

# 航天飞行动力学远程火箭弹道设计大作业

Pauline

已知火箭纵向运动方程：

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{v}=\frac{P_e}{m}+g \sin \theta \\ v \dot{\theta}=\frac{1}{m} P_e \alpha+g \cos \theta \\ \dot{x}=v \cos \theta \\ \dot{y}=v \sin \theta \\ m=m_0-\dot{m} t \\ \alpha=A_{\varphi}\left(\varphi_{pr}-\theta\right)\end{array}\right.$$

其中， $v$ ， $P_e$ ， $m_0$ ， $\theta$ ， $\alpha$ ， $x$ ， $y$  分别为火箭飞行速度、发动机推力、火箭初始质量、弹道倾角、攻角、水平位移和飞行高度； $A_{\varphi}$  为角度增益系数， $t$  为火箭飞行时间， $m$  为火箭质量。

仿真初始条件如表 1 和表 2 所示。

表 1 初始状态

序号	变量名	变量值	物理意义及单位
0	$t$	0	火箭飞行时间，s
1	$\theta$	$\pi / 2$	初始弹道倾角，弧度
2	$v$	0	火箭初始速度， m/s
4	$x$	0	火箭在地面发射坐标系下的初始水平位置， m
5	$y$	0	火箭在地面发射坐标系下的初始高度， m

表 2 有关参数

序号	变量名	变量值	物理意义及单位
0	$m_0$	8000	起飞质量， kg
1	$\dot{m}$	28.57	单位时间燃料质量消耗， kg/s
2	$g$	-9.8	重力加速度常数， N/s <sup>2</sup>
3	$A_{\varphi}$	35	角度增益系数
4	$P_e$	200	发动机推力， KN
5	$w$	7000	发动机排气速度， m/s

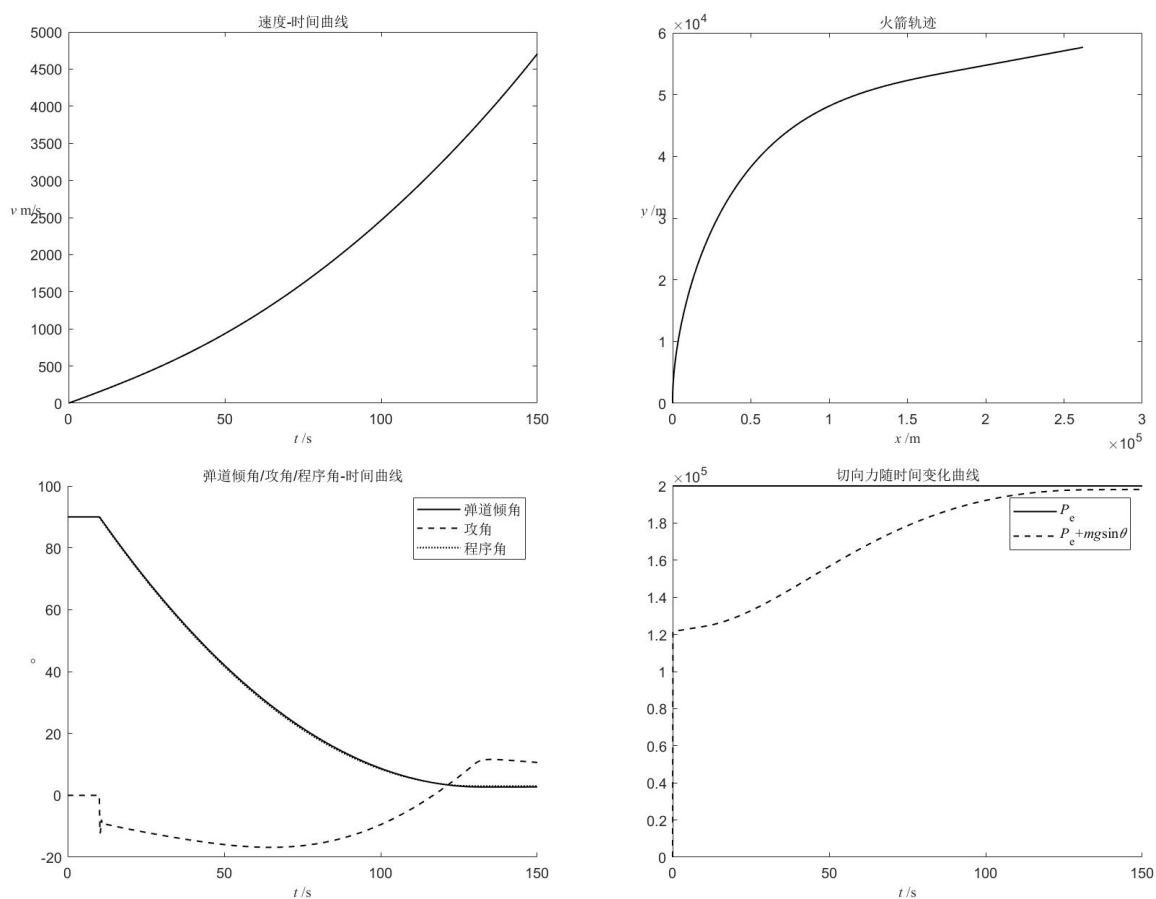
飞程序角  $\varphi_{pr}$  随火箭飞行时间的关系有：

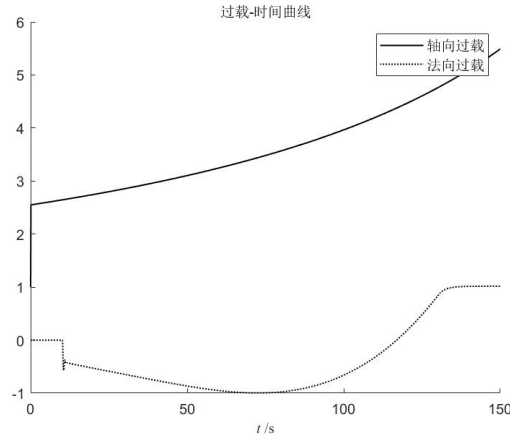
$$\varphi_{pr} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq t < t_1 \\ \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - \text{fig} \right) \cdot \left[ \left( \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right] & t_1 \leq t < t_2 \\ \text{fig} & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

$$\text{fig} = \frac{\pi}{60}, \quad t_1 = 10\text{s}, \quad t_2 = 130\text{s}, \quad t_3 = 150\text{s}$$

## 结果分析：

(1) 由以上仿真条件，根据龙格库塔法可以得到如下火箭弹道特性曲线：





由上图得知，在火箭飞行过程中，最终速度为  $4706.73\text{m/s}$ ；火箭轨迹呈抛物线型，与程序角函数相适应；攻角绝对值最大不超过  $17^\circ$ ；切向力随时间变化与教材插图大致吻合；轴向过载最大为  $5.49$ ，法向过载最大为  $1.0175$ ，较符合安全标准。

## (2) 验证齐奥尔科夫斯基公式

由齐奥尔科夫斯基公式：

$$v_{\text{idk}} = -u'_e \ln \frac{m_k}{m_0} = -7000 \times \ln \frac{3714.5}{8000} = 5370.38\text{m/s}$$

数值计算中，由引力项引起的速度损失为

$$\Delta v_{\text{lk}} = 664.43\text{m/s}$$

则数值计算得到的理想速度为

$$v'_{\text{idk}} = v(t_k) + \Delta v_{\text{lk}} = 5371.16\text{m/s}$$

则相对误差为

$$\varepsilon = \frac{5371.16 - 5370.38}{5370.38} \approx 0.0145\%$$

因此齐奥尔科夫斯基公式与实验相符。