2004～2005学年第一学期《高等数学》期末考试试题A卷答案

一、填空题：（4×5分）

1、$a=8;b=3$；　　2、　$R=3$　；　　3、2005!；　　4、ln2

二、选择题：（4×4分）

1、C　；　　2、B　；　3、　B;　　4、A　.

三、计算下列各题：（6×6分）

1）解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2）解：由 $y'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+\cos x\cdot 2^{\sin x}\ln 2$

得 $\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=(\dfrac{2}{\cos^2\pi}+\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot 2^{\sin\frac{\pi}{2}}\ln 2)\mathrm{d}x=2\mathrm{d}x$。

3）解：当 $x=0$ 时 $y=0$，又 $e^y y'+6y+6xy'+2x=0$，故 $y'(0)=0$

4）解：注意到 $f(x)=f''(x)$，则

原积分$=\displaystyle\int\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)dx=\int d[\ln f(x)+\ln f'(x)]=\ln f(x)f'(x)+C$

$=\ln\dfrac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})+C$

5）解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2}{3}\dfrac{t-1}{t^2+3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t\frac{dt}{dx}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{t-1}{t^2+3}\right)'_t\frac{1}{x'_t}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-t^2+2t+3}{(t^2+3)^2}\cdot\frac{1}{3t^2+9}=\frac{2}{9}\cdot\frac{(3-t)(1+t)}{(t^2+3)^3}.$$

当 $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ 时曲线下凸.，得 $-1<t<3$；注意到 $x=t^3+9t$ 单调升，即 $x\in(-10,54)$ 时，曲线下凸.

6）解：令 $\sqrt{x}=t$，当 $x=1$ 时 $t=1$，当 $x=4$ 时，$t=2$，则

原式$=\displaystyle\int_1^2\frac{2\ln t}{t}2t\mathrm{d}t=\int_1^2 4\ln t\mathrm{d}t=4\big[t\ln t-t\big]_1^2=4[2\ln 2-1]$

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！

四、（5 分）证明：由 $0 \le \left|\frac{f(x)}{x}\right| = |f(x)|\frac{1}{x} \le \frac{1}{2}(f^2(x)+\frac{1}{x^2}) \quad (x \ge 1 > 0)$ 因为 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$、$\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(f^2(x)+\frac{1}{x^2})dx$ 也收敛，比较判别法知：广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛。

五、（6 分）解　设 $(\xi,\ln\xi)$ 为曲线 $y=\ln x$ 上任意一点，则此点处的切线方程为：

$y=\frac{1}{\xi}(x-\xi)+\ln\xi$，即 $y=\frac{x}{\xi}+\ln\xi-1$，于是所求面积为：

$$A=\int_2^6\left[\frac{x}{\xi}+\ln\xi-1-\ln x\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{\xi}+x\ln\xi-x\ln x\right]_2^6=4\left(\ln\xi+\frac{4}{\xi}\right)+2\ln 2-6\ln 6$$

令 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}=4\left(\frac{1}{\xi}-\frac{4}{\xi^2}\right)=0$，得 $\xi=4$，又当 $\xi<4$ 时，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}<0$，当 $\xi>4$ 时，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}>0$，故 $\xi=4$ 时，A 取得极小值，也是最小值，从而得到所求的切线方程为：$y=\ln 4+\frac{1}{4}(x-4)$。

六、（6 分）解：因为 $V(\xi)=\int_0^{\xi}\pi y^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{\xi}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\xi^2}$，

所以 $\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$，从而 $V(a)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a^2}=\frac{\pi}{4}$，

由此可得 $1+a^2=2$，所以 $a=1$ 或 $a=-1$（舍去），故 $a=1$。

七、（5 分）证：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=a^2\varepsilon$，则当 $x_1,x_2\in(a,1)$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|=\left|2\cos\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})\right|\le\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|$$

$=\frac{|x_2-x_1|}{x_1-x_2}<\frac{1}{a^2}|x_2-x_1|<\frac{1}{a^2}\delta=\varepsilon$，所以 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(a,1)$ 内一致连续。

八、(6 分)证：由题设知 $g(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，在区间 $(-1,0)$ 内可导，且 $g(-1)=g(0)=0$，于是由罗尔定理知，在 $(-1,0)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $g'(\xi)=0$（$-1<\xi<0$），又在区间 $[-1,\xi]$ 上函数，$g'(x)=\pi f(x)\cos\pi(x+1)+f'(x)\sin\pi(x+1)$，由题设知，$g'(x)$ 在 $[-1,\xi]$ 上连续，在区间 $(-1,\xi)$ 内可导，且 $g'(-1)=g'(\xi)=0$，故由罗尔定理知在 $(-1,\xi)$ 内至少存在一点 c，使得 $g''(c)=0$。

满绩小铺QQ：1433397577，搜集整理不易，自用就好，谢谢！