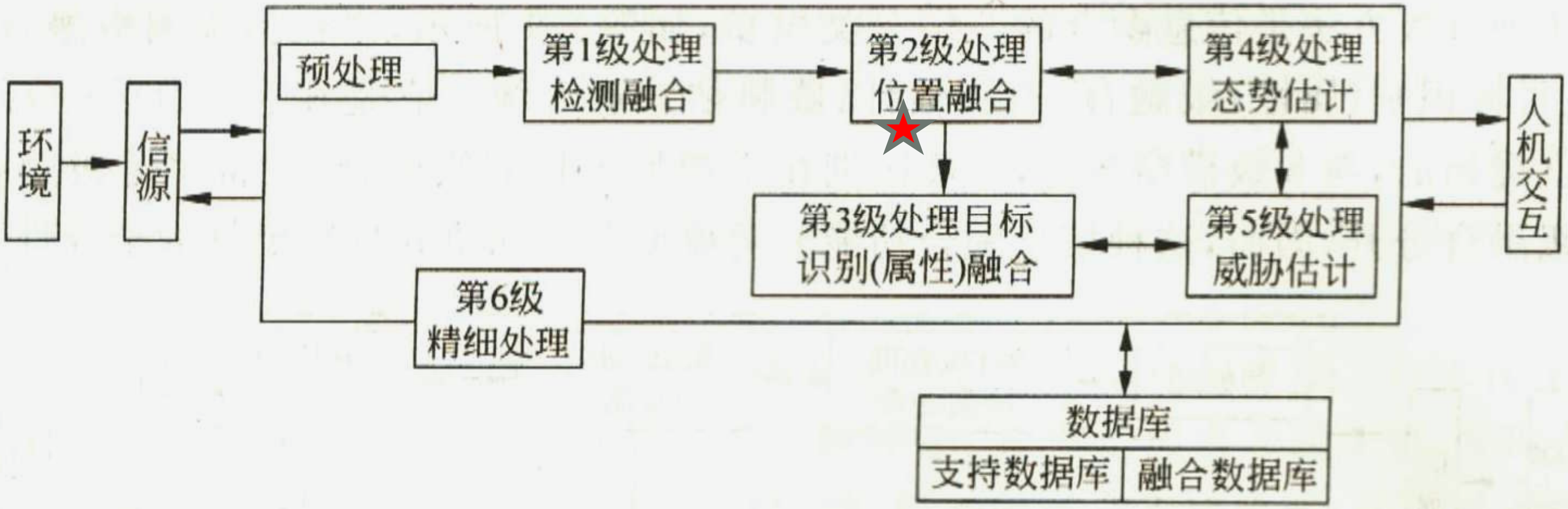
第3章 最小二乘估计

课堂解读

信息融合的级别
——6级模型



问题

- 最小二乘法和平均有什么区别？
- 如果温度的变化满足一次曲线，状态方程的形式是啥样子的？为啥要写成矩阵形式的状态方程？
- PPT第4页上，（3.2a）是如何包含所有测量值的？
- 推导一下最小二乘性能函数求极值的过程，获得估计参数的计算方法。
- 加权最小二乘方法和基本的最小二乘方法有何区别，如何取权值？
- 递推最小二乘方法和基本的最小二乘方法有何区别？看懂它的推导过程。

最小二乘测量数据方程

若我们得到了k个观测数据，将这k个观测数据写成如下向量形式：

$$Z_k=\begin{pmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ \cdots \\ Z(k) \end{pmatrix} \qquad H_k=\begin{pmatrix} H(1) \\ H(2) \\ \cdots \\ H(k) \end{pmatrix} \qquad N_k=\begin{pmatrix} N(1) \\ N(2) \\ \cdots \\ N(k) \end{pmatrix}$$

则k个观测数据满足如下方程

$$Z_k=H_k\theta+N_k \tag{3.2a}$$

最小二乘法的性能指标及结果

我们将求和的性能指标写成下面矩阵形式便于求导运算：

$$J(\hat{\theta}) = (Z_k - H_k\hat{\theta})^T (Z_k - H_k\hat{\theta}) \qquad (3.3b)$$

利用求极值的方法，获得估计方法

$$\hat{\theta} = (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T Z_k \qquad (3.4)$$

加权最小二乘方法

考虑每个测量时刻的测量噪声方差，设线性最小二乘加权估计的性能指标为

$$J_w(\hat{\theta}) = (Z_k - H_k\hat{\theta})^T W (Z_k - H_k\hat{\theta})$$

接下来的任务是选择 $\hat{\theta}$ 使之达到最小。

解上述方程得到

$$\hat{\theta} = (H_k^T W H_k)^{-1} H_k^T W Z_k \qquad (3.5)$$

递推最小二乘方法

现将递推最小二乘估计总结如下：

设 M_0，$\hat{\theta}(0)$ 为迭代初始值，一般 $\hat{\theta}(0)$ 为一合适的数，M_0 为一大的正数或正定矩阵，其维数与 $H^T(k)W(k)H(k)$ 相同。

$$M_k^{-1} = M_{k-1}^{-1} + H^T(k)W(k)H(k) \tag{3.11a}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + M_k H^T(k)W(k)(Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)) \tag{3.11b}$$