2023-2024 第一学期高等数学 A(上)期中考试题　解答

1．（7 分）讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n+1}+1}$的连续性.

解答： 若 $|x|<1$， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n+1}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$，

若 $|x|>1$， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n+1}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n+1}}}{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

$f(1)=0,\ f(-1)$无定义，因此$f(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ no\,define & x=-1\\ -1, & -1<x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$

故 $f(x)$在 $x=\pm 1$为第一类间断点，其余均为连续点.

2．（7 分） 已知函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$内具有二阶连续导数，且 $\varphi(0)=0$．问：当常数 a,b为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\varphi(x)}{x}, & x>0\\ ax+b, x\le 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$内可导？并讨论$f'(x)$的连续性.

解答： 由于函数 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内具有二阶连续导数，故要函数$f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内可导，只需$f(x)$在分段点 $x=0$处可导即可．首先由$f(x)$在$x=0$处连续， 可知$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，即

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x)=\varphi'(0)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b,$$

从而 $b=\varphi'(0)$.

又由$f(x)$在$x=0$处可导，有$f'_+(0)=f'_-(0)$，由于

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)-\varphi'(0)x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi''(x)}{2}=\frac{\varphi''(0)}{2},$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-b}{x}=a,$$

故 $a=\frac{\varphi''(0)}{2}$且 $f'(0)=\frac{\varphi''(0)}{2}$.

由上述讨论可知 $f'(x)=\begin{cases}\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}, & x>0,\\ \frac{\varphi''(0)}{2}, & x\le 0.\end{cases}$ 显然$f'(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\varphi''(x)+\varphi'(x)-\varphi'(x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi''(x)}{2}=\frac{\varphi''(0)}{2}=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=f'(0)\ ,$$

可知 $f'(x)$在点 $x=0$处连续，故 $f'(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续.

3．（7 分）设不恒为零的奇函数$f(x)$在$x=0$处可导, 试说明 $x=0$为函数 $\frac{f(x)}{x}$的何种间断点。

解答： $f(x)$为奇函数$f(0)=f(-0)=-f(0)$ 得 $f(0)=0$ 。又$f(x)$在 $x=0$处可导，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ ，$\frac{f(x)}{x}$在 $x=0$处有极限，$x=0$为函数 $\frac{f(x)}{x}$的可去间断点.

4．（7 分） 设 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上除 $x=0$有定义，且对任意的 x,y有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，并且$f'(1)=1$，试求$f'(x)$ $(x\neq 0)$.

解答： 由 $f(xy)=f(x)+f(y)$知 $f(1)=0$， 因此对任何 $x\neq 0$，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{1}{x}.$$

5．（7 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解答： 14

6．（7 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解答： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2+e^2\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}+e^2$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}+e^2=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}+e^2=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+e^2$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}+e^2=-e^2+e^2=0.$$

7．（7 分）设x为任意给定的实数，又设$y_n=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n}$，证明$\{y_n\}$的极限存在，并求此极限.

解答： 若 $0\le y_1=\sin x\le 1$， 则

$$0\le y_{n+1}=\sin y_n\le y_n\le 1,\quad \forall n\in N^*,$$

即数列$\{y_n\}$单调减少且有下界，故有极限. 令$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$, 这里 $A\in[0,1]$，在 $y_{n+1}=\sin y_n$两边同时取极限可得 $A=\sin A$, 于是 $A=0$.

若 $-1\le y_1=\sin x<0$， 则可类似证明.

8． （9 分）已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}+3$，请列表给出：函数$f(x)$的增减区间、凹凸区间、极值点以及图像的拐点；并给出函数 $f(x)$的所有渐近线.

解答： 函数定义域： $D(x)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，求导得：

$f'(x)=\frac{3x^2+x^3}{(1+x)^3}$， $f''(x)=\frac{6x}{(1+x)^4}$ 。

令 $f'(x)=0$，得： $x=0$或 $x=-3$，令 $f''(x)=0$，得 $x=0$；

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	+	0	+
$f''(x)$	−		−		−	0	+
$f(x)$	单增 上凸	极大	单减 上凸		单增 上凸	拐点 (0,3)	单增 下凸

单增区间： $(-\infty,-3]$， $(-1,+\infty)$；单减区间： $[-3,-1)$；极大值 $f(-3)=-\frac{15}{4}$

凸区间： $(-\infty,-1)$， $(-1,0)$；凹区间： $(0,+\infty)$；拐点 $(0,3)$

因 $\lim_{x\to -1} f(x)=\infty$，所以 $x=-1$为曲线的铅直渐近线

又 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$， $l_{x\to\infty}(f(x)-x)=1$，所以有斜渐近线 $y=x+1$。

9.（6 分）已知当 $x\to 0$时，函数 $e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$与 x^3是同阶无穷小，试确定常数a, b的值.

解答： 记 $g(x)=\frac{1+ax}{1+bx}$，则 $g'(x)=\frac{a-b}{(1+bx)^2}$， $g''(x)=-\frac{2(a-b)b}{(1+bx)^3}$.

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+o(x^2)\ (x\to 0)$$
$$=1+(a-b)\ x+(b-a)bx^2+o(x^2);$$

另一方面， $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ $(x\to 0)$，故

$$e^x-\frac{1+ax}{1+bx}=[1-(a-b)]x+[\frac{1}{2}-(b-a)b]x^2+o(x^2).$$

由题意有 $1-(a-b)=0$, $\frac{1}{2}-(b-a)b=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$.

10.（6 分）证明：方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$在区间 $(-\infty,+\infty)$上恰有 2 个不同的实根.

解答： 令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，因为函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$是偶函数，所以只需讨论函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$在区间 $(0,+\infty)$上的零点个数. 又因为$|\cos x|\le 1$，所以当 $x>1$时 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x>1$，故只需讨论函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$在区间 $(0,1)$上的零点个数.

因为 $f(0)=-1<0$， $f(1)=2-\cos 1>0$，所以 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$在区间 $(0,1)$上至少有一个零点.

又当 $0<x<1<\frac{\pi}{2}$时， $f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0$， 所以 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$在区间 $(0,1)$上单调增加，所以函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$在区间 $(0,1)$内有且只有一个零点.

由于函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$是偶函数，所以它在 $(-\infty,0)$上也只有一个零点.

综上讨论知，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$在区间 $(-\infty,+\infty)$上恰有两个不同实根.

11.（6 分）设 $y=y(x)$是由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定的，求 $y=y(x)$的极值.

解答：由 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$求得：

$$y'(x)=\frac{x-y}{3y^2-2y+x}=0$$

得 $x-y=0$.

与原方程联立求得： $x=1$, $y=1$，但由于表达式中含有 y，无法利用第一充分条件讨论，故只能采用第二充分条件，故只能采用第二充分条件，因

$$y''=\frac{(1-y')(3y^2-2y+x)-(x-y)(6yy'-2y'+1)}{(3y^2-2y+x)^2},$$
$$x=1,\ \ y=1.$$

得 $y''=\frac{1}{2}>0$. 所以， $x=1$, $y=1$为极小值.

12.（6 分）已知 $y=(x^2+x)e^x$，求 $y^{(k)}(0)$，并求 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k k^2 2^{n-k}$，其中 n和 k均是正整数.

解答：易见， $y(0)=0$， $y'(0)=1$.

当 $k\ge 2$时， $y^{(k)}=C_k^0(x^2+x)e^x+C_k^1(2x+1)e^x+C_k^2 2e^x$，所以 $y^{(k)}(0)=k^2$.

$\sum_{k=0}^{n}C_n^k k^2 2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k((x^2+x)e^x)^{(k)}(e^{2x})^{(n-k)}|_{x=0}=((x^2+x)e^{3x})^{(n)}|_{x=0}$

$=C_n^1 3^{n-1}+C_n^2 2\cdot 3^{n-2}=(n^2+2n)3^{n-2}$，这里 $n\ge 2$.

$n=1$时， $\sum_{k=0}^{1}C_1^k k^2 2^{1-k}=1$.

13．（6 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续且恒正，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，试证 $\exists\xi\in[x_1,x_2]$，使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

解答：若 $f(x_1)=f(x_2)$，则取 $\xi=x_1$或 $\xi=x_2$；就有 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$

若 $f(x_1)\neq f(x_2)$，不妨设 $f(x_1)<f(x_2)$，则有 $f(x_1)<\sqrt{f(x_1)f(x_2)}<f(x_2)$，根据复合函数的连续性，依介值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

14．（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$.

解答：令 $f(x)=arctan\frac{a}{x}$，则在 $[n,n+1]$上 $f(x)$可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_n\in(n,n+1)$，使得 $\xi_n\to\infty(n\to\infty)$，且

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n)=-\frac{a}{\xi_n^2+a^2}$$

即 $arctan\frac{a}{n}-arctan\frac{a}{n+1}=\frac{a}{\xi_n^2+a^2}$.

又因为 $\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2}<\frac{n^2a}{\xi_n^2+a^2}<\frac{n^2a}{n^2+a^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2a}{(n+1)^2+a^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2a}{n^2+a^2}=a$，故由夹逼法则得

$$\lim_{n\to\infty}n^2(arctan\frac{a}{n}-arctan\frac{a}{n+1})=a.$$

15．（6 分）已知 $xf''(x)+3[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,

（1）若 $f'(c)=0$，证明 $f(x)$在 $x=c(c\neq0)$ 取极小值；

（2） $f(0)$是极大还是极小值.

解答：（1） $f'(c)=0$ 将 $x=c(c\neq0)$代入 $xf''(x)+3[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,

$f''(c)=\frac{1-\mathrm{e}^{-c}}{c}>0$, $f(x)$在 $x=c(c\neq0)$ 取极小值.

（2） $xf''(x)+3[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$，得 $f'(0)=0$.

$f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f''(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{-x}=1>0$.

则 $f(0)$是极小值.

16．（附加题 8 分） 设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，证明：至少 ∃一个 $\xi\in(a,\ b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

解答：积分法构造辅助函数

$f'(x)+f(x)g'(x)=0$，即 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x)$.

$\ln f(x)=-g(x)+C$，$f(x)=c\mathrm{e}^{-g(x)}$，

$f(x)e^{g(x)}=C=0$

故可令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，则 $F(x)$在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，$F(a)=0,f(b)=0$ 。由罗尔定理，至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.