一、常用坐标系

1. 地心（赤道）惯性坐标系 $O_EX_IY_IZ_I$（O_EXYZ）

坐标系的原点在地心 O_E 处。O_EX_I 轴在赤道面内指向平春分点 Υ，以 2000 年 1 月 1.5 日的平春分点为基准。O_EZ_I 轴垂直于赤道平面，与地球自转轴重合，指向北极。O_EY_I 轴与 O_EX_I 轴和 O_EZ_I 轴组成右手直角坐标系。

该坐标系可用来描述洲际弹道导弹、运载火箭的飞行弹道及地球卫星、飞船等的轨道。

2. 地心坐标系 $O_EX_EY_EZ_E$

坐标系原点在地心 O_E，O_EX_E 轴在赤道平面内指向某时刻 t_0 的起始子午线，O_EZ_E 轴垂直于赤道平面指向北极。$O_EX_EY_EZ_E$ 为一右手直角坐标系。由于 O_EX_E 轴与所指向的子午线随地球一起转动，因此该坐标系为运动坐标系。

该坐标系一般用于确定火箭相对于地球表面的位置。

3. 发射坐标系 $Oxyz$

坐标原点与发射点 O 固连，Ox 轴在发射点当地地平面内，指向发射瞄准方向，Oy 轴垂直于发射点当地地平面上方。Oz 轴与 xOy 面相垂直并构成右手直角坐标系。

当使用地球圆球模型时，Oy 轴与过 O 点的半径 R 重合，当使用地球椭球模型时，Oy 轴与椭球过 O 点的主法线重合。对于地球圆球模型，Oy 轴与赤道平面的夹角称为地心纬度 ϕ_0，Ox 轴与子午线切线正北方向的夹角称为地心方位角 α_0；对于地球椭球模型，Oy 轴与赤道平面的夹角称为地理纬度 B_0，Ox 轴与子午线切线正北方向的夹角称为射击方位角 A_0，这些角度均以绕 Oy 轴转动方向为正。

该坐标系一般用于建立火箭相对地面的运动方程，便于描述火箭相对大气运动所受到的作用力。

4. 发射惯性坐标系 $O_Ax_Ay_Az_A$

火箭起飞瞬间，坐标原点 O_A 与发射点 O 重合，各坐标轴与发射坐标系各轴也相应重合。火箭起飞后，O_A 点及坐标系各轴方向在惯性空间保持不动。

该坐标系一般用于建立火箭在惯性空间的运动方程。

5. 平移坐标系 $O_T x_T y_T z_T$

该坐标系原点 O_T 根据需要可选择在发射坐标系原点 O，或是火箭的质心 O_1，始终与 O 或者 O_1 重合，但其坐标轴与发射惯性坐标系各轴始终平行。

该坐标系一般用于进行惯性器件的对准和调平。

6. 本体坐标系 $O_1 x_1 y_1 z_1$（弹体/箭体坐标系）

坐标原点 O_1 为火箭（导弹）的质心。O_1x_1 轴为箭体（弹体）外壳对称轴，指向火箭的头部。O_1y_1 轴在火箭的主对称面内，该平面在发射瞬间与发射坐标系 xOy 平面重合，O_1y_1 轴垂直于 O_1x_1 轴。O_1z_1 轴垂直于主对称面，顺着发射方向看去，O_1z_1 轴指向右方。

该坐标系在空间的位置反映了火箭在空中的姿态。

7. 弹道坐标系 $O_1 x_2 y_2 z_2$

坐标系原点为导弹的质心。O_1x_2 轴同导弹的飞行速度矢量重合。O_1y_2 轴位于包含速度矢量的铅锤平面内，且垂直于 O_1x_2 轴向上为正，O_1z_2 轴由右手法则确定。

该坐标系一般用于研究导弹质心运动特性。

8. 速度坐标系 $O_1 x_v y_v z_v$（$O_1 x_3 y_3 z_3$）

坐标系原点为火箭（导弹）的质心。O_1x_v 轴同火箭的飞行速度矢量重合。O_1y_v 轴在火箭的主对称面内，垂直于 O_1x_v 轴，O_1z_v 轴垂直于 $x_vO_1y_v$ 平面，顺着飞行方向看去，O_1z_v 指向右方。

利用该坐标系与其他坐标系的关系反映出火箭的飞行速度矢量状态。

9. 地心轨道坐标系 $O_E x_O y_O z_O$（近焦点坐标系）

坐标原点 O_E 在地球中心，选取两个正交的表征轨道特性的矢量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的方向作为此轨道坐标系的坐标轴 O_Ex_O，O_Ez_O 的正方向，O_Ey_O 轴按右手法则确定。该坐标系下，O_Ex_O 轴也常被称为拱线。

该坐标系一般用于描述卫星在轨道平面上的位置。

10. 航天器运动坐标系 $Ax'y'z'$

坐标原点在航天器的质心上，Ax'轴的正方向沿地心位置矢径向外。Ay'轴在轨道平面内指向前方，Az'轴按右手法则确定。

该坐标系一般用于航天器近距离相对运动分析中，取被动的目标航天器质心为坐标原点。

二、坐标系间转换

1. 地心惯性坐标系与地心坐标系之间的方向余弦阵

两坐标系的 $O_{\mathrm{E}}Z_{\mathrm{I}}$，$O_{\mathrm{E}}Z_{\mathrm{E}}$ 重合，$O_{\mathrm{E}}X_{\mathrm{I}}$ 与 $O_{\mathrm{E}}X_{\mathrm{E}}$ 的夹角通过天文年历年表查到，记为 Ω_{G}。

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{\mathrm{E}} \\ \hat{Y}_{\mathrm{E}} \\ \hat{Z}_{\mathrm{E}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} \begin{bmatrix} \hat{X}_{\mathrm{I}} \\ \hat{Y}_{\mathrm{I}} \\ \hat{Z}_{\mathrm{I}} \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \cos\Omega_{\mathrm{G}} & \sin\Omega_{\mathrm{G}} & 0 \\ -\sin\Omega_{\mathrm{G}} & \cos\Omega_{\mathrm{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 地心坐标系与发射坐标系之间的方向余弦阵

设地球为一个圆球，发射点在地球表面的位置可用经度 λ_0、地心纬度 ϕ_0 来表示，Ox 指向射击方向，该轴与过 O 点的子午线北切线夹角为地心方位角 α_0。有

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathrm{E}} \\ \hat{y}_{\mathrm{E}} \\ \hat{z}_{\mathrm{E}} \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{E}} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_0\sin\lambda_0 - \cos\alpha_0\sin\phi_0\cos\lambda_0 & \sin\alpha_0\cos\lambda_0 - \cos\alpha_0\sin\phi_0\sin\lambda_0 & \cos\alpha_0\cos\phi_0 \\ \cos\phi_0\cos\lambda_0 & \cos\phi_0\sin\lambda_0 & \sin\phi_0 \\ -\cos\alpha_0\sin\lambda_0 + \sin\alpha_0\sin\phi_0\cos\lambda_0 & \cos\alpha_0\cos\lambda_0 + \sin\alpha_0\sin\phi_0\sin\lambda_0 & -\sin\alpha_0\cos\phi_0 \end{bmatrix}$$

若将地球考虑为总地球椭球体，则发射点在椭球体上的位置可用经度 λ_0、地理纬

度 B_0 确定，Ox 轴的方向则以射击方位角 A_0 表示。这样，两坐标系间的方向余弦阵只需将 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{E}}$ 中的 ϕ_0，α_0 分别用 B_0，A_0 代替即可得到。

3. 发射坐标系与本体坐标系之间的方向余弦阵

为使一般状态下这两个坐标系转至相应轴平行，现采用下列转动顺序：将发射坐标系先绕 Oz 轴正向转动 φ 角，然后绕新的 y'轴正向转动 ψ 角，最后绕新的 x_1 轴正向转动 γ 角。

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{z}_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{G}} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma + \cos\varphi\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma \\ \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma - \cos\varphi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix}$$

φ 为俯仰角，为 Ox_1 在射击平面 xOy 上的投影与 Ox 的夹角，投影在 x 的上方时为正。

ψ 为偏航角，为 Ox_1 与射击平面的夹角，Ox_1 在射击平面的左方时为正。

γ 为滚动角（滚转角），为火箭（导弹）绕 Ox_1 轴旋转的角度，当旋转角速度矢量与 Ox_1 轴方向一致时为正。

4. 发射坐标系与速度坐标系之间的方向余弦阵

将发射坐标系先绕 Oz 轴正向转动 θ 角，接着绕 y'轴正向转动 σ 角，最后绕 Ox_{v} 轴正向转动 υ 角。

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{\mathrm{v}} \\ \hat{y}_{\mathrm{v}} \\ \hat{z}_{\mathrm{v}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{G}} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma & \sin\theta\sin\sigma & -\sin\sigma \\ \cos\theta\sin\sigma\sin\upsilon - \sin\theta\cos\upsilon & \sin\theta\sin\sigma\sin\upsilon + \cos\theta\cos\upsilon & \cos\sigma\sin\upsilon \\ \cos\theta\sin\sigma\cos\upsilon + \sin\theta\sin\upsilon & \sin\theta\sin\sigma\cos\upsilon - \cos\theta\sin\upsilon & \cos\sigma\cos\upsilon \end{bmatrix}$$

θ 为速度倾角（弹道倾角），为速度矢量与水平面 xOz 的夹角，速度矢量在水平面之上时为正。

σ 为航迹偏角（弹道偏角），为速度矢量在水平面上的投影与 Ox 轴之间的夹角，速度矢量在 xOy 平面左方时为正。

υ 为倾侧角（速度滚转角），为火箭（导弹）纵向对称平面与包含速度矢量的铅锤面之间的夹角，当其旋转角速度矢量与 Ox_{v} 轴方向一致时为正。

5. 速度坐标系与本体坐标系之间的方向余弦阵

将速度坐标系先绕 O_1y_{v} 轴转 β 角，然后绕 O_1z_1 轴转动 α 角。

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{y}_1\\ \hat{z}_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}\begin{bmatrix}\hat{x}_{\mathrm{v}}\\ \hat{y}_{\mathrm{v}}\\ \hat{z}_{\mathrm{v}}\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\alpha & \sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha\\ -\cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\beta\cos\alpha\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$

β 为速度矢量与箭体（弹体）纵向对称面的夹角，当速度矢量在纵向对称面右方时为正。

α 为速度矢量在纵向对称面内的投影与 O_1x_1 的夹角，当速度矢量的投影在 O_1x_1 之下时为正。

6. 平移坐标系或发射惯性坐标系与发射坐标系的方向余弦阵

在发射瞬间，发射惯性坐标系与发射坐标系重合，但是由于地球的旋转，使得固定在地球上的发射坐标系在惯性空间的方位发生变化。记从发射瞬间到所讨论时刻的时间间隔为 t，则发射坐标系绕地轴转动 $\omega_{\mathrm{e}}t$ 角。采用一些过渡坐标系进行转换后最终得到如下精确至二次方项的方向余弦阵关系。

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}_{\mathrm{A}}\begin{bmatrix}\hat{x}_{\mathrm{A}}\\ \hat{y}_{\mathrm{A}}\\ \hat{z}_{\mathrm{A}}\end{bmatrix}$$

其中

$$G_A = G_T = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\omega_e^2-\omega_{ex}^2\right)t^2 & \omega_{ez}t+\frac{1}{2}\omega_{ex}\omega_{ey}t^2 & -\omega_{ey}t+\frac{1}{2}\omega_{ex}\omega_{ez}t^2 \\ -\omega_{ez}t+\frac{1}{2}\omega_{ex}\omega_{ey}t^2 & 1-\frac{1}{2}\left(\omega_e^2-\omega_{ey}^2\right)t^2 & \omega_{ex}t+\frac{1}{2}\omega_{ey}\omega_{ez}t^2 \\ \omega_{ey}t+\frac{1}{2}\omega_{ex}\omega_{ez}t^2 & -\omega_{ex}t+\frac{1}{2}\omega_{ey}\omega_{ez}t^2 & 1-\frac{1}{2}\left(\omega_e^2-\omega_{ez}^2\right)t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} = \omega_e \begin{bmatrix} \cos B_0 \cos A_0 \\ \sin B_0 \\ -\cos B_0 \sin A_0 \end{bmatrix}$$

ω_e为地球自转角速度。

7. 弹道坐标系与速度坐标系的方向余弦阵

将弹道坐标系绕 O_1x_2 轴旋转 υ 角。

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_v \\ \hat{y}_v \\ \hat{z}_v \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}(\upsilon) \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$L(\upsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\upsilon & \sin\upsilon \\ 0 & -\sin\upsilon & \cos\upsilon \end{bmatrix}$$

8. 地心轨道坐标系与赤道惯性坐标系的方向余弦阵

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} \hat{x}_O \\ \hat{y}_O \\ \hat{z}_O \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega & -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega & \sin i\sin\Omega \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos i\cos\Omega & -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos i\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

i、Ω、ω 分别为（密切）轨道要素：轨道倾角、升交点赤经、近地点幅角。

通过以上方向余弦阵，利用转换矩阵的递推性就可以给出坐标系 1—9 之间任意两个坐标系的转换关系。

三、欧拉角之间的联系方程

1. 速度坐标系、本体坐标系及发射坐标系之间的欧拉角联系方程

由速度坐标系、本体坐标系及发射坐标系之间的关系，有

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}$$

由于方向余弦阵中的 8 个元素只有 5 个是独立的，因此此方程中只能找到 3 个关系。可选如下 3 个联系方程:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\sigma &= \cos\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\alpha\cos\beta\cos\psi\sin\gamma - \sin\beta\cos\psi\cos\gamma \\
\cos\sigma\sin\upsilon &= -\sin\psi\sin\alpha + \cos\alpha\cos\psi\sin\gamma \\
\cos\theta\cos\sigma &= \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi\cos\psi - \sin\alpha\cos\beta\left(\cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma\right) \\
&\quad + \sin\beta\left(\cos\varphi\sin\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\alpha\right)
\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta &= \cos\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\sin\psi\cos\gamma + \sin\left(\varphi-\theta\right)\cos\sigma\sin\gamma - \sin\sigma\cos\psi\cos\gamma \\
-\sin\alpha\cos\beta &= \cos\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\sin\psi\sin\gamma + \sin\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\cos\gamma - \sin\sigma\cos\psi\sin\gamma \\
\sin\upsilon &= \frac{1}{\cos\sigma}\left(\cos\sigma\cos\psi\sin\gamma - \sin\psi\sin\alpha\right)
\end{aligned}\right\}$$

当 β，σ，υ，φ 和 γ 均较小时，将它们的正弦余弦量展开成泰勒级数取至一阶，并将上述各量之一阶微量的乘积作为高阶量略去，简化得到

$$\begin{cases}
\sigma = \psi\cos\alpha + \gamma\sin\alpha - \beta \\
\upsilon = \gamma\cos\alpha - \psi\sin\alpha \\
\theta = \varphi - \alpha
\end{cases}$$

若将 α 也视作小量，则

$$\begin{cases}
\sigma = \psi - \beta \\
\upsilon = \gamma \\
\theta = \varphi - \alpha
\end{cases}$$

由上可知，在这 8 个欧拉角中，只有五个是独立的，当知道其中 5 个时即可通过联系方程将其余 3 个给出。

2. 箭体坐标系相对于发射坐标系的姿态角与相对于平移坐标系姿态角间的关系

已知本体坐标系与发射坐标系的方向余弦阵为 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{B}}$，其中 3 个欧拉角为 φ，ψ，γ，本体坐标系与平移坐标系之间的欧拉角也按同样的顺序记为 φ_{T}，ψ_{T}，γ_{T}，其方向余弦阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}$ 与 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{B}}$ 形式上相同。

由箭体坐标系、发射坐标系以及平移坐标系之间的关系，有

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{G}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{B}}$$

选取不属同一行或同一列的 3 个元素建立 3 个等式，并精确至时间的一次项，有

$$\begin{cases}\varphi_{\mathrm{T}}=\varphi+\omega_{\mathrm{e}z}t\\ \psi_{\mathrm{T}}=\psi+\left(\omega_{\mathrm{e}y}\cos\varphi-\omega_{\mathrm{e}x}\sin\varphi\right)t\\ \gamma_{\mathrm{T}}=\gamma+\left(\omega_{\mathrm{e}y}\sin\varphi+\omega_{\mathrm{e}x}\cos\varphi\right)t\end{cases}$$