远程火箭飞行轨迹设计实验

Pauline

一、实验目的

通过建立远程火箭空间运动方程和完成计算机仿真，掌握远程火箭主动段受力分析、飞行动力学建模分析、飞行特性分析和数值求解方法。

二、实验原理

2.1 受力分析

1. 静推力

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{st}} = S_{\mathrm{e}}\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{p}_{\mathrm{H}}\right)$$

2. 气动力

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = C_x q S_{\mathrm{M}} \\ Y = C_y q S_{\mathrm{M}} \\ Z = C_z q S_{\mathrm{M}} \end{cases}$$

3. 气动力矩

（1）稳定力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{st}}=\boldsymbol{R}\times\left(x_{\mathrm{p}}-x_{\mathrm{g}}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_1=M_{y_1\mathrm{st}}\hat{\boldsymbol{y}}_1+M_{z_1\mathrm{st}}\hat{\boldsymbol{z}}_1$$

$$\begin{cases}M_{y_1\mathrm{st}}=m_{y_1}^{\beta}qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\beta\\ M_{z_1\mathrm{st}}=m_{z_1}^{\alpha}qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\alpha\\ m_{y_1}^{\beta}=m_{z_1}^{\alpha}=C_{y_1}^{\alpha}\left(\bar{x}_{\mathrm{g}}-\bar{x}_{\mathrm{p}}\right)\end{cases}$$

（2）阻尼力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}M_{x_1\mathrm{d}}\\ M_{y_1\mathrm{d}}\\ M_{z_1\mathrm{d}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}M_{x_1\mathrm{d}}=m_{x_1}^{\bar{\omega}_{x_1}}qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{x_1}\\ M_{y_1\mathrm{d}}=m_{y_1}^{\bar{\omega}_{y_1}}qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{y_1}\\ M_{z_1\mathrm{d}}=m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}}qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{z_1}\end{cases}$$

4. 控制力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-X_{1\mathrm{c}}\\ Y_{1\mathrm{c}}\\ Z_{1\mathrm{c}}\end{bmatrix}$$

5. 控制力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}M_{x_1\mathrm{c}}\\ M_{y_1\mathrm{c}}\\ M_{z_1\mathrm{c}}\end{bmatrix}$$

6. 引力

$$m\boldsymbol{g}=mg_{\mathrm{r}}'\hat{\boldsymbol{r}}+mg_{\omega\mathrm{e}}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{e}}$$

$$\begin{cases}g_{\mathrm{r}}'=-\dfrac{fM}{r^2}\left[1+J\left(\dfrac{a_{\mathrm{e}}}{r}\right)^2\left(1-5\sin^2\phi\right)\right]\\ g_{\omega\mathrm{e}}=-2\dfrac{fM}{r^2}J\left(\dfrac{a_{\mathrm{e}}}{r}\right)^2\sin\phi\end{cases}$$

7. 附加相对力及附加哥氏力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}' = -\int_m \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} \mathrm{d}m = -\dot{m}\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}' = -2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \mathrm{d}m = -2\dot{m}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{e}}$$

8. 附加相对力矩及附加哥氏力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}}' = -\int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} \mathrm{d}m = -\dot{m}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{u}_{\mathrm{e}}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}' = -2\int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) \mathrm{d}m = -\frac{\delta \boldsymbol{I}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} - \dot{m}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{e}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{e}} \right)$$

2.2 矢量形式的动力学方程

1. 惯性坐标系中的变质量质点系质心动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_{\mathrm{c.m}}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}' + \boldsymbol{F}_{\mathrm{rel}}'$$

2. 变质量质点系的绕质心转动的动力学方程

$$\boldsymbol{I} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \left(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \right) = \boldsymbol{M}_{\mathrm{c.m}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}' + \boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}}'$$

其中

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

2.3.1 地面发射坐标系中的质心动力学方程

地面发射坐标系以一角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 转动，有

$$m\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{c}} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}' - m\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{r}\right) - 2m\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}$$

下面将方程的每一项在地面发射坐标系中进行分解。

1. 相对加速度

$$\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix}$$

2. 推力

一台发动机的推力通常为附加相对力和静推力之和，其在本体坐标系内的形式为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -\dot{m}u_{\mathrm{e}} + S_{\mathrm{e}}\left(p_{\mathrm{e}} - p_{\mathrm{H}}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 气动力

气动力在速度坐标系内的形式为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{V}} \begin{bmatrix} -C_x q S_{\mathrm{M}} \\ C_y^{\alpha} q S_{\mathrm{M}} \alpha \\ -C_y^{\alpha} q S_{\mathrm{M}} \beta \end{bmatrix}$$

4. 控制力

控制力在本体坐标系内的形式为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}-X_{1\mathrm{c}}\\Y_{1\mathrm{c}}\\Z_{1\mathrm{c}}\end{bmatrix}$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix}F_{\mathrm{c}x}\\F_{\mathrm{c}y}\\F_{\mathrm{c}z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}_{\mathrm{B}}\begin{bmatrix}-X_{1\mathrm{c}}\\Y_{1\mathrm{c}}\\Z_{1\mathrm{c}}\end{bmatrix}$$

5. 引力

在地面发射坐标系中

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}x+R_{0x}\\y+R_{0y}\\z+R_{0z}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{e}}=\frac{1}{\omega_{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{e}x}\\\omega_{\mathrm{e}y}\\\omega_{\mathrm{e}z}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}R_{0x}\\R_{0y}\\R_{0z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R_0\sin\mu_0\cos A_0\\R_0\cos\mu_0\\R_0\sin\mu_0\sin A_0\end{bmatrix}\\ R_0=\dfrac{a_{\mathrm{e}}b_{\mathrm{e}}}{\sqrt{a_{\mathrm{e}}^2\sin^2\phi_0+b_{\mathrm{e}}^2\cos^2\phi_0}}\\ \mu_0=B_0-\phi_0\\ \begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{e}x}\\\omega_{\mathrm{e}y}\\\omega_{\mathrm{e}z}\end{bmatrix}=\omega_{\mathrm{e}}\begin{bmatrix}\cos B_0\cos A_0\\\sin B_0\\-\cos B_0\sin A_0\end{bmatrix}\end{cases}$$

则

$$m\boldsymbol{g}=m\frac{g_{\mathrm{r}}'}{r}\begin{bmatrix}x+R_{0x}\\y+R_{0y}\\z+R_{0z}\end{bmatrix}+m\frac{g_{\omega\mathrm{e}}}{\omega_{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{e}x}\\\omega_{\mathrm{e}y}\\\omega_{\mathrm{e}z}\end{bmatrix}$$

6. 附加哥氏力

附加哥氏力在本体坐标系内的形式为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{k}}' = \begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}x_1}' \\ F_{\mathrm{k}y_1}' \\ F_{\mathrm{k}z1}' \end{bmatrix} = 2\dot{m}x_{1\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{\mathrm{T}z_1} \\ -\omega_{\mathrm{T}y_1} \end{bmatrix}$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}x}' \\ F_{\mathrm{k}y}' \\ F_{\mathrm{k}z}' \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{B}} \begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}x_1}' \\ F_{\mathrm{k}y_1}' \\ F_{\mathrm{k}z1}' \end{bmatrix}$$

7. 离心惯性力

记牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{r}\right)$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix} a_{\mathrm{e}x} \\ a_{\mathrm{e}y} \\ a_{\mathrm{e}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + R_{0x} \\ y + R_{0y} \\ z + R_{0z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \omega_{\mathrm{e}x}^2 - \omega_{\mathrm{e}}^2 \\ a_{12} = a_{21} = \omega_{\mathrm{e}x}\omega_{\mathrm{e}y} \\ a_{13} = a_{31} = \omega_{\mathrm{e}z}\omega_{\mathrm{e}x} \\ a_{22} = \omega_{\mathrm{e}y}^2 - \omega_{\mathrm{e}}^2 \\ a_{23} = a_{32} = \omega_{\mathrm{e}y}\omega_{\mathrm{e}z} \\ a_{33} = \omega_{\mathrm{e}z}^2 - \omega_{\mathrm{e}}^2 \end{cases}$$

则

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{e}x} \\ F_{\mathrm{e}y} \\ F_{\mathrm{e}z} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} a_{\mathrm{e}x} \\ a_{\mathrm{e}y} \\ a_{\mathrm{e}z} \end{bmatrix}$$

8. 哥氏惯性力

记哥氏加速度为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{k}} = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} \times \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}$$

在地面发射坐标系中

$$\begin{bmatrix} a_{\mathrm{k}x} \\ a_{\mathrm{k}y} \\ a_{\mathrm{k}z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0 \\ b_{12} = -b_{21} = -2\omega_{\mathrm{e}z} \\ b_{13} = -b_{31} = -2\omega_{\mathrm{e}y} \\ b_{23} = -b_{32} = -2\omega_{\mathrm{e}x} \end{cases}$$

则

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{k}x} \\ F_{\mathrm{k}y} \\ F_{\mathrm{k}z} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} a_{\mathrm{k}x} \\ a_{\mathrm{k}y} \\ a_{\mathrm{k}z} \end{bmatrix}$$

2.3.2 本体坐标系中的绕质心转动动力学方程

$$\boldsymbol{I} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \times \left(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} \right) = \boldsymbol{M}_{\mathrm{st}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} + \boldsymbol{M}'_{\mathrm{k}} + \boldsymbol{M}'_{\mathrm{rel}}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}$$

1. 气动力矩

（1）稳定力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{y_1\mathrm{st}} \\ M_{z_1\mathrm{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{y_1}^{\beta} q S_{\mathrm{M}} l_{\mathrm{K}} \beta \\ m_{z_1}^{\alpha} q S_{\mathrm{M}} l_{\mathrm{K}} \alpha \end{bmatrix}$$

（2）阻尼力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} M_{x_1\mathrm{d}} \\ M_{y_1\mathrm{d}} \\ M_{z_1\mathrm{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_1}^{\bar{\omega}_{x_1}} q S_{\mathrm{M}} l_{\mathrm{K}} \bar{\omega}_{x_1} \\ m_{y_1}^{\bar{\omega}_{y_1}} q S_{\mathrm{M}} l_{\mathrm{K}} \bar{\omega}_{y_1} \\ m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} q S_{\mathrm{M}} l_{\mathrm{K}} \bar{\omega}_{z_1} \end{bmatrix}$$

2. 控制力矩

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}M_{x_1\mathrm{c}}\\M_{y_1\mathrm{c}}\\M_{z_1\mathrm{c}}\end{bmatrix}$$

3. 附加相对力矩及附加哥氏力矩

在标准条件下，即发动机安装无误差，则附加相对力矩为 0，若控制系统采用摇摆发动机作为执行机构，该附加相对力矩等于控制力矩。此外

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{k}}'=-\begin{bmatrix}\dot{I}_{x_1}\omega_{\mathrm{T}x_1}\\\dot{I}_{y_1}\omega_{\mathrm{T}y_1}\\\dot{I}_{y_1}\omega_{\mathrm{T}y_1}\end{bmatrix}+\dot{m}\begin{bmatrix}0\\-x_{1\mathrm{e}}^2\omega_{\mathrm{T}y_1}\\-x_{1\mathrm{e}}^2\omega_{\mathrm{T}z_1}\end{bmatrix}$$

2.3.3 补充方程

1. 运动学方程

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{T}x_1}\\\omega_{\mathrm{T}y_1}\\\omega_{\mathrm{T}z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\gamma}_{\mathrm{T}}-\dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\sin\psi_{\mathrm{T}}\\\dot{\psi}_{\mathrm{T}}\cos\gamma_{\mathrm{T}}+\dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\cos\psi_{\mathrm{T}}\sin\gamma_{\mathrm{T}}\\\dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\cos\psi_{\mathrm{T}}\cos\gamma_{\mathrm{T}}-\dot{\psi}_{\mathrm{T}}\sin\gamma_{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\omega_{x_1}\\\omega_{y_1}\\\omega_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{T}x_1}\\\omega_{\mathrm{T}y_1}\\\omega_{\mathrm{T}z_1}\end{bmatrix}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}\begin{bmatrix}\omega_{\mathrm{e}x}\\\omega_{\mathrm{e}y}\\\omega_{\mathrm{e}z}\end{bmatrix}\end{array}\right\}$$

2. 控制方程

$$\left.\begin{aligned}\delta_\varphi&=f_\varphi\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\varphi_{\mathrm{T}},\dot{\varphi}_{\mathrm{T}},\cdots\right)\\\delta_\psi&=f_\psi\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\psi_{\mathrm{T}},\dot{\psi}_{\mathrm{T}},\cdots\right)\\\delta_\gamma&=f_\gamma\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},\gamma_{\mathrm{T}},\dot{\gamma}_{\mathrm{T}},\cdots\right)\end{aligned}\right\}$$

3. 欧拉角的联系方程

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{\mathrm{T}}=\varphi+\omega_{\mathrm{ez}}t\\\psi_{\mathrm{T}}=\psi+\omega_{\mathrm{ey}}t\cos\varphi-\omega_{\mathrm{ex}}t\sin\varphi\\\gamma_{\mathrm{T}}=\gamma+\omega_{\mathrm{ey}}t\sin\varphi+\omega_{\mathrm{ex}}t\cos\varphi\\\theta=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}\\\sigma=-\arcsin\dfrac{v_z}{v}\\\sin\beta=\cos\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\sin\psi\cos\gamma+\sin\left(\varphi-\theta\right)\cos\sigma\sin\gamma-\sin\sigma\cos\psi\cos\gamma\\-\sin\alpha\cos\beta=\cos\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\sin\psi\sin\gamma+\sin\left(\theta-\varphi\right)\cos\sigma\cos\gamma-\sin\sigma\cos\psi\sin\gamma\\\sin\upsilon=\dfrac{1}{\cos\sigma}\left(\cos\sigma\cos\psi\sin\gamma-\sin\psi\sin\alpha\right)\end{array}\right\}$$

4. 附加方程

$$\left.\begin{array}{l}v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\\m=m_0-\dot{m}t\\r=\sqrt{\left(x+R_{0x}\right)^2+\left(y+R_{0y}\right)^2+\left(z+R_{0z}\right)^2}\\\sin\phi=\dfrac{\left(x+R_{0x}\right)\omega_{\mathrm{ex}}+\left(y+R_{0y}\right)\omega_{\mathrm{ey}}+\left(z+R_{0z}\right)\omega_{\mathrm{ez}}}{r\omega_{\mathrm{e}}}\\R=\dfrac{a_{\mathrm{e}}b_{\mathrm{e}}}{\sqrt{a_{\mathrm{e}}^2\sin^2\phi+b_{\mathrm{e}}^2\cos^2\phi}}\\h=r-R\end{array}\right\}$$

2.4.1 地面发射坐标系中的弹道方程

经上述分析，可得火箭在地面发射坐标系中的六自由度一般运动方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
& m\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{B}}\begin{bmatrix} P \\ Y_{1\mathrm{c}} + 2\dot{m}\omega_{\mathrm{T}z_1}x_{1\mathrm{e}} \\ Z_{1\mathrm{c}} - 2\dot{m}\omega_{\mathrm{T}y_1}x_{1\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{V}}\begin{bmatrix} -C_x qS_{\mathrm{M}} \\ C_y^{\alpha} qS_{\mathrm{M}}\alpha \\ -C_y^{\alpha} qS_{\mathrm{M}}\beta \end{bmatrix} + m\frac{g_{\mathrm{r}}'}{r}\begin{bmatrix} x+R_{0x} \\ y+R_{0y} \\ z+R_{0z} \end{bmatrix} + m\frac{g_{\omega\mathrm{e}}}{\omega_{\mathrm{e}}}\begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{e}x} \\ \omega_{\mathrm{e}y} \\ \omega_{\mathrm{e}z} \end{bmatrix} \\
& \qquad\qquad -m\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+R_{0x} \\ y+R_{0y} \\ z+R_{0z} \end{bmatrix} - m\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} I_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{T}x_1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{T}y_1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{T}z_1}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(I_{z_1} - I_{y_1}\right)\omega_{\mathrm{T}z_1}\omega_{\mathrm{T}y_1} \\ \left(I_{x_1} - I_{z_1}\right)\omega_{\mathrm{T}x_1}\omega_{\mathrm{T}z_1} \\ \left(I_{y_1} - I_{x_1}\right)\omega_{\mathrm{T}y_1}\omega_{\mathrm{T}x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{y_1}^{\beta} qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\beta \\ m_{z_1}^{\alpha} qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\alpha \end{bmatrix} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}} + \begin{bmatrix} m_{x_1}^{\bar{\omega}_{x_1}} qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{x_1} \\ m_{y_1}^{\bar{\omega}_{y_1}} qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{y_1} \\ m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} qS_{\mathrm{M}}l_{\mathrm{K}}\bar{\omega}_{z_1} \end{bmatrix} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{M}_{\mathrm{rel}}' - \begin{bmatrix} \dot{I}_{x_1}\omega_{\mathrm{T}x_1} \\ \dot{I}_{y_1}\omega_{\mathrm{T}y_1} \\ \dot{I}_{y_1}\omega_{\mathrm{T}y_1} \end{bmatrix} + \dot{m}\begin{bmatrix} 0 \\ -x_{1\mathrm{e}}^2\omega_{\mathrm{T}y_1} \\ -x_{1\mathrm{e}}^2\omega_{\mathrm{T}z_1} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{T}x_1} \\ \omega_{\mathrm{T}y_1} \\ \omega_{\mathrm{T}z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{\mathrm{T}} - \dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\sin\psi_{\mathrm{T}} \\ \dot{\psi}_{\mathrm{T}}\cos\gamma_{\mathrm{T}} + \dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\cos\psi_{\mathrm{T}}\sin\gamma_{\mathrm{T}} \\ \dot{\varphi}_{\mathrm{T}}\cos\psi_{\mathrm{T}}\cos\gamma_{\mathrm{T}} - \dot{\psi}_{\mathrm{T}}\sin\gamma_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{T}x_1} \\ \omega_{\mathrm{T}y_1} \\ \omega_{\mathrm{T}z_1} \end{bmatrix} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}\begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{e}x} \\ \omega_{\mathrm{e}y} \\ \omega_{\mathrm{e}z} \end{bmatrix} \\
& F_{\varphi}\left(\delta_{\varphi}, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \varphi_{\mathrm{T}}, \dot{\varphi}_{\mathrm{T}}, \cdots\right) = 0 \\
& F_{\psi}\left(\delta_{\psi}, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi_{\mathrm{T}}, \dot{\psi}_{\mathrm{T}}, \cdots\right) = 0 \\
& F_{\gamma}\left(\delta_{\gamma}, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \gamma_{\mathrm{T}}, \dot{\gamma}_{\mathrm{T}}, \cdots\right) = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_{\mathrm{T}}=\varphi+\omega_{\mathrm{ez}}t\\
&\psi_{\mathrm{T}}=\psi+\omega_{\mathrm{ey}}t\cos\varphi-\omega_{\mathrm{ex}}t\sin\varphi\\
&\gamma_{\mathrm{T}}=\gamma+\omega_{\mathrm{ey}}t\sin\varphi+\omega_{\mathrm{ex}}t\cos\varphi\\
&\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}\\
&\sigma=-\arcsin\frac{v_z}{v}\\
&\sin\beta=\cos(\theta-\varphi)\cos\sigma\sin\psi\cos\gamma+\sin(\varphi-\theta)\cos\sigma\sin\gamma-\sin\sigma\cos\psi\cos\gamma\\
&-\sin\alpha\cos\beta=\cos(\theta-\varphi)\cos\sigma\sin\psi\sin\gamma+\sin(\theta-\varphi)\cos\sigma\cos\gamma-\sin\sigma\cos\psi\sin\gamma\\
&\sin\upsilon=\frac{1}{\cos\sigma}(\cos\sigma\cos\psi\sin\gamma-\sin\psi\sin\alpha)\\
&r=\sqrt{(x+R_{0x})^2+(y+R_{0y})^2+(z+R_{0z})^2}\\
&\sin\phi=\frac{(x+R_{0x})\omega_{\mathrm{ex}}+(y+R_{0y})\omega_{\mathrm{ey}}+(z+R_{0z})\omega_{\mathrm{ez}}}{r\omega_{\mathrm{e}}}\\
&R=\frac{a_{\mathrm{e}}b_{\mathrm{e}}}{\sqrt{a_{\mathrm{e}}^2\sin^2\phi+b_{\mathrm{e}}^2\cos^2\phi}}\\
&h=r-R\\
&v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\\
&m=m_0-\dot{m}t
\end{aligned}\right\}
$$

2.4.2 地面发射坐标系中的弹道计算方程

在地球模型采用旋转椭球模型，大气模型采用标准大气模型，火箭控制系统采用摇摆发动机作为执行机构，采用瞬时平衡假设下

$$
\boldsymbol{M}_{\mathrm{st}}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}=0\Rightarrow\begin{cases}M_{z_1}^{\alpha}\alpha+M_{z_1}^{\delta}\delta_{\varphi}=0\\ M_{y_1}^{\beta}\beta+M_{y_1}^{\delta}\delta_{\psi}=0\\ \delta_{\gamma}=0\end{cases}
$$

整理得

$$
\begin{cases}
\alpha=A_{\varphi}\left[(\varphi_{pr}-\omega_{\mathrm{ez}}t-\theta)-\dfrac{k_{\varphi}}{a_0^{\varphi}}u_{\varphi}\right]\\
\beta=A_{\psi}\left[(\omega_{\mathrm{ex}}\sin\varphi-\omega_{\mathrm{ey}}\cos\varphi)t-\sigma-\dfrac{k_{\psi}}{a_0^{\psi}}u_{\psi}\right]\\
\gamma=-(\omega_{\mathrm{ey}}\sin\varphi+\omega_{\mathrm{ex}}\cos\varphi)t
\end{cases}
$$

令滚转角 γ=0，倾侧角 υ=0，将侧滑角 β、航迹偏角 σ、偏航角 ψ 均视为小量。这些角度的正弦取其角度的弧度值，余弦取为 1，且在等式中出现这些角度值之间的乘积时，作为二阶以上项略去。得到发射坐标系中空间弹道三自由度计算方程为

$$
\left.\begin{aligned}
& m\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_\mathrm{B}\begin{bmatrix} P \\ Y_{1\mathrm{c}} \\ Z_{1\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}_\mathrm{V}\begin{bmatrix} -C_x q S_\mathrm{M} \\ C_y^\alpha q S_\mathrm{M}\alpha \\ -C_y^\alpha q S_\mathrm{M}\beta \end{bmatrix} + m\frac{g_\mathrm{r}'}{r}\begin{bmatrix} x+R_{0x} \\ y+R_{0y} \\ z+R_{0z} \end{bmatrix} + m\frac{g_{\omega\mathrm{e}}}{\omega_\mathrm{e}}\begin{bmatrix} \omega_\mathrm{ex} \\ \omega_\mathrm{ey} \\ \omega_\mathrm{ez} \end{bmatrix} \\
& \qquad -m\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+R_{0x} \\ y+R_{0y} \\ z+R_{0z} \end{bmatrix} - m\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \\
& \alpha = A_\varphi\left[\left(\varphi_{pr} - \omega_\mathrm{ez}t - \theta\right) - \frac{k_\varphi}{a_0^\varphi}u_\varphi\right] \\
& \beta = A_\psi\left[\left(\omega_\mathrm{ex}\sin\varphi - \omega_\mathrm{ey}\cos\varphi\right)t - \sigma - \frac{k_\psi}{a_0^\psi}u_\psi\right] \\
& \theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} \\
& \sigma = -\arcsin\frac{v_z}{v} \\
& \varphi = \theta + \alpha \\
& \psi = \sigma + \beta \\
& \delta_\varphi = a_0^\varphi\left(\varphi + \omega_\mathrm{ez}t - \varphi_{pr}\right) + k_\varphi u_\varphi \\
& \delta_\psi = a_0^\psi\left[\psi + \left(\omega_\mathrm{ey}\cos\varphi - \omega_\mathrm{ex}\sin\varphi\right)t\right] + k_\mathrm{H}u_\mathrm{H} \\
& r = \sqrt{\left(x+R_{0x}\right)^2 + \left(y+R_{0y}\right)^2 + \left(z+R_{0z}\right)^2} \\
& \sin\phi = \frac{\left(x+R_{0x}\right)\omega_\mathrm{ex} + \left(y+R_{0y}\right)\omega_\mathrm{ey} + \left(z+R_{0z}\right)\omega_\mathrm{ez}}{r\omega_\mathrm{e}} \\
& R = \frac{a_\mathrm{e}b_\mathrm{e}}{\sqrt{a_\mathrm{e}^2\sin^2\phi + b_\mathrm{e}^2\cos^2\phi}} \\
& h = r - R
\end{aligned}\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ m &= m_0 - \dot{m}t \end{aligned}\right\}$$

2.5 制导设计

程序角采用抛物线型变化规律:

$$\varphi_{pr} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & 0 \le t < t_1 \\ \dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - fig\right) \cdot \left[\left(\dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}\right] & t_1 \le t < t_2 \\ fig & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$$

$$fig = \frac{\pi}{60} \quad t_1 = 10\text{s} \quad t_2 = 160\text{s} \quad t_3 = 186.4\text{s}$$

经实际仿真测试，当参数如上设置时，满足实验要求。

三、实验系统

3.1 计算机系统

Windows 10 专业版

Matlab R2023b

3.2 实验对象

选取三级远程火箭为研究对象，火箭外形采用轴对称布局，不安装舵面和翼面，动力操纵元件采用摆动喷管。主要总体参数如下:

总重	35.4 吨
全长	18.26 米
最大直径	1.67 米

各级发动机参数如下:

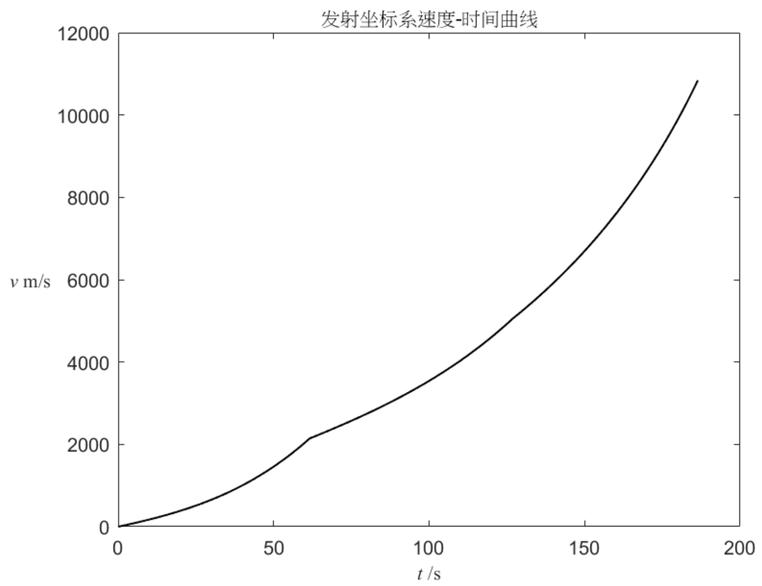
一级发动机	
总重	22.68 吨
推进剂重	20.8 吨

推力	912KN
工作时间	61.6s
二级发动机	
总重	7.05 吨
推进剂重	6.25 吨
推力	270KN
工作时间	65.2s
三级发动机	
总重	3.65 吨
推进剂重	3.32 吨
推力	155KN
工作时间	59.6s

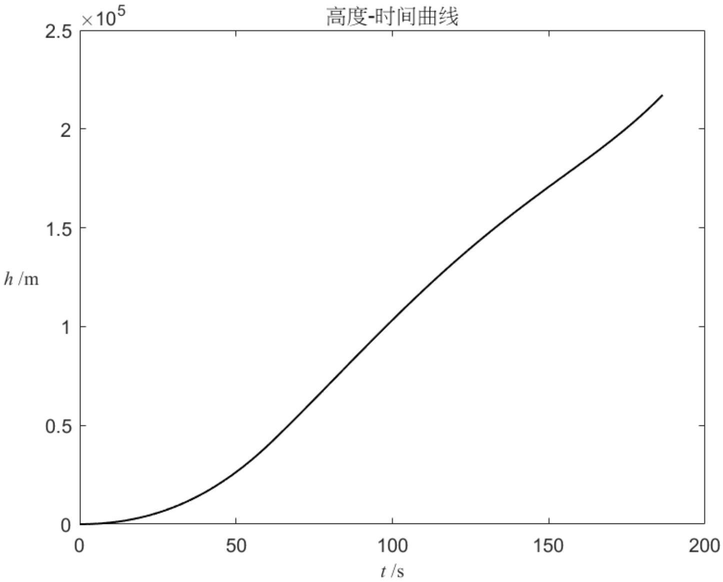
四、实验过程

4.1 实验结果

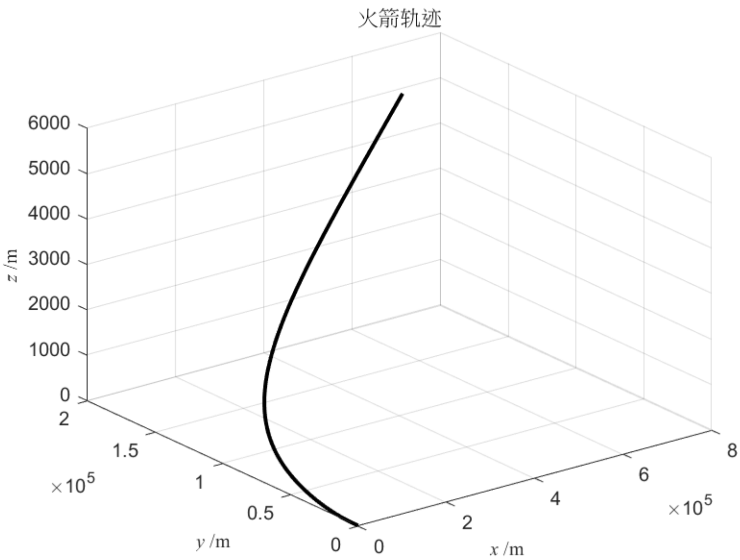
1）速度—时间曲线



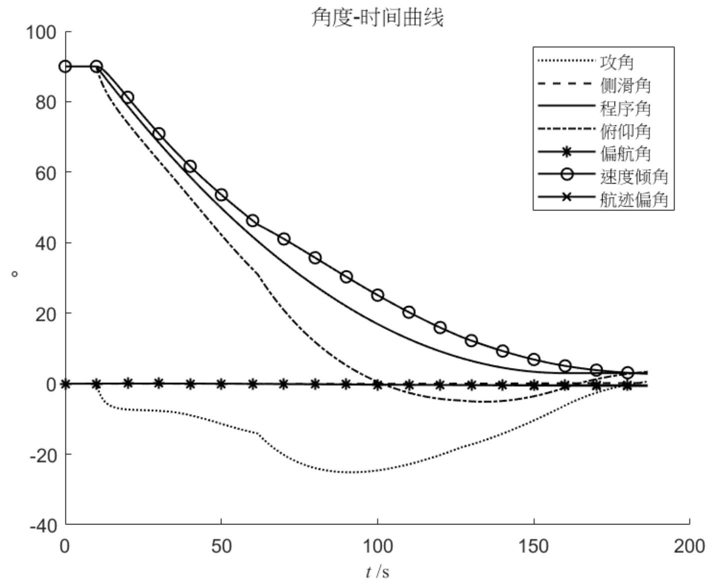
2）高度—时间曲线



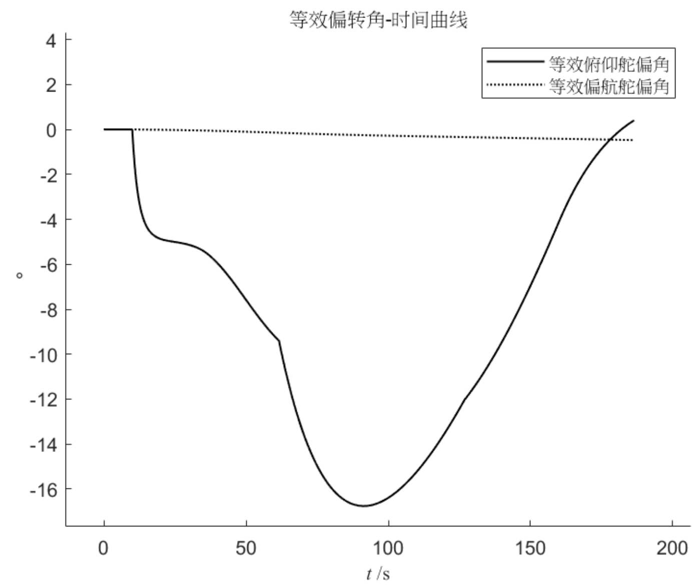
3）火箭轨迹



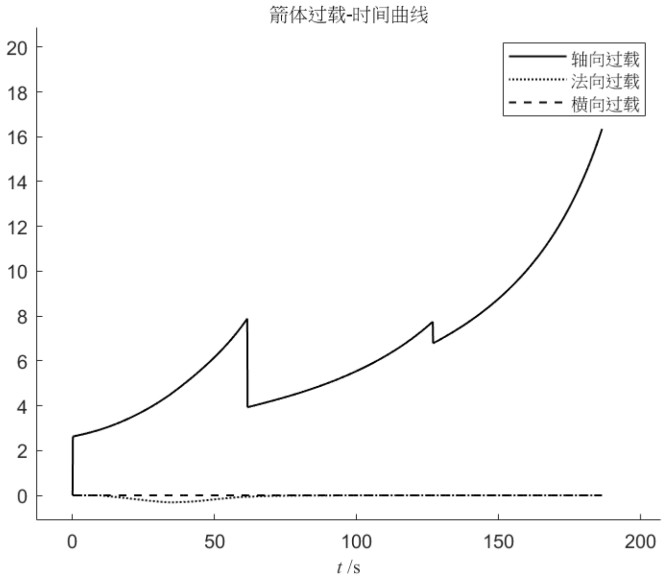
4）角度—时间曲线

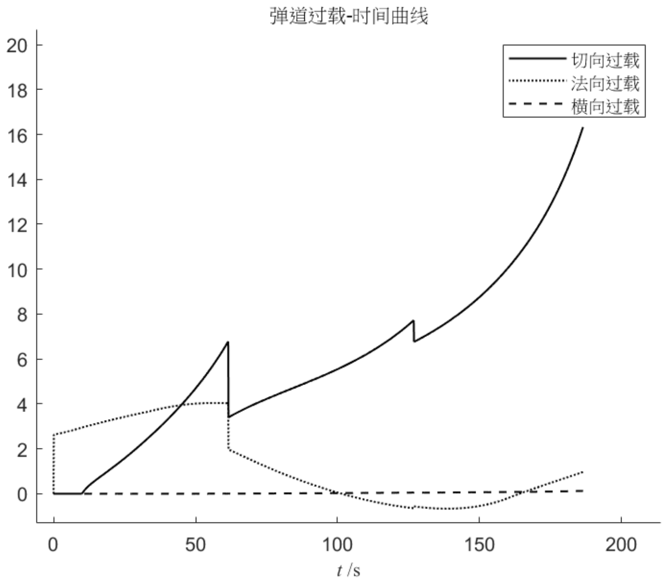


5）控制角—时间曲线



6）过载—时间曲线





4.2 结果分析

1. 主动段弹道

实验要求，发动机停机后，要求远程火箭飞行高度不低于200km，飞行速度不小于6000m/s，程序模拟完毕后，发射坐标系下火箭最终速度为10842.7m/s，最终高度为217203m，由仿真实验结果可知满足实验要求。

2. 动态特性分析

由各角度变化曲线，可以看出实际俯仰角与程序角跟踪偏差较大，且攻角变化较大。

从过载一时间曲线可以看到，轴向以及切向过载分为三段曲线，对应三级远程火箭在各级发动机启动后的工作状态。对于箭体过载一时间曲线，可以发现轴向过载出前段外一直处于较高水平，表明该火箭按所给方案工作时极易损坏，应当修改制导方法；对于弹道过载一时间曲线，其切向过载依然较大，说明火箭切向加速度较大，其法向过载初期较大，说明该时期火箭正在执行转弯程序。