Прайсинг европейских опционов с помощью алгоритма Монте-Карло

Денис Соловьев, Б02-208

1. Введение

Ценообразование опционов — одна из ключевых задач финансовой математики, целью которой является определение справедливой стоимости производных контрактов, таких как опционы колл и пут. Традиционные методы, например модель Блэка-Шоулза, используют аналитические решения, однако симуляция Монте-Карло предоставляет гибкий численный подход для оценки стоимости опционов, особенно в случае сложных инструментов или стохастических процессов. Большинство банков и фондов используют именно алгоритм Монте-Карло для прайсинга финансовых инструментов, так как более сложные модели и инструменты не имеют аналитического решения, как модель Блек-Шоулза для европейского опциона. Однако для демонстрации данного алгоритма мы будем использовать самый простой инструмент и дериватив - модель Блек-Шоулза и европейский колл опцион, чтобы иметь возможность сравнить полученные результаты с аналитическими. В данной работе показано, как рассчитать стоимость европейских опционов колл и пут с использованием симуляции Монте-Карло на языке Python, а также описывается методология, реализация и результаты.

2. Симуляция Монте-Карло

Симуляция Монте-Карло позволяет приближенно вычислить ожидаемую стоимость выплаты по опциону, генерируя множество случайных траекторий цены базового актива и усредняя дисконтированные выплаты. То есть, если говорить в терминах теорий вероятности Монте-Карло позволяет получить матожидание некоторого случайного процесса моделируя его N раз. Ошибка данного метода оценивается как $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$, где N - это число симуляций.

3. Европейский опцион

Европейский колл-опцион — это финансовый контракт, дающий покупателю право, но не обязательство, купить базовый актив (например, акции) по заранее установленной цене, называемой *ценой исполнения* (K), в определенную дату, называемую *датой экспирации* (T). Продавец опциона обязан поставить актив, если покупатель решает его исполнить.

Основные характеристики:

- **Исполнение**: Только в дату экспирации T (в отличие от американских опционов).
- **Выплата**: На момент экспирации выплата равна $\max(S_T - K{,}0)$, где S_T — цена базового актива.
- **Цена опциона**: Зависит от начальной цены актива (S_0), K, T, безрисковой ставки (r), волатильности (σ)

Европейский пут-опцион — это финансовый контракт, предоставляющий покупателю право, но не обязательство, продать базовый актив (например, акции) по заранее установленной цене, называемой *ценой исполнения* (K), в определенную дату, называемую *датой экспирации* (T). Продавец опциона обязан купить актив, если покупатель решает его исполнить.

Основные характеристики:

- **Исполнение**: Только в дату экспирации T (в отличие от американских опционов).
- **Выплата**: На момент экспирации выплата равна $\max(K - S_T{,}0)$, где S_T — цена базового актива.
- **Цена опциона**: Зависит от начальной цены актива (S_0), K, T, безрисковой ставки (r), волатильности (σ)..

Европейские опционы используются для спекуляций, хеджирования или управления рисками, предоставляя ограниченный убыток (премия опциона) и потенциально неограниченную прибыль.

4. Модель Блека-Шоулза

Для моделирования цены европейского колл-опциона сначала необходимо определить процесс, которому следует цена актива на протяжении всего срока действия опциона T. В финансовой литературе считается, что цены акций подчиняются геометрическому броуновскому движению. Предположим, что цена актива S_t связана с акцией, которая выплачивает ежегодный дивиденд q, и имеет ожидаемую доходность μ, равную безрисковой процентной ставке $r - q$. Волатильность σ предполагается постоянной.

Цена актива может быть смоделирована с помощью стохастического дифференциального уравнения (СДУ). По сути, это дифференциальное уравнение, в котором хотя бы один из членов является случайным процессом. Сначала полезно рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение в контексте нашей задачи. Предположим, что волатильность равна нулю, то есть цена актива ведет себя как вклад на сберегательном счете с годовой процентной ставкой μ. Тогда изменение цены за любой временной интервал описывается следующим образом:

$$dS_t = \mu S_t dt. \tag{1}$$

Зная текущую цену актива S_0, мы можем с уверенностью определить цену S_t в момент времени t, разделяя переменные и интегрируя:

$$\int_{S_0}^{S_t} \frac{dS}{S} = \int_0^t \mu\, dt. \tag{2}$$

Это дает:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \mu t, \tag{3}$$

или

$$S_t = S_0 e^{\mu t}. \tag{4}$$

Однако, поскольку цены активов демонстрируют случайное поведение, необходимо включить стохастический член в уравнение. Простая интеграция уже не дает аккуратного результата, как в случае выше. Чтобы учесть случайность, присущую фондовым рынкам, мы добавляем дополнительный член, и стохастическое дифференциальное уравнение принимает вид:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{5}$$

где W_t — винеровский процесс. Теперь уравнение представляет собой процесс Ито.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо кратко пояснить лемму Ито.

Лемма Ито, приведенная ниже, утверждает, что если случайная величина следует процессу Ито (как в примере выше), то другая дважды дифференцируемая функция $G(S_t,t)$, зависящая от цены актива S_t и времени t, также следует процессу Ито:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial G}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial G}{\partial S} dW_t. \tag{6}$$

(Примечание: нотация ниже адаптирована для согласованности с приведенными выше уравнениями в контексте опционов.)

Можно было бы применить лемму Ито к $G = S_t$, чтобы получить арифметическое броуновское движение, однако использование $G = \ln(S_t)$ предпочтительнее, так как оно обеспечивает свойство, при котором цена актива всегда остается строго больше нуля. Применяя лемму Ито к $G = \ln(S_t)$, сначала вычислим частные производные по S_t и t:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Подставляя частные производные в лемму Ито, получаем:

$$dG = \left(0 + \mu S_t \cdot \frac{1}{S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\right) dt + \sigma S_t \cdot \frac{1}{S_t} dW_t, \tag{10}$$

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t. \tag{11}$$

Таким образом, распределение $G_t = \ln(S_t)$ задается как:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t. \tag{12}$$

Распределение цены актива на момент экспирации получается путем преобразования этого уравнения, беря экспоненту от обеих частей:

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t\right). \tag{13}$$

Это же уравнение можно записать в виде:

$$lnS_t = lnS_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int_0^t \sigma dW_t \tag{14}$$

5. Формула Блэка-Шоулза

Формула Блэка-Шоулза — это аналитический метод оценки стоимости европейских колл- и пут-опционов. Еще раз отметим, что существование аналитического решения в задаче прайсинга деривативов это редкость, поэтому алгоритм Монте-Карло так важен в этой сфере.

Для европейского **колл-опциона** цена C определяется как:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \tag{15}$$

где:

- S_0 — текущая цена базового актива,
- K — цена исполнения (страйк),
- r — безрисковая процентная ставка (годовая),
- T — время до экспирации (в годах),

- σ — волатильность цены актива,
- $N(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения,
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$,
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Для европейского **пут-опциона** цена P задается как:

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1), \tag{16}$$

где параметры те же, что и для колл-опциона.