2004～2005 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 A 卷（216 学时）

专业班级____________________学号_________________ 姓名__________

一、填空题：（4×5 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(1-\cos x)}{x^2} & x>0 \\ 4 & x=0 \\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x e^t\mathrm{d}t}{x} & x<0 \end{cases}$ 连续，则常数 $a=$____，$b=$____

2、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径 $R=$_____

3、已知 $f(x)=x(1-x)(2-x)\cdots(2005-x)$，则 $f'(0)=$________

4、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$ 的和 $S=$________

二、选择题：（4×4 分）

1、函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是______

A、 0　　**B**、1　　**C**、2　　**D**、3

2、设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，其周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为______

A、 2　　**B**、－2　　**C**、1　　**D**、－1

3、对于常数 $k>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{n^2}\right)$________

A、绝对收敛　　**B**、条件收敛　　**C**、发散　　**D**、收敛性与 k 的取值相关

4、设函数 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x)=$______$(n>2)$.

A、$n!f^{n+1}(x)$　　**B**、$nf^{n+1}(x)$　　**C**、$f^{2n}(x)$　　**D**、$n!f^{2n}(x)$

三、计算下列各题：（6×6 分）

1、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$

2、设 $y=\tan 2x+2^{\sin x}$，求：$\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$

3、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求：$y'(0)$

4、已知 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，计算不定积分：$\displaystyle\int\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)}\right)\mathrm{d}x$

5、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 的下凸区间。

6、计算定积分：$\displaystyle\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

四、（5 分）设广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

五、（6 分）求曲线 $y=\ln x$（$2\le x\le 6$）的一条切线，使得该切线与直线 $x=2, x=6$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积 A 为最小。

六、（6 分）将曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，它在点 $x=0$ 与 $x=\xi$ $(\xi>0)$ 之间的体积记作 $V(\xi)$，问 a 等于何值时，能使 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$？

七、（5 分）设 $0<a<1$，证明：$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(a,1)$ 内一致连续。

八、(6 分)设 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上二次可导，且 $f(-1)=0$，又 $g(x)=[\sin\pi(x+1)]f(x)$
证明：在区间 $(-1,0)$ 内至少存在一点 c，使得 $g''(c)=0$。