

北京大学 2021 年研究生算法课第 2 次书面作业

发布时间：2021 年 11 月 21 日

截止时间：2021 年 12 月 23 日课前

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。
- 如果因生病等特殊原因不能按时完成作业的，那么应在截止日期前一天向任课老师请假。

NPC 完全性

1. 题目来源：《算法设计》第八章 NPC 第 5 题

题目描述：

考虑集合 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ 和 A 的子集 B_1, B_2, \dots, B_m (即, 对每一个 i , $B_i \subseteq A$)。如果集合 $H \subseteq A$ 至少包含每一个 B_i 的一个元素, 即对每一个 i , $H \cap B_i$ 非空 (从而 H “击中”所有的集合 B_i) , 则称 H 是关于 B_1, B_2, \dots, B_m 的击中集。

现在定义击中集问题如下, 给定集合 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, A 的子集 B_1, B_2, \dots, B_m 以及数 k , 问: 存在关于 B_1, B_2, \dots, B_m 大小不超过 k 的击中集 $H \subseteq A$ 吗?

证明击中集是 NP 完全的。

2. 题目来源：《算法设计》第八章 NPC 第 16 题

题目描述：

考虑根据一个集合与其他集合交集的大小判断它的身份的推理问题。给你一个大小为 n 的有穷集合 U 和 U 的一组子集 A_1, \dots, A_m 。又给你一组数 c_1, \dots, c_m 。问题是: 存在对每一个 $i = 1, 2, \dots, m$, $X \cap A_i$ 的大小等于 c_i 的集合 $X \subset U$ 吗? 我们说这是**交集推理**问题的一个实例, 其输入为 $U, \{A_i\}$ 和 $\{c_i\}$ 。

证明**交集推理**是 NP 完全的。

3. 题目来源：《算法设计》第八章第 21 题

题目描述：

在沉迷于流行的企业家自助书籍《Mine Your Own Business》多日之后，你又回到了现实世界，你需要升级你的办公计算系统。但是这次产生了几棘手的问题。

在配置你的新系统时，有 k 个部分必须选择：操作系统、文本编辑软件、电子邮件程序等，每一个都是单独的部分。系统的第 j 个部分有一个选项集合 A_j ，系统的一个配置由每一个选项集合 A_1, A_2, \dots, A_k 中的一个元素构成。

现在麻烦出在某些不同集合中的两个选项可能是不相容的。如果一个系统不能同时包含选项 $x_i \in A_i$ 和 $x_j \in A_j$ 则称 x_i 和 x_j 是一对**不相容的选项**（例如，Linux(作为操作系统的选项)与 Microsoft Word(作为文本编辑软件的选项)是一对不相容的选项）。设系统的配置由元素 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k$ 构成，如果没有一对 (x_i, x_j) 是不相容的，则称这个配置是完全相容的。

我们定义**完全相容的配置 (FCC)**问题如下： FCC 的实例由不相交的选项集合 A_1, A_2, \dots, A_k 和不相容的选项对 (x, y) 的集合 P 构成，其中 x 和 y 是不同的选项集合中的元素。问题是确定是否存在完全相容的配置：从每一个选项集合中选择一个元素使得任意一对选中的元素都不属于集合 P 。

例 假设 $k = 3$ ， A_1, A_2, A_3 分别表示操作系统，文本编辑软件和电子邮件程序的选项集合。我们有

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{Linux}, \text{Windows NT}\}, \\ A_2 &= \{\text{emacs}, \text{Word}\}, \\ A_3 &= \{\text{Outlook}, \text{Eudora}, \text{rmail}\}, \end{aligned}$$

而不相容的选项对集合为

$$P = \{(\text{Linux}, \text{Word}), (\text{Linux}, \text{Outlook}), (\text{Word}, \text{rmail})\}$$

那么，关于这个 FCC 实例的判定问题的答案是 yes，例如，按照上述定义选择 $\text{linux} \in A_1, \text{emacs} \in A_2, \text{rmail} \in A_3$ 是一个完全相容的配置。

证明**完全相容的配置**是 NP 完全的。

4. 题目来源：《算法设计》第八章 NPC 第 26 题

题目描述：

你和一位朋友到世界各地旅游，积累了一大堆纪念品，当时你们没有区分哪些纪念品是你计划保存的，哪些归你的朋友保存，但是现在到分割这些纪念品的时候了。

有一种方法你们可以采用：假设有 n 件物品，分别标作 $1, 2, \dots, n$ ，物品 i 有一个商量好的估值 x_i （例如，可以把这个估值看作专卖的价格，这里不考虑你与你的朋友对这个估值的意见不一致的情况），一种合理的分割方法是把所有的物品划分成两个集合，使得这两个集合中的物品和估值之和相等。

这提出了一个解决下述**数字划分**的一个问题。给定正**整数** x_1, \dots, x_n ，希望确定是否能够把这些数划分成两个和数相同的集合 S_1 和 S_2 ：

$$\sum_{x_i \in S_1} x_i = \sum_{x_j \in S_2} x_j$$

证明**数字划分**是 NP 完全的。

5. 题目来源：《算法设计》第八章 NPC 第 29 题

题目描述：

你正在设置一个大的工作站网络，我们用无向图 G 做它的模型， G 的节点表示各个工作站，边表示节点间的通信链路，所有的工作站都需要访问一个公共的中心数据库，中心数据库保存着基本的操作系统函数所必需的数据。

你可以在每一个工作站复制这个数据库，这使得能够从任何一个工作站进行快速查找，但是你必须维护大量的副本，另一种办法是，只在一个工作站保存数据库的一份副本，其余的工作站在网络 G 上提出对数据的请求。但是，这样可能导致一个工作站的大量延迟。

因此，你决定寻找下述的折中方案：打算维持一些副本，并设法放置他们使得每一个工作站要么有你数据库的副本，要么可以直接链接到一个有数据库副本的工作站。用图论的语言，这样的位置集合叫做**支配集**。

于是，我们定义**支配集**问题如下。给定网络 G 和数 k ，问：有办法把 k 个数据库的副本放置在 k 个不同的节点，使得每一个节点要么有数据库的副本，要么可以直接连接到一个数据库副本的节点吗？

证明**支配集**是 NP 完全的。