



迭代制导原理与仿真

IGM 基本方法

姓名 刘喆禹

学号 2021300651

院所 航天学院

目录

1	力学模型	4
1.1	坐标系定义	4
1.1.1	地心赤道坐标系	4
1.1.2	地心发射惯性坐标系	4
1.1.3	地心升交点轨道坐标系	4
1.1.4	制导坐标系	4
1.2	坐标系变换	4
1.2.1	地心赤道坐标系与地心升交点轨道坐标系的变换矩阵	4
1.2.2	制导坐标系与地心升交点轨道坐标系的变换矩阵	5
1.2.3	地心发射惯性坐标系与地心赤道坐标的变换矩阵	5
1.3	地心发射惯性坐标系下的火箭动力学方程	5
1.3.1	视加速度计算	5
1.3.2	常值引力假设	6
2	火箭入轨的最优控制问题	6
2.1	最优控制描述	6
2.2	最优控制问题求解	7
2.3	IGM 方法	8
2.4	最优控制解的计算	8
2.4.1	引力加速度计算	8
2.4.2	剩余时间预估	8
2.4.3	地心角预估	9
2.4.4	入轨点轨道要素转化	9
2.4.5	控制变量计算	10
2.4.6	姿态角计算	11
2.4.7	关机预报	12
3	制导算法	12
3.1	制导所需参数	12
3.2	制导方程	13
3.2.1	迭代算法	14
3.3	制导流程框图	15
3.4	程序设计	16
4	仿真验证	16
4.1	仿真条件	16
4.2	仿真结果	17

4.3 仿真中的问题	18
5 结论	18

迭代制导方法主要特点是通过最优控制理论，依据火箭自身运动状态和给定运动状态，经制导计算机解算，确定出一组控制量从而形成一条被导引至入轨点的瞬时最优弹道。

自 20 世纪 60 年代迭代制导算法应用于运载火箭的大气层外的制导以来，目前存在诸多不同形式的迭代制导算法。例如最早用于土星火箭的基于线性正切假设的迭代制导方法（IGM）和动力显式制导方法（PEG），后续也有多位学者与工程师在这些方法的基础上进一步改进算法增强其精度和鲁棒性^[1]。

本文是基于 IGM 展开的¹。

1 力学模型

1.1 坐标系定义

1.1.1 地心赤道坐标系

坐标原点 O 在地球中心， OX_I 轴沿地球赤道面和黄道面的交线，指向春分点 γ ， OZ_I 轴指向北极， OY_I 轴与 $X_I OZ_I$ 面相垂直并构成右手直角坐标系。

1.1.2 地心发射惯性坐标系

坐标原点 O 在地球中心， Ox 轴指向发射点水平面内的发射瞄准方向， Oy 轴垂直于发射点水平面上方， Oz 轴与 xOy 面相垂直并构成右手直角坐标系。

1.1.3 地心升交点轨道坐标系

坐标原点 O 在地球中心， OY_Ω 轴指向升交点方向。 OX_Ω 轴在轨道面内与 OY_Ω 轴相垂直，且以轨道比角动量方向为参考，由 OY_Ω 轴逆时针旋转 90° 得到， OZ_Ω 轴与 $X_\Omega OY_\Omega$ 面相垂直并构成右手直角坐标系。

1.1.4 制导坐标系

坐标原点 O 在地球中心， $O\eta$ 轴指向入轨点方向。 $O\xi$ 轴在轨道面内与 $O\eta$ 轴相垂直并指向绕行天体在入轨点的运行方向， $O\zeta$ 轴与 $\xi O\eta$ 面相垂直并构成右手直角坐标系。

1.2 坐标系变换

1.2.1 地心赤道坐标系与地心升交点轨道坐标系的变换矩阵

$$Q_{I\Omega} = M_z \left(\frac{\pi}{2} - \Omega \right) M_y (\pi - i) \quad (1)$$

¹只有少数几篇文献是基于 IGM 方法的，其余都是相对现代的方法。

式中, M_z 、 M_y 为绕 z 、 y 轴的旋转矩阵, Ω 为目标轨道的升交点赤经, i 为目标轨道的轨道倾角。

1.2.2 制导坐标系与地心升交点轨道坐标系的变换矩阵

$$Q_{G\Omega} = M_z(-\phi) \quad (2)$$

式中, ϕ 为 OY_Ω 轴沿天体运行方向至 $O\eta$ 轴的夹角。

显然有几何关系

$$\phi = f + \omega \quad (3)$$

式中, f 、 ω 分别为入轨点的真近点角和近地点幅角。

1.2.3 地心发射惯性坐标系与地心赤道坐标的变换矩阵

$$Q_{AI} = M_y\left(-A_0 - \frac{\pi}{2}\right) M_x(B_0) M_z\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

式中, M_x 为绕 x 轴的旋转矩阵, A_0 、 B_0 、 θ 分别为射击方位角、发射点地理纬度和发射时发射点的当地恒星时^[2], 即发射时发射点的赤经。

1.3 地心发射惯性坐标系下的火箭动力学方程

一般在大气层内火箭采取跟踪程序角飞行并进行导引控制, 到大气层外后才启动迭代制导, 在不考虑姿态的情况下, 此时的动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{g} \\ \dot{m} &= -m_s \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, $\dot{\mathbf{w}}$ 、 m_s 分别为火箭的视加速度和火箭发动机的秒耗量。

1.3.1 视加速度计算

对于真实的火箭制导系统, 视加速度是由导航系统传入的。因此这里做出如下假设以计算出火箭的视加速度。

(1) 假设发动机无安装偏差, 认为其摆角很小, 影响忽略不计且姿态控制过程过渡时间忽略不计, 同时在整个飞行过程中推力值为一定值 T 。

(2) 在整个飞行过程中由姿控系统对火箭滚转进行控制, 故认为火箭滚转角为零。

由此可以得到视加速度的表达式为

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{T}{m} \mathbf{U} \quad (6)$$

式中, \mathbf{U} 为火箭推力方向单位矢量。其在地心发射惯性系下的分量为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \psi \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, φ 、 ψ 分别为俯仰角和偏航角。

1.3.2 常值引力假设

式 (5) 中的引力项有着非常严重的非线性, 利用最优控制理论无法求得制导方程的解析解, 即使能够得到数值解, 也不具有鲁棒性, 很容易导致计算发散。因此将假设引力加速度为一常量。当给定两点位置时, 取这两点引力加速的平均值进行计算。

显然, 只有当连接给定两点的弧段较短时, 该假设才不至于引入较大的误差。

2 火箭入轨的最优控制问题

2.1 最优控制描述

在制导坐标系上对火箭建立最优控制推导较为方便, 此时火箭的运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} \cos \varphi_\xi \cos \psi_\zeta \\ \sin \varphi_\xi \cos \psi_\zeta \\ -\sin \psi_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_\xi \\ g_\eta \\ g_\zeta \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, ξ 、 η 、 ζ 、 g_ξ 、 g_η 、 g_ζ 分别为火箭位置和引力加速度在制导坐标系对应坐标轴上的分量, φ_ξ 为火箭纵轴在 $\xi O \eta$ 平面上的投影与 ξ 轴的夹角, ψ_ζ 为火箭纵轴与 $\xi O \eta$ 平面的夹角。

现选取状态量

$$\mathbf{x} = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \xi, \eta, \zeta)^T$$

以及控制量

$$\mathbf{u} = (\cos \varphi_\xi \cos \psi_\zeta, \sin \varphi_\xi \cos \psi_\zeta, -\sin \psi_\zeta)^T$$

其中控制变量为 φ_ξ 、 ψ_ζ 。

要求火箭在满足一定约束条件的情况下以最少燃料消耗入轨。由于推力大小一定, 因此性能指标最少燃料消耗等效于最短时间入轨。于是得到性能指标和状态方程为

$$J = \int_{t_0}^{t_c} 1 dt \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C} \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} g_\xi \\ g_\eta \\ g_\zeta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将火箭每一个瞬时点看作该最优问题的初值点，给定最终入轨点 c 为该最优问题的终值点，则初始条件为

$$t_0 = 0, \quad \mathbf{x}_0 = (\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) \quad (11)$$

终端条件为

$$t_c = t_g + t_0 = t_g, \quad \mathbf{x}_c = (\dot{\xi}_c, \dot{\eta}_c, \dot{\zeta}_c, \xi_c, \eta_c, \zeta_c) \quad (12)$$

式中， t_c 、 t_g 分别为关机时刻和剩余飞行时间。

2.2 最优控制问题求解

建立 Hamilton 函数为

$$H = \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} + 1 \quad (13)$$

根据变分法泛函取极值的必要条件有

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_\xi} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_\zeta} = 0 \quad (14)$$

得

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi_\xi &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ \tan \psi_\zeta &= -\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \cos \varphi_\xi + \lambda_2 \sin \varphi_\xi} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (16)$$

得

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{40}t + \lambda_{10} \\ -\lambda_{50}t + \lambda_{20} \\ -\lambda_{60}t + \lambda_{30} \\ \lambda_{40} \\ \lambda_{50} \\ \lambda_{60} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中， λ_{10} 、 λ_{20} 、 λ_{30} 、 λ_{40} 、 λ_{50} 、 λ_{60} 为积分常数，由边值条件确定。

2.3 IGM 方法

由式 (15) 及式 (17) 即可求得该最优控制问题的解。但由于式 (15) 得到的是一个关于控制变量的非线性时变函数，代入式 (8) 后难以反解出协态变量中的积分常数，因此 IGM 方法在这里采用线性正切假设，预设控制函数为一线性函数，即

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\xi &= \bar{\varphi}_\xi + k_2 t - k_1 \\ \psi_\zeta &= \bar{\psi}_\zeta + e_2 t - e_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中， $\bar{\varphi}_\xi$ 、 $\bar{\psi}_\zeta$ 是控制角的主要组成部分，为确保达到终端速度约束而形成，剩余的时间线性项为小量，是为确保达到终端位置约束而形成。这里对该方程中 t 的意义进行说明：在如上最优控制描述一节中，是以火箭瞬时点作为初值点，而实际过程中火箭瞬时状态信息需要由导航系统输入，因此该方程中的 t 是在每个导航周期内的相对时间，进入下一个导航周期后该方程的参数将被箭载计算机重新计算，制导方程更新。

对于推力固定的火箭来说，要同时满足终端速度和位置的约束是不可能的，从理论上讲，这涉及到一个系统的不可控性问题的研究。按式 (18) 所进行的制导算法实际上无法满足终端位置分量 ξ_c ，但对于能入轨的任务来说，此制导算法的精度依然不错，不会出现其偏差过大的情况^[3]。

2.4 最优控制解的计算

2.4.1 引力加速度计算

根据常值引力假设可得

$$\mathbf{g}_G = \begin{bmatrix} g_\xi \\ g_\eta \\ g_\zeta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} g_{\xi 0} \\ g_{\eta 0} \\ g_{\zeta 0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\xi c} \\ g_{\eta c} \\ g_{\zeta c} \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

2.4.2 剩余时间预估

采用齐奥尔科夫斯基公式预估剩余飞行时间，有

$$t_g = \tau \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{V_e}} \right) \quad (20)$$

式中， V_e 为火箭发动机的比冲， τ 为火箭质量燃尽时间，为

$$\tau = \frac{m}{m_s} = \frac{V_e}{\dot{w}}$$

以当前瞬时为起点，飞行至入轨点的速度增量无法直接解算得到，但可以预估其所需的速度增量为

$$\Delta v = \|\mathbf{v}_{Gc} - \mathbf{v}_{G0} - \mathbf{g}_G t_g\| \quad (21)$$

当给定 t_g 的初值 t_{g0} 后，即可联立式 (20) 和式 (21) 形成超越方程组进行数值求解。

2.4.3 地心角预估

在地心升交点轨道坐标系下，火箭的瞬时运动状态为 \mathbf{r}_Ω 和 \mathbf{v}_Ω 。坐标系间的夹角 ϕ 可被火箭分成两个部分 ϕ_1 与 ϕ_2 。

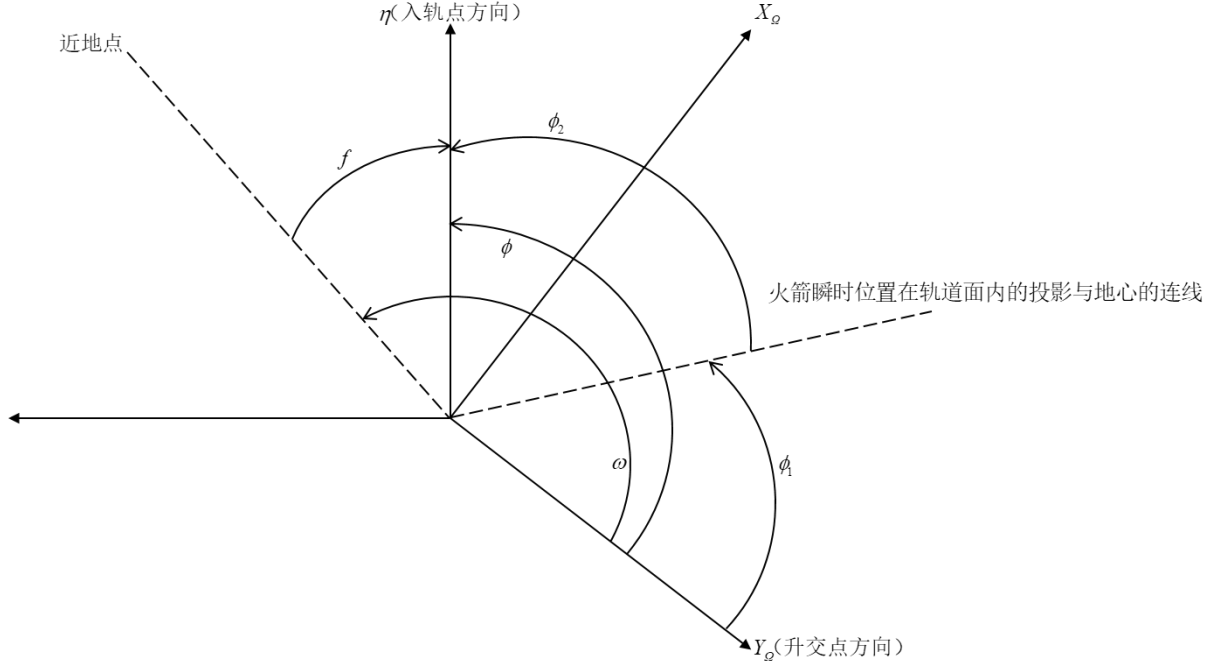


图 1: 地心角组成（以比角动量为参考方向，逆时针为正）

ϕ_1 为火箭在轨道面上的瞬时位置与升交点所张成的地心角，为

$$\phi_1 = \arctan \frac{x_\Omega}{y_\Omega} \quad (22)$$

ϕ_2 为火箭在轨道面上的瞬时位置与入轨点所张成的地心角，由以瞬时点速度在轨道面上的投影在当地水平面的分量为初速，发动机推力所产生的加速度在轨道面上的投影在入轨点 c 的当地水平面的分量为加速度所形成的航程来近似估计的²，随着火箭越接近目标，误差越小^[3]。为

$$\phi_2 = \frac{v_{\xi\eta} t_g \cos \theta_{H\xi\eta} + F_3(\tau_{\xi\eta}) \cos \theta_{HC}}{\eta_c} \quad (23)$$

式中， $F_3(x)$ 在之后定义， θ_{HC} 为给定火箭在入轨点的当地速度倾角， $v_{\xi\eta}$ 、 $\theta_{H\xi\eta}$ 、 $\tau_{\xi\eta}$ 在之后给出具体计算。

2.4.4 入轨点轨道要素转化

一般来说，火箭入轨条件以轨道六要素的形式给出，为半长轴 a ，离心率 e ，升交点赤经 Ω ，轨道倾角 i ，近地点幅角 ω 和预定入轨点的真近点角 f ，通过转换矩阵并且

²反正我是没看懂到底啥意思，可以对比这种估计和其他迭代制导方法中的估计有何差异。

令 $\dot{\zeta}_c$ 和 ζ_c 为 0 即可满足升交点赤经和轨道倾角的约束^[4]，而由于不能同时满足入轨点处的六个约束，在这里放宽对真近点角的限制，也就意味着实际入轨点会随迭代制导的进行而有所变化，即在不同的导航周期，迭代制导所预估的入轨点是不同的，但在每个导航周期内，制导坐标系都是一个惯性系。

这里不加说明地给出用轨道六要素表示的终端条件为^[2]

$$\mathbf{r}_{Gc} = \begin{bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \\ \zeta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{Gc} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_c \\ \dot{\eta}_c \\ \dot{\zeta}_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \begin{bmatrix} (1+e\cos f) \\ e\sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

式中， μ 为中心天体的引力常数。

根据几何关系

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \omega + f$$

并代入式 (24) 可以得到

$$\phi_2 = \frac{v_{\xi\eta} t_g \cos \theta_{H\xi\eta} + F_3(\tau_{\xi\eta}) \cos \theta_{HC}}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(\phi_1 + \phi_2 - \omega)] \quad (25)$$

通过数值计算即可求出每一个导航周期内的 ϕ_2 从而确定此时的入轨点位置。

2.4.5 控制变量计算

在只有速度约束时，横截条件确定协态变量为常量，控制变量皆为常值，回代式 (8) 进行积分即可求得 $\bar{\varphi}_\xi$ 和 $\bar{\psi}_\zeta$ 为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_\xi &= \arctan \frac{\dot{\eta}_c - \dot{\eta}_0 - g_\eta t_g}{\dot{\xi}_c - \dot{\xi}_0 - g_\xi t_g} \\ \bar{\psi}_\zeta &= -\arcsin \frac{\dot{\zeta}_c - \dot{\zeta}_0 - g_\zeta t_g}{\Delta v} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中， Δv 由式 (21) 得到³。

现加入位置约束，将火箭的速度和位置变化考虑成滑行、推力和引力作用下的叠加⁴，有

$$\mathbf{v}_{Gc} = \mathbf{v}_{G0} + \Delta \mathbf{v}_{thrust}(t_g) + \Delta \mathbf{v}_{gravity}(t_g) \quad (27)$$

$$\mathbf{r}_{Gc} = \mathbf{r}_{G0} + \Delta \mathbf{r}_{coast}(t_g) + \Delta \mathbf{r}_{thrust}(t_g) + \Delta \mathbf{r}_{gravity}(t_g) \quad (28)$$

³显然，这里的速度增量全部由火箭推力提供，因此也可通过推力积分得到，两者是相等的，在程序中就是由推力积分计算得到的。

⁴<https://www.bilibili.com/read/cv25701445/>

式中

$$\Delta \mathbf{r}_{coast}(t_g) = \int_0^{t_g} \mathbf{v}_{G0} dt = \mathbf{v}_{G0} t_g \quad (29)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{gravity}(t_g) = \int_0^{t_g} \mathbf{g}_G dt = \mathbf{g}_G t_g \quad (30)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{gravity}(t_g) = \int_0^{t_g} \Delta \mathbf{v}_{gravity}(t) dt = \frac{1}{2} \mathbf{g}_G t_g^2 \quad (31)$$

将推力项写成关于推力的积分，有

$$\Delta \mathbf{v}_{thrust}(t_g) = \int_0^{t_g} \frac{T}{m(t)} \mathbf{u} dt = \int_0^{t_g} \frac{T}{m - m_s t} \mathbf{u} dt = \int_0^{t_g} \frac{V_e}{\tau - t} \mathbf{u} dt \quad (32)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{thrust}(t_g) = \int_0^{t_g} \Delta \mathbf{v}_{thrust}(t) dt \quad (33)$$

定义推力积分

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^{t_g} \frac{V_e}{x-t} dt = V_e \ln \frac{x}{x-t_g} \\ F_2(x) &= \int_0^{t_g} \frac{V_e}{x-t} t dt = x F_1(x) - V_e t_g \\ F_3(x) &= \int_0^{t_g} \int_0^s \frac{V_e}{x-t} dt ds = t_g F_1(x) - F_2(x) \\ F_4(x) &= \int_0^{t_g} \int_0^s \frac{V_e}{x-t} t dt ds = x F_3(x) - \frac{1}{2} V_e t_g^2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式 (18) 中的 $k_2 t - k_1$ 和 $e_2 t - e_1$ 均为小量，对其正余弦作展开，取一阶近似，以 φ_ξ 为例，有

$$\begin{aligned} \cos \varphi_\xi &= \cos \bar{\varphi}_\xi \cos(k_2 t - k_1) - \sin \bar{\varphi}_\xi \sin(k_2 t - k_1) \\ &= \cos \bar{\varphi}_\xi - (k_2 t - k_1) \sin \bar{\varphi}_\xi \\ \sin \varphi_\xi &= \sin \bar{\varphi}_\xi \cos(k_2 t - k_1) + \cos \bar{\varphi}_\xi \sin(k_2 t - k_1) \\ &= \sin \bar{\varphi}_\xi + (k_2 t - k_1) \cos \bar{\varphi}_\xi \end{aligned}$$

联立式 (27)、式 (28)、式 (29)、式 (30)、式 (31)、式 (32)、式 (33) 即可得到由式 (34) 表达的位置修正项参数 k_1 、 k_2 、 e_1 、 e_2 的计算式。

2.4.6 姿态角计算

火箭推力方向单位矢量在地心发射惯性系下的坐标可由控制量经坐标转换得到，为

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}_{AG} \mathbf{u} \quad (35)$$

于是可得姿态角为

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{U_y}{U_x} \\ \psi &= \arcsin(-U_z) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

2.4.7 关机预报

当火箭逐渐接近入轨点时，参数带来的影响可能会导致控制指令的振荡与发散，为避免破坏火箭飞行系统的稳定性，又能获得足够高的精度，现采用对参数提前取零⁵：

$$\begin{aligned} t_g &\leq T_1 & e_1 &= e_2 = 0 \\ t_g &\leq T_2 & k_1 &= k_2 = 0 \\ t_g &\leq T_3 & \psi &= \psi(T_3) \\ t_g &\leq T_4 & \varphi &= \varphi(T_4) \end{aligned}$$

采取按剩余飞行时间进行关机，其判断条件为

$$t_g = 0 \quad (37)$$

若采取按速度进行关机⁶，其判断条件为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{Gc} \quad (38)$$

3 制导算法

3.1 制导所需参数

- 给定入轨点的轨道六要素 a 、 e 、 Ω 、 i 、 ω 、 f_0 、入轨点火箭当地速度倾角 θ_{HC}
- 发射点的射击方位角 A_0 、地理纬度 B_0 、当地恒星时 θ 或发射点与升交点的绝对经差 $\Delta\lambda_0$ ⁷
- 火箭发动机真空推力 T 、比冲 V_e 或秒耗量 m_s
- 火箭发动机关机控制参数 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4
- 导航信息⁸ $\dot{\mathbf{w}}$ 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{r} ，导航周期 ΔT
- 预估迭代初值 t_{g0} 、 ϕ_{20} ⁹，剩余时间迭代精度 ε

⁵程序中没有完成对火箭姿态角的关机控制，仅能对参数进行置零。

⁶文献 [5] 按速度关机的判断与此不同，我没有具体研究，其精度可能会更高。

⁷给定经差时需更换坐标系变换矩阵

⁸本程序采用数值积分作为导航输入。

⁹由 f_0 按式 (D.1) 得到。

3.2 制导方程

为方便箭载计算机使用，现将制导算法所需方程总结如下：

$$\left. \begin{aligned} r_{\xi\eta} &= \sqrt{x_{\Omega}^2 + y_{\Omega}^2} \\ \phi_1 &= \arctan \frac{x_{\Omega}}{y_{\Omega}} \\ v_{\xi\eta} &= \sqrt{v_{\Omega x}^2 + v_{\Omega y}^2} \\ \cos \theta_{H\xi\eta} &= \frac{|x_{\Omega} v_{\Omega y} - v_{\Omega x} y_{\Omega}|}{r_{\xi\eta} v_{\xi\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_{\xi\eta} &= \sqrt{\dot{w}_{\Omega x}^2 + \dot{w}_{\Omega y}^2} \\ \dot{w} &= \sqrt{\dot{w}_{\xi\eta}^2 + \dot{w}_{\Omega z}^2} = \|\dot{\mathbf{w}}\| \\ \tau &= \frac{V_e}{\dot{w}} \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{V_e}{\dot{w}_{\xi\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= V_e \ln \frac{x}{x - t_g} \\ F_2(x) &= x F_1(x) - V_e t_g \\ F_3(x) &= t_g F_1(x) - F_2(x) \\ F_4(x) &= x F_3(x) - \frac{1}{2} V_e t_g^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{C})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ f &= \phi - \omega \\ \mathbf{Q}_{GA} &= \mathbf{M}_z(-\phi) \mathbf{Q}_{\Omega A} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{G0} &= \mathbf{Q}_{GA} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}_{G0} &= \mathbf{Q}_{GA} \mathbf{v} \\ \mathbf{r}_{Gc} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_{Gc} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \begin{bmatrix} (1+e \cos f) \\ e \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_{G0} &= -\frac{\mu}{r_{G0}^3} \mathbf{r}_{G0} \\ \mathbf{g}_{Gc} &= -\frac{\mu}{r_{Gc}^3} \mathbf{r}_{Gc} \\ \mathbf{g}_G &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{G0} + \mathbf{g}_{Gc}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.2})$$

$$\left. \begin{aligned}
& B_1 = F_1(\tau), \quad B_2 = F_2(\tau), \quad B_3 = F_3(\tau), \quad B_4 = F_4(\tau) \\
& \bar{\varphi}_\xi = \arctan \frac{\dot{\eta}_c - \dot{\eta}_0 - g_\eta t_g}{\dot{\xi}_c - \dot{\xi}_0 - g_\xi t_g} \\
& P = B_3 \cos \bar{\varphi}_\xi \\
& Q = B_4 \cos \bar{\varphi}_\xi \\
& R = \eta_c - \eta_0 - \dot{\eta}_0 t_g - \frac{1}{2} g_\eta t_g^2 - B_3 \sin \bar{\varphi}_\xi \\
& \Delta k = B_1 Q - B_2 P \\
& k_1 = \frac{B_2 R}{\Delta k} \\
& k_2 = \frac{B_1 R}{\Delta k} \\
& \varphi_\xi = \bar{\varphi}_\xi + k_2 t - k_1
\end{aligned} \right\} \quad (E)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \bar{\psi}_\zeta = -\arcsin \frac{\dot{\zeta}_c - \dot{\zeta}_0 - g_\zeta t_g}{B_1} \\
& E = B_3 \cos \bar{\psi}_\zeta \\
& G = B_4 \cos \bar{\psi}_\zeta \\
& H = \zeta_c - \zeta_0 - \dot{\zeta}_0 t_g - \frac{1}{2} g_\zeta t_g^2 + B_3 \sin \bar{\psi}_\zeta \\
& \Delta e = B_2 E - B_1 G \\
& e_1 = \frac{B_2 H}{\Delta e} \\
& e_2 = \frac{B_1 H}{\Delta e} \\
& \psi_\zeta = \bar{\psi}_\zeta + e_2 t - k e_1
\end{aligned} \right\} \quad (F)$$

3.2.1 迭代算法

取 $t_g^{(0)} = t_{g0}$ 、 $\phi_2^{(0)} = \phi_{20}$ ，将 $t_g^{(n-1)}$ 代入下式

$$\phi_2 = \frac{v_{\xi\eta} t_g \cos \theta_{H\xi\eta} + F_3(\tau_{\xi\eta}) \cos \theta_{HC}}{a(1 - e^2)} [1 + e \cos(\phi_1 + \phi_2 - \omega)] \quad (\text{CalB})$$

以 $\phi_2^{(n-1)}$ 为初值，数值计算求解式 (CalB) 得到 $\phi_2^{(n)}$ 。¹⁰

将 $\phi_2^{(n)}$ 代入式 (D.1) 和式 (D.2) 得到对应的 $\mathbf{v}_{Gc}^{(n)}$ 、 $\mathbf{v}_{G0}^{(n)}$ 、 $\mathbf{g}_G^{(n)}$ ，代入剩余时间预估方程组

$$\left. \begin{aligned}
& t_g = \tau \left(1 - e^{-\frac{\Delta v}{V_c}} \right) \\
& \Delta v = \|\mathbf{v}_{Gc} - \mathbf{v}_{G0} - \mathbf{g}_G t_g\|
\end{aligned} \right\} \quad (\text{CalA})$$

¹⁰程序中所使用的式 (CalB) 来源于文献 [6] 和 [7]，虽然计算公式不一样，但其估计方法的推导是相同的。

以 $t_g^{(n-1)}$ 为初值，数值计算求解式 (CalA) 得到 $t_g^{(n)}$ 。

当 $|t_g^{(n)} - t_g^{(n-1)}| \leq \varepsilon$ 时，取最后一次迭代结果，进入下一流程的计算。然后取 $t_g^{(0)} = t_g^{(n)} - \Delta T$ 和 $\phi_2^{(0)} = \phi_2^{(n)}$ 作为下一导航周期中迭代 t_g 和 ϕ_2 的初值。

当 $|t_g^{(n)} - t_g^{(n-1)}| > \varepsilon$ 时，取 $t_g^{(n-1)} = t_g^{(n)}$ 和 $\phi_2^{(n-1)} = \phi_2^{(n)}$ 重新进行顺序计算，迭代式 (CalB) 到式 (CalA)。¹¹

3.3 制导流程框图

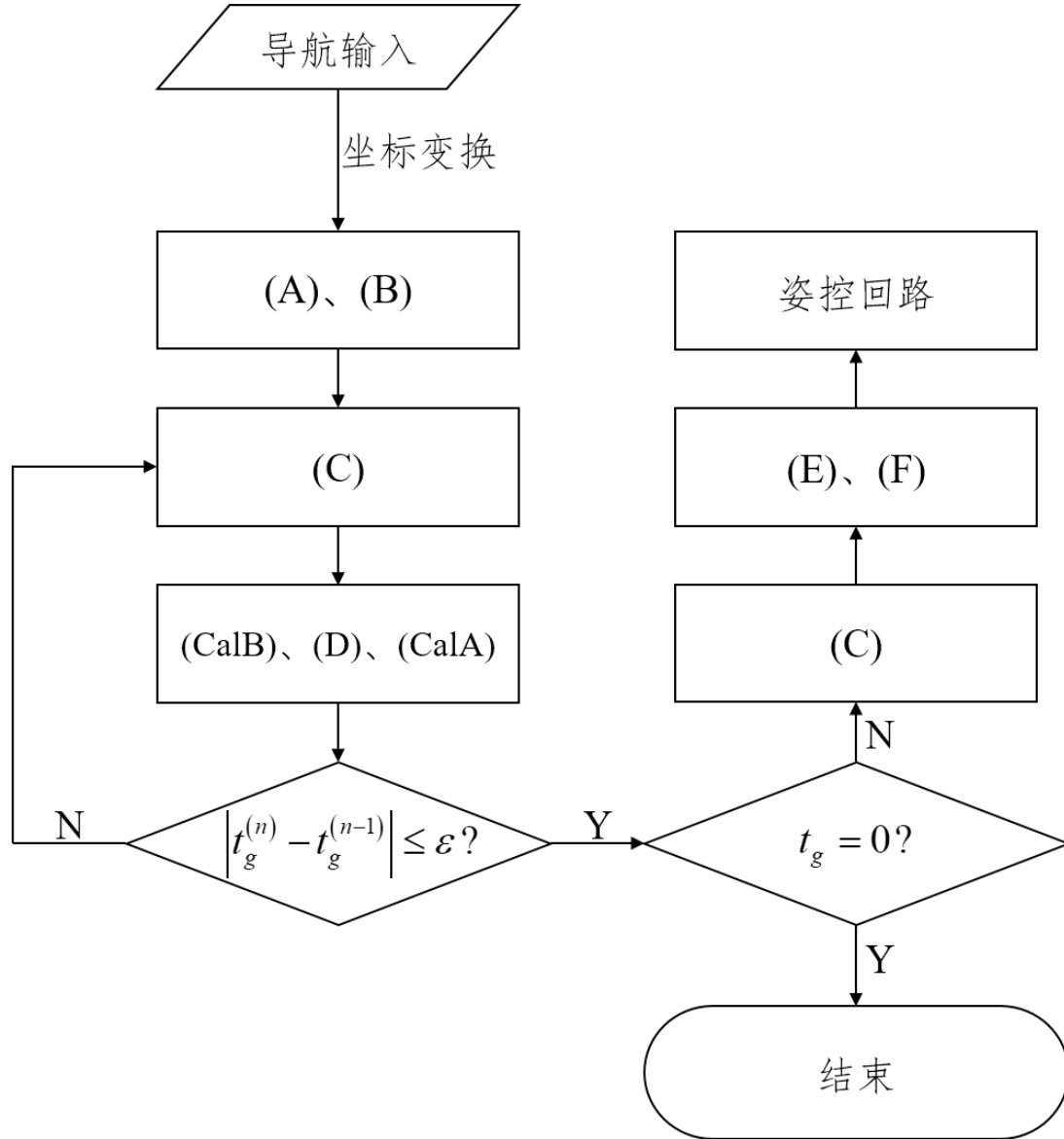


图 2: IGM 方法计算程序

¹¹可以尝试将式 (CalB) 到式 (CalA) 当作一个超越方程组进行数值求解，但用这样的方法会导致最终的入轨指令发散，我没有弄清这里的原因。

也可以尝试不对地心角进行迭代，仅迭代剩余飞行时间，而地心角采用上一导航周期中的值，但这样可能会导致入轨精度和鲁棒性下降，我没有做过分析。

3.4 程序设计

文件名	说明
IterativeGuidance.m	迭代制导主程序
RK4.m	四阶定步长龙格库塔法
CalculationA.m	t_g 解算函数
CalculationB.m	ϕ_2 解算函数
Equations.m	火箭动力学方程
EquationsA.m	方程组 A
EquationsB.m	方程组 B
EquationsC.m	方程组 C
EquationsD.m	方程组 D
EquationsE.m	方程组 E
EquationsF.m	方程组 F
DataTreatment.m	数据处理文件
Plot.m	绘图文件
fixedPointIter.m	不动点法解算超越方程函数
JulianDay.m	发射时间儒略历计算函数
LocalSiderealTime.m	发射点恒星时计算函数
TaskParameters.m	任务与火箭参数装订
COE_SV.m	由状态向量解算轨道要素函数
SV_COE.m	由轨道要素解算状态向量函数
Trans.m	坐标转换函数类

表 1: 本程序各文件功能说明

4 仿真验证

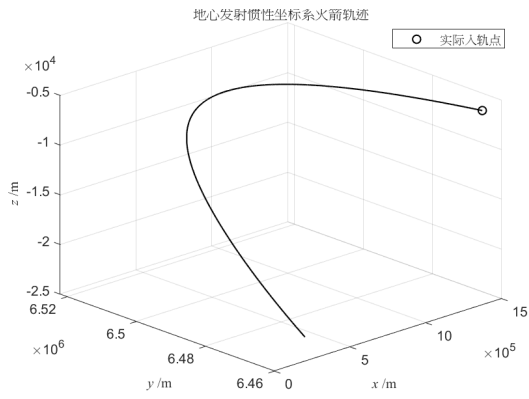
4.1 仿真条件

迭代制导启动时, 火箭质量为 86500 kg, 发动机真空推力为 800000 N, 秒耗量为 272 kg/s; 发射点地理纬度为 41.1906° , 发射时间为世界时 2019 年 5 月 17 日 4.78 时; 火箭在发射惯性系下的位置为 (290580, 92126, -33401)m, 速度为 (2815.75, 494.703, 70.953)m/s; 要求入轨点条件见[表 2](#)。

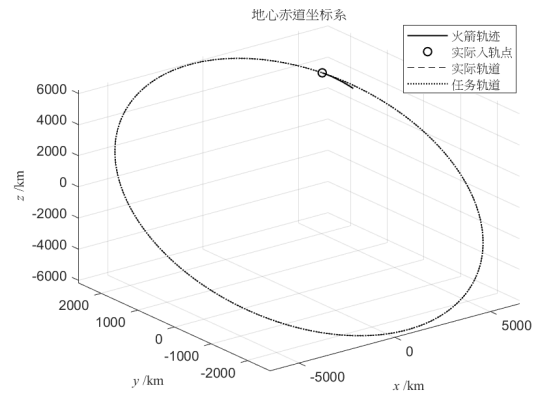
轨道要素	值
a/km	6622.78534
e	0
$\Omega/^\circ$	-9.964
$i/^\circ$	68.846
$\omega/^\circ$	0
$f/^\circ$	58.015

表 2: 入轨点轨道要素

4.2 仿真结果

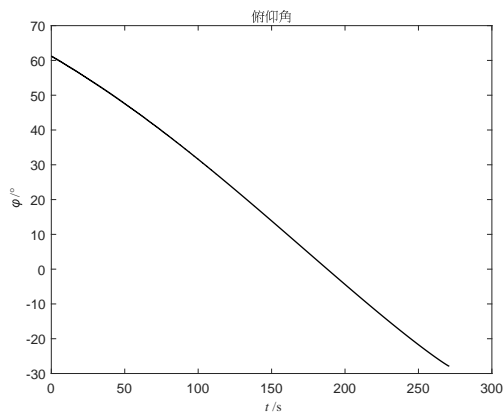


(a) 地心发射惯性系下火箭轨迹

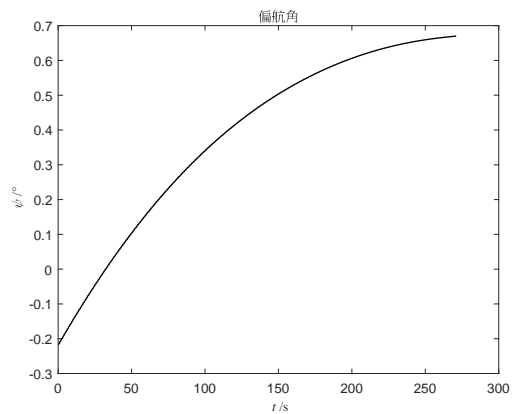


(b) 地心赤道系下火箭轨迹与入轨实际轨道和目标轨道对比

图 3: 火箭轨迹



(a) 火箭俯仰角变化



(b) 火箭偏航角变化

图 4: 火箭姿态角

最终实际入轨的轨道要素为

轨道要素	值
a/km	6624.027243040199
e	0.0001892541694205055
$\Omega/^\circ$	350.0360775146315
$i/^\circ$	68.846045916704670
$\omega/^\circ$	65.420891293249060
$f/^\circ$	352.1573020223812

表 3: 实际入轨点轨道要素

4.3 仿真中的问题

本结果使用的导航周期为 1 s，但当改变程序中的导航周期时，火箭的入轨精度明显下降，从原理上说导航周期越短，入轨精度应当越高，这里出现的原因不明。

此外，本文方法基于文献 [6]，但仍旧无法复现其中的仿真结果。

5 结论

本程序基于文献 [7] 所成，对比其得到的火箭姿态角变化曲线可以发现，在加入了对剩余飞行时间的迭代后，同等条件下，火箭的入轨能力更强且无需通过提前置零的方式消除入轨前的振荡。

参考文献

- [1] 马宗占, 许志, 唐硕, 张迁. 一种改进的运载火箭迭代制导方法. 航空学报, 42(2):217–229, 2 2021.
- [2] Howard D Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 4 edition, 2019.
- [3] 韩祝斋. 用于大型运载火箭的迭代制导方法. 宇航学报, (01):12–24, 1983.
- [4] 茹家欣. 液体运载火箭的一种迭代制导方法. 中国科学 E 辑, 39(4):696–706, 1 2009.
- [5] 陈新民, 余梦伦. 迭代制导在运载火箭上的应用研究. 宇航学报, 24(5):484–489, 501, 1 2003.
- [6] 李伟. 基于精确控制解的运载火箭迭代制导自适应性分析研究. 硕士论文, 哈尔滨工业大学, 2012.
- [7] 鲁鹏. 迭代制导总结. <https://gitee.com/olupengo/IterativeGuidance>, 2021.