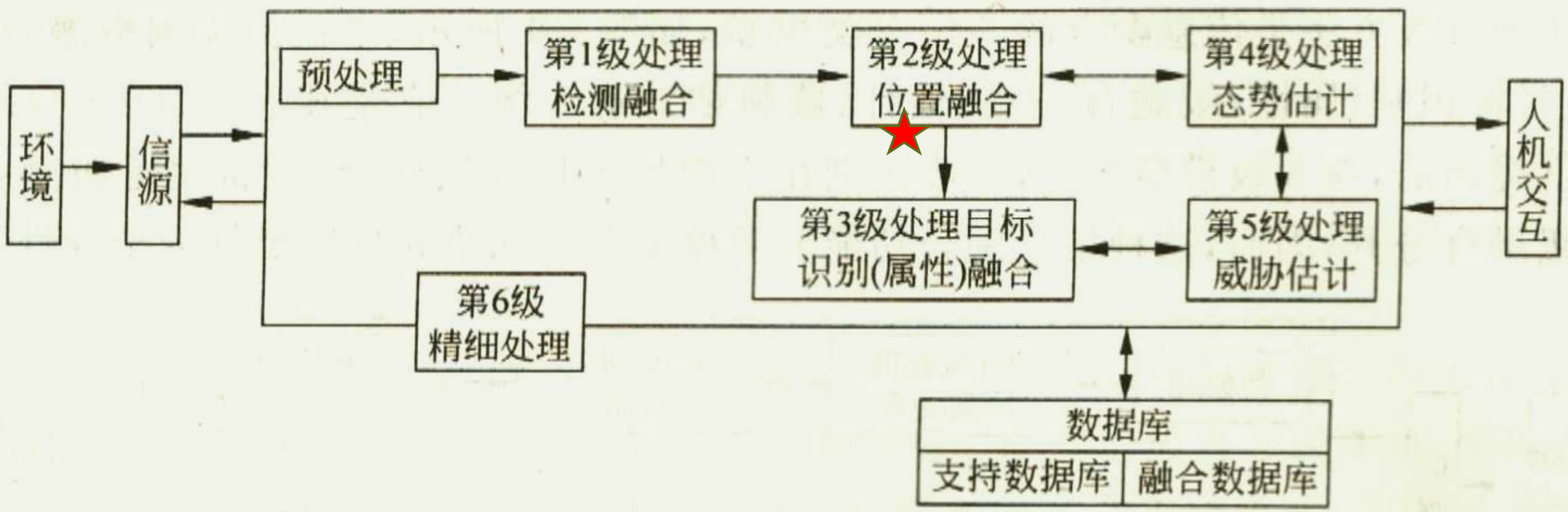
信息融合的级别
——6级模型

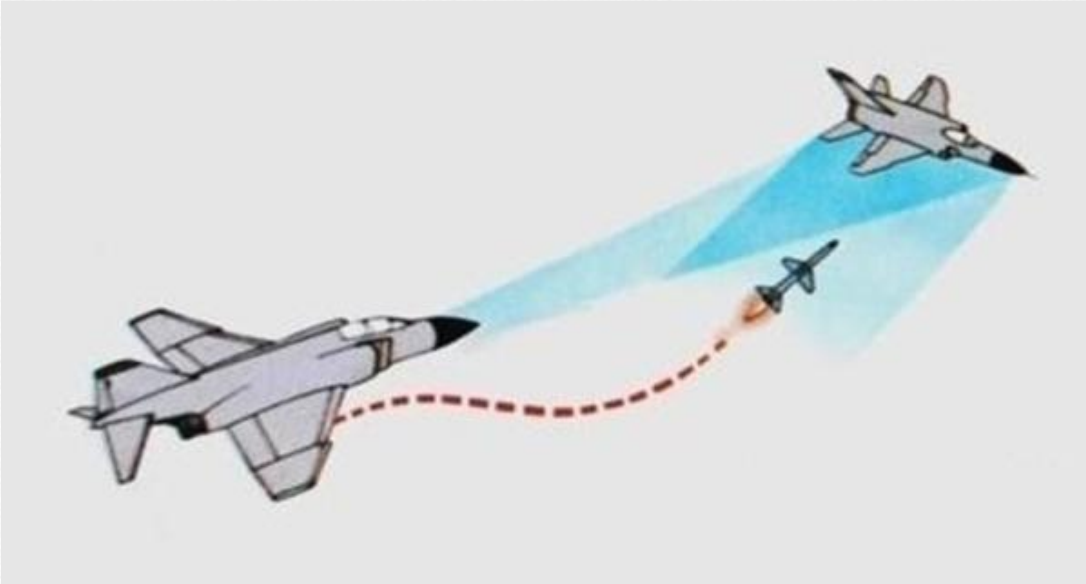


kalman滤波器

金学波

北京工商大学

应用



如何描述被估计量是变化的

- 系统模型增加一个
- 称之为 过程模型（process model）

假设有线性离散系统的过程模型及测量模型如下

$$x(k+1)=A(k)x(k)+w(k) \tag{4.1}$$

$$z(k)=C(k)x(k)+v(k) \tag{4.2}$$

其中 $x(k)$ 是待估计量， $z(k)$ 是通过传感器得到的测量数据。我们一般将（4.1）称为系统模型，指的是系统中待估计状态随着时间的变化规律。

两个需要注意的量

◆ $\hat{x}(k|k)$ 是使用 k 时刻及其以前的各个时刻的测量值 $z(k)$ 估计 k 时刻的状态 $x(k)$ 期望值，即 $\hat{x}(k|k)=E[x(k)|z(1),z(2),\cdots z(k)]$；

◆ $\hat{x}(k|k-1)$ 是使用 k 时刻以前的各个时刻（注意：不包括 k 时刻）的测量值，来估计 k 时刻的状态 $x(k)$ 期望值，即 $\hat{x}(k|k-1)=E[x(k)|z(1),z(2),\cdots z(k-1)]$；

◆先验估计 $\hat{x}(k|k-1)$ 和后验估计 $\hat{x}(k|k)$ 都是同一个量的 $x(k)$ 估计，然而 $\hat{x}(k|k-1)$ 在考虑测量值 $z(k)$ 之前的估计，我们也称之为向前一步预测估计，而 $\hat{x}(k|k)$ 是在考虑测量值 $z(k)$ 之后的估计。

向前一步预测估计 $\hat{x}(k|k-1)$ 的求法

待估计量 $x(k)$ 随着时间的推移按照（4.1）而改变的，也就是说，在 k 时刻的测量 $z(k)$ 到来之前，状态 $x(k)$ 在 $k-1$ 时刻的估计值 $\hat{x}(k-1|k-1)$ 会随着时间的推移而改变，在 $z(k)$ 到来时，$\hat{x}(k-1|k-1)$ 已经变化为 $\hat{x}(k|k-1)$

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \qquad (4.4)$$

估计方差

$$P(k|k-1) = E[(x(k)-\hat{x}(k|k-1))(x(k)-\hat{x}(k|k-1))^T]$$

计算后得

$$P(k|k-1) = A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \qquad (4.7)$$

更新估计 $\hat{x}(k|k)$ 的求法

用 $\hat{x}(k|k-1)$ 代替中的 $\hat{\theta}(k-1)$， $\hat{x}(k|k)$ 代替（3.20）中的 $\hat{\theta}(k)$，用 $P(k|k-1)$ 代替 $P(k-1)$， $P(k|k)$ 代替 $P(k)$，得到

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big) \qquad （4.10）$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k))^{-1} \qquad （4.11）$$

$$P(k|k)=\big(I-K(k)C(k)\big)P(k|k-1) \qquad （4.12）$$

Kalman滤波器总结

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big) \quad (4.24)$$

$$\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \quad (4.25)$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k))^{-1} \quad (4.26)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \quad (4.27)\\&P(k|k)=(I-K(k)C(k))P(k|k-1) \quad (4.28)\end{aligned}}$$

Kalman 滤波器

想要知道的量

这叫向前一步预测，怎么求呢？看

1. $\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big)$

2. $\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)$

这项特别重要，决定的滤波器的性能，叫做滤波器增益。怎么求的？看右边

3. $K(k)=P(k|k-1)C^{T}(k)(C(k)P(k|k-1)C^{T}(k)+R(k))^{-1}$

这里又多了个新的值，这个叫向前一步预测方差。怎么求呢？看左边

4. $P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^{T}(k-1)+Q(k-1)$

5. $P(k|k)=(I-K(k)C(k))P(k|k-1)$

这两个公式在做循环，互相利用、而且前一步还被后一步利用着

滤波器的稳态值

当$k\rightarrow\infty$时，$P(k|k-1)$的稳态值，将（4.27）式中的k变为$k+1$，再将（4.28）代入，并利用（4.28）式的滤波器增益得到：

$$P(k+1|k)=A(k)P(k|k)A^T(k)+Q(k)$$

$$=A(k)(I-K(k)C(k))P(k|k-1)A^T(k)+Q(k)$$

$$=A(k)P(k|k-1)A$$

稳态增益是什么，有何意义？

$$=A(k)P(k|k-1)A$$

$$-A(k)P(k|k-1)C^T(k)(R(k)+C(k)P(k|k-1)C^T(k))^{-1}C(k)P(k|k-1)A^T(k)+Q(k)$$

如果协方差矩阵收敛，即$k\rightarrow\infty$，$P(k+1|k)=P(k|k-1)\rightarrow P_\infty$，上式变为:

$$P_\infty=A(k)P_\infty A^T(k)-A(k)P_\infty C^T(k)(R(k)+C(k)P_\infty C^T(k))^{-1}C(k)P_\infty A^T(k)+Q(k) \quad (4.21)$$

Kalman滤波器的优势

- 在系统参数已知的条件下，能够得到最优的估计结果
- 在系统参数已知的条件下，可以通过求解给Riccati方程得到稳态的滤波增益，很方便的实现在线计算。