空间解析几何

三维空间中，一个方程确定一个面，两个方程确定一条线。

平面方程 法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$ 且过点 (x_0,y_0,z_0) 的平面 $\pi: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

直线方程 方向向量 $\vec{v}=(a,b,c)$ 且过点 (x_0,y_0,z_0) 的直线 $\ell: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$，或参数方程形式：

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases};t\in\mathbb{R}.$$

二次曲面 自行看书

坐标变换 自行看书

其他坐标系 自行看书

多变量函数的微分学

定义 累次极限、连续、偏导、可微的一种证明

证明极限不存在的一种方法 取特殊路径（一般为一次或二次型，如 $y=kx, y=kx^2$、极限得到的式子与 k 有关即可说明极限不存在）

多变量函数连续性与可微性 **定理**对于区域 D 内两个偏导数均存在的二元函数 $f(x,y)$，在区域 D 内：若 f'_x,f'_y 有界，则 f 连续；若 f'_x,f'_y 连续，则 f 可微。

可微的一种证明 若函数在点 (x_0,y_0) 处可微，那么 $\lim\limits_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\dfrac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=0$，其中

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$\mathrm{d}z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$
$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

链式法则 自行看书

Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$

梯度 称向量 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ 为可微数量场 $u=f(x,y,z)$ 的梯度，记为 $\mathrm{grad}f$.

方向导数 定义函数 $f(x,y,z)$ 在 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 方向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\mathrm{grad}\ f\cdot\vec{l}$.

复合函数一阶微分形式不变形 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}\mathrm{d}\zeta=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$，其中 ξ,ζ 是 x,y 的函数.

隐函数求偏导 微分法：对于由隐函数 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y(x)$，取全微分有 $F'_x\mathrm{d}x+F'_y\mathrm{d}y=0$，若 $F'_y\neq0$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

对于三元函数 $F(x,y,z)=0$ 确定的 $z(x,y)$ 同理可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

偏导法公式与上述相同.

此外，对于三个变量、两个方程构成的方程组

$$\begin{cases}F(x,u,v)=0\\ G(x,u,v)=0\end{cases}$$

，有 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

此外，对于三个变量、两个方程构成的方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

，有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

空间曲线和曲面 参数曲线：$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$，$(x_0,y_0,z_0)$ 处切向量 $\vec{r}'(t)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$，切向量为切线方向向量和法平面法向量，由第八章知识易求两者方程；一般地，我们分别称 $\vec{r}''$ 和 $\vec{\kappa}=\vec{r}'\times\vec{r}''$ 为主法向量和副法向量.

参数曲面：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$，$(x_0,y_0,z_0)$ 处法向量 $\vec{n}=\vec{r}'_u(u_0,v_0)\times\vec{r}'_v(u_0,v_0)$，法向量方向为切平面法向，由第八章知识易求其方程.

隐式曲线：由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定的曲线，切向量为 $\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G$.

隐式曲面：由方程 $F(x,y,z)$ 确定的曲面，法向量为 $\mathrm{grad}F$

多变量函数 Taylor 公式 一种用整体法利用单变量 Taylor 公式展开，或者求偏导利用多元函数 Taylor 公式.

多元函数 Taylor 公式：引入算子 $\mathcal{D}=\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}$，则有

$$f(x,y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\mathcal{D}^m f(x_0,y_0)+R_n$$

二元函数极值 极值的必要条件：极值点必须是驻点（函数的一阶偏导均为 0）.

极值的充分条件（二阶条件）：定义二阶 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$，驻点处若 $f(x,y)$ 满足 $\Delta=\nabla^2 f>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>(<)0$，则该点为极小（极大）值；若 $\Delta<0$，则该点不是极值点；若 $\Delta=0$，则无法判断.

条件极值 函数 $f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 的条件下，引入辅助方程 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，条件极值点寄为 $F(x,y)$ 极值点.

多变量函数的重积分

二重积分换元 令 $x=u,y=v$，则有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，常见极坐标换元：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

三重积分换元 令 $x=u,y=v,z=w$，则有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$，常见球坐标换元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$（其中 θ 是极径与 z 轴夹角，φ 是极径与 x 轴夹角），球坐标换元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

⋆ 祝考试顺利！⋆