

武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试

高等数学 A1（A 卷答题卡）

姓名 班级

考 生 学 号

注意事项

- 1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
- 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题；字体工整、笔迹清楚。
- 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
- 4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

一、（5 分）若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ，且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x) \neq 0$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必等于 0，为什么？

二、（8 分）设 $f(x) = \begin{cases} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} & , x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{且 } x \neq 0, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$ 试确定常数 a, b, c 的一组值, 使 $f(x)$ 在 $x = 0$

处连续。

三、（6 分）设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导，且 $f(a) = f'(a) = 0, f''(a) = 1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \sin(x - a)}{(e^x - e^a)^3}$ 。

四、（6 分） 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(1 + \frac{1}{t})^{3xt}$ ，求 $f''(x)$

五、（5 分） 设 u, v 均是 x 的可微函数， $y(x) = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$ ，求 dy

六、（6 分） 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值。

七、（5 分） 求 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ 。

八、（6 分） 求微分方程 $y'' + 3y' = \cos 2x$ 的通解。

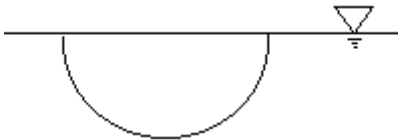
九、（7 分） 若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)| \leq \alpha(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ，试证明： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

十、（7 分） 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = f[2x + \varphi(y)]$ 所确定,其中 f 与 φ 都是可导函数,求 y' .

十一、（8 分） 求函数 $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值

十二、（8分） 求由不等式 $\sin^3 x \leq y \leq \cos^3 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 所确定的区域的面积.

十三、（8 分） 有一抛物线弓形板，其底边为 L 米，顶点到底边距离为 H 米，将此板竖直浸入水中，使底边与水面相重合，求板所受压力。



十四、（5 分） 设 $f(x)$ 定义在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上， 且满足：（1） $f(1) = 1$ ，

（2） $f(x)f(y) = 2f(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1}(\sin \theta)^{2y-1} d\theta$ ， 证明： $f(x+1) = xf(x)$

十五、（5 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 在 $(0,1)$ 内可导， 且 $f(0) = 0$ ， 对任意 $x \in (0,1)$ 有 $f(x) \neq 0$ ， 证明存在 $c \in (0,1)$ 使 $\frac{nf'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ （ n 为自然数）。

十六、（5 分） 设弹簧的上端固定，下端悬挂一质量为 m 的物体，开始时用手拿住重物，使弹簧既不伸长，也不缩短，然后突然放手，弹簧发生振动。设弹簧的弹性系数为 k ，介质阻力与运动速度成正比，比例系数为 h 。试证：当 $t \rightarrow \infty$ 时，物体趋向于平衡位置 $x(\infty) = \frac{mg}{k}$ 。

192.168.5.234

用计算器
0303002

第123

武汉大学 2012-2013 学年第一学期期末考试《高等数学 A1》(A 卷) 解答

一、(5 分) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$,

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必等于 0, 为什么?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = A \cdot 0 = 0$

二、(8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} & , x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ 且 } x \neq 0, \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$ 试确定常数 a, b, c 的一组值, 使

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续。

解: 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 须 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} = 1$, 又 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^2 x \rightarrow 0$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} (ae^x + be^{-x} - c) = 0$, 即 $a + b - c = 0$ (1)

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x} - c}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - be^{-x}}{2x} = 1$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} (ae^x - be^{-x}) = 0$, 即 $a - b = 0$ (2)

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^x - c}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + be^{-x}}{2} = \frac{a+b}{2} = 1$, 即 $a + b = 2$ (3)

解(1)(2)(3) $a = b = 1, c = 2$ 即 $a = b = 1, c = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

✓ 三、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导, 且 $f'(a) = f(a) = 0, f''(a) = 1$, 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \sin(x-a)}{(e^x - e^a)^3}$$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \sin(x-a)}{(e^x - e^a)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \sin(x-a)}{e^{3a} (e^{x-a} - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{e^{3a} (x-a)^2}$

$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{e^{3a}} \frac{f'(x)}{2(x-a)} = \frac{1}{2e^{3a}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = \frac{1}{2e^{3a}} f''(a) = \frac{1}{2e^{3a}}$

四、(6 分) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(1 + \frac{1}{t})^{3xt}$, 求 $f''(x)$

解 $f(x) = x \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{t})^t \right]^{3x} = xe^{3x} \quad \therefore f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$

$$f''(x) = 3e^{3x} + 3e^{3x} + 9xe^{3x} = e^{3x}(6 + 9x)$$

✓ 五、(5分) 设 u, v 均是 x 的可微函数 $y(x) = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$, 求 dy

$$\text{解 } dy = y'(x)dx = \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{u^2 + v^2} dx$$

✓ 六、(6分) 求函数 $I(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2 - 2t + 1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

$$\text{解 由 } I'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\ln x}{(1-x)^2} > 0, x \in [e, e^2], \text{ 知 } I'(x) \text{ 在 } [e, e^2] \text{ 上单调增加} \quad 3 \text{分}$$

$$\text{故 } \max_{e \leq x \leq e^2} I(x) = \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = - \int_e^{e^2} \ln t d\left(\frac{1}{t-1}\right) \quad 1 \text{分}$$

$$= - \left. \frac{\ln t}{t-1} \right|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{(t-1)t} dt = \frac{1}{e-1} - \frac{2}{e^2-1} + \ln \frac{t-1}{t} \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{e+1} + \ln \frac{e+1}{e} = \frac{1}{e+1} + \ln(e+1) - 1$$

$$= \ln(1+e) - \frac{e}{1+e} \quad 2 \text{分} \quad = \frac{-2}{e^2-1} + \frac{1}{e-1} + \ln(e^2-1) - \ln(e-1) - 1$$

$$= \frac{1}{e-1} - \frac{2}{e^2-1} + \ln(e+1) - 1$$

$$\text{七、(5分) 求 } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{解 令 } x = \frac{1}{t}$$

$$\text{原式} = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}$$

八、(6分) 求微分方程 $y'' + 3y' = \cos 2x$ 的通解。

解 特征方程 $r^2 + 3r = 0$ 的根为 $r_1 = 0, r_2 = -3$

对应齐次方程的通解为 $y_C = C_1 + C_2 e^{-3x}$

设特解为 $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$, 代入方程得 $y_p = -\frac{1}{13} \cos 2x + \frac{3}{26} \sin 2x$

故所求通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{13} \cos 2x + \frac{3}{26} \sin 2x$

九、(7分) 若在 x_0 的某去心邻域内 $|f(x)| \leq \alpha(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 试证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

证: 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} [-\alpha(x)] = 0$ 又因 $-\alpha(x) \leq f(x) \leq \alpha(x)$

从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

十、(7分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = f[2x + \varphi(y)]$ 所确定, 其中 f 与 φ 都是可导函数, 求 y' .

解 $y' = f'[2x + \varphi(y)] \cdot [2 + \varphi'(y)y'] \quad y' = \frac{2f'[2x + \varphi(y)]}{1 - f'[2x + \varphi(y)] \cdot \varphi'(y)}$

十一、(8分) 求函数 $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值

解 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 连续

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0)$$

驻点 $x_1 = \frac{2}{5}$, 导数不存在点 $x_2 = 0$

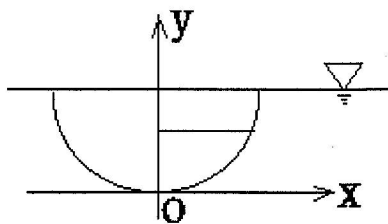
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
y'	+	x	-	0	+
y	↑		↓		↑

故函数有极大值 $y(0) = 0$, 极小值 $y(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$

十二、(8分) 求由不等式 $\sin^3 x \leq y \leq \cos^3 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 所确定的区域的面积.

$$\begin{aligned} \text{解: } S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \sin^3 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x) d \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 x) d \cos x \\ &= \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

十三、(8分) 有一抛物线弓形板, 其底边为 L 米, 顶点到底边距离为 H 米, 将此板竖直浸入水中, 使底边与水面相重合, 求板所受压力.



解 设坐标如图. 设抛物线方程为 $y = kx^2$, 因过 $(\pm \frac{L}{2}, H)$ 点,

$$\text{故 } k = \frac{4H}{L^2} \quad \text{即 } y = \frac{4H}{L^2} x^2, \text{ 或 } x = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{y}{H}}$$

$$F = 2 \int_0^H (H - y) \cdot \frac{L}{2} \sqrt{\frac{y}{H}} dy = \frac{4}{15} LH^2 (\text{吨重}) = 1000g \cdot \frac{4}{15} LH^2 (\text{牛顿})$$

十四、(5分) 设 $f(x)$ 定义在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上, 且满足: (1) $f(1) = 1$,

$$(2) \quad f(x)f(y) = 2f(x+y) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta, \text{ 证明: } f(x+1) = xf(x)$$

证明: 令 $y = 1$, $f(x)f(1) = 2f(x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}\sin\theta d\theta$

$$\text{即 } f(x) = 2f(x+1)\left[-\frac{1}{2x}(\cos\theta)^{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x}f(x+1) \quad \therefore f(x+1) = xf(x)$$

十五、(5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 对任意 $x \in (0,1)$ 有

$$f(x) \neq 0, \quad \text{证明存在 } c \in (0,1) \text{ 使 } \frac{nf'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

证明: 令 $F(x) = f^n(x)f(1-x)$, (n 为自然数)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 因 $f(0) = 0$, 则 $F(0) = F(1) = 0$

即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件

则至少存在 $c \in (0,1)$ 使 $F'(c) = 0$

$$\text{而 } F'(x) = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x) \cdot f(1-x) - f^n(x)f'(1-x)$$

且因对任意 $\xi \in (0,1)$ 有 $f(\xi) \neq 0$

$$\text{则由 } nf^{n-1}(c) \cdot f'(c) \cdot f(1-c) - f^n(c)f'(1-c) = 0$$

$$\text{得到 } \frac{nf'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad (c \in (0,1))$$

十六、(5 分) 设弹簧的上端固定, 下端悬挂一质量为 m 的物体, 开始时用手拿住重物, 使弹簧既不伸长, 也不缩短, 然后突然放手, 弹簧发生振动。设弹簧的弹性系数为 k , 介质阻力与运动速度成正比, 比例系数为 h 。试证: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 物体趋向于平衡位置 $x(\infty) = \frac{mg}{k}$ 。

取初始时刻物体所在位置为坐标原点, x 轴垂直向下。设 t 时刻物体位于 $x(t)$ 处, 由牛顿第

$$\text{二定律 } mx''(t) = mg - hx'(t) - kx(t) \quad \text{即 } x'' + \frac{h}{m}x' + \frac{k}{m}x = g$$

$$\text{令 } a = \frac{h}{2m}, b = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}$$

$$\text{若 } \frac{k}{m} > \left(\frac{h}{2m}\right)^2, \text{ 解为 } x = e^{-at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) + \frac{mg}{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

$$\text{若 } \frac{k}{m} = \left(\frac{h}{2m}\right)^2, \text{ 则解为 } x = e^{-at}(C_1 + C_2 t) + \frac{mg}{k}, \text{ 仍有}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at}(C_1 + C_2 t) + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

若 $\frac{k}{m} < \left(\frac{h}{2m}\right)^2$, 则解为 $x = C_1 e^{-(a+b)t} + C_2 e^{-(a-b)t} + \frac{mg}{k}$, 因为 $b < a$

故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = \lim_{t \rightarrow \infty} [C_1 e^{-(a+b)t} + C_2 e^{-(a-b)t} + \frac{mg}{k}] = \frac{mg}{k}$$