Kalman 滤波器深入研究

- 估计方差的研究
- 稳态估计计算及 MATLAB 程序

现将离散 Kalman 滤波器总结如下：

1. 系统方程为

$$x(k+1) = A(k)x(k) + w(k)$$

$$z(k) = C(k)x(k) + v(k)$$

$$E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta(k-j)$$

$$E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta(k-j)$$

$$E[w(k)v^T(j)] = 0$$

2. Kalman 滤波器初始化

$$\hat{x}(0|0) = E[x(0)]$$

$$P(0|0) = E[(x(0) - \hat{x}(0|0))(x(0) - \hat{x}(0|0))^T]$$

3. Kalman 滤波器每一步计算如下，其中 $k=1,2,3,\cdots$

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big) \tag{4-24}$$

$$\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \tag{4-25}$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)(C^T(k)P(k|k-1)C(k)+R(k))^{-1} \tag{4-26}$$

$$P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \tag{4-27}$$

$$P(k|k)=(I-K(k)C(k))P(k|k-1) \tag{4-28}$$

```
function [xe,pk,p1]=kalmanfun(A,C,Q,R,xe,z,p)

    xe=A*xe;                    %根据（4-25）计算向前一步预测$\hat{x}(k|k-1)$
    P1=A*p*A'+Q;                %根据（4-27）计算向前一步估计$P(k|k-1)$
    K=p1*C'*inv(C*p1*C'+R);          %根据（4-26）计算估计增益$K(k)$
    xe=xe+K*(z-C*xe);                  % 根据（4-25）计算估计$\hat{x}(k|k)$
    pk=(eye(size(p1))-1*C)*p1;    % 根据(4-28)计算估计方差$P(k|k)$
```

KALMAN 滤波器的增益和估计方差也还有另外形式：

$$K(k) = P(k \mid k)\mathrm{C}^{\mathrm{T}}(k)R^{-1}(k) \tag{4-29}$$

和

$$P^{-1}(k \mid k) = P^{-1}(k \mid k-1) + C^{T}(k)R^{-1}(k)C(k) \tag{4-30}$$

例 4.1 假设对于无噪声牛顿动力学系统，位置、速度、恒加速度分别为r、v、a。这个系统可以描述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \\ a \end{bmatrix} \tag{4-33}$$

系统离散化后可以写为$x(k+1) = Ax(k)$，其中$A = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

假设测量位置的噪声方差为σ^2，则系统的测量方程可写为：

$$z(k)=C(k)x(k)+v(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(k)+v(k) \qquad (4\text{-}38)$$

其中，测量噪声为：

$$v(k)\sim(0,\sigma^2) \qquad (4\text{-}39)$$

下面来研究一下估计方差的变化，假设向前一步预测估计方差为

$$P(k|k-1)=\begin{bmatrix} P_{11}(k|k-1) & P_{21}(k|k-1) & P_{31}(k|k-1) \\ P_{12}(k|k-1) & P_{22}(k|k-1) & P_{32}(k|k-1) \\ P_{13}(k|k-1) & P_{23}(k|k-1) & P_{33}(k|k-1) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}41)$$

状态估计方差为

$$P(k|k)=\begin{bmatrix} P_{11}(k|k) & P_{21}(k|k) & P_{31}(k|k) \\ P_{12}(k|k) & P_{22}(k|k) & P_{32}(k|k) \\ P_{13}(k|k) & P_{23}(k|k) & P_{33}(k|k) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}42)$$

先将$C(k)=[1\ \ 0\ \ 0]$代入滤波增益（4-26），得到

$$
\begin{aligned}
&P(k|k)=P(k|k-1)\\
&-\frac{1}{P_{11}(k|k-1)+\sigma^2}\begin{bmatrix} P_{11}^2(k|k-1) & P_{11}(k|k-1)P_{12}(k|k-1) & P_{11}(k|k-1)P_{13}(k|k-1) \\ P_{12}(k|k-1)P_{11}(k|k-1) & P_{22}^2(k|k-1) & P_{12}(k|k-1)P_{13}(k|k-1) \\ P_{13}(k|k-1)P_{11}(k|k-1) & P_{13}(k|k-1)P_{12}(k|k-1) & P_{33}^2(k|k-1) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

用这个表达式说明估计方差从$P(k|k-1)$到$P(k|k)$的迹在减小。

例 4.2 考虑如下游走模型的标量系统

$$x(k+1)=x(k)+w(k)$$

$$z(k)=x(k)+v(k)$$

$$w(k)\sim(0,9)$$
$$v(k)\sim(0,4)$$

例如，它可能代表直接测量的缓慢变量 $x(k)$，其变化由噪声项决定，测量误差由测量噪声项决定，

问题是：求解滤波增益的稳态值 K_∞。

解：由系统可知，$A = C = 1,\ Q = 9,\ R = 4$，代入（4-31），得到 $P_\infty = 12$，

再将 P_∞ 代入（4-26）得到的 $K_\infty = \dfrac{12}{12+4} = 0.75$。

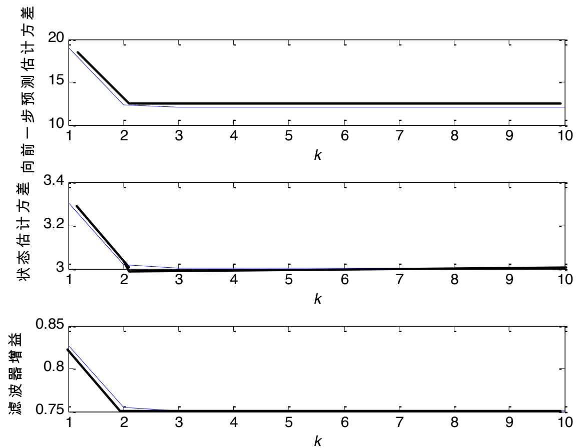
进一步还可以将 P_∞ 和 K_∞ 代入（4-28）得状态估计方差稳态值 $P(\infty|\infty)$，得：

$$P(\infty|\infty) = (I - K_\infty C)P_\infty = (1-0.75)\times 12 = 3$$

```
function [pp1,pp,KK]=steadycov(A,C,Q,R,I,p0)
p=p0*ones(size(A));
pp1=[];pp=[];KK=[];
for i=1:I
p1=A*p*A'+Q;
K=p1*C'*inv(C'*p1*C+R);
p=(eye(size(A))-K*C)*p1;
pp1=[pp1 diag(p1)];
pp=[pp diag(p)];
KK=[KK K];
end
```

主程序

```
clc
clear
A=1;C=1;Q=9;R=4;I=10;p0=10;
[pp1,pp,KK]=steadycov(A,C,Q,R,I,p0);
subplot(3,1,1);plot(pp1);
subplot(3,1,2);plot(pp);
subplot(3,1,3);plot(KK);
```



向前一步预测估计方差
20
15
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k
状态估计方差
3.4
3.2
3
k
滤波器增益
0.85
0.8
0.75
k

利用滤波器增益的稳态值，将（4-24）、（4-25）状态估计的过程简化如下

$$\hat{x}(k \mid k) = \hat{x}(k-1 \mid k-1) + 0.75\Big(z(k) - \hat{x}(k-1 \mid k-1)\Big) \tag{4-48}$$

在每一步的测量到来之后，可以利用上式快速得到当前步的状态估计，计算非常简单，这也是 Kalman 可以在很多情况下都能够做到实时估计的原因。

总结：

Kalman 滤波器五个公式

实时估计的实现——稳态估计