解：$\dfrac{dy}{dt}=2t-2$，$\dfrac{dx}{dt}=3t^2+9$，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-2}{3t^2+9}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-2(t-3)(t+1)}{9(t^2+3)^3}$.

令 $y''>0$，解得 $-1<t<3$，因 $x(t)$ 是单调增函数，可得区间 $[-10,54]$ 为 $y=y(x)$ 的下凸区间.

5.（8 分）设 $y=(3x-2)^2\sin 2x$，求 $y^{(100)}(0)$.

$\cancel{(6x-4)}$

解：由莱布尼兹公式，有 $y^{(100)}=(3x-2)^2\cdot 2^{100}\cdot\sin 2x-3C_{100}^1\cdot(6x-4)\cdot 2^{99}\cos 2x+C_{100}^2\cdot 6\cdot 2^{98}\sin 2x$. 因

而 $y^{(100)}(0)=300\times 2^{101}=75\times 2^{103}$.

6.（8 分）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+a}{x-a}^{\,x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，求 a.

解：由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(x-1,x)$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}。$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+a}{x-a}^{\,x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}=e^{2a}$，故 $a=\dfrac{1}{2}$.

7.（8 分）求极限 $\lim\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.