武汉大学弘毅学堂工科试验班

2020—2021 第一学期《高等数学 A》期中考试试题答案

1.（共 20 分，每小题 5 分）求极限：

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left[\left(1+\sin x\right)^x-1\right]$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left[\left(1+\sin x\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+\sin x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\sin x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

B. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|\,x\,|})$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|\,x\,|})=0+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|\,x\,|})=\dfrac{2}{1}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故

$$\lim_{x\to 0}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|\,x\,|})=1\text{。}$$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

解：$1\le\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{n}}$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1,\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$。

D. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\frac{1}{2}x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{12x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{12}=\frac{1}{6}\text{。}$$

2.（8 分）设 $y=\ln(\tan\dfrac{x}{2})$，求 dy。

$$dy=\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{dx}=\csc x dx\text{。}$$

3.（8 分）求由方程 $xy+e^y=e$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数值 $y''(0)$。

解：易知当 $x=0$ 时，$y=1$。

直接对方程两边对 x 求导，得 $x\cdot y'+y+e^y\cdot y'=0$，故 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$。

再次求导，得 $x\cdot y''+2y'+e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''=0$，将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=-\dfrac{1}{e}$ 代入，可得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$。

4.（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 的下凸区间。

解：$\dfrac{dy}{dt}=2t-2$，$\dfrac{dx}{dt}=3t^2+9$，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-2}{3t^2+9}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-2(t-3)(t+1)}{9(t^2+3)^3}$。

令 $y''>0$，解得 $-1<t<3$，因 $x(t)$ 是单调增函数，可得区间 $[-10,54]$ 为 $y=y(x)$ 的下凸区间。

5.（8 分）设 $y=(3x^2-2)\sin 2x$，求 $y^{(100)}$。

解：由莱布尼兹公式，有 $y^{(100)}=(3x^2-2)\cdot 2^{100}\cdot\sin 2x-C_{100}^{1}\cdot 6x\cdot 2^{99}\cos 2x-C_{100}^{2}\cdot 6\cdot 2^{98}\sin 2x$

6.（8 分）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}^2$，求 a。

解：由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(x-1,x)$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}^2。$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}=e^{2a}$，故 $a=1$。

7.（8 分）求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

解：$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$。

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$。易知：$x=0$ 为函数的第一类间断点，是可去间断点。$x=k\pi$，$k\in Z,k\neq 0$ 是第二类间断点。

8.（8 分）证明方程 $xe^x=2$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

证：设 $f(x)=xe^x-2$，易知 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(1)=(-2)\cdot(\mathrm{e}-2)<0$，由闭区间上连续函数的零点定理，可得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

又因为 $f'(x)=e^x(x+1)>0$，$\forall x\in(0,1)$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调增加，从而 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上至多有一实数根。从而方程 $xe^x=2$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根，结论成立。

9.（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)$，证明：在 $(0,1)$ 至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。

证：因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)$，由罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=0$。设函数 $F(x)=xf'(x)$，显然 $F(x)$ 在区间 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 上可导，且 $F(0)=F(c)=0$，由罗尔中值定理，在 $(0,1)$ 至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$。证毕。

10.（6 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，确定 a 的值；并求 $f'(x)$。

解：因 $f(x)$ 在在 $x=0$ 处连续，故 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}$，因 $g(0)=1$，且 $g(x)$ 有二阶连续导数，得

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g'(x)+\sin x\right)=g'(0)\text{。}$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{\left(g'(x)+\sin x\right)x-\left(g(x)-\cos x\right)}{x^2}$，

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}$$

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(g'(x)+\sin x\right)x-\left(g(x)-\cos x\right)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

11.（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f''(x)<0$，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调减少。

证：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，有 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$。设函数 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上可导，且 $g'(x)=xf''(x)<0$，故 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调减少，有 $g(x)<g(0)=0$，从而 $F'(x)<0$，即 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调减少。得证。

12.（6 分）构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的函数，使其在指定的 n 个不同的点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的导数不存在，并说明理由。

解：例如：$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|$ 或 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|$ 等，还可以给出其它的一些例子。

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，取 $f(x)=\left|x-a_1\right|+\left|x-a_2\right|+\cdots+\left|x-a_n\right|$，则易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。可以证明 $f(x)$ 在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的导数均不存在。理由如下：

当 $a_i<x<a_{i+1}$ 时，因为

$$\begin{aligned}f(x)-f(a_i)&=\left(x-a_1\right)+\cdots+\left(x-a_{i-1}\right)+\left(x-a_i\right)+\left(a_{i+1}-x\right)+\cdots+\left(a_n-x\right)\\&\quad-\left(a_i-a_1\right)-\cdots-\left(a_i-a_{i-1}\right)-\left(a_i-a_i\right)-\left(a_{i+1}-a_i\right)-\cdots-\left(a_n-a_i\right)\\&=\overbrace{\left(x-a_i\right)+\cdots+\left(x-a_i\right)}^{i-1\text{个}}+\left(x-a_i\right)+\overbrace{\left(a_i-x\right)+\cdots\left(a_i-x\right)}^{n-i\text{个}}\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to a_i+0}\dfrac{f(x)-f(a_i)}{x-a_i}=i-(n-i)=2i-n$，$i=1,2,\cdots,n$

当 $a_{i-1}<x<a_i$ 时，因为

$$\begin{aligned}f(x)-f(a_i)&=\left(x-a_1\right)+\cdots+\left(x-a_{i-1}\right)+\left(a_i-x\right)+\left(a_{i+1}-x\right)+\cdots+\left(a_n-x\right)\\&\quad-\left(a_i-a_1\right)-\cdots-\left(a_i-a_{i-1}\right)-\left(a_i-a_i\right)-\left(a_{i+1}-a_i\right)-\cdots-\left(a_n-a_i\right)\\&=\overbrace{\left(x-a_i\right)+\cdots+\left(x-a_i\right)}^{i-1\text{个}}+\left(a_i-x\right)+\overbrace{\left(a_i-x\right)+\cdots\left(a_i-x\right)}^{n-i\text{个}}\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to a_i-0}\dfrac{f(x)-f(a_i)}{x-a_i}=i-1-(n-i+1)=2i-n-2$，从而 $f'_+(a_i)\neq f'_-(a_i)$。