## 武汉大学 2013-2014 学年第一学期期末考试高等数学 A1 解答

一、（6 分）设$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，试说明结论："存在一正整数$N$。使当$n>N$时，恒有$a_{n+1}<a_n$"是否成立？

解　不一定成立，例如：$a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但对一切正整数$K$有：

$$a_{2k}-a_{2k-1}=\frac{3}{2k}-\frac{1}{2k-1}=\frac{4k-3}{2k(2k-1)}>0\text{，即 }a_{2k}>a_{2k-1}$$

二、（**8** 分）指出函数$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}$的间断点，并判定其类型.

解 $y=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}$在$x=0,x=2$无定义，因此$x=0$，$x=2$为函数的间断点，因为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2}$,所以$x=0$为函数的可去间断点， 因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}=\infty$，所以$x=2$为函数的无穷间断点。

三、（**8** 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}$.

解　当$n\to\infty$时，　$\sin\dfrac{2}{n}\sim\dfrac{2}{n}$　故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\cdot\dfrac{2}{n}=\dfrac{6}{5}$

四、（**8** 分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{\sin^2(x^3)}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{\sin^2(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{2x\ln(1+x^2)\sin(2x^2)}{6x^5}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{\sin(2x^2)}{x^2}=\frac{2}{3}$$

五、(**7** 分)设函数$y=y(x)$由方程$y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$所确定,且$y(0)=2$其中$f(x)$是可导函数，$f'(2)=\dfrac{1}{2},f'(4)=1$，求$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$的值.

解　令　$x^2+y^2=u,x+y=v$，　$y'=f'(u)(2x+2yy')+f'(v)(1+y')$

当$x=0$时$,y=2,u=4,v=2$ , $y'(0)=f'(4)\times4y'(0)+f'(2)\left[1+y'(0)\right],y'(0)=-\dfrac{1}{7}$

六、（**8** 分）讨论函数$y=3\int_0^x(t^2-2t-3)dt+1$在$[-2,6]$上的凸性与拐点.

解 $y'=3(x^2-2x-3)$，　$y''=3(2x-2),y''=0$得$x=1$,且当$1<x\le6$　$y''>0$,故曲线在$1<x\le6$ 时下凸, 且当$-2\le x<1$　$y''<0$,故曲线在$-2\le x<1$时上凸,

又$y=3\int_0^1(t^2-2t-3)dt+1=-10$点$(1,-10)$为曲线的拐点.

七、（7 分）求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

解 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{x}{(1+x)^3}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^3}\right]dx$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+b}+\frac{1}{2(1+b)^2}) = \frac{1}{2}$$

八、(**8** 分)设 $\begin{cases} x = t + arc\cot t \\ y = t - \ln(1+t^2) \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t^2}} = \frac{(1-t)^2}{t^2} = (1-\frac{1}{t})^2，\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1-\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2(t-1)(1+t^2)}{t^5}$$

九、(**6** 分)求微分方程 $y'' + 4y = 3\sin x$ 的一条积分曲线，使其与曲线 $y = \tan 3x$ 相切于原点.

解　方程的通解为　$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \sin x$

由已知得初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 3$，代入上式得　$C_1 = 0, C_2 = 1$

故所求积分曲线的方程为　$y = \sin 2x + \sin x$

十、(6 分)证明 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x} &, x \neq 0, \\ 0 &, x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.

证　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$　　　$\therefore f(x)在x = 0处连续$

又 $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

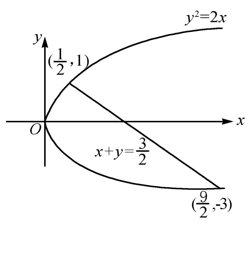
故 当$x \to 0$时极限不存在,故$f(x)$在$x = 0$处不可导.

十一、(6 分)研究函数 $y = (1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})e^{-x}$ 的极值($n$ 为自然数).

解 $$y' = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})e^{-x} -$$
$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!})e^{-x} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$　　唯一驻点 $x = 0$

当 $n$ 为偶数时, 对一切 $x$ 值，$y' < 0$ ,故函数不存在极值点. 当 $n$ 为奇数时, 对 $x > 0$ 时, $y' < 0$ ,对 $x < 0$ 时，$y' > 0$ ,故函数极大值为 $y(0) = 1$.

十二、(10 分)求曲线 $y^2 = 2x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 处法线与曲线所围成图形的面积.




解　由 $2yy'=2$　$y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)} = \frac{1}{y}\Big|_{y=1} = 1$

故法线方程为　$y - 1 = (-1)(x - \dfrac{1}{2})$　即 $x + y = \dfrac{3}{2}$

曲线 $y^2 = 2x$ 和法线 $x + y = \dfrac{3}{2}$ 的另一交点为 $\left(\dfrac{9}{2}, -3\right)$

所求面积 $S=\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-y\right)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\frac{16}{3}$

十三、(**6** 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0 f(1)=f'(1)=0$，证明:在 $(0,1)$ 内存在一点 $c$，使 $f''(c)=0$.

证明：因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导.且 $f(0)=f(1)=0$,即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$,又 $f'(x)$ 在 $[\xi,1]$ 连续,在 $(\xi,1)$ 可导且 $f'(1)=f'(\xi)=0$ 即 $f'(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在 $c\in(\xi,1)\subset(0,1)$ 使则至少存在使 $f''(c)=0$

十四、(6 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数 $(a>0)$，又设 $x=r\cos\theta, f(x)=r\sin\theta$，试证明：$2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=bf(b)-af(a)$

其中：$\alpha=\arctan\frac{f(a)}{a}, \beta=\arctan\frac{f(b)}{b}$

证明 因为 $r^2=x^2+f^2(x)$，$\theta=\arctan\frac{f(x)}{x}$，$d\theta=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}dx$

于是 $\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\int_a^b[xf'(x)-f(x)]dx=\int_a^b xf'(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$$=xf(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)-2\int_a^b f(x)dx$$

所以 $2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=bf(b)-af(a)$