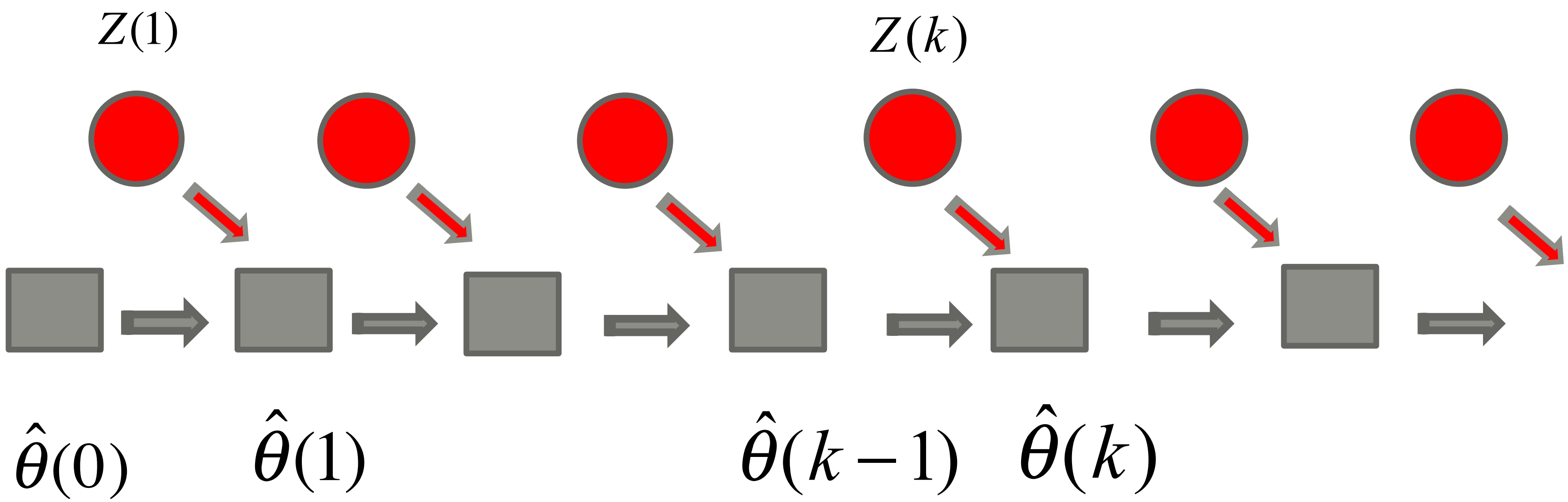
最小二乘法

- 深入解析

递推最小二乘法的估计性能

递推最小二乘的推导思想



$$\hat{\theta}(k-1) = [\underline{H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1}}]^{-1} H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1}$$

$$\hat{\theta}(k-1) = \underline{M_{k-1}} H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1} \qquad \hat{\theta}(k) = M_k H_k^T W_k Z_k$$

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} \\ H(k) \end{pmatrix} \qquad W_k = \begin{pmatrix} W_{k-1} & 0 \\ 0 & W(k) \end{pmatrix}$$

$$Z_k = \begin{pmatrix} Z_{k-1} \\ Z(k) \end{pmatrix} \qquad N_k \;?\; \begin{bmatrix} N_{k/1} \\ N(k) \end{bmatrix}$$

$$M_k^{-1} = M_{k-1}^{-1} + H^T(k) W(k) H(k) \tag{3.38}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + M_k H^T(k) W(k) (Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)) \tag{3.39}$$

最小二乘法估计性能的意义

估计方差的定义为：

$$P(k)=E[(\theta-\hat{\theta}(k))(\theta-\hat{\theta}(k))^{T}]$$

所得的估计方差越小，估计方法就越好。估计方差**最小**的，估计方法就是最好的了，我们将其称之为**最优**估计。

最小二乘法的估计方差是什么

是最优的吗

滤波增益 $K(k)$ 为

$$K(k)=M_k H^T(k)R^{-1}(k)$$

将递推最小二乘估计方法估计

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+K(k)(Z(k)-H(k)\hat{\theta}(k-1))$$

代入 $P(k)=E[(\theta-\hat{\theta}(k))(\theta-\hat{\theta}(k))^T]$ 式，可以得到：

$$P(k)=E[(\theta-\hat{\theta}(k))(\theta-\hat{\theta}(k))^T]$$

$$=E[(\theta-\hat{\theta}(k-1)-K(k)(Z(k)-H(k)\hat{\theta}(k-1)))(\theta-\hat{\theta}(k-1)-K(k)(Z(k)-H(k)\hat{\theta}(k-1))$$

再将测量方程 $Z(k)=H(k)\theta+N(k)$ 代入上式，考虑到待估计值 θ 与 $N(k)$ 不相关，经整理后我们可以得到：

$$P(k)=(I-K(k)H(k))P(k-1)(I-K(k)H(k))^T+K(k)R(k)K^T(k) \tag{3.40}$$

递推最小二乘方法的估计结果是最优的嘛？

- 也就是（3.38-39）给出的估计能够使估计方差（3.40）最小吗？要是能使估计方差（3.40）最小，那最小二乘方法就是最优的。
- 反过来，能使估计方差（3.40）最小的滤波增益又是什么呢？我们来求解使（3.40）得到最小值的，如果它与（3.38-39）中的 相同就回答了这个问题。

令（3.13）式 $P(k)$ 求偏导得到的式子等于0，即：

$$\frac{\partial P(k)}{\partial K(k)} = 2(I - K(k)H(k))P(k-1)(-H^T(k)) + 2K(k)R(k) = 0$$

经整理后得关于到 $K(k)$ 的公式如下

$$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1} \qquad (3.41)$$

两个重要结论

1. M_k 实际上是估计方差 $P(k)$，按照式（3.38），估计方差也满足 $P^{-1}(k)=P^{-1}(k-1)+H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$

2. $K(k)=P(k-1)H^T(k)(R(k)+H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$ 和 $K(k)=P(k)H^T(k)R^{-1}(k)$ 是等价的

也就是说，最小二乘法是最优的，因为它的滤波增益和最优的滤波增益一样！！

利用最小二乘性能指标得到的估计方法

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+K(k)(Z(k)-H(k)\hat{\theta}(k-1)) \tag{3.42}$$

可以得到最小的估计方差 $P(k)$，其中滤波增益 $K(k)$ 有以下两种不同的计算方法：

$$K(k)=P(k)H^{T}(k)R^{-1}(k) \tag{3.43}$$

$$K(k)=P(k-1)H^{T}(k)(R(k)+H(k)P(k-1)H^{T}(k))^{-1} \tag{3.44}$$

和估计方差 $P(k)$ 可以使用如下两种求法来计算：

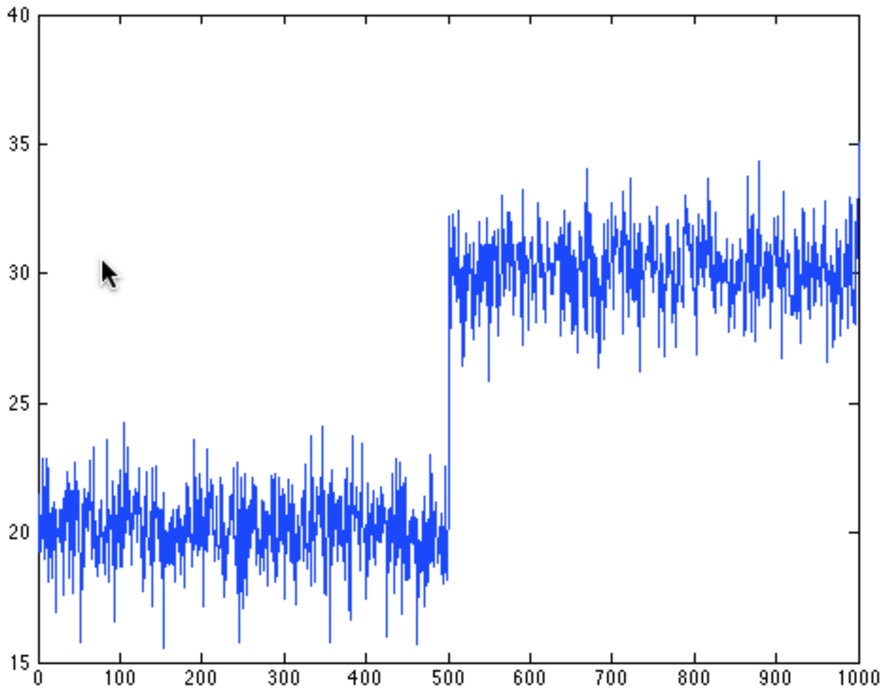
$$P(k)=(P^{-1}(k-1)+H^{T}(k)R^{-1}(k)H(k))^{-1} \tag{3.45}$$

$$P(k)=[I-K(k)H(k)]P(k-1)[I-K(k)H(k)]^{T}+K(k)R(k)K^{T}(k) \tag{3.46}$$

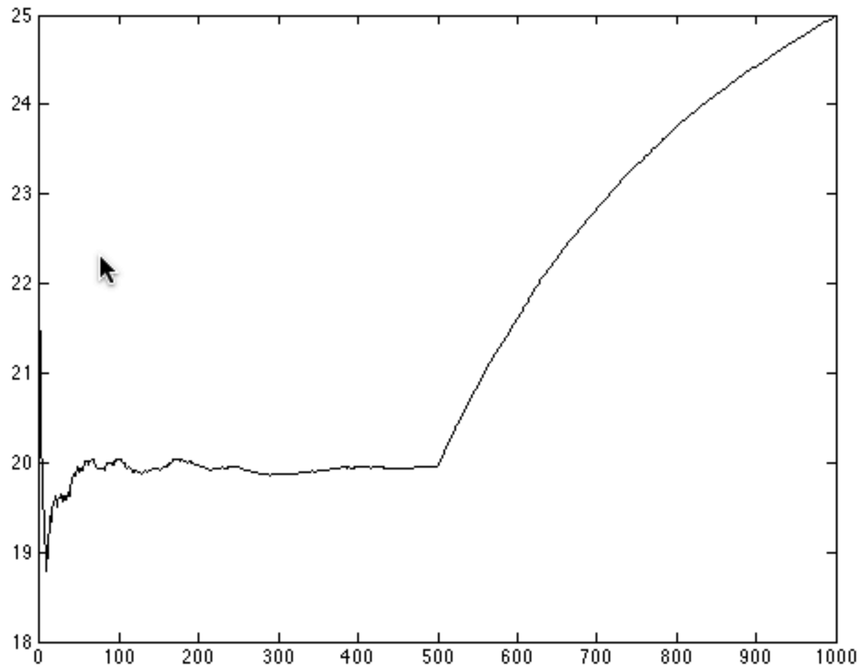
在附录中（b3.4）还提到下面这样的估计方差 $P(k)$ 计算方法，

$$P(k)=(I-K(k)H(k))P(k-1) \tag{3.47}$$

最小二乘方法只能估计恒值未知数



传感器得到的具有突变特征的数据



最小二乘方法的估计结果

小结

- 最小二乘估计方法是最优的
- 最小二乘估计方法只能估计恒值未知量
- 该方法是下一节Kalman滤波器的基础