

- 1、(9 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
- 2、(9 分) 已知曲线满足方程 $x + y + e^{2xy} = 0$, 求曲线在点 $(0, -1)$ 处的法线方程.
- 3、(10 分) 求由曲线 $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = 1$, $x = 2$ 所围成的图形的面积.
- 4、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$ 的通解;
 (2) 求该方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 3$ 的特解.
 (3) 对于非齐次方程 $y''' - y'' - 2y' = 1 + xe^{2x}$, 用待定系数法给出特解的形式 (无需求出其中的待定系数的数值).
- 5、(9 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} \right)^n$.
- 6、(7 分) 求不定积分 $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$.
- 7、(7 分) 设 $f(x) = \ln(1+x^2)$, 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x) + 2f(x) + 5} dx$.
- 8、(7 分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x(x + \sin x)}$.
- 9、(7 分) 等角螺线的极坐标方程为 $\rho = e^\theta$, 在 $\theta = 0$ 附近, 其在直角坐标系下可由函数 $y = y(x)$ 表示, 试求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=0}$ 以及 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{\theta=0}$.
- 10、(7 分) 计算星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 的弧长, 其中 $a > 0, t \in [0, 2\pi]$.
- 11、(7 分) 计算函数 $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数; 并讨论: 是否存在 $\delta > 0$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内单调递增? 说明理由.
- 12、(6 分) 求解常微分方程: $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.
- 13、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

1、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right)$ 5 分

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right) = \frac{1}{2}$ 9 分

2、(9 分) 已知曲线满足方程 $x + y + e^{2xy} = 0$, 求曲线在点 $(0, -1)$ 处的法线方程.

解: 对方程 $x + y + e^{2xy} = 0$ 两边关于 x 求导得: $1 + y' + 2e^{2xy}(y + xy') = 0$, 4 分

代入 $x = 0, y = -1$ 解得 $y'|_{x=0, y=-1} = 1$. 7 分

因此, 法线的斜率为 -1 , 在点 $(0, -1)$ 处的法线方程为: $y = -x - 1$. 9 分

3、(10 分) 求由曲线 $y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 2$ 所围成的图形的面积.

解: 显然当 $x \in [1, 2]$ 时有 $e^x > \ln x$, 因此面积

$S = \int_1^2 (e^x - \ln x) dx$ 5 分

$= \int_1^2 e^x dx - \int_1^2 \ln x dx = e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln x dx$ 8 分

$= e^2 - e - x \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 x d \ln x = e^2 - e - 2 \ln 2 + 1$ 10 分

4、(10 分) (1) 求齐次线性微分方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$ 的通解;

(2) 求该方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 3$ 的特解.

(3) 对于非齐次方程 $y''' - y'' - 2y' = 1 + xe^{2x}$, 用待定系数法给出特解的形式 (无需求出其中的待定系数的数值).

解: (1) 该微分方程的特征方程为: $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$, 4 分

它有特征根: $\lambda_0 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$, 故而该齐次线性微分方程的通解为:

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ 6 分

(2) 代入初值条件得方程组: $C_1 + C_2 + C_3 = 0, -C_2 + 2C_3 = 3, C_2 + 4C_3 = 3$, 解得:

$C_1 = 0, C_2 = -1, C_3 = 1$, 得微分方程的特解为: $y = e^{2x} - e^{-x}$. 8 分

(3) 特解的形式为: $y^* = C_1 + x(C_2 + C_3 x)e^{2x}$. 10 分

5、(9 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} \right)^n$.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right)}$ 5 分

$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}} = e^{\frac{1}{2}}$ 9 分

6、(7分) 求不定积分 $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$.

解: $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2} d\arcsin x$ 4分

$$= -\frac{1}{\arcsin x} + C \quad 7分$$

7、(7分) 设 $f(x) = \ln(1+x^2)$, 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)+2f(x)+5} dx$.

解: $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)}{f^2(x)+2f(x)+5} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(f(x)+1)^2+4} df(x)$ 3分

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{f(x)+1}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\ln(1+x^2)+1}{2} \Big|_0^{+\infty} \quad 5分$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2} \right) \quad 7分$$

8、(7分) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x(x+\sin x)}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x(x+\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{2x^2}$ 3分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-\cos^2 x} \sin x}{4x} \quad 5分$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-1} \quad 7分$$

9、(7分) 等角螺线的极坐标方程为 $\rho = e^\theta$, 在 $\theta = 0$ 附近, 其在直角坐标系下可由函数 $y = y(x)$

表示, 试求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=0}$ 以及 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{\theta=0}$.

解: 可以将方程改写成参数方程 $\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$, 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=0} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \Big|_{\theta=0} = \frac{e^\theta \cos \theta + e^\theta \sin \theta}{e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \Big|_{\theta=0} = 1 \quad 4分$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{\theta=0} = \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{d\theta}} \Big|_{\theta=0} = \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \right)}{\frac{dx}{d\theta}} \Big|_{\theta=0} = \frac{\frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2}{(\cos \theta - \sin \theta)^2}}{e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta} \Big|_{\theta=0} = 2 \quad 7分$$

10、(7分) 计算星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 的弧长, 其中 $a > 0, t \in [0, 2\pi]$.

解: 曲线弧长 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt$ 4分

$$= 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t \sin t)^2} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a \quad 7 \text{ 分}$$

11、(7 分) 计算函数 $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数；并讨论：是否存在 $\delta > 0$ ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内单调递增？说明理由。

解：当 $x \neq 0$ 时， $f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x^3}$ ，另一方面，

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x^3}}{x} = 1, \text{ 因此 } f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} \cos \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad 3 \text{ 分}$$

对任意 $\delta > 0$ ，取 $x_0 = \frac{1}{([\frac{1}{\delta}] + 1)\sqrt[3]{2\pi}}$ ，显然 $0 < x_0 < \delta$ 且 $x_0 < 1$ ，代入 $f'(x)$ 可得：

$f'(x_0) = 1 - \frac{3}{x_0} < 0$ ，由于导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (-\delta, \delta)$ ，且 $f'(x)$ 在区间 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 内小于 0，即有 $f(x)$ 在区间 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 单调递减，因此，不存在 $\delta > 0$ ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内单调递增。
7 分

12、(6 分) 求解常微分方程： $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ 。

解：显然 $y = 0$ 是方程的特解；当 $y \neq 0$ 时方程两边同除以 xy^3 的方程：

$$y^{-3} y' + \frac{2}{x} y^{-2} + x^4 e^x = 0,$$

令 $z = y^{-2}$ ，有 $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$ ，原方程就可化为如下线性方程：
3 分

$$z' = \frac{4}{x} y^{-2} + 2x^4 e^x,$$

用一阶线性微分方程的求解公式得： $y^{-2} = z = x^4 (2e^x + C)$ 6 分

13、(5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，证明：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

证明：令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，由于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，因此 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$

上有连续的三阶导数，取 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ，由泰勒公式得：

$$F(a) = F(x_0) + F'(x_0)(a-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2 + \frac{F'''(\xi_1)}{3!}(a-x_0)^3, \quad \xi_1 \in (a, x_0)$$

$$F(b) = F(x_0) + F'(x_0)(b-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 + \frac{F'''(\xi_2)}{3!}(b-x_0)^3, \quad \xi_2 \in (x_0, b) \quad 3 \text{ 分}$$

利用 $b - x_0 = -(a - x_0)$ ，上述两式相减得：

$$F(b) - F(a) = F'(x_0)(b - a) + \frac{F''(\xi_1) + F''(\xi_2)}{3!} \left(\frac{b - a}{2} \right)^3, \quad \xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$$

即有： $\int_a^b f(x) dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{(b - a)^3}{24} \left(\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \right)$ 。由于 $f''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，

由介值定理可知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$ 。因此

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi). \quad 5 \text{ 分}$$