武汉大学 2022-2023 学年第一学期高等数学 B1 期末试卷 A 卷

1、（7 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2、（8 分）设 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln y - x = 1$ 确定，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{3}{n}\right)-e\right]$.

3、（8 分）设实函数 $f(x)$ 满足 $3f(x)+4x^2 f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{7}{x}=0(x\neq 0)$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

4、（10 分）设方程 $y'+P(x)y=x^2$，其中 $P(x)=\begin{cases}1, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,+\infty)$ 内都满足方程，且满足初始条件 $y(0)=2$.

5、（7 分）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}$.

6、（7 分）设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\cdot\sin x$，试求 $f(x)$ 的间断点，判断其类型，并找出 $f(x)$ 的渐近线.

7、（8 分）若二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，求 a,b,c 的值，并求该方程的通解。

8、（8 分）设 $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{2023}$，试证明：$(1+x^2)y'''+3xy''+(1-2023^2)y'=0$.

9、（10 分）设区域 D 由曲线 $L: y=xe^{-2x}(x\ge 0)$ 与 x 轴围成.

(1) 求区域 D 的面积；(2) 求区域 D 绕 x 轴旋转而成的体积.

10、（7 分）求定积分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(2x+1)\max\{2,x^2\}\mathrm{d}x$.

11、（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\displaystyle\int_{t^2}^{1}\arcsin u\,\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 在 $x=\ln 2$ 的法线方程以及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

12、（6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$. 试证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

13、（6 分）设 n,k 为正整数，且 $1\le k\le n$，证明：

(1) $\dfrac{2}{n}\ln\left(1+\dfrac{k-1}{n}\pi\right)\le\displaystyle\int_{\frac{(k-1)}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\ln(1+x)\mathrm{d}x\le\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right)$；

(2) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin nx|\ln(1+x)\mathrm{d}x$.