拉梅系数求解 Hamilton 算子与 Laplace 算子

Yu

School of Physical Science,
University of Science and Technology of China
yuhongfei@mail.ustc.edu.cn

2024 年 6 月 5 日

假设在已设定直交轴 x, y, z 的空间中有下列三族曲面

$$F(x,y,z) = u^1,\ G(x,y,z) = u^2,\ H(x,y,z) = u^3$$

且满足

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$$

则在空间某一区域内，对于确定的 (u^1, u^2, u^3)，三个曲面有唯一确定的交点 $P(u^1, u^2, u^3)$；另外对于原直交系中点 $P(x, y, z)$ 由 F, G, H 可唯一确定一组 (u^1, u^2, u^3)。
上述论述表明了 (x, y, z) 与 (u^1, u^2, u^3) 一一对应。称 (u^1, u^2, u^3) 为点 P 的曲线坐标。

定义

在上述讨论中，由确定的 u^1, u^2, u^3 确定的曲面为**坐标曲面**，分别称为 u^1 曲面、u^2 曲面、u^3 曲面；固定其中两个值 u^i, u^j，两个曲面的交线则为**坐标曲线**。

常见的球坐标、柱坐标均为曲线坐标。

下面要对曲线中每一个点都构造一个**矢量三重系**。对直交系中 $P(x,y,z)$ 构造矢径

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

由 (x,y,z) 与 (u^1,u^2,u^3) 的一一映射，$\boldsymbol{r}$ 也可表示为 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2,u^3)$，由此构造

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}, \qquad \boldsymbol{X}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}, \qquad \boldsymbol{X}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$$

在上述构造中，以 $\boldsymbol{X}_1$ 为例，$\boldsymbol{X}_1$ 表示固定 u_2, u_3，P 对 u_1 的变化率，所以 $\boldsymbol{X}_1$ 是 u_1 曲线的切矢量。同理我们可以构造 u_2, u_3 的切矢量，适当的选择 (u^1,u^2,u^3) 的顺序，就能保障 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 构成一个矢量三重系。

对于任意曲线系，我们都会考虑其线元 $\mathrm{d}s$ 的形式。
在上述曲线系 (u^1, u^2, u^3) 中，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^3}\mathrm{d}u^3$$

$$= \boldsymbol{X}_1\mathrm{d}u^1 + \boldsymbol{X}_2\mathrm{d}u^2 + \boldsymbol{X}_3\mathrm{d}u^3 = \boldsymbol{X}_i\mathrm{d}u^i$$

（这里使用了 Einstein 求和约定）
于是平面中点 $P(u^1, u^2, u^3)$ 到点 $P(u^1 + \mathrm{d}u^1, u^2 + \mathrm{d}u^2, u^3 + \mathrm{d}u^3)$ 之间的距离为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{X}_i\mathrm{d}u^i) \cdot (\boldsymbol{X}_j\mathrm{d}u^j) = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{X}_i\mathrm{d}u^i)\cdot(\boldsymbol{X}_j\mathrm{d}u^j) = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

上式中 $g_{ij} = \boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{X}_j$，称为关于曲线坐标 u^1, u^2, u^3 的度规，上式称为**基本度量形式**。

将 g_{ij} 排列成矩阵，则有下列**度规矩阵**：

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_1\cdot\boldsymbol{X}_3 \\ \boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_2\cdot\boldsymbol{X}_3 \\ \boldsymbol{X}_3\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_3\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3\cdot\boldsymbol{X}_3 \end{pmatrix}$$

且我们有（下式无求和含义）

$$|\boldsymbol{X}_i| = \sqrt{g_{ii}}$$

若在度规矩阵中（下式无求和含义）

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

即坐标曲线两两正交（切矢量内积为 0），我们称这种曲线坐标系为**正交曲线坐标系**。此时度规矩阵

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

球坐标系和柱坐标系均为正交曲线坐标系。

我们仅讨论正交曲线坐标系。在这里对矢量三重系进行归一化

$$\hat{\boldsymbol{u}^1} = \frac{1}{|\boldsymbol{X}_1|}\boldsymbol{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{X}_1 = \frac{1}{h_1}\boldsymbol{X}_1$$

同理

$$\hat{\boldsymbol{u}^2} = \frac{1}{h_2}\boldsymbol{X}_2, \quad \hat{\boldsymbol{u}^3} = \frac{1}{h_3}\boldsymbol{X}_3$$

其中（下式无求和含义）

$$h_i = |\boldsymbol{X}_i| = \sqrt{g_{ii}}$$

称为该正交曲线坐标的**拉梅系数**。

对于已知拉梅系数 h_1, h_2, h_3 的曲线系 (u^1, u^2, u^3)，我们可以得到曲线系中线元

$$\mathrm{d}s^2 = h_i^2(\mathrm{d}u^i)^2$$

和体积元

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$

Jacobi 行列式 $J = h_1 h_2 h_3$

容易求得以下三个常用曲线系的拉梅系数：
直角坐标系 (x, y, z)：

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

柱坐标系 (r, θ, z)：

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1$$

球坐标系 (r, θ, φ)：

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r^2 \sin\theta$$

定理 (fundamental theorem for gradients)

$$f(P') - f(P) = \int_P^{P'} \mathrm{d}f = \int_P^{P'} (\nabla f)\mathrm{d}\cdot \boldsymbol{r}$$

考虑路径 d$\boldsymbol{r}$，假设 P 在数量场 $f(u^1, u^2, u^3)$ 中，则

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\nabla f)_i \cdot \boldsymbol{X}_i \mathrm{d}u^i = h_i \nabla_i f \mathrm{d}u^i$$

上式中 $(\nabla f)_i$ 表示 ∇f 在 u^i 曲线的切向上的分矢量，$\nabla_i f = |(\nabla f)_i|$。
我们又有

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathrm{d}u^i$$

比较系数，容易得到（下式无求和含义）：

$$\nabla_i f = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

即数量场的梯度为

$$\nabla f \equiv \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} \hat{\boldsymbol{u}}^i$$

$$\boxed{\nabla f \equiv \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathbf{1}} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathbf{2}} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathbf{3}}}$$

$$\nabla f \equiv \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u^i}\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{i}}$$

定理 (divergence theorem)

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V$$

考虑空间中体积元 $\mathrm{d}V$，体积元的封闭正向外表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$。则有

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$

向量场 $\boldsymbol{A}(u^1, u^2, u^3) = A_i \hat{\boldsymbol{u}}^i$ 在前表面（u^1 曲面，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}|_{u^1} = -h_2 h_3 \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3 \hat{\boldsymbol{u}}^1$）上的曲面积分元为

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}|_{u^1} = -(A_1 h_2 h_3)\mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$

而后表面则有

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}|_{u^1+\mathrm{d}u_1} = (A_1 h_2 h_3)\mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^3$$

根据

$$F(u+\mathrm{d}u)-F(u)=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$$

将上页两式相加，得到向量场 $\boldsymbol{A}$ 对前后两表面的通量：

$$\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(A_1h_2h_3)\right]\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^1}(A_1h_2h_3)\mathrm{d}V$$

同理求上下表面和左右表面通量，并用 Jacobi 行列式 $J=h_1h_2h_3$ 简记，则有

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{JA_i}{h_i}\right)\mathrm{d}V$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^2}(A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u^3}(A_3 h_1 h_2)\right]}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{J A_i}{h_i}\right)$$

定理 (Stoke's theorem)

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

考虑空间中曲面 d$\boldsymbol{a}$，曲面正向边界 d$\boldsymbol{r}$。若曲面 d$\boldsymbol{a}$ 在 u^3 曲面上，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = h_1 h_2 \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 \hat{\boldsymbol{u}^3}$$

向量场 $A(u^1, u^2, u^3) = A_i \hat{\boldsymbol{u}^i}$ 在右边界（u^1 曲线，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}|_{u_2} = h_1 \mathrm{d}u^1 \hat{\boldsymbol{u}^1}$）上的路径积分元为

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}|_{u^2} = (h_1 A_1) \mathrm{d}u^1$$

而左侧边界有

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}|_{u^2 + \mathrm{d}u^2} = -(h_1 A_1) \mathrm{d}u^1$$

与求散度相似的，我们将左右边界相加有

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(h_1 A_1)\right] \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2$$

同理求上下边界路径积分，相加得到整个环路积分

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(u_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(u_1 A_1)\right] \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2$$

$$= \frac{1}{u^1 u^2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(u_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(u_1 A_1)\right] \hat{\boldsymbol{u^3}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

同理可从 u^3 曲面求的 u^1, u^2 曲面，然后拓展到任意曲面。

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}\equiv&\frac{1}{u^2u^3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(u_3A_3)-\frac{\partial}{\partial u^3}(u_2A_2)\right]\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{1}}\\&\frac{1}{u^1u^3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(u_1A_1)-\frac{\partial}{\partial u^1}(u_3A_3)\right]\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}\\&\frac{1}{u^1u^2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(u_2A_2)-\frac{\partial}{\partial u^2}(u_1A_1)\right]\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{3}}\end{aligned}}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\equiv\frac{1}{J}\begin{pmatrix}h_1\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{1}} & h_2\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{1}} & h_3\hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{1}}\\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{pmatrix}$$

$$\Delta := \nabla^2$$

$$\boxed{\Delta f \equiv \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\right)\right]}$$

$$\Delta f \equiv \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{J}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)$$

[1] 冯承天. 从矢量到张量 [M]. 上海：华东师范大学出版社，2021
[2]David J. Griffiths. 电动力学导论 [M]. 第 4 版. 北京：机械工业出版社，2021.5.

Thank you !