2023－2024 学年第一学期
《高等数学》 期中试题

一、计算下列各题 (本题满分 72 分, 每小题 8 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x-\sin(\sin x)\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

2. 用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$, $(a\neq 0)$.

3. $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n.

4. 设 $f(x)$ 对任意的 x,y 恒有 $|f(x)-f(y)|\leq \mathrm{e}^{(x-y)^2}-1$, 求 $f'(x)$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\leq 1,\\ \dfrac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}-x\right)+\dfrac{\pi}{4}, & x>1.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

注意：第5题题目多打了一个2x，印刷错误

6. 设函数 $y=f(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t\\ y=\mathrm{e}^y\sin t+1\end{cases}$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3-x)-7}{\arcsin 2x}=5$, 证明: $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导, 并求 $f'(3)$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且满足: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$, 求 $f'(0)$.

9. 求函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的极值, 并求曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

二、解答下列各题 (本题满分 28 分)

10. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,4]$ 上连续, 在开区间 $(1,4)$ 内可导, 且满足 $f(4)=0$, 证明在区间 $(1,4)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

11. (8 分) 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的所有渐近线.

12. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=f(b)=0$, 且 $f'(a)f'(b)>0$, 证明: 在区间 (a,b) 内存在点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

13. (5 分) 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 试证明: $f(x)\geqslant x$ $(-\infty<x<+\infty)$.