武汉大学 2020–2021 学年第一学期期末考试

高等数学 A1 · A 卷 参考答案

1.（6 分）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt[n]{3}\right)^n$.

解: 令 $\frac{1}{n}=x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt[n]{3}\right)^n &= \lim_{x\to0^+}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}\\ &=\exp\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(3^x+x-1)\\ &=\exp\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3^x-1}{x}+1\right)\\ &=\exp(\ln3+1)\\ &=\mathrm{e}^{\ln3\,\mathrm{e}}\\ &=3\,\mathrm{e}.\end{aligned}$$

2. (6 分) 求常数 a, b, 使得 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}+b, & (x\leqslant0),\\ \sin ax, & (x>0)\end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导.

解: 由

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{e^{2x}+b-(1+b)}{x}\\ &=\lim_{x\to-0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}=2,\\ f'_+(0) &= \lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin ax-(1+b)}{x},\end{aligned}$$

要上述极限存在, 必须分子的极限为零, 即得 $1+b=0$, 于是 $b=-1$. 此时

$$f'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin ax}{x}=a,$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 得 $a=2$. 所以当 $a=2$, $b=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

3. （6 分）找出函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的所有间断点, 并判断其类型.

解: 其间断点为使 $\frac{x}{1-x}$ 无定义的点, 以及使 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$ 的点. 即 $x=0$ 和 $x=1$ 为函数的间断点.

(1) 因 $x\to0$ 时, $\frac{x}{1-x}\to0$, 故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, 则 $x=0$ 为函数的第二类间断点 (无穷间断点).

(2) 因 $x\to1^+$ 时, $\frac{x}{1-x}\to-\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to0$, 从而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$; 而 $x\to1^-$ 时, $\frac{x}{1-x}\to+\infty$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to+\infty$, 从而 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$, 故 $x=1$ 为函数的第一类间断点 (跳跃间断点).

4.（6 分）已知当 $x\to0$ 时, $3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小, 求正整数 n.

解: $3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin2x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin2x}{x^n} &= \lim_{x\to0}\frac{3-4\cos x+\cos2x}{nx^{n-1}}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{4\sin x-2\sin2x}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{4\sin x(1-\cos x)}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{4x\cdot\frac{1}{2}x^2}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}.\end{aligned}$$

$n=5$ 时, 上述极限为 $\frac{1}{10}$. 故 $n=5$.

5.（6 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解: 应用定积分求极限.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

6.（6 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

解: (1) $x<0$ 时,

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

此时 $x<t<0$, $f(t)=0$. 故

$$\Phi(x)=-\int_x^0 0\,\mathrm{d}t=0.$$

(2) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\big[\cos t\big]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}(\cos x - 1) = \frac{1-\cos x}{2}.\end{aligned}$$

(3) $x > \pi$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\pi^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t + \int_\pi^x 0\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$

综上,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

7. （6 分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x = \displaystyle\int_a^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, 求常数 a.

解: 分别求出等式两端的值:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \mathrm{e}^{-2a},$$

$$\int_a^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{2a+1}{4}\mathrm{e}^{-2a},$$

再由 $\dfrac{2a+1}{4} = 1$, 解得 $a = \dfrac{3}{2}$.

8.（6 分）求微分方程 $y'' - 7y' + 6y = 6x^2 - 2x - 1$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 - 7r + 6 = 0$, 解得 $r_1 = 1, r_2 = 6$. 于是原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{6x}$$

由于这里 $\lambda = 0$ 不是特征根, 所以设原方程的特解为 $y^* = ax^2 + bx + c$, 代入原方程得

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = \frac{11}{6}.$$

故所求通解为

$$y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{6x} + x^2 + 2x + \frac{11}{6}.$$

9.（10 分）设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 4$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1 + \dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解: 先证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, 为使用洛必达法则做准备.

由 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 连续, 知

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0), \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0).$$

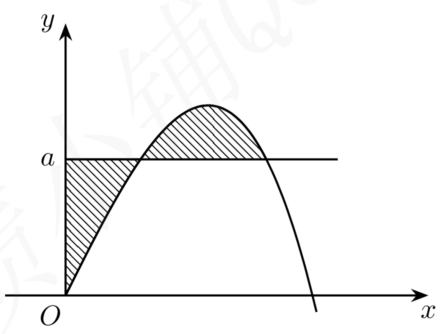
下面说明 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. 事实上,

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x = 0, \\ f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)}{x}\right\} \\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\right\} && \left(\text{因 } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0\right) \\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}\right\} && \left(\text{因 } \lim_{x\to 0} f(x) = 0\right) \\ &= \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}\right\} && \left(\text{因 } \lim_{x\to 0} f'(x) = 0\right) \\ &= \mathrm{e}^2. && \left(\text{因 } \lim_{x\to 0} f''(x) = f''(0) = 4\right) \end{aligned}$$

10. （8 分）水平直线 $y = a$ 与曲线 $y = 2x - 3x^3$ $(x \geqslant 0)$ 相交于第一象限, 求常数 a 使得如图两个阴影区域面积相等.



解: 设 (b,a) 表示水平线 $y=a$ 与 $y=2x-3x^3$ 的第二个交点, 欲使 $\int_0^b \left[a-\left(2x-3x^3\right)\right] \mathrm{d}x=0$, 即 $ab-b^2+\frac{3}{4}b^4=0$, 而 $a=2b-3b^3$, 从而得 $b=\frac{2}{3}$, $a=\frac{4}{9}$.

11.（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 记 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=A$, 则 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+A$. 故

$$\begin{aligned}A&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{1+\cos^2 x}+A\right)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=2\pi(-\arctan\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

即 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$.

12. （8 分）已知参数方程 $\begin{cases}x=2(1-\cos\theta),\\ y=4\sin\theta.\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{4\cos\theta}{2\sin\theta}=2\cot\theta,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\psi'(\theta)}{\varphi'(\theta)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=-2\csc^2\theta\cdot\frac{1}{2\sin\theta}=-\csc^3\theta.\end{aligned}$$

☞ 常见错误:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(2\cot\theta)'=-2\csc^2\theta.$$

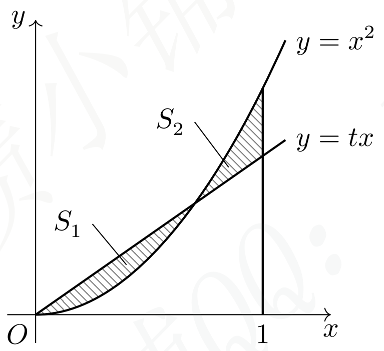
13.（8 分）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$. 证明: 在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

解: 根据题意知函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上连续, 在 $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ 内可导, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 故由罗尔定理知至少存在点 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ 又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1,ξ_2) 内可导, 故由罗尔定理知至少存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_2)$ 使 $f''(\xi)=0$.

14. （10 分）设直线 $y=tx\ (0<t<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1, 它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2.

(1) 试确定 t 的值, 使 S_1+S_2 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形阴影部分围绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



解: 1) 直线 $y=tx$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于点 (t,t).

$$\begin{aligned}S=S_1+S_2&=\int_0^t(tx-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_t^1(x^2-tx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

将 S 对 t 求导得 $S'=t^2-\frac{1}{2}$. 令 $S'=0$, 得 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$, 所以 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为极小值, 也为最小值, 其值为

$$S_{\min}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

2) $V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^4\right)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$