中国科学技术大学　2025 年 1 月 12 日 19:00 - 21:00

2024秋量子力学(A)期末考试

注意事项：

1. 本次考试为开卷考试；
2. 分数取 6 道题中得分最高的 5 题之和，每道题满分 20 分.

解答题

1. 已知体系的哈密顿量 H 不显含时间，初态 $|\psi\rangle$ 在 H 的支配下演化. 在经过极短时间 δt 后，试证明再次观测到 $|\psi\rangle$ 的概率满足

$$p(\delta t) = 1 - \frac{(\mathit{\Delta} H)^2(\delta t)^2}{\hbar^2} + \mathcal{O}((\delta t)^4)$$

其中 $\mathit{\Delta} H$ 为哈密顿量的标准方差，即 $(\mathit{\Delta} H)^2 = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2$.
实际上，$|\psi\rangle$ 不一定是哈密顿量 H 的一个本征值，但我们可以构造一个观测量 A 使其本征值为 $|\psi\rangle$.

2. 一维谐振子初态

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle$$

其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别为一维谐振子的基态和第一激发态. 令 $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, 系统从 $t=0$ 开始演化：

（1）在时刻 τ 时有 $\rho(\tau) = \rho(0)$，求 τ 的最小值；

（2）求从 0 到 τ 的演化中系统的几何相.

3. 已知系统的态矢

$$|\psi\rangle = |\varphi_0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} U(a) |\varphi_0\rangle$$

注意！这里的 $|\psi\rangle$ 是没有归一化的. 其中 $U(a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aP/\hbar}$ 是空间平移算子，态矢 $|\varphi_0\rangle$ 在位置表象中的形式为

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\delta^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\delta^2}\right\}$$

（1）在什么条件下 $\langle\varphi_0| U(a) |\varphi_0\rangle$ 可以近似看作零?

在下面几个问题中均忽略 $\langle\varphi_0| U(a) |\varphi_0\rangle$

（2）求态矢 $|\psi\rangle$ 在位置空间的概率密度 $|\psi(x)|^2$，并说明我们能否通过测量粒子的位置计算相因子 γ;

（3）求 $|\psi\rangle$ 在动量空间中的概率密度;

（4）若有一混合态 ρ，处于 $|\varphi_0\rangle$ 和 $U(a)|\varphi_0\rangle$ 的概率均为 $\frac{1}{2}$，即

$$\rho : \left\{|\varphi_0\rangle, p = \frac{1}{2}; U(a)|\varphi_0\rangle, p = \frac{1}{2}\right\}$$

请问我们应该如何区分纯态 $|\psi\rangle$ 和混合态 ρ?

4. 位置空间中波函数

$$\psi(\boldsymbol{r}) = xyf(r)$$

其中 $f(r)$ 是与径向有关的函数，与角方向无关:

（1）波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是否是角动量分量 L_x, L_y, L_z 的本征函数?

（2）波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 是否是角动量 L^2 的本征函数? 若是，则对应的轨道角动量 l 是多少?

（3）已知算子 $U(\phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi L_z/\hbar}$，计算 $U(\phi)$ 作用于 $\psi(\boldsymbol{r})$ 后的结果.

5. 已知一自旋 $\dfrac{1}{2}$ 粒子，质量为 m，电荷量为 q，静磁场 $\boldsymbol{B}=B\hat{e}_z$ 中，粒子的自旋磁矩为

$$\vec{\mu}=\frac{gq}{2m}\boldsymbol{S}$$

其中 g 为 $g-$ 因子.

（1）定义螺旋度算子 (helicity operator) $\vec{\sigma}\cdot\boldsymbol{V}$. 试证明 $g=2$ 时，螺旋度算子守恒;

（2）若 $g\neq 2$, 粒子在 $t=0$ 时刻进入磁场, 进入时粒子的速度 $\boldsymbol{V}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向垂直, 粒子自旋角动量 S 方向与速度方向一致. 求 t 时刻粒子速度方向与自旋角动量方向的夹角.

6. 二维谐振子的哈密顿量可用升降算符表示:

$$H_0=\hbar\omega(\mathfrak{a}_1^\dagger\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2^\dagger\mathfrak{a}_2)$$

其中升降算符满足对易关系

$$[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j]=0,\quad [\mathfrak{a}_i^\dagger,\mathfrak{a}_j^\dagger]=0,\quad [\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j^\dagger]=\delta_{ij}\mathbb{1}$$

又有微扰项

$$H'=\lambda(\mathfrak{a}_1^\dagger\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_2^\dagger\mathfrak{a}_1)$$

（1）求微扰下谐振子第二激发态能级的一级修正;

（2）求哈密顿量 $H=H_0+H'$ 能级的严格解.