

武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题 A

一、(48 分) 试解下列各题:

1、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cos n}{(1 - \frac{x}{n})^{-n}}$.

2、求微分方程 $y'' + y = x$ 的特解, 使得该特解在原点处与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 相切。

3、求 $f(x) = \frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点, 并判别其类型。

4、设 $f(x) = \begin{cases} e^x \cos x + b, & x \leq 0 \\ \sin ax, & x > 0 \end{cases}$, 确定 a, b 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$

5、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 求 $y'(0)$.

6、设函数 $f(x) = xe^x$, 讨论导函数 $f^{(2011)}(x)$ 的极值点以及取得极大、极小值情况。

二、(10 分) 已知 $u = \int_0^{\sin y} e^v dv$, 其中 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (0 < t < \frac{\pi}{2}, a \neq 0)$ 所确定,

求 $\frac{du}{dx}$.

三、(12 分) 设函数 $y = \ln \cos x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(1) 求函数的单调区间和函数图形的凸性区间;

(2) 在曲线上求曲率半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的坐标。

四、(14 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x^3} & x > 1 \\ x(x^3 - e^{-x^2}) & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x < -1 \end{cases}$, 求积分: $\int_{-\infty}^x f(t) dt$.

五、(10 分) 设曲线 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$ 和直线 $y = 1, x = 0$ 围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积;

六、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1), f'(1) = 1$ 求证: $\exists \xi \in (0, 1)$ 使 $f''(\xi) = 2$.

武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、(48 分) 试解下列各题:

$$1、\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cos n}{(1 - \frac{x}{n})^{-n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cos n]}{\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - \frac{x}{n})^{-\frac{n}{x}}]^x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

2、解: 对应的齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 非齐次方程 $y'' + y = x$ 的一个特解为 $y_1 = x$, 原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$, 利用初值条件可求得 $C_1 = 0, C_2 = -\frac{3}{2}$,

原问题的解为: $y = -\frac{3}{2} \sin x + x$

3、解: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x) \sin x}{|x|(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \sin 1$ $x = -1$ 为第一类可去间断点, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ $x = 1$

为第二类无穷间断点, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ $x = 0$ 为第一类跳跃间断点。

4、解 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cos x + b) = 1 + b, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin ax = 0$

$$f(0) = 1 + b, \text{ 所以 } 1 + b = 0, \text{ 即 } b = -1, \text{ 又 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cos x + b - (1 + b)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{1} = 1, f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{x} = a, \therefore \text{ 当 } a = 1, b = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 在 } x = 0$$

处可导, 且 $f'(0) = 1$

5、解: 方程两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{x^2 + y} (2x + y') = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x$

当 $x = 0$ 时, 由原方程得 $y = 1$, 代入上式得 $y'(0) = 1$

6、解 由 $f(x) = xe^x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$,

$f''(x) = [(1+x)e^x]' = e^x + (1+x)e^x = (x+2)e^x$, 以此类推知 $f^{(2011)}(x) = (2011+x)e^x$,

令 $f^{(2012)}(x) = (2012+x)e^x = 0 \Rightarrow x = -2012$, 又 $f^{(2013)}(-2012) = (2013-2012)e^{-2012} > 0$,

故 $x = -2012$ 为导函数 $f^{(2011)}(x)$ 的极小值点, 导函数的极小值为

$f^{(2011)}(-2012) = (2011-2012)e^{-2012} = -e^{-2012}$, 无极大值。

$$\text{二、(10 分) 解 由 } \frac{du}{dx} = e^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ 而 } \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = \frac{\frac{b}{a} \cos t}{-\frac{a}{b} \sin t} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\text{故 } \frac{du}{dx} = -e^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

三、(12 分) 解: 1) $y' = -\tan x$, 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内, $y' > 0$, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, $y' < 0$, 故 $(0, \frac{\pi}{2})$

是单调减少区间, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 是单调增加区间; 而由 $y'' = -\sec^2 x < 0$ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 得 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

函数的图形是凹的。

2) $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = |\cos x|$, 由 $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $x = \pm \frac{\pi}{6}$, 故曲率半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点是 $(\pm \frac{\pi}{6}, \ln \frac{\sqrt{3}}{2})$

四、(14分) 解:
$$f(x) = \begin{cases} \arctan x / x^3 & x > 1 \\ x(x^3 - e^{-x^2}) & -1 \leq x \leq 1 \\ 1/(1+x^2) & x < -1 \end{cases}$$

当 $x < -1$,
$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

当 $-1 \leq x \leq 1$,
$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^x t(t^3 - e^{-t^2})dt = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-1}$$

当 $x > 1$,
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^1 t(t^3 - e^{-t^2})dt + \int_1^x \frac{\arctan t}{t^3} dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \int_1^x \arctan t d\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2t^2} \arctan t \Big|_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2x^2} \arctan x + \frac{1}{2} \int_1^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1+t^2)}\right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \arctan x - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

故
$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} \arctan x + \frac{\pi}{2} & x < -1 \\ \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-1} & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \arctan x - \frac{1}{2x} & x > 1 \end{cases}$$

五、(10分) 解:
$$A = \int_0^1 (1-x^2)dx = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad V_x = \pi - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi$$

六、(6分) 证 1 令 $F(x) = f(x) - x^2 + x$ 则 $F(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$ $F(0) = F(1)$

由洛尔定理知 $\exists \eta \in (0,1)$, $F'(\eta) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - 2x + 1, \quad F'(x) \in C[0,1] \cap D(0,1), \quad F'(1) = f'(1) - 1 = 0 = F'(\eta)$$

由洛尔定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, $F''(\xi) = 0$, $F''(x) = f''(x) - 2$, $f''(\xi) = 2$

证 2 令 $F(x) = f(x) - x^2$ $F(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 由拉格朗日定理知

$$\exists \eta \in (0,1), \quad F'(\eta) = F'(\eta)(1-0) = F(1) - F(0) = -1$$

$$F'(x) \in C[0,1] \cap D(0,1) \quad F'(1) = f'(1) - 2 = -1 = F'(\eta)$$

由洛尔定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, $F''(\xi) = 0$, $F''(x) = f''(x) - 2$, $f''(\xi) = 2$

证 3 在 $x=1$ 展开为一阶泰勒公式
$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2, \quad \xi_1 \in (x,1)$$

$$f(0) = f(1) - f'(1) + \frac{1}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (0,1), \text{ 因 } f(0) = f(1), \quad f'(1) = 1 \text{ 故 } \exists \xi \in (0,1), \quad f''(\xi) = 2$$

证 4 令 $F(x) = f(x) - (x - \frac{1}{2})^2$, 用两次洛尔定理。

证 5 令 $F(x) = xf'(x) - x^2 - f(x)$, 用一次洛尔定理。