

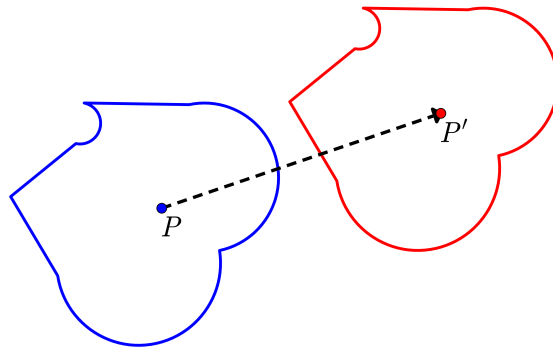
## การแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของวัตถุ โดยอาจมีการเปลี่ยนแปลงขนาด รูปร่าง ตำแหน่ง หรือ ทิศทางของวัตถุ ตัวอย่างของการแปลงที่เราเคยพบเห็น เช่น การนำรถเข้าจอดในช่องจอดรถ ลูกปิงปองกระทบ พื้นโต๊ะ การหมุนของเข็มนาฬิกาจากปลายเข็มนาฬิกาชี้ที่ตัวเลข 1 ไปชี้ที่ตัวเลข 6

### ! Important

สิ่งสำคัญของการแปลงคือ **จุดทุกจุดของวัตถุอยู่ที่เดิม (หรือขนาดเดิม) จะต้องมีการส่งไปยังวัตถุที่ตำแหน่งใหม่ (หรือขนาดใหม่) ทุกจุด จุดต่อจุด**

ในทางเรขาคณิตก็มีการแปลงที่กล่าวถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่างรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงและรูปเรขาคณิตหลังการแปลง เราเรียกรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงว่า **รูปต้นแบบ (pre-image)** เรียกรูปเรขาคณิตหลังการแปลงรูปต้นแบบว่า **ภาพที่ได้จากการแปลง (image)** และเรียกชื่อการแปลงว่า **การแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation)** แต่ในบางครั้งจะเรียกสั้น ๆ ว่า การแปลง



จากรูป ถ้าจุด  $P$  เป็นจุดจุดหนึ่งบนรูปสีน้ำเงิน จุด  $P'$  (อ่านว่า พีไพร์ม) ที่รูปสีแดงเป็นภาพที่ได้จากการแปลงจุด  $P$  เรากล่าวว่าจุด  $P$  และจุด  $P'$  เป็น **จุดที่สมนัยกัน**

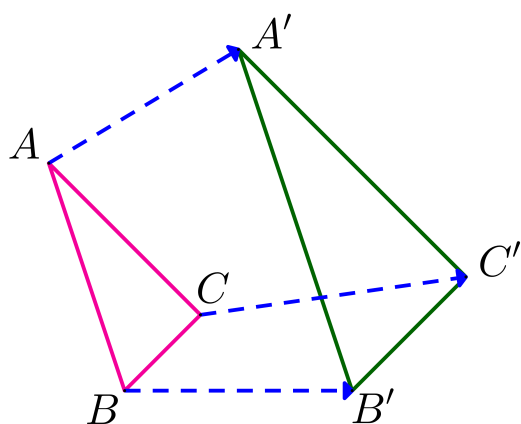
เมื่อกำหนดให้ แต่ละจุด  $P$  บนรูปสีน้ำเงิน จะมีจุด  $P'$  บนรูปสีแดง เพียงจุดเดียวที่สมนัยกับจุด  $P$  และแต่ละจุด  $P'$  บนรูปสีแดง จะมีจุด  $P$  บนรูปสีน้ำเงินเพียงจุดเดียวที่สมนัยกับจุด  $P'$

### i Note

ต่อไปนี้อาจไม่กล่าวเป็นอย่างอื่นให้ถือว่าตัวอักษรที่มีสัญลักษณ์ ' (อ่านว่า ไพร์ม) ปรากฏอยู่ จะแทนจุดที่ได้จากการแปลง เช่น จุด  $A'$  เป็นจุดที่ได้จากการแปลงจุด  $A$

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้

กำหนดให้  $\triangle A'B'C'$  เป็นภาพที่ได้จากการแปลง  $\triangle ABC$



โดยมี จุด  $A$  และจุด  $A'$  เป็นจุดที่สมนัยกัน  
จุด  $B$  และจุด  $B'$  เป็นจุดที่สมนัยกัน  
จุด  $C$  และจุด  $C'$  เป็นจุดที่สมนัยกัน

เรากล่าวว่า

..... กับ .....	เป็นด้านที่สมนัยกัน	..... กับ .....	เป็นมุมที่สมนัยกัน
..... กับ .....	เป็นด้านที่สมนัยกัน	..... กับ .....	เป็นมุมที่สมนัยกัน
..... กับ .....	เป็นด้านที่สมนัยกัน	..... กับ .....	เป็นมุมที่สมนัยกัน

การแปลงทางเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานมีทั้งหมด 4 แบบ ได้แก่

- การเลื่อนขนาน (translation)
- การสะท้อน (reflection)
- การหมุน (rotation)
- การย่อ/ขยาย (dilation)

แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงการแปลงทางเรขาคณิต 3 แบบ ได้แก่ การเลื่อนขนาน การสะท้อน และการหมุน การแปลงทางเรขาคณิตทั้งสามแบบนี้จะให้ภาพที่มีรูปร่างเหมือนกันและขนาดเดียวกันกับรูปต้นแบบเสมอ

## การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานประตูเพื่อเปิด - ปิด หรือการเลื่อนขึ้น - ลงของลิฟต์โดยสาร เป็นตัวอย่างของการเลื่อนขนานที่เราพบเห็นกันในชีวิตประจำวัน

การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการเลื่อนจุดทุกจุดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกันและเป็นระยะทางเท่ากันตามที่กำหนด

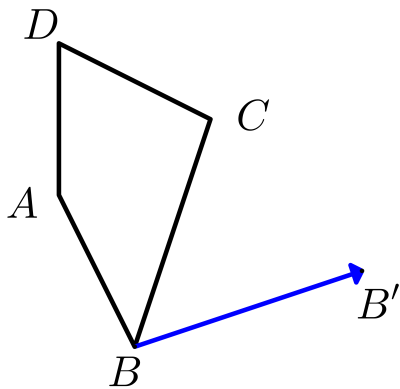
ทิศทางและระยะทางที่กำหนดในการเลื่อนขนานเราเรียกว่า **เวกเตอร์ (Vector)** เช่น เวกเตอร์  $MN$  อาจเขียนแทนด้วย  $\overrightarrow{MN}$  ซึ่ง  $\overrightarrow{MN}$  จะมีทิศทางจากจุดเริ่มต้น  $M$  ไปยังจุดสิ้นสุด  $N$  และมีขนาดเท่ากับความยาวของ  $\overrightarrow{MN}$

ในการเลื่อนขนานวัตถุจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เราอาจใช้เวกเตอร์เพียงเวกเตอร์เดียวหรือมากกว่าหนึ่งเวกเตอร์ก็ได้

## สมบัติของการเลื่อนขนาน

1. รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทำกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลีรูป หรือกล่าวว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานเท่ากันทุกประการ
2. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น
3. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรงนั้น จะขนานและยาวเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1. จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\square ABCD$  ด้วย  $\overrightarrow{BB'}$



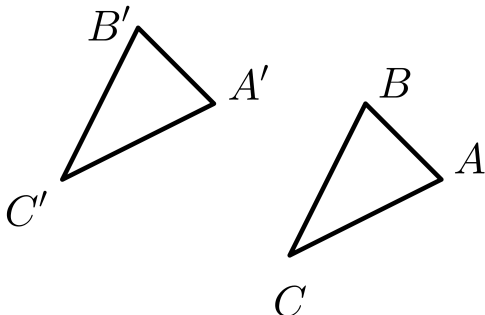
## 💡 แนวคิด

การหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\square ABCD$  ให้หาจุด  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  และ  $D'$  ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด  $A$ ,  $B$ ,  $C$  และ  $D$  ตามลำดับ ก็เป็นการเพียงพอที่จะได้ภาพจากการเลื่อนขนาน  $\square ABCD$

จาก ตัวอย่างที่ 1. จะเห็นว่าเมื่อกำหนดรูปต้นแบบและเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานมาให้ เราสามารถหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานได้

ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานรูปต้นแบบมาให้ เราสามารถหาเวกเตอร์จากการเลื่อนขนานนี้ได้

ตัวอย่างที่ 2. กำหนดให้  $\triangle A'B'C'$  เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  ดังรูป จงหาเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานดังกล่าว

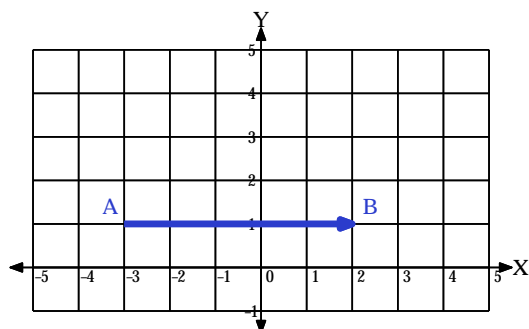


## 💡 แนวคิด

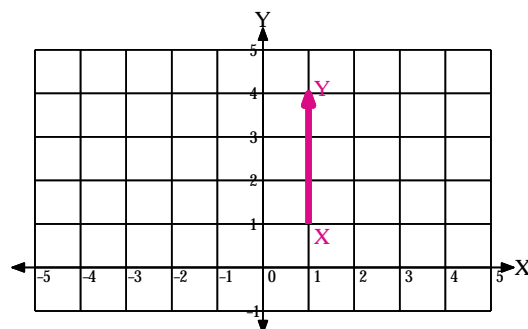
เมื่อต้องการเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  ก็สามารถทำได้โดยลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันคู่หนึ่งคู่ใดของ  $\triangle ABC$  กับ  $\triangle A'B'C'$

ในการเลื่อนขนานรูปต้นแบบ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานมาให้ เราต้องวิเคราะห์ว่าจะต้องเลื่อนรูปต้นแบบไปในทิศทางใด เป็นระยะทางเท่าใด

ถ้าเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานที่กำหนดให้ขนานกับแกน  $X$  หรือแกน  $Y$  การเลื่อนขนานรูปแบบนี้จะกระทำได้ง่าย เช่น



(a) เวกเตอร์ขนานกับแกน  $X$



(b) เวกเตอร์ขนานกับแกน  $Y$

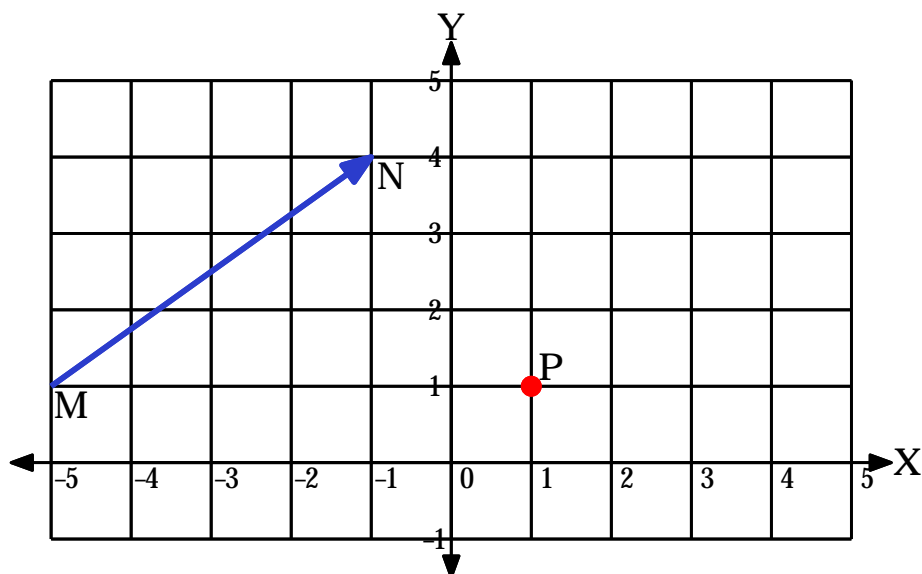
รูปที่ 1: เวกเตอร์ขนานกับแกน  $X$  และ  $Y$

แต่ถ้าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ไม่ขนานกับแกน  $X$  หรือแกน  $Y$  เราอาจใช้วิธีดังตัวอย่างต่อไปนี้เพื่อช่วยในการหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน

**ตัวอย่างที่ 3.** จงหาพิกัดของจุด  $P'$  ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนจุด  $P$  ด้วย  $\overrightarrow{MN}$  ดังรูป

**💡 แนวคิด**

พิจารณา  $\overrightarrow{MN}$  มีจุดเริ่มต้นที่ ..... และมีจุดสิ้นสุดที่ ..... นั่นคือ การเลื่อนไปทาง ..... ตามแนวแกน  $X$  ..... หน่วย และเลื่อน ..... ตามแนวแกน  $Y$  ..... หน่วย

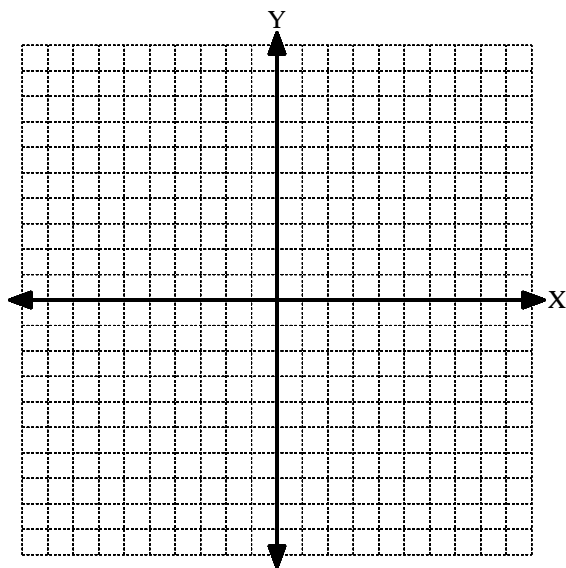


ตอบ พิกัดของ  $P'$  คือ .....

ตัวอย่างที่ 4. กำหนดให้  $\triangle ABC$  มีจุด  $A(4, -2)$ , จุด  $B(3, 3)$  และจุด  $C(6, 2)$  เป็นจุดยอด จงเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  ด้วย  $\overrightarrow{MN}$  มีจุด  $M(-2, 2)$  และ  $N(-6, 4)$  พร้อมทั้งหาพิกัดของจุดยอดของ  $\triangle A'B'C'$

**💡 แนวคิด**

พิจารณา  $\overrightarrow{MN}$  มีจุดเริ่มต้นที่ ..... และมีจุดสิ้นสุดที่ ..... ดังนั้นจึงต้องเลื่อน  $\triangle ABC$  เลื่อนไปทาง ..... ตามแนวแกน  $X$  ..... หน่วย และเลื่อน ..... ตามแนวแกน  $Y$  ..... หน่วย

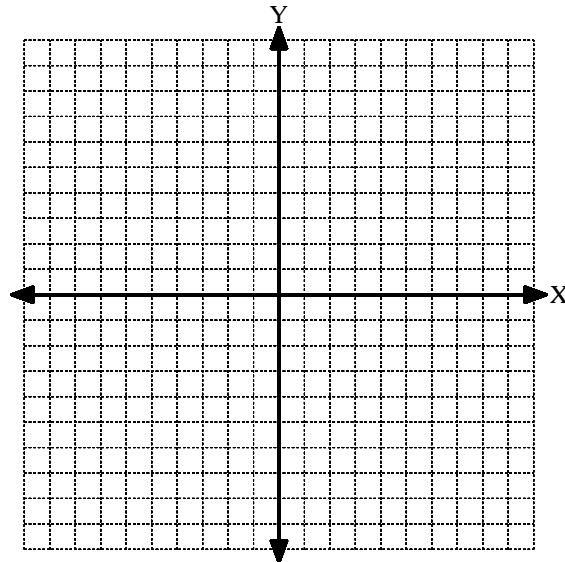


**การใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ที่ใช้ในการเลื่อนขนาน**

จากตัวอย่างที่ 3 กับตัวอย่างที่ 4 มีการกล่าวถึงลักษณะการเลื่อนขนานด้วย  $\overrightarrow{MN}$  เช่น

- ตัวอย่างที่ 3 เป็นเวกเตอร์ที่มีการเลื่อนไปทาง ..... ตามแนวแกน  $X$  ..... หน่วย และเลื่อน ..... ตามแนวแกน  $Y$  ..... หน่วย เราสามารถเขียนเวกเตอร์นี้ในรูปสัญลักษณ์ คือ  $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
- ตัวอย่างที่ 4 เป็นเวกเตอร์ที่มีการเลื่อนไปทาง ..... ตามแนวแกน  $X$  ..... หน่วย และเลื่อน ..... ตามแนวแกน  $Y$  ..... หน่วย เราสามารถเขียนเวกเตอร์นี้ในรูปสัญลักษณ์ คือ  $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 5. กำหนดให้  $\triangle A'B'C'$  มีจุด  $A'(-1, -3)$ , จุด  $B'(-4, -2)$  และจุด  $C'(-3, 1)$  เป็นจุดยอด และ  $\triangle ABC$  มีจุด  $A(4, 1)$ , จุด  $B(1, 2)$  และจุด  $C(2, 5)$  เป็นจุดยอด จงหาเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์นี้ในรูปสัญลักษณ์



ตอบ เวกเตอร์ของการเลื่อนขนานนี้ .....  
 .....  
 ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น .....

#### ชวนคิด

(1) ถ้าให้  $\overrightarrow{MN}$  เป็นเวกเตอร์ที่ใช้ในการเลื่อนขนาน โดยมีจุดเริ่มต้นเป็น  $(3, 5)$  แล้วจุด  $N$  มีพิกัดเป็นอะไร

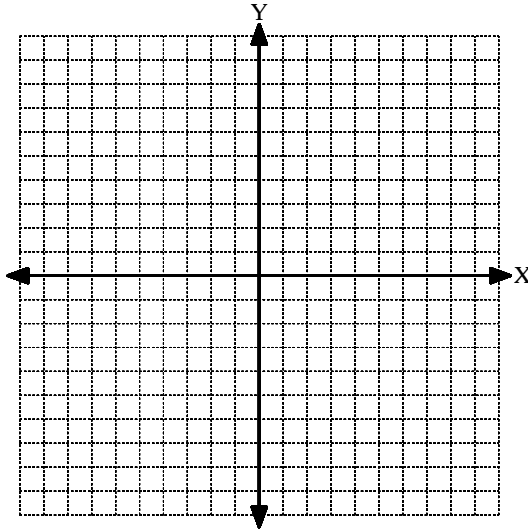
.....

(2) ถ้าให้  $\overrightarrow{MN}$  เป็นเวกเตอร์ที่ใช้ในการเลื่อนขนาน โดยมีจุดสิ้นสุดเป็น  $(3, 5)$  แล้วจุด  $N$  มีพิกัดเป็นอะไร

.....

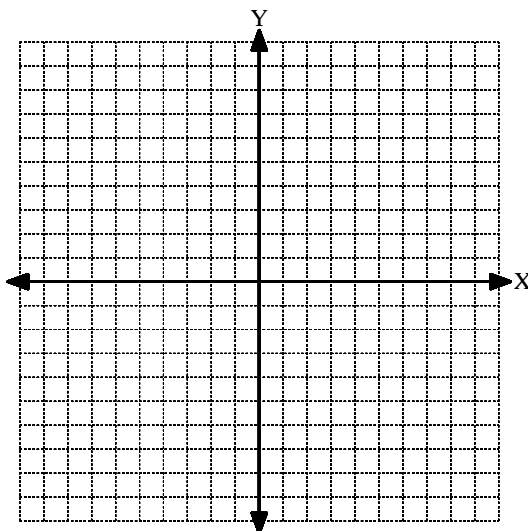
### แบบฝึกหัดเกี่ยวกับการเลื่อนขนาน

1. กำหนดให้จุด  $Z(-3, -2)$  จงหา  $Z'$  ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด  $Z$  ด้วย  $\overrightarrow{PQ}$  ซึ่ง จุด  $P(-3, 5)$  และ  $Q(0, 1)$  พร้อมทั้งหาพิกัดของ  $Z'$  อธิบายความหมายของ  $\overrightarrow{PQ}$  และเขียนในรูปสัญลักษณ์



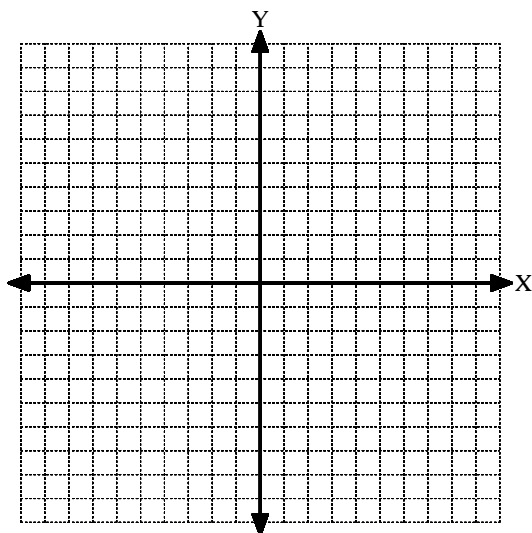
จาก .....  
 เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นคือ .....  
 และจุดสิ้นสุดคือ .....  
 นั่นคือ ..... เป็นเวกเตอร์ที่ .....  
 .....  
 .....  
 โดย .....  
 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์คือ .....  
 และพิกัดของ จุด  $Z'$  คือ .....

2. กำหนดให้  $\overline{AB}$  ซึ่งพิกัดของจุด  $A$  และจุด  $B$  คือ  $(-1, 1)$  และ  $(1, -3)$  ตามลำดับ จงหา  $\overline{A'B'}$  ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\overline{AB}$  ด้วย  $\overline{MN}$  ซึ่ง จุด  $M(-1, 6)$  และ  $N(-4, 2)$  พร้อมทั้งหาพิกัดของจุด  $A'$  และจุด  $B'$  อธิบายความหมายของ  $\overline{MN}$  และเขียนในรูปสัญลักษณ์



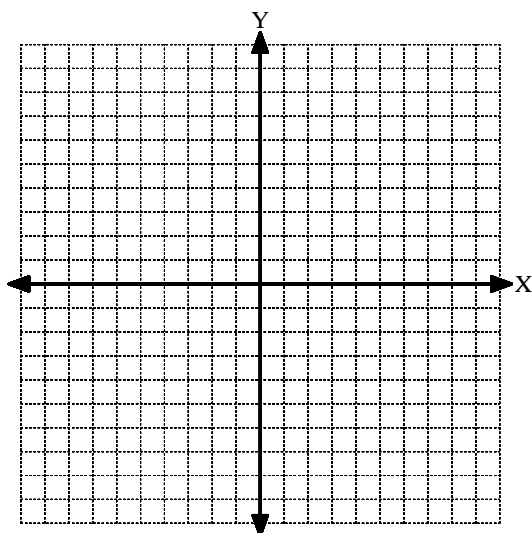
จาก .....  
 เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นคือ .....  
 และจุดสิ้นสุดคือ .....  
 นั่นคือ ..... เป็นเวกเตอร์ที่ .....  
 .....  
 .....  
 โดย .....  
 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์คือ .....  
 พิกัดของ จุด  $A'$  คือ .....  
 และพิกัดของ จุด  $B'$  คือ .....

3. กำหนดให้จุด  $A(-1, 6)$ , จุด  $B(-3, 3)$  และจุด  $C(0, 2)$  ซึ่งเป็นจุดยอดของ  $\triangle ABC$  จงหา  $\triangle A'B'C'$  ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  ด้วย  $\overrightarrow{MN}$  ซึ่ง จุด  $M(2, 7)$  และ  $N(5, 4)$  พร้อมทั้งหาพิกัดของจุด  $A'$ , จุด  $B'$  และจุด  $C'$  อธิบายความหมายของ  $\overrightarrow{MN}$  และเขียนในรูปสัญลักษณ์



จาก .....  
 เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นคือ .....  
 และจุดสิ้นสุดคือ .....  
 นั่นคือ ..... เป็นเวกเตอร์ที่ .....  
 .....  
 โดย .....  
 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์คือ .....  
 พิกัดของ จุด  $A'$  คือ .....  
 พิกัดของ จุด  $B'$  คือ .....  
 และพิกัดของ จุด  $C'$  คือ .....

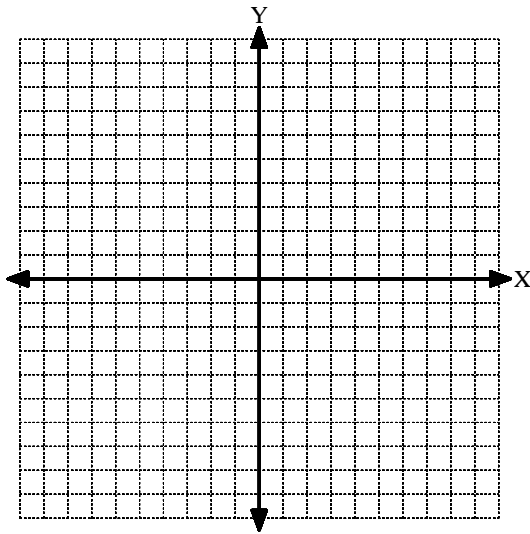
4. กำหนดให้จุด  $A(-2, -4)$ , จุด  $B(2, -5)$ , จุด  $A'(1, 6)$  และจุด  $B'(5, 5)$  โดยที่  $\overline{AB}$  เป็นรูปต้นแบบ และ  $\overline{A'B'}$  เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\overline{AB}$  ด้วย  $\overrightarrow{MN}$  จงหา  $\overrightarrow{MN}$



จาก  $\overrightarrow{MN}$   
 เป็นเวกเตอร์ที่ .....  
 .....  
 .....  
 ดังนั้น  $\overrightarrow{MN}$  คือ .....



5. กำหนดให้จุด  $A(2, 6)$ , จุด  $B(4, 4)$ , จุด  $C(1, 3)$  และจุด  $A'(0, -2)$  โดยที่  $\triangle ABC$  เป็นรูปต้นแบบ และ  $\triangle A'B'C'$  เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน  $\triangle ABC$  ด้วย  $\overrightarrow{MN}$  จงหา  $\overrightarrow{MN}$  และพิกัดของจุด  $B'$  และจุด  $C'$



จาก  $\overrightarrow{MN}$

เป็นเวกเตอร์ที่ .....

.....

.....

ดังนั้น  $\overrightarrow{MN}$  คือ .....

พิกัดของจุด  $B'$  คือ .....

และพิกัดของจุด  $C'$  คือ .....