24秋理论力学A 期末考试

中心力与散射

中心力与有效势能

角动量 $l := p_\theta = mr^2\dot{\theta}$

有效势能 $V = \dfrac{l^2}{2mr^2} + U(r)$

拱点（近心点、远心点）、拱线、拱心角

稳定圆周运动的微扰 $\omega_r^2 = -\dfrac{RF'(R) + 3F(R)}{mR}$

圆周运动稳定条件（$F(R) = -\dfrac{l^2}{mR^3}$ 为向心力）$\dfrac{3F(R)}{R} + F'(R) < 0$

轨道方程 $\theta = \pm\dfrac{l}{\sqrt{2m}}\displaystyle\int \dfrac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r)}}$

令 $u = \dfrac{1}{r}$ 得到常用结果

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m(E-U)}{l^2}$$

考虑中心力 F 的话有 Binet 公式 $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\dfrac{mF}{l^2u^2}$

平方反比力

对于吸引力，带入 Binet 方程，得到

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{m\alpha}{l^2}\right)^2 = \frac{m^2\alpha^2}{l^4}\left(1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}\right)$$

令 $p=\dfrac{l^2}{m\alpha}$, $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2El^2}{m\alpha^2}}$ 后得到

$$r=\frac{p}{\varepsilon\cos\theta+1}$$

动力学参数 $l=\sqrt{m\alpha p}$, $E=\dfrac{\alpha(\varepsilon^2-1)}{2p}$

行星运动能量 $E=-\dfrac{\alpha}{2a}$，周期 $\tau^2=\dfrac{4\pi^2 m}{\alpha}a^3$

开普勒方程 $t=\dfrac{\tau}{2\pi}(\psi-\varepsilon\sin\psi)$，其中 ψ 为轨道中心对应的极角

散射

拱心角

$$\theta_b=\int_{r_m}^{\infty}\frac{bdr}{r^2\sqrt{1-\frac{U}{E}-\frac{b^2}{r^2}}}=\int_0^{u_m}\frac{bdu}{\sqrt{1-\frac{U}{E}-b^2u^2}}$$

散射角 $\Theta=\pi-2\theta_b$，由此可以得出散射角 Θ 和动量臂 b 之间的关系 $\Theta(b)$ 及反函数关系 $b(\Theta)$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|$$

散射截面 $\sigma=\displaystyle\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\Theta d\Theta$

卢瑟福散射：平方反比力散射，$b=\dfrac{\alpha}{2}\cot\dfrac{\Theta}{2}$

哈密顿力学

相空间与勒让德变换

勒让德变换 $H(q,p,t)+L(q,\dot{q},t)=p_a\dot{q}_a$，海赛条件 $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_a\partial\dot{q}_b}\right)\neq 0$

哈密顿函数与正则方程

哈密顿函数 $H = p_a \dot{q}_a - L$

哈密顿正则方程

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$$

相空间中的运动

ξ 记号 $\xi = (q, p)^\top$，辛矩阵 $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

哈密顿矢量场 $\Delta_H(\xi, t) = \Omega \dfrac{\partial H}{\partial \xi}$

演化方程 $\dot{\xi} = \Delta_H(\xi, t)$，满足演化方程的体系称为哈密顿体系.

> 可以通过是否有满足条件的哈密顿函数判断一个体系是否为哈密顿体系.【P141，例3.7】

泊松括号

定义

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a}$$

力学量的演化 $\dfrac{df}{dt} = [f, H] + \dfrac{\partial f}{\partial t}$

若力学量 f 不显含时间，令 $D_H = [H, \cdot]$，则有 $\dfrac{df}{dt} = -D_H f$，力学量的时间演化（的泰勒展开）可以写为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}(D_H^n f)_0$$

推论 $\dfrac{d}{dt}[f, g] = \left[\dfrac{df}{dt}, g\right] + \left[f, \dfrac{dg}{dt}\right]$

泊松定理：若 f, g 是运动常量，则 $[f, g]$ 也是运动常量

泊松括号判断哈密顿体系：$[\dot{q}, p] + [q, \dot{p}] = 0$

正则变换

（仅讨论受限正则变换）泊松括号不变性、辛条件
可积条件 $p_k\delta q_k - P_k\delta Q_k = \delta F(p,q,t)$，其中 F 为生成函数

体系随时间的演化可以被视为正则变换

刘维尔体积定理、刘维尔定理

> 态密度 $\rho(\xi,t)=\rho(\xi^{(0)},t=0)=\rho_0(\xi^{(0)}(\xi,t))$，即先通过 $\xi(t)$ 与初值 $\xi^{(0)}$ 的关系反解出 $\xi^{(0)}(\xi,t)$，再带入初始态密度函数 $\rho_0(\xi^{(0)})$ 中即可得到 $\rho(\xi,t)$. 【P174，例3.17】

新哈密顿函数 $K = H + \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_k}{\partial t}P_k$

正则变换的分类

考虑正则变换

$$Q=Q(q,p,t),\, P=P(q,p,t)$$

四类正则变换分别为 (q,Q), (q,P), (p,Q), (p,P) 作为独立变量的正则变换
（例如第一类正则变换满足 $\det\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_j}\neq 0\right)$）

正则变换类型	生成函数 F 的海斯条件	剩余变量的表示
第一类正则变换	$\det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial Q_j}\neq 0\right)$	$p_k=\dfrac{\partial F}{\partial q_k},\, P_k=-\dfrac{\partial F}{\partial Q_k}$
第二类正则变换	$\det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial P_j}\neq 0\right)$	$p_k=\dfrac{\partial F}{\partial q_k},\, Q_k=\dfrac{\partial F}{\partial P_k}$
第一类正则变换	$\det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial Q_j}\neq 0\right)$	$q_k=-\dfrac{\partial F}{\partial p_k},\, P_k=-\dfrac{\partial F}{\partial Q_k}$
第一类正则变换	$\det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial P_j}\neq 0\right)$	$q_k=-\dfrac{\partial F}{\partial q_k},\, Q_k=\dfrac{\partial F}{\partial Q_k}$

> 可以通过基本泊松括号 $[q,p]_{(Q,P)}=1$ 来判断正则变换，并利用剩余变量的表示积分得到生成函数 F，进一步可以得到新哈密顿函数 K 和循环坐标对应的运动常数. 【P183，例

> 3.19；P189，例3.22】

哈密顿-雅可比理论

自治体系（H 不显含时间）的通法：

1. 设主函数 $S(q,t)=W(q)+T(t)$
2. 一个显而易见的运动常数令为 $P_1=H\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=-\frac{\partial T}{\partial t}$
3. $p=\frac{\partial S}{\partial q}$，得出相轨迹；$Q=\frac{\partial S}{\partial P}=-t_0$给出时间演化

分离变量：

- q_n 为循环坐标，$\tilde{W}=W+P_nq_n$
- 哈密顿函数可分离：$H(q,p)=\tilde{H}+H_n(q_n,p_n)$，$H=P_1$, $H_n=P_n$, $\tilde{H}=P_q-P_n$
- 哈密顿函数乘 $f(q/q_n)$ 或 $g(q_n)$ 后可分离

完全可分离体系
$W=\sum W_i(q_i,P)$，此体系在通法下的解有如下特点：

- p_k 仅依赖于 q_k
- 仅 Q_1 线性依赖于时间

刚体

刚体转动

- 本体系分析法：
-
  - 寻找合适的空间系和本体系（最好是主轴系），写出转动惯量张量 $\mathbf{J}$

    > 常见对称体在主轴系的主转动惯量：
    >
    > - 圆盘：对称轴 x_3，（均匀分布）质量 m，半径 R，则有
    >
    > $$J_3=\frac{1}{2}mR^2,\, J_1=J_2=\frac{1}{4}mR^2$$
    >
    > - 球体：（均匀分布）质量 m，半径 R，则有

> $$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} m R^2$$
>
> - 立方体：质量 m，边长 a，对于其中心有
>
> $$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{1}{6} m a^2$$
>
> - 椭球：质量 m，三个半轴长 a_i，三个主转动惯量 J_i，$i = 1, 2, 3$，则有
>
> $$J_i = \frac{1}{5} m (a_j^2 + a_k^2),\ i \neq j \neq k$$

- 在本体系中写出 $\vec{\omega}$ 的三个分量
- 受力分析，在本体系中写出 $\vec{\tau}$ 的三个分量，带入欧拉动力学方程

- 质心系分析法：
  - 寻找合适的质心系，写出转动惯量张量 $\mathbf{J}$（一般是具旋转对称性的物体，故质心系选择合适的话和本体系的转动惯量张量一致）
  - 在质心系中写出 $\vec{\omega}$ 的三个分量（尽管转动惯量一致，质心系的坐标轴不旋转，往往写出的角动量分量更简单），计算质心系的角动量 $\vec{L}^*$
  - 受力分析，在质心系中写出 $\vec{\tau}^*$ 的三个分量，考虑质心系角动量定理

$$\vec{\tau}^* = \left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\text{rot}} + \vec{\Omega} \times \vec{L}^*$$

往往这时角动量不显含时间，即第一项为 0，仅考虑 $\vec{\tau}^* = \vec{\Omega} \times \vec{L}^*$

欧拉陀螺

直接解欧拉动力学方程得出 $\vec{\omega}$，然后用欧拉运动学方程即可解出欧拉角变化.

拉格朗日陀螺

写出拉氏量 $L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) - mgl$

带入欧拉运动学方程，得到 $\tilde{L}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t)$

求广义动量，用勒让德变换得出哈密顿量 $H(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t)$

随后即可考虑 HJ 方程或等效一维运动等对其进行分析

补充

潘爷很喜欢的电磁场

> 电磁场 $(\vec{E},\vec{B})$ 有标势 ϕ，矢势 $\vec{A}$

对于质量为 m 电荷量 q 的粒子，其哈密顿量

$$H=\frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m}+q\phi$$