武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试高等数学 A1 解答

一、（5 分）若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，且在$x_0$的某去心邻域内$g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$必等于0，为什么？

解 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=A\cdot 0=0$

二、（8 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x} & ,x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),\text{且}x\neq 0,\\ 1 & ,x=0.\end{cases}$ 试确定常数 a,b,c 的一组值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

解: 要使$f(x)$在$x=0$处连续, 须$\lim\limits_{x\to 0} f(x)= f(0)=1$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=1$

又$x\to 0$时, $\sin^2 x\to 0$

则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^x+be^{-x}-c)=0$

即$a+b-c=0$ (1)

$$又\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{-x}-c}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{-x}-c}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x-be^{-x}}{2x}=1$$

则$\lim\limits_{x\to 0}(ae^x-be^{-x})=0$, 即$a-b=0$ (2)

$$又\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^x-c}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{-x}}{2}=\frac{a+b}{2}=1$$

即$a+b=2$ (3)

解(1)(2)(3)$a=b=1,c=2$即$a=b=1,c=2$时, $f(x)$在$x=0$处连续

三、（5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n})\right]$

解 设$u_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}$

$$=\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\sin x$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}\qquad \lim_{x\to0}\left[\lim_{n\to\infty}u_n\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

四、（5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$

解　解原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x^2}{\pi}\cdot\frac{2x}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}\ln2\,\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x+1}}}=\dfrac{2}{\ln2}$

五、（5 分）设 u,v 均是 x 的可微函数 $y(x)=\ln\sqrt{u^2+v^2}$ ，求 dy

解　$dy=y'(x)dx\ =\dfrac{u\cdot u'+v\cdot v'}{u^2+v^2}\mathrm{d}\,x$

六、（5 分）求函数$I(x)=\int_e^x\dfrac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$在区间$\left[e，e^2\right]$上的最大值.

解　由$I'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-2x+1}=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}>0，\ x\in\left[e，e^2\right]$

知$I'(x)$在$\left[e，e^2\right]$上单调增加

故　$\underset{e\le x\le e^2}{amx}I(x)=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln t}{(t-1)^2}dt=-\int_e^{e^2}\ln t d(\dfrac{1}{t-1})$

$$=-\frac{\ln t}{t-1}\Big|_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{(t-1)t}dt=\frac{1}{e-1}-\frac{2}{e^2-1}+\ln\frac{t-1}{t}\Big|_e^{e^2}=\frac{1}{e+1}+\ln\frac{e+1}{e}$$

$$=\ln(1+e)-\frac{e}{1+e}$$

七、（5 分）求 $\int_{-2}^{-1}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解　令　$x=\dfrac{1}{t}$

原式 $=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\dfrac{\pi}{3}$

八、（5 分）求微分方程 $y''+3y'=\cos2x$ 的通解。

解　特征方程$r^2+3r=0$的根为$r_1=0$，$r_2=-3$

对应齐次方程的通解为　$y_C=C_1+C_2e^{-3x}$

设特解为$y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$,代入方程得　$y_p=-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x$

故所求通解为　$y=C_1+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{13}\cos 2x+\dfrac{3}{26}\sin 2x$

九、(5 分)若在x_0的某去心邻域内$|f(x)|\le\alpha(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，试证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

证：因$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$　故$\lim\limits_{x\to x_0}[-\alpha(x)]=0$　又因$-\alpha(x)\le f(x)\le\alpha(x)$

从而$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

十、(5 分) 设$y=y(x)$由方程$y=f[2x+\varphi(y)]$所确定,其中f与φ 都是可导函数,求y'.

解　$y'=f'[2x+\varphi(y)]\cdot[2+\varphi'(y)y']$　　　$y'=\dfrac{2f'[2x+\varphi(y)]}{1-f'[2x+\varphi(y)]\cdot\varphi'(y)}$

十一、(8 分) 求函数$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值

解解　定义域$(-\infty，+\infty)$连续

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}\qquad(x\ne 0)$$

驻点　$x_1=\dfrac{2}{5}$，导数不存在点$x_2=0$

x	$(-\infty,0)$	**0**	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y'	+	x	—	0	+
y	↑		↓		↑

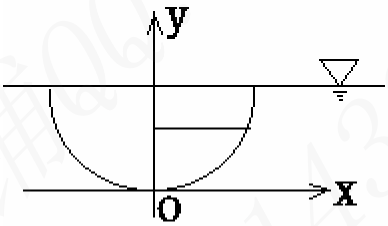
故函数有极大值$y(0)=0$,极小值$y\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2/3}$

十二、(8分) 求由不等式$\sin^3x\le y\le\cos^3x,0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$所确定的区域的面积.

$$\text{解:}S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3x-\sin^3x)dx=\int_0^{\pi/4}(1-\sin^2x)d\sin x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2x)d\cos x$$

$$=(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2}{\sqrt2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt2}-1+\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt2}{6}-\frac{2}{3}.$$

十三、(8 分) 有一抛物线弓形板，其底边为L米，顶点到底边距离为H米，将此板竖直浸入水中，使底边与水面相重合，求板所受压力。



解 设坐标如图.设抛物线方程为$y=kx^2$， 因过$(\pm\dfrac{L}{2},H)$点，

故$k=\dfrac{4H}{L^2}$ 即$y=\dfrac{4H}{L^2}x$，或$x=\dfrac{L}{2}\sqrt{\frac{y}{H}}$

$$F=2\int_0^H(H-y)\cdot\frac{L}{2}\sqrt{\tfrac{y}{H}}dy=\frac{4}{15}LH^2(\text{吨重})=1000g\cdot\frac{4}{15}LH^2(\text{牛顿})$$

十四、（8 分）设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，对任意 $x\in(0,1)$有

$f(x)\neq 0$， 证明存在$c\in(0,1)$使$\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$（$n$为自然数）。

证明:令$F(x)=f^n(x)f(1-x)$,(n为自然数)

则$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,因$f(0)=0$,则$F(0)=F(1)=0$

即$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件

则至少存在$c\in(0,1)$使$F'(c)=0$

而$F'(x)=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)\cdot f(1-x)$

$\qquad -f^n(x)f'(1-x)$

且因对任意$\xi x\in(0,1)$有$f(x)\neq 0$

则由$nf^{n-1}(c)\cdot f'(c)\cdot f(1-x)-f^n(c)f'(1-c)=0$

得到$\dfrac{nf'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ $(c\in(0,1))$

十五、（8 分）设$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶导数且,$y_0=f(0)>0,y_1=f'(0)<0,f''(x)<0$

试证明在$(0,+\infty)$内方程$f(x)=0$有唯一实根。

证明 因$f'(0)<0$，$f''(x)<0$故$f'(x)$单调减,当$x>0$

$f'(x)<f'(0)<0$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调减

从而$f(x)=0$在$(0,+\infty)$至多有一个实根

另作　$f(x)-y_0-f'(0)x=F(x)$　$F'(x)=f'(x)-f'(0)<0$

$F(x)$单调减：$F(x)<F(0)=0$　取$b=-\dfrac{y_0}{f'(0)}$　　即$y_0+bf'(0)=0$

则$F(b)=f(b)<0$　　而$f(0)>0$

$f(x)=0$在$(0，b)$至少有一实根　　综上述$f(x)=0$在$(0，+\infty)$内有唯一实根

十六、（7 分）设弹簧的上端固定，下端悬挂一质量为m的物体，开始时用手拿住重物，使弹簧既不伸长，也不缩短，然后突然放手，弹簧发生振动。设弹簧的弹性系数为k，介质阻力与运动速度成正比，比例系数为h。试证：当$t\to\infty$时，物体趋向于平衡位置$x(\infty)=\dfrac{mg}{k}$。

取初始时刻物体所在位置为坐标原点，x轴垂直向下。设t时刻物体位于$x(t)$处，由牛顿第二定律　$mx''(t)=mg-hx'(t)-kx(t)$　即　$x''+\dfrac{h}{m}x'+\dfrac{k}{m}x=g$

令$a=\dfrac{h}{2m},b=\sqrt{\left|\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{h}{2m}\right)^2\right|}$

若$\dfrac{k}{m}>\left(\dfrac{h}{2m}\right)^2$，解为$x=e^{-at}\left(C_1\cos bt+C_2\sin bt\right)+\dfrac{mg}{k}$

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(C_1\cos bt+C_2\sin bt\right)+\frac{mg}{k}=\frac{mg}{k}$$

若$\dfrac{k}{m}=\left(\dfrac{h}{2m}\right)^2$，则解为$x=e^{-at}\left(C_1+C_2t\right)+\dfrac{mg}{k}$，仍有

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}e^{-at}\left(C_1+C_2t\right)+\frac{mg}{k}=\frac{mg}{k}$$

若$\dfrac{k}{m}<\left(\dfrac{h}{2m}\right)^2$，则解为$x=C_1e^{-(a+b)t}+C_2e^{-(a-b)t}+\dfrac{mg}{k}$，因为$b<a$

故有

$$\lim_{t\to\infty}x=\lim_{t\to\infty}[C_1e^{-(a+b)t}+C_2e^{-(a-b)t}+\frac{mg}{k}]=\frac{mg}{k}$$