Bayes 决策与概率密度估计习题

姓名： 甘云冲

学号： 2101213081

1.

(1)

$$P(X|\text{Positive}) = \frac{P(\text{Positive}|X)P(X)}{P(\text{Positive}|X)P(X) + P(\text{Positive}|\neg X)P(\neg X)} = \frac{100\% * 0.5\%}{100\% * 0.5\% + 5\% * 99.5\%} = 9.1\%$$

该人患有疾病X的概率为9.1%。

(2)

$$\begin{aligned} P(X|\text{Positive, Positive}) &= \frac{P(\text{Positive, Positive}|X)P(X)}{P(\text{Positive, Positive}|X)P(X) + P(\text{Positive, Positive}|\neg X)P(\neg X)} \\ &= \frac{P(\text{Positive}|X)^2 P(X)}{P(\text{Positive}|X)^2 P(X) + P(\text{Positive}|\neg X)^2 P(\neg X)} \\ &= \frac{(100\%)^2 * 0.5\%}{(100\%)^2 * 0.5\% + (5\%)^2 * 99.5\%} \\ &= 66.8\% \end{aligned}$$

该人患有疾病X的概率为66.8%。

$$66.8\% * 10 > (1 - 66.8\%) * 1$$

医生应当认为患者有病。

2.

(1)

$$\begin{aligned} P(\omega_1|x) &= P(\omega_2|x) \\ \Leftrightarrow \frac{P(x|\omega_1)P(\omega_1)}{P(x|\omega_1)P(\omega_1)+P(x|\omega_2)P(\omega_2)} &= \frac{P(x|\omega_2)P(\omega_2)}{P(x|\omega_1)P(\omega_1)+P(x|\omega_2)P(\omega_2)} \\ \Leftrightarrow \frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_1)+P(x|\omega_2)} &= \frac{P(x|\omega_2)}{P(x|\omega_1)+P(x|\omega_2)} \\ \Leftrightarrow P(x|\omega_1) &= P(x|\omega_2) \end{aligned}$$

令$x=(a_1+a_2)/2$，可得到：

$$P(x|\omega_1)=\frac{1}{\pi b}\frac{1}{1+(\frac{a_2-a_1}{2b})^2}=P(x|\omega_2)$$

得证结论。

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} P(\omega_1|x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{P(x|\omega_1)P(\omega_1)}{P(x|\omega_1)P(\omega_1)+P(x|\omega_2)P(\omega_2)} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+(\frac{x-a_2}{b})^2)P(\omega_1)}{(1+(\frac{x-a_2}{b})^2)P(\omega_1)+(1+(\frac{x-a_1}{b})^2)P(\omega_2)} \\ &= \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_1)+P(\omega_2)} \end{aligned}$$

同理可得：

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} P(\omega_1|x) &= \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_1)+P(\omega_2)} \\ \lim_{x\to+\infty} P(\omega_2|x) &= \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)+P(\omega_2)} \\ \lim_{x\to-\infty} P(\omega_2|x) &= \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)+P(\omega_2)} \end{aligned}$$

(3)

不失一般性地假设$a_1\le a_2$，由(1)中可以知道，最小误差判决边界为峰值的中点。

$$\begin{aligned} P(e) &= \int_{-\infty}^{(a_1+a_2)/2} p(x|\omega_2)p(\omega_2)dx+\int_{(a_1+a_2)/2}^{+\infty} p(x|\omega_1)p(\omega_1)dx \\ &= \frac{1}{\pi b}b\int_{(a_2-a_1)/(2b)}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan(x)\bigg|_{\frac{a_2-a_1}{2b}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi/2-\arctan\left(\frac{a_2-a_1}{2b}\right)) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{a_2-a_1}{2b}\right) \end{aligned}$$

针对于$a_1>a_2$的情况同上可证明，所以最小概率误差为：

$$P(e)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\left|\frac{a_2-a_1}{2b}\right|$$

(4)

容易发现，当$a_1=a_2$时候，有$P(e)=1/2$为最大值，因为当$a_1=a_2$时候，两个类别并没有区别，只是在两类当中随机选择一类进行猜测，所以错误率为1/2。

3.

(1)

$$\hat{\mu}=\frac{5.0+7.0+9.0+11.0+13.0}{5}=9.0$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(5.0-9.0)^2+(7.0-9.0)^2+(9.0-9.0)^2+(11.0-9.0)^2+(13.0-9.0)^2}{5}=8.0$$

(2)

b越小似然函数越大，但是b不能小于8，这里参数b应当估计为8

(3)

由于先验概率相等只需要对比两类下样本的pdf。

$$p(x|\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi*8}}e^{-\frac{(6-9)^2}{2*8}}\approx 0.08$$

$$p(x|\omega_2)=1/8=0.125$$

应当判定为第二类。

4.

(1)

$$\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i|\theta,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}-\frac{(\ln x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}-\ln\sigma x_i\sqrt{2\pi}$$

θ的最大似然估计：

$$\frac{d\sum_{i=1}^n \ln p(x_i|\theta,\sigma)}{d\theta} = 0$$
$$\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \theta) = 0$$
$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n}$$

(2)

σ的最大似然估计：

$$\frac{d\sum_{i=1}^n \ln p(x_i|\theta,\sigma)}{d\sigma} = 0$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{(\ln x_i - \theta)^2}{\sigma^3} - \frac{x_i\sqrt{2\pi}}{\sigma} = 0$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\theta})^2}{\sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^n x_i}$$

(3)

θ的MAP估计：

$$\sum_{i=1}^n \ln p(x|\theta) + \ln p(\theta)$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{(\ln x_i - \theta)^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma x_i\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma_0^2\right) - \frac{1}{2}(\frac{\theta-\theta_0}{\sigma_0})^2$$

于是：

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^n \ln p(x|\theta) + \ln p(\theta)\right)}{d\theta} = 0$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln x_i - \theta}{\sigma^2} - \frac{\theta - \theta_0}{\sigma_0^2} = 0$$
$$\sigma_0^2\sum_{i=1}^n \ln x_i - n\sigma_0^2\theta - \sigma^2\theta + \sigma^2\theta_0 = 0$$
$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{\sigma_0^2\sum_{i=1}^n \ln x_i + \sigma^2\theta_0}{n\sigma_0^2 + \sigma^2}$$