

算法课第二次书面作业

作业得分（打印时请保留此项）：

	题目 1	题目 2	题目 3	题目 4	题目 5	总分
分数						
阅卷人						

注意事项：

- 1. 算法课作业均采用 A4 纸打印，左上角装订；
- 2. 不需要复制题目内容，直接在每一题的标题下填写解题过程即可；
- 3. 对于复杂公式或图形，可以留空白后手写完成，**文字部分应该打印**；
- 4. 注意填写页眉中的姓名、学号；
- 5. 打印时请保留第一页上方的“作业得分”表格。

题目 1：

击中集是 NP 的：给定一个问题实例，和一个集合 H ，可以简单使用遍历方法在多项式时间内验证是否满足验证集条件。

将定点覆盖问题规约到击中集问题。定义一个图 $G = (V, E)$ 和一个数字 k 。在集合 A 中的每个元素对应于图 V 中的一个顶点，而对于图中的每一条边 $e_i = (u_i, v_i) \in E$ ，定义一个集合 $B_i = \{u_i, v_i\}$ 。这样构造了一个击中集问题的实例。如果有一个大小最大为 k 的击中集，当且仅当在图中有一个最大为 k 的点覆盖。

题目 2：

交集推理是 NP 的：给定一个问题实例，和集合 X ，可以在多项式时间内检查与每一个 A_i 的交集的大小。

将三维匹配问题规约到交集推理问题。给出一个三维匹配问题，有大小为 n 的集合 X, Y, Z ，以及有 m 个三元组的集合 T 。定义一个交集推理问题实例，对于每个元素 $j \in X \cup Y \cup Z$ ，构造一个集合 A_j ，包含所有带有 j 的三元组。考虑有没有一个子集 X ，对于所有的 A_j ，交集的大小都为 1。如果存在这样的交集推理，那么就相当于每一个 j 都被用到恰好一次，即一个完美三维匹配。

题目 3：

FCC 是 NP 的：提供一个配置，可以在多项式时间内判断这个配置是否是完全相容的。

把 3SAT 问题规约到 FCC 问题。对于 3SAT 问题当中的每个子句，构造一个带有三个元素的选项集合 A_i ，如果两个元素分别代表一个变量以及该变量的否定，那么将其视作一对不相容的选项。只要找到一个完全相容的配置，就解决了原始的 3SAT 问题。

题目 4:

数字划分是 NP 的：给定一种划分，可以在多项式时间内判断求和是否相等。

将子集和问题规约到数字划分问题。定义一个子集和问题实例，有数字 w_1, \dots, w_n ，以及目标和 W 。现在考虑其总和为 $T = \sum_{i=1}^n w_i$ ，加入两个数字 $w_{n+1} = W + 1, w_{n+2} = T + 1 - W$ 。在当前 $n + 2$ 个数字的集合上考虑数字划分问题，首先 $w_{n+1} + w_{n+2} = T + 2 > T + 1$ ，所以不能被划分在一起。如果有一个数字划分问题的解，那么包含有 w_{n+2} 的集合，在去除 w_{n+2} 之后，剩下的就是子集和问题的解。

题目 5:

支配集是 NP 的：给定网络 G 和 k 个数据库副本的位置，可以在多项式时间内检验是否所有的剩余节点都直接和数据库副本节点相连接。

将定点覆盖问题规约到支配集问题。定义一个没有孤立顶点 $G = (V, E)$ 和一个数字 k ，现在将每个边 e_{ij} 定义成为一个与边上两个顶点连接的顶点 v_{ij} ，有 $(v_i, v_{ij}), (v_{ij}, v_j)$ ，得到的新图计作 G' 。现在如果在图 G' 上有大小为 k 的支配集 S' ，如果 S' 中的元素非原始顶点，那么可选择任意一连接顶点，如果为原始顶点，那么选择原始顶点，这样可以构造一个大小同样为 k 的集合 S ，为原图 G 上的顶点覆盖。如果有 r 个孤立顶点，那么这 r 个顶点都被选为数据库副本。大小为 k 的顶点覆盖问题和大小为 $k + r$ 的支配集问题是等价的，规约可以在多项式时间内完成。