复变函数（A）期末试题

填空题

- 简单计算：复数的指数形式、（双曲）三角函数在复数域的计算.
- 解析函数参数计算：CR 方程.
- 调和函数参数计算：调和函数的定义.
- 口算积分
- 指出函数奇点及类型：$\sin f(z), \cos f(z), e^{f(z)}$ 中 $f(z)$ 的无穷远点是本性奇点；分式中可以等价无穷小约去的点是可去奇点，等价无穷小后 $\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 的形式是 n 阶极点.
- 求留数：公式法 $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{n-1}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$；Laurent 展开后求 a_{-1}.
- Laplace 变换及逆变换：常见函数的变换：$t^\alpha, e^{at}, \cos t, \sin t, \cosh t, \sinh t$，相似定理，微分法，积分法，延迟定理、位移定理、周期函数；逆变换：有理分式展开、留数法
- 求根的个数：Rouche定理，找边界上模最大的单项式，剩余多项式用三角不等式求上限证明；代数基本定理

计算题

- Taylor 展开求收敛半径：展开与数学分析技巧一样，收敛半径寻找离展开点最近的奇点，距离就是收敛半径
- Laurent 展开：各项在收敛域内 Taylor 展开，分式的 Taylor 展开，公式法（？没见过）
- Cauchy 积分公式：$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)}d\xi$，$\displaystyle\int_C f(z)dz=0$
- 留数计算积分：
-
    - 区域内奇点太多可以考虑倒数代换 $\xi=\dfrac{1}{z}$
-
    - 遇到 $\overline{z}$ 可以考虑 $\xi=\overline{z}$，且积分路径为圆盘 $|z|=r$ 时有 $\overline{z}=\dfrac{r^2}{z}$
-
    - $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ 考虑 $z=e^{i\theta}$
-
    - $\int_0^{\infty} P(x)\sin x dx$ （或 $\cos x$ ）考虑围道，$x\to z$，$\sin x, \cos x \to$

e^z 然后取虚部或实部（Cauchy 主值）
- 大圆弧引理，小圆弧引理，Jordan 引理

综合题

- 最大模定理，积分的绝对值不等式，Morera定理，Cauchy不等式，Liouville定理，Cauchy积分公式
- 保形变换：
    - 分式线性变换：
        - 圆->直线（圆上一点映为 ∞，另一点为直线经过的一个点）；
        - 月牙区域->角形区域（月牙一个端点映为 ∞，另一个点映为 0，角的大小和月牙端点角大小一致）；
        - 相切圆->条带（切点映为无穷远，条带宽度=切点与圆心连线和两圆交点的像点的距离）
    - 指数变换：条带->角
    - 对数变换：角->条带
    - 幂次变换：角的大小
    - 伸缩变换，平移变换
- $P_n(z)$ 的零点问题：考虑 $P_n(z)$ 的和函数+Rouche定理