如下飞行方案和导引方法

当$x < 9100\text{m}$时，$H_* = 2000\cos(0.000314\times1.1\cdot x) + 5000$

当$x > 9100\text{m}$时，发动机点火，$H_* = 3000\text{m}$

当$x > 24000\text{m}$时，采用比例导引法（$K = 3$ ）

则对应控制方程为

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = H - H_* = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = \arctan\left[-2\times3.14\times1.1\cdot\sin(0.000314\times1.1\cdot x)\right] \end{aligned}\right\} ① \ x < 9100\text{m}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = H - H_* = 0,\ H_* = 3000\text{m} \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \end{aligned}\right\} ② \ 9100\text{m} < x < 24000\text{m}$$

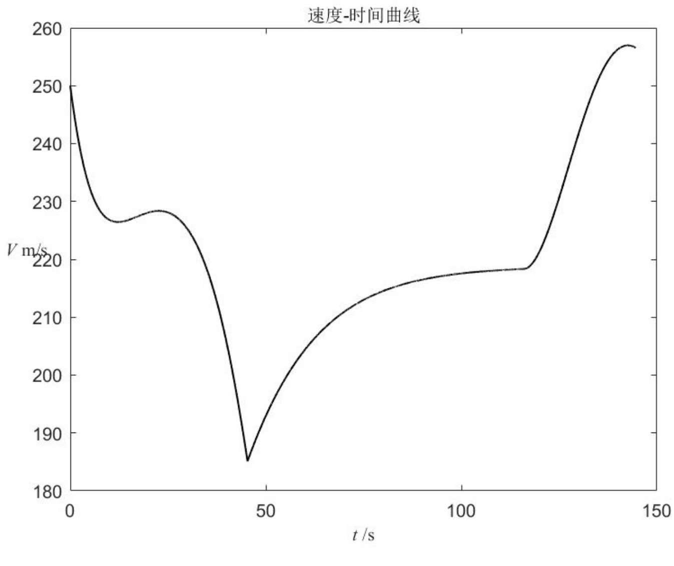
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -V\cos\eta \\ &r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = V\sin\eta \\ &q = \sigma + \eta \\ &\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} - K\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned}\right\} ③ \ x > 24000\text{m}$$

方程组中出现的常数值为

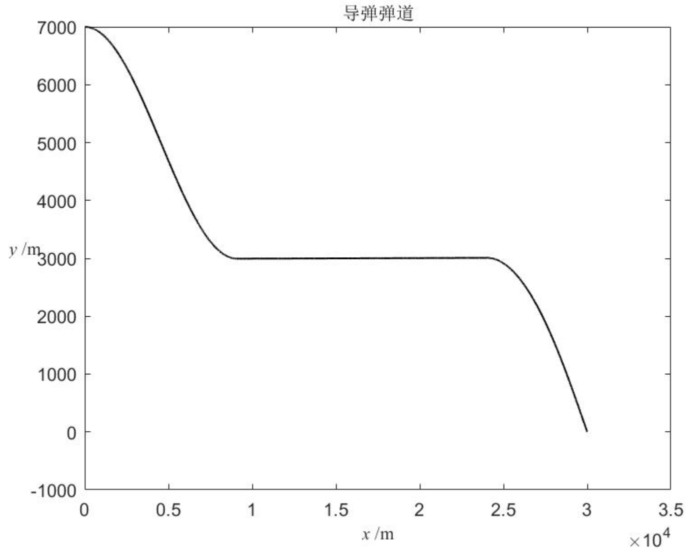
$$
\left.\begin{array}{l}
C_y^{\alpha} = \dfrac{18}{\pi} \\
C_y^{\delta_z} = \dfrac{18}{5\pi} \\
m_z^{\alpha} = -\dfrac{27}{25\pi} \\
m_z^{\delta_z} = \dfrac{189}{125\pi} \\
S = S_{\mathrm{ref}} = 0.45\mathrm{m}^2 \\
\rho_0 = 1.2495\mathrm{kg/m}^3 \\
T_0 = 288.15\mathrm{K} \\
g_0 = 9.81\mathrm{m/s}^2 \\
R_{\mathrm{e}} = 6371000\mathrm{m} \\
m_0 = 320\mathrm{kg} \\
m_{\mathrm{s}} = 0.46\mathrm{kg/s} \\
P_0 = 2000\mathrm{N} \\
K = 3
\end{array}\right\}
$$

实验结果

由四阶龙格库塔法计算该微分方程组，最终得到如下要求的曲线图

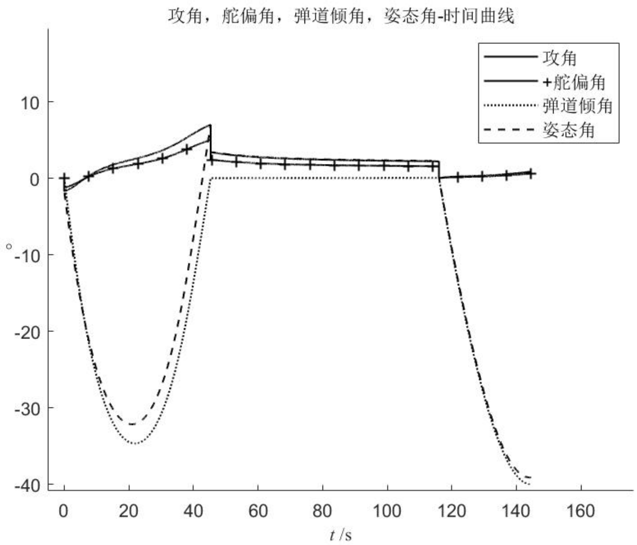


在整个飞行阶段，最小速度约为 185m/s，最大速度约为 257m/s。在 t=45.33s 处，速度变化较为剧烈，可在附近选取特征点进行分析。



最终坐标为（3000.4696，-0.3939）

该弹道根据弹道变化特点可分为三段：方案飞行两段，导引飞行一段，可分别在这三段及其转变处选取特征点进行分析。



图为各角度参数随时间变化曲线。

2. 动态特性分析

根据基准弹道特性，决定选取如下五个坐标为（x,y,t）的特征点进行分析：A（4530.3238，5010.7079，21.82），B（9100.6658，2994.4616，45.33），C（15505.8463，3000.001，76.83），D（24106.6079，3007.8587，116.5），E（29701.2464，250.2252，143.05）。

特征点计算

在 A（4530.3238，5010.7079，21.82）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=20.457$$

$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=35.163$$

$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-49.228$$

$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.690$$

$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.138$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=49.278>0$$

$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{49.228s+38.820}{s^3+21.147s^2+49.278s}$$

$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.138s^2+2.823s+38.820}{s^3+21.147s^2+49.278s}$$

$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{46.405-0.138s}{s^2+21.147s+49.278}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=0.591 \\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.142 \\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.501 \end{cases}$$

在 B（9100.6658，2994.4616，45.33）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=16.644$$

$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=28.608$$

$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-40.052$$

$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.692$$

$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.138$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=40.126>0$$
$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{40.052s+31.664}{s^3+17.336s^2+40.126s}$$

$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.138s^2+2.297s+31.664}{s^3+17.336s^2+40.126s}$$

$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{37.755-0.138s}{s^2+17.336s+40.126}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases}K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=0.789\\T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.158\\\xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.368\end{cases}$$

在 C（15505.8463，3000.001，76.83）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=22.138$$
$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=38.053$$
$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-53.275$$
$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.930$$
$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.179$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=58.641>0$$
$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{53.275s+56.357}{s^3+23.068s^2+58.641s}$$
$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.179s^2+3.963s+56.357}{s^3+23.068s^2+58.641s}$$
$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{49.312-0.179s}{s^2+23.068s+58.6418}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases}K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=0.961\\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.130\\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.506\end{cases}$$

在 D（24106.6079，3007.8587，116.5）处

动力系数为

$$a_{22} = -\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}} = 23.126$$

$$a_{24} = -\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}} = 39.751$$

$$a_{25} = -\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}} = -55.651$$

$$a_{34} = \frac{\left(P + Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 1.014$$

$$a_{35} = \frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0} = 0.196$$

由

$$a_{24} + a_{22}a_{34} = 63.201 > 0$$
$$m_z^{\alpha} = -0.344 < 0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}(s) = -\frac{a_{25}s + a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{s^3 + A_1s^2 + A_2s} = \frac{55.651s + 64.221}{s^3 + 24.140s^2 + 63.201s}$$

$$W_{\theta\delta}(s) = \frac{a_{35}s^2 + a_{22}a_{35}s + a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34}}{s^3 + A_1s^2 + A_2s} = \frac{0.196s^2 + 4.533s + 64.221}{s^3 + 24.140s^2 + 63.201s}$$

$$W_{\alpha\delta}(s) = -\frac{a_{35}s + a_{25} + a_{22}a_{35}}{s^2 + A_1s + A_2} = \frac{51.118 - 0.196s}{s^2 + 24.140s + 63.201}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases} K_{\alpha} = -\dfrac{a_{25}a_{34} - a_{24}a_{35}}{a_{24} + a_{22}a_{34}} = 1.016 \\ T_{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 0.126 \\ \xi_{\alpha} = \dfrac{a_{22} + a_{34}}{2\sqrt{a_{24} + a_{22}a_{34}}} = 1.518 \end{cases}$$

在 E（29701.2464，250.2252，143.05）处

动力系数为

$$a_{22}=-\frac{\left(M_z^{\omega_z}\right)_0}{J_{z0}}=42.128$$

$$a_{24}=-\frac{\left(M_z^{\alpha}\right)_0}{J_{z0}}=72.413$$

$$a_{25}=-\frac{\left(M_z^{\delta_z}\right)_0}{J_{z0}}=-101.379$$

$$a_{34}=\frac{\left(P+Y^{\alpha}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=1.620$$

$$a_{35}=\frac{\left(Y^{\delta_z}\right)_0}{\left(mV\right)_0}=0.318$$

由

$$a_{24}+a_{22}a_{34}=140.660>0$$
$$m_z^{\alpha}=-0.344<0$$

则该特征点处具有动态稳定性和静稳定性。

在短周期扰动运动中不计重力动力系数也不考虑下洗影响的情况下，弹体近似传递函数为

$$W_{\vartheta\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{25}s+a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{101.379s+187.261}{s^3+43.748s^2+140.660s}$$

$$W_{\theta\delta}\left(s\right)=\frac{a_{35}s^2+a_{22}a_{35}s+a_{24}a_{35}-a_{25}a_{34}}{s^3+A_1s^2+A_2s}=\frac{0.318s^2+13.397s+187.261}{s^3+43.748s^2+140.660s}$$

$$W_{\alpha\delta}\left(s\right)=-\frac{a_{35}s+a_{25}+a_{22}a_{35}}{s^2+A_1s+A_2}=\frac{87.982-0.318s}{s^2+43.748s+140.660}$$

则操纵性和机动性表征量为

$$\begin{cases}K_{\alpha}=-\dfrac{a_{25}a_{34}-a_{24}a_{35}}{a_{24}+a_{22}a_{34}}=1.331\\ T_{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=0.084\\ \xi_{\alpha}=\dfrac{a_{22}+a_{34}}{2\sqrt{a_{24}+a_{22}a_{34}}}=1.844\end{cases}$$

结果分析

纵观五个特征点给出的传递函数特征参数，可以发现如下规律:

1）导弹传递系数 K_{α} 在飞行过程中不断增加，导致其变化的原因则是因为导弹的

高度在不断下降，因此操纵性一直在增加。

2）导弹时间常数 T_α 在飞行过程中先增加，后减少，其中在方案飞行阶段变化不大，但进入导引飞行阶段后快速下降，其原因是在导引飞行阶段，速度变化影响较大，动压增加迅速，导致动力系数 a_{24} 增加较大，因此也反映了导弹操纵性的提高。

3）导弹相对阻尼系数 ξ_α 在飞行过程中先减小，后增加，由于较大的相对阻尼系数往往对应较小的最大过载，因此导弹整体机动性较差，在飞行过程中其机动性先增加，后减小。