

正则化与重构核Hilbert空间习题

姓名：甘云冲

学号：2101213081

1.

(1)

$$\begin{cases} 3c_2 + 4c_3 = 1 \\ 3c_1 + c_3 = 4 \\ 4c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

(2)

定义：

$$\hat{\mathbf{x}} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

重写核函数为如下形式：

$$K(x, z) = |x - z|$$

利用核矩阵表示原函数为：

$$f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1 \times 3} \mathbf{c}_{3 \times 1}$$

那么同理可表示 b_i 如下：

$$b_i(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1 \times 3} \mathbf{h}_{i3 \times 1}$$

表示 $f(x)$ 如下：

$$f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1 \times 3} \mathbf{H}_{3 \times 3} \mathbf{y}_{3 \times 1}$$

其中 $H_{ij} = h_j^i$ ，又由于 $y_i = f(x_i)$

$$f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1 \times 3} \mathbf{H}_{3 \times 3} \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})_{3 \times 3} \mathbf{c}_{3 \times 1}$$

与原式做对比，可以发现只要 \mathbf{H} 满足如下条件，即可以保证与原式意义相同，于是得到最终的结果：

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})_{3 \times 3}^{-1}$$

计算核矩阵的数值表示如下所示：

$$\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以可以得到对应的 \mathbf{H} 矩阵：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

将其带入原式便可以得到 $b_i(x)$ ，两种核函数的关联如前文所示。

2.

由核函数定义可以知道：

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) \rangle \\ K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + K(0, \mathbf{z}) + K(\mathbf{x}, 0) + K(0, 0) \\ &= \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z}) \rangle + \langle \phi(0), \phi(\mathbf{z}) \rangle + \langle \phi(\mathbf{x}), \phi(0) \rangle + \langle \phi(0), \phi(0) \rangle \\ &= \langle \phi(\mathbf{x}) + \phi(0), \phi(\mathbf{z}) + \phi(0) \rangle \\ &= \langle \hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{z}) \rangle \end{aligned}$$

故也为核函数。

3.

$$\begin{aligned} \varphi(x)^T \varphi(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k [\cos(ix) \cos(iz) + \sin(ix) \sin(iz)] \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{2} (\cos(ix + iz)) + \cos(ix - iz) - \frac{1}{2} (\cos(ix + iz)) - \cos(ix - iz) \right] \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos(i(x - z)) \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x-z}{2}\right) + \sum_{i=1}^k \sin\left(\frac{x-z}{2}\right) \cos(i(x-z)) \right] \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x-z}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(\sin\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)(x-z)\right) - \sin\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)(x-z)\right) \right) \right] \\ &= \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)(x-z)\right)}{2 \sin\left(\frac{x-z}{2}\right)} \end{aligned}$$

4.

原优化目标改写为矩阵形式：

$$L = \|\mathbf{X}\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{y}}\|^2 + \lambda \|\mathbf{w}\|^2$$

求偏导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= 2\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{y}}) + 2\lambda\mathbf{w} \\ &= 2(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{w} - 2\mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad &(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{w} = \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\ &(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{X}^T\alpha = \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\ &\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \lambda\mathbf{I})\alpha = \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\ &\mathbf{X}^T(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})\alpha = \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

所以解为：

$$\alpha = (\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$

对于核函数表达形式，设核矩阵为 \mathbf{K} ，有 $\mathbf{K}_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ ，核函数表达形式为：

$$\alpha = (\mathbf{K} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$