武汉大学 2022－2023 学年第一学期
高等数学 A1 期末试题 (A 卷)

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$, 其中常数 $a>0$, $b>0$.

2. 已知
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[4]{1+4x}}{x^k}=a\neq 0,$$
其中 k 为正整数. 试求 k, a.

3. 求不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

4. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$ 的连续区间和间断点.

5. 设 $\displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\mathrm{e}^x-1}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t=0$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

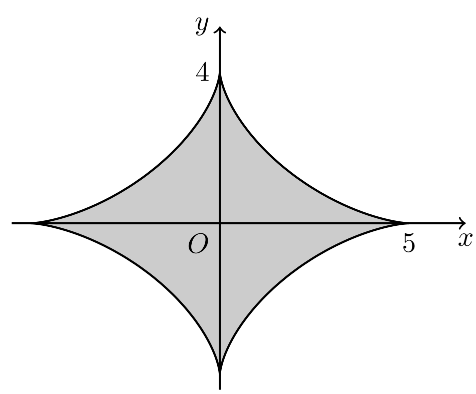
6. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y$, 求 $\displaystyle\int_0^1(x-1)^2f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. 已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)=\arctan x$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

8. 求极坐标曲线 $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 3\pi)$ 的弧长, 其中常数 $a>0$.

9. 计算 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

10. 求曲线 $x=5\sin^3 t$, $y=4\cos^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.



二、解答下列各题 (本题满分 30 分)

11. (7 分) 设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足条件

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

使用积分中值定理, 证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根. (要求使用积分中值定理. 若使用微分中值定理, 将不能得分.)

12. (7 分) 设导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有界, 证明函数 $f(x)$ 也在区间 (a,b) 上有界.

13. (8 分) 求解微分方程 $y''+9y=\cos(2x+5)$.

14. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$. 证明在 $[a,b]$ 上有且仅有一点 ξ, 使

$$\int_a^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\xi}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$$

2022–2023 学年第一学期《高等数学 A1》参考答案 · 卷 (A)

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n$, 其中 $a>0$, $b>0$.

解: 1^∞ 型.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^n=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\cdot n\right\}.$$

而

$$\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{b^x-1}{ax}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln b}{ax}\right\}=\sqrt[a]{b}.$$

故原式极限为 $\sqrt[a]{b}$.

2. 已知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[4]{1+4x}}{x^k}=a\neq0,$$

其中 k 为正整数. 试求 k, a.

解: 当 $x\to0$ 时,

$$\begin{aligned}(1+3x)^{\frac13}&=1+\frac13(3x)+\frac{\frac13(\frac13-1)}{2!}(3x)^2+o(x^2)\\&=1+x-x^2+o(x^2),\\(1+4x)^{\frac14}&=1+\frac14(4x)+\frac{\frac14(\frac14-1)}{2!}(4x)^2+o(x^2)\\&=1+x-\frac32x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[4]{1+4x}=\frac12x^2+o(x^2),$$

得 $k=2$, $a=\frac12$.

3. 求 $I=\displaystyle\int\frac{x\ln\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=1+\sqrt{1+x^2}$, 则 $\mathrm{d}u=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. 故

$$\begin{aligned}I&=\int\ln u\,\mathrm{d}u=u\ln u-\int u\cdot\frac1u\,\mathrm{d}u=u\ln u-u+C_1\\&=\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)\ln\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)-1-\sqrt{1+x^2}+C_1\\&=\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)\ln\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)-\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

4. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$ 的连续区间和间断点.

解: (1) $x>0$ 时, $\mathrm{e}^{tx}\to+\infty(t\to+\infty)$. 此时

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\frac1x.$$

(2) $x<0$ 时, $\mathrm{e}^{tx}\to0(t\to+\infty)$. 此时

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\frac{x+0}{1+0}=x.$$

(3) $x=0$ 时,

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{0+1}{1+0}=1.$$

从而

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$$

故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 而 $x=0$ 为其间断点.

5. 设 $\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\mathrm{e}^x-1}\left|\cos t\right|\mathrm{d}t=0$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 等式两端同时对 x 求导, 得

$$\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left|\cos(\mathrm{e}^x-1)\right|\mathrm{e}^x=0,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left|\cos\left(\mathrm{e}^x-1\right)\right|\mathrm{e}^{x-y}.$$

又 $x=0$ 时

$$\int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\int_0^0|\cos t|\,\mathrm{d}t=0,$$

得 $\left.y\right|_{x=0}=0$. 故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\left|\cos(\mathrm{e}^x-1)\right|\mathrm{e}^{x-y}\right|_{x=0,y=0}=1.$$

6. 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y$, 求 $\int_0^1(x-1)^2f(x)\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1(x-1)^2\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3\cdot\mathrm{e}^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2\mathrm{e}^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}\left[(x-1)^2\right]\\&\xlongequal{(x-1)^2=u}\int_1^0 u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).\end{aligned}$$

7. 已知 $y=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)=\arctan x$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 即 $y=f(u)$, 而 $u=\frac{x-1}{x+1}$. 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\arctan u\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}\cdot\arctan\frac{x-1}{x+1},$$

且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2\arctan(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

8. 求极坐标曲线 $\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}\ (0\leqslant\theta\leqslant3\pi)$ 的弧长, 其中常数 $a>0$.

解: $s=\int_0^{3\pi}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta$, 又 $\rho'=3a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\times\frac{1}{3}=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$, 故

$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

9. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解: 瑕点: $x=1$.

$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}\triangleq I_1+I_2,$$

注意到 $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$, 得

$$I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\ln\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}}\right]\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}\\&=\ln\left(1+\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)-\ln\tfrac{1}{2}=\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

10. 求曲线 $x=5\sin^3 t$, $y=4\cos^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

解: 曲线第一象限的部分, 旋转而成的体积记为 V_1, 则所求的体积为

$$\begin{aligned}V&=2V_1=2\int_{y=0}^{y=4}\pi x^2\,\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0}\left(5\sin^3 t\right)^2\mathrm{d}\left(4\cos^3 t\right)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}25\sin^6 t\cdot 4\cdot 3\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t\\&=600\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\ \mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t\ \mathrm{d}t\right)=600\pi\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)=\frac{640}{21}\pi.\end{aligned}$$

11. 设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足条件

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

使用积分中值定理, 证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根. (要求使用积分中值定理. 若使用微分中值定理, 将不能得分.)

证: 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

由积分中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

即 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一实根.

12. 设导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有界, 证明函数 $f(x)$ 也在区间 (a,b) 上有界.

证: 设 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有界, 则存在 $M>0$, 使得当 $x\in(a,b)$ 时, 有 $\left|f'(x)\right|\leqslant M$.
任意取定一点 $x_0\in(a,b)$, 则对于 $x\in(a,b)$ 和 $x\neq x_0$ 应用拉格朗日定理得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0),$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.
由于 $\left|x-x_0\right|<(b-a)$, 因此

$$\left|f(x)\right|\leqslant\left|f(x_0)\right|+M(b-a),$$

得证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

13. 求解微分方程 $y''+9y=\cos(2x+5)$.
解: 令 $2x+5=t$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, 所以原方程变为

$$4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+9y=\cos t$$

特征方程 $4r^2+9=0$ 的根为 $r_{1,2}=\pm\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, 线性齐次方程的通解

$$\bar{y}=C_1\cos\frac{3}{2}t+C_2\sin\frac{3}{2}t.$$

令线性非齐次方程的一个特解

$$y^*=A\cos t+B\sin t,$$

代人方程, 解得 $A=\dfrac{1}{5}, B=0$, 故线性非齐次方程的通解

$$y=C_1\cos\frac{3}{2}t+C_2\sin\frac{3}{2}t+\frac{1}{5}\cos t,$$

将 $t=2x+5$ 代回, 得到原方程的通解

$$y=C_1\cos\left(3x+\frac{15}{2}\right)+C_2\sin\left(3x+\frac{15}{2}\right)+\frac{1}{5}\cos(2x+5),$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$. 证明在 $[a,b]$ 上有且仅有一点 ξ, 使

$$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=\int_\xi^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$$

证: 令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. 由题设 $F(x)$ 也为连续函数, 且

$$F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_b^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0.$$

由零点定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $F(\xi)=0$, 即

$$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=\int_\xi^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t.$$

又因

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geqslant2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2>0,$$

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 于是有且仅有一点 ξ 使结论成立.