

武汉大学数学与统计学院

2009—2010 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题

一、(42 分) 试解下列各题:

1、计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(2+x)e^{\frac{1}{x}} - x]$.

2、求解微分方程 $y'' - 2y' + 3y = 0$ 的通解.

3、计算 $\int_{-1}^1 x^2(1 + \sqrt{1+x^2} \sin x) dx$.

4、计算 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

5、求曲线 $\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du \\ y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du \end{cases}$ 自 $t=1$ 至 $t=\frac{\pi}{2}$ 一段弧的长度.

6、设 $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, 求 $y^{(n)}$.

二、(8 分) 已知 $u = g(e^{xy})$, 其中 $y = f(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{t^2} dt = \int_0^{x^2} \cos t dt$ 确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

三、(8 分) 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

四、(15 分) 已知函数 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求:

1、函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间, 极大、极小值;

2、函数图形的凸性区间、拐点、渐近线。

五、(12 分) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - y' = 2(1-x)$, 且 x 轴与曲线 $y = y(x)$ 在原点相切, 在曲线 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 上某 B 点处作一切线, 使之与曲线、 x 轴所围平面图形的面积为 $\frac{1}{12}$, 试求: (1) 曲线 $y = y(x)$ 的方程; (2) 切点 B 的坐标; (3) 由上述所围图形绕 x 轴旋转一周所得立体的体积。

六、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

七、(5 分) 设函数 $f(x)$ 满足下列两个等式: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$, 求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

武汉大学数学与统计学院

2009—2010 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、(42 分) 试解下列各题:

1、解: 原极限 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\left(\frac{2}{x} + 1 \right) e^{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[(\frac{2}{x} + 1)e^{\frac{1}{x}} - 1]}{\frac{1}{x}} \stackrel{1/1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t+1)e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (2t+3)e^t = 3$

2、解: 齐次方程 $y'' + 4y' + 29y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$, 它有复数根 $\lambda = -2 \pm 5i$

故原方程的通解为: $y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)e^{-2x}$ $y = C_1 e^{x \cos \sqrt{2} x} + C_2 e^{x \sin \sqrt{2} x}$

3、解: 原式 $= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

4、解: $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} 2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} t d(-e^{-t}) = 2[-te^{-t}]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2$

5、解: $s = \int_1^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_1^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt = \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t} dt = \ln \frac{\pi}{2}$

6、解: $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ $y^{(n)} = (-1)^n n! [(1+x)^{-(n+1)} - (2+x)^{-(n+1)}]$

二、(8 分) 解: $\frac{du}{dx} = g'(e^y) e^y (y + x \frac{dy}{dx})$, 方程两边微分得: $e^{y^2} dy = 2x \cos x^2 dx$ $\frac{dy}{dx} = 2x \cos x^2 e^{-y^2}$
故有 $\frac{du}{dx} = e^y g'(e^y) (y + 2x^2 \cos x^2 e^{-y^2})$

三、(8 分) 解: $x_n > 0$, $x_2 - x_1 = \frac{1}{2} > 0$, 因此 $x_2 > x_1$

设 $x_n > x_{n-1}$, 则 $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} - (1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0$

$\therefore x_n$ 单调增加, 且 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则: $a = 1 + \frac{a}{1+a}$ 解得 $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 因为 a 非负, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

四、(15 分) 解: 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y' = 1 - \frac{8}{x^3}$ 令 $y' = 0 \Rightarrow$ 驻点 $x = 2$, 不可导点 $x = 0$

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$

1) 故单调增加区间为: $(-\infty, 0), (2, +\infty)$, 单调减少区间为: $(0, 2)$ 极小值为: $f(2) = 3$, 无极大值。

2) 下凸区间为: $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, 无拐点, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty$, 故 $x = 0$ 为函数图形的铅直渐近线。

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{x^3 + 4}{x^2} - x] = 0$

故 $y = x$ 为函数图形的斜渐近线。

五、(12 分) 解: (1) 由观察法知曲线方程为: $y = x^2$

或解微分方程: 特征方程为 $r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 1$, 故对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = c_1 + c_2 e^x$, 由于 $r_1 = 0$,

所以微分方程的特解设为 $y^* = x(ax + b)$, $y^{*'} = 2a, y^{*''} = 2ax + b$, 从而有: $2a - (2ax + b) = 2 - 2x \Rightarrow a = 1, b = 0$,

故 $y = c_1 + c_2 e^x + x^2$ 为微分方程的通解, 又 $y' = c_2 e^x + 2x$, 由题设知 $y(0) = 0, y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$, 所以微

分方程满足初值条件的解为 $y = x^2$ ，即曲线方程为： $y = x^2$

(2) 设切点 B 的坐标为 (a, a^2) ，则过点 B 的切线斜率为 $y'|_{x=a} = 2a$ ，于是切线方程为 $y - a^2 = 2a(x - a)$ ，和 x 轴

交点为 $(\frac{a}{2}, 0)$ ，由 $A = \int_0^1 x^2 dx - \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2}{2} = \frac{a^3}{12} = \frac{1}{12}$ ，得 $a=1$ 。因此切点坐标为 $(1, 1)$ 。切线方程 $y = 2x - 1$ 。

$$(3) V = \pi \int_0^1 y^2 dx - \pi \int_{1/2}^1 (2x-1)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_{1/2}^1 (2x-1)^2 dx = \pi/30$$

六、(10 分) 证明：(1) 令 $F(x) = f(x) - x$ ，则 $F(x) \in C_{[0,1]}$ ， $F(1) = -1 < 0$ ， $F(1/2) = 1/2 > 0$

故 $\exists \eta \in (1/2, 1)$ ，使得 $F(\eta) = f(\eta) - \eta = 0$ ，即 $f(\eta) = \eta$

(2) 设 $G(x) = e^{-\lambda x} F(x) = e^{-\lambda x} (f(x) - x)$ ，则 $G(x) \in C_{[0,\eta]}$ ， $G(x) \in D_{(0,\eta)}$ ， $G(0) = 0$ ， $G(\eta) = e^{-\lambda \eta} F(\eta) = 0$

由罗尔定理： $\exists \xi \in (0, \eta)$ ，使 $G'(\xi) = 0$ ，即 $e^{-\lambda \xi} \{f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] - 1\} = 0$

即 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$

七、(5 分) 证：应用泰勒公式，我们有：

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(x + \xi(x)) \quad 0 < \xi(x) < 1 \quad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(x - \eta(x)) \quad 0 < \eta(x) < 1 \quad (2)$$

$$(1) \pm (2) \text{ 分别得: } f''(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(x + \xi(x)) + \frac{1}{6}f'''(x - \eta(x)) \quad (3)$$

$$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(x + \xi(x)) - \frac{1}{6}f'''(x - \eta(x)) \quad (4)$$

当 $x \rightarrow \infty \Rightarrow x + \xi(x) \rightarrow \infty, x - \eta(x) \rightarrow \infty$ ，所以有： $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2 - 4 + 2 - \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$ ，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{1}{2}(2 - 2 - \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{6} \cdot 0) = 0。$$