正则化与重构核Hilbert空间习题

姓名： 甘云冲

学号： 2101213081

1.

(1)

$$
\begin{cases} 3c_2 + 4c_3 = 1 \\ 3c_1 + c_3 = 4 \\ 4c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}
$$

(2)

定义：

$$
\hat{\mathbf{x}} = [x_1, x_2, x_3]^T
$$

重写核函数为如下形式：

$$
K(x, z) = |x - z|
$$

利用核矩阵表示原函数为：

$$
f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1\times3}\mathbf{c}_{3\times1}
$$

那么同理可表示b_i如下：

$$
b_i(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1\times3}\mathbf{h_i}_{3\times1}
$$

表示$f(x)$如下：

$$
f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1\times3}\mathbf{H}_{3\times3}\mathbf{y}_{3\times1}
$$

其中$H_{ij} = h_j^i$，又由于$y_i = f(x_i)$

$$
f(x) = \mathbf{K}(x, \hat{\mathbf{x}})_{1\times3}\mathbf{H}_{3\times3}\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})_{3\times3}\mathbf{c}_{3\times1}
$$

与原式做对比，可以发现只要$\mathbf{H}$满足如下条件，即可以保证与原式意义相同，于是得到最终的结果：

$$
\mathbf{H} = \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})_{3\times3}^{-1}
$$

计算核矩阵的数值表示如下所示：

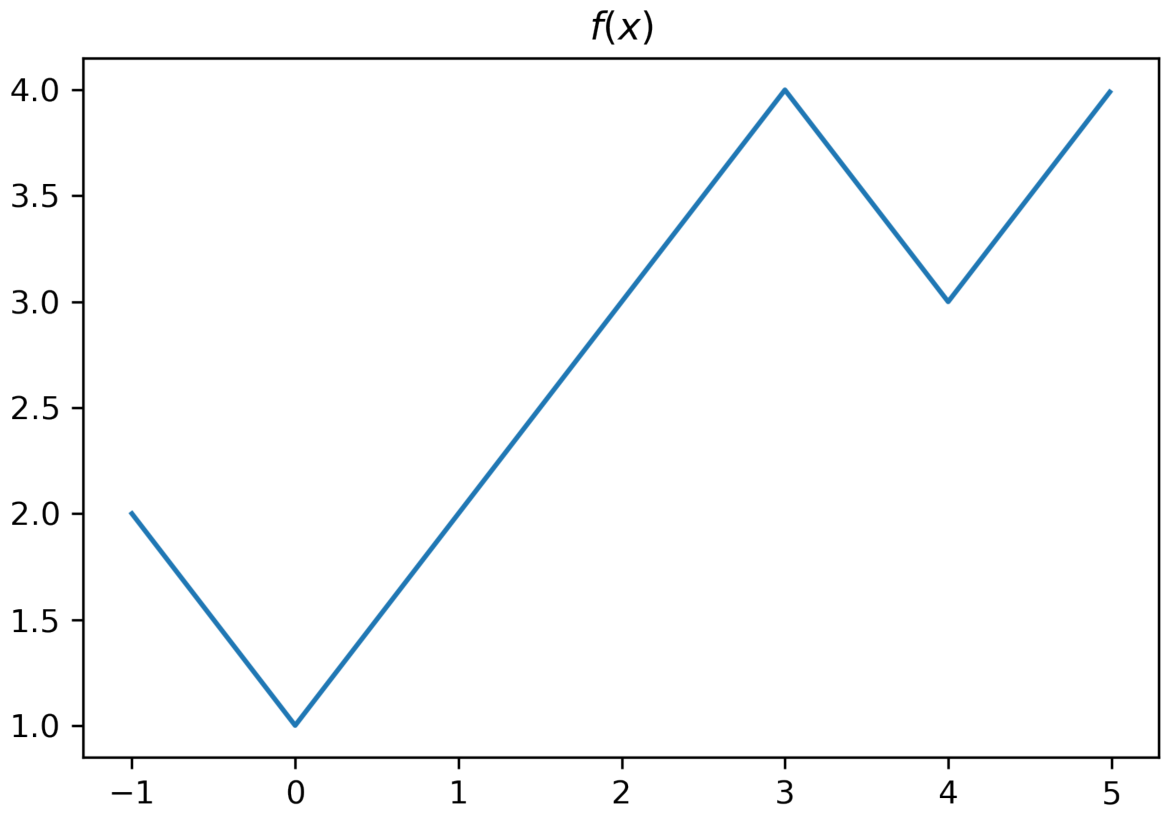
$$\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{x}})=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

所以可以得到对应的$\mathbf{H}$矩阵：

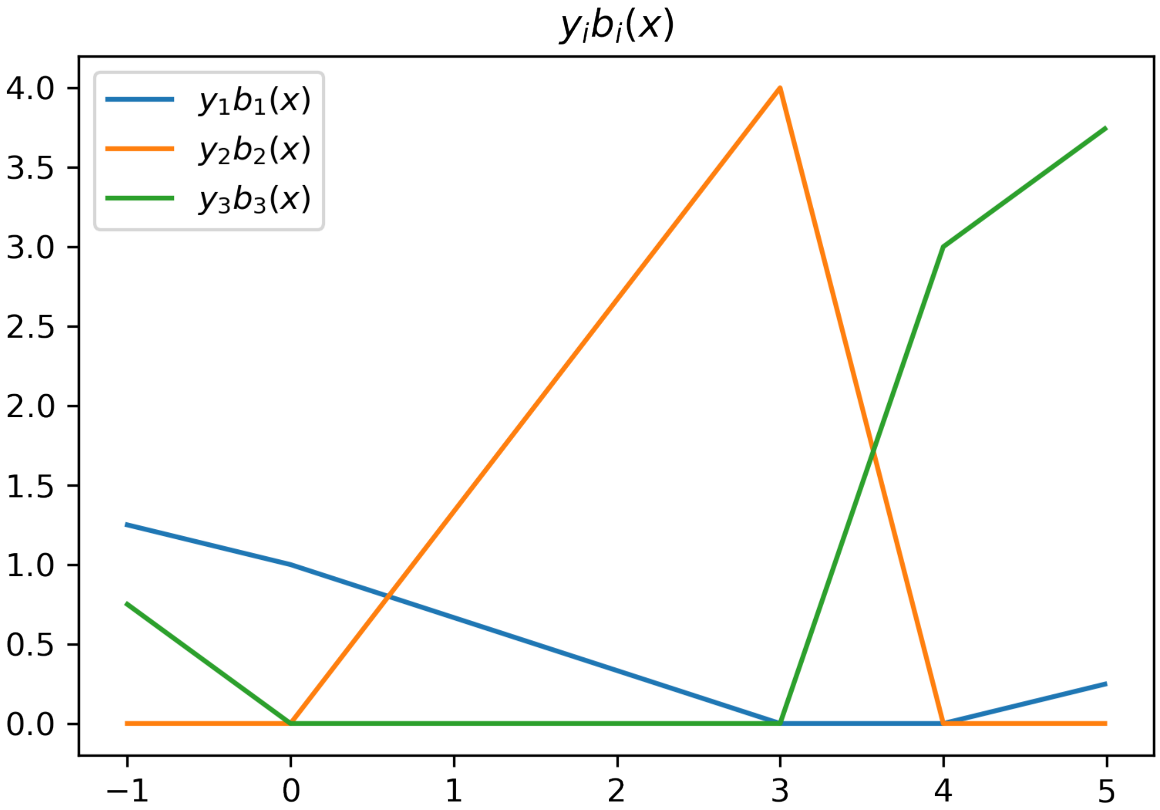
$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8}\end{bmatrix}$$

将其带入原式便可以得到$b_i(x)$，两种核函数的关联如前文所示。

两个函数相同最终表示都如下所示：



观察$y_ib_i(x)$的图像可以发现，在x_i处均只有一个函数非0，所以可以保证在x_i处两种写法值相同。所有的$b_i(x)$在分段上都是线性函数，线性组合之后仍然是线性函数，这样只要确保在每一端的两端断电值相同，就能够确保两种写法最终的结果一致。



2.

由核函数定义可以知道：

$$K(\mathbf{x},\mathbf{z})=\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{z})\rangle$$

$$\begin{aligned}&K(\mathbf{x},\mathbf{z})+K(0,\mathbf{z})+K(\mathbf{x},0)+K(0,0)\\=&\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{z})\rangle+\langle\phi(0),\phi(\mathbf{z})\rangle+\langle\phi(\mathbf{x}),\phi(0)\rangle+\langle\phi(0),\phi(0)\rangle\\=&\langle\phi(\mathbf{x})+\phi(0),\phi(\mathbf{z})+\phi(0)\rangle\\=&\langle\hat{\phi}(\mathbf{x}),\hat{\phi}(\mathbf{z})\rangle\end{aligned}$$

故也为核函数。

3.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)^T\varphi(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k}\left[\cos(ix)\cos(iz) + \sin(ix)\sin(iz)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{2}(\cos(ix+iz) + \cos(ix-iz)) - \frac{1}{2}(\cos(ix+iz) - \cos(ix-iz))\right] \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k}\cos(i(x-z)) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-z}{2}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos(i(x-z))\right] \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x-z}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(\sin\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-z)\right) - \sin\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)(x-z)\right)\right)\right] \\
&= \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-z)\right)}{2\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

4.

原优化目标改写为矩阵形式：

$$L = \|\mathbf{X}\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{y}}\|^2 + \lambda\|\mathbf{w}\|^2$$

求偏导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &= 2\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{y}}) + 2\lambda\mathbf{w} \\
&= 2(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{w} - 2\mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{w} &= \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\
(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda)\mathbf{X}^T\alpha &= \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\
\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \lambda\mathbf{I})\alpha &= \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}} \\
\mathbf{X}^T(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})\alpha &= \mathbf{X}^T\tilde{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

所以解为：

$$\alpha = (\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$

对于核函数表达形式，定义核函数$K: X \times X \to R$，有$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{z})\rangle$。

设核矩阵为$\mathbf{K}$，有$\mathbf{K}_{ij} = \langle\phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x}_j)\rangle$，核函数表达形式为：

$$\alpha = (\mathbf{K} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$