武汉大学 2013-2014 学年第一学期期末考试

高等数学 A1（A 卷答题卡）

姓名 ____________ 班级 ____________

[1]

考生学号												
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

填涂样例	正确填涂 ▬ 错误填涂 [✕][—][●]	注意事项	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（6 分）设$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，试说明结论：“存在一正整数$N$，使当$n>N$时，恒有$a_{n+1}<a_n$”是否成立？

二、（8 分）指出函数$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}$的间断点，并判定其类型.

三、（8 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}$.

四、（8 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{\sin^2(x^3)}$.

五、（7 分）设函数$y=y(x)$由方程$y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$所确定，且$y(0)=2$，其中$f(x)$是可导函数，$f'(2)=\dfrac{1}{2},f'(4)=1$，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$的值.

六、（8 分）讨论函数$y=3\int_0^x(t^2-2t-3)dt+1$在$[-2,6]$上的凸性与拐点.

七、（7 分）求$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

八、（8 分）设$\begin{cases} x = t + arc\cot t \\ y = t - \ln(1+t^2) \end{cases}$确定了函数$y = y(x)$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

九、（6 分）求微分方程$y'' + 4y = 3\sin x$的一条积分曲线，使其与曲线$y = \tan 3x$相切于原点.

十、（6 分）证明$f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x} & ，x \neq 0, \\ 0 & ，x = 0, \end{cases}$在$x = 0$处连续但不可导.

十一、（6 分）研究函数$y = (1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})e^{-x}$的极值（$n$为自然数）.

十二、（10 分）求曲线$y^2 = 2x$在点$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$处法线与曲线所围成图形的面积.

十三、(6 分)设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0) = 0 f(1) = f'(1) = 0$，证明:在$(0,1)$内存在一点$c$，使$f''(c) = 0$.

十四、（6 分）设函数$f(x)$在$\left[a，b\right]$上有连续导数$(a > 0)$，又设$x = r\cos\theta，f(x) = r\sin\theta$，试证明：

$$2\int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta = bf(b) - af(a)，其中：\alpha = \arctan\frac{f(a)}{a}，\beta = \arctan\frac{f(b)}{b}.$$

武汉大学2013-2014学年第一学期期末考试高等数学A1解答

一、（6分）设$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，试说明结论："存在一正整数$N$。使当$n>N$时，恒有$a_{n+1}<a_n$"是否成立？

解　不一定成立，例如：$a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但对一切正整数$K$有：

$$a_{2k}-a_{2k-1}=\frac{3}{2k}-\frac{1}{2k-1}=\frac{4k-3}{2k(2k-1)}>0\text{，即 }a_{2k}>a_{2k-1}$$

二、（8分）指出函数$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}$的间断点，并判定其类型.

解　$y=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}$在$x=0,x=2$无定义，因此$x=0$，$x=2$为函数的间断点，因为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2}$，所以$x=0$为函数的可去间断点，　因为$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-2)}=\infty$，所以$x=2$为函数的无穷间断点。

三、（8分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}$.

解　当$n\to\infty$时，　$\sin\dfrac{2}{n}\sim\dfrac{2}{n}$　故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\sin\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5}{5n+3}\cdot\dfrac{2}{n}=\dfrac{6}{5}$

四、（8分）求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{\sin^2(x^3)}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{\sin^2(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+u)\sin 2u\,du}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{2x\ln(1+x^2)\sin(2x^2)}{6x^5}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{\sin(2x^2)}{x^2}=\frac{2}{3}$$

五、（7分）设函数$y=y(x)$由方程$y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$所确定，且$y(0)=2$其中$f(x)$是可导函数，$f'(2)=\dfrac{1}{2},f'(4)=1$，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$的值.

解　令　$x^2+y^2=u,x+y=v$，　$y'=f'(u)(2x+2yy')+f'(v)(1+y')$

当$x=0$时，$y=2,u=4,v=2$，$y'(0)=f'(4)\times4y'(0)+f'(2)\left[1+y'(0)\right],y'(0)=-\dfrac{1}{7}$

六、（8分）讨论函数$y=3\int_0^x(t^2-2t-3)dt+1$在$[-2,6]$上的凸性与拐点.

解　$y'=3(x^2-2x-3)$，　$y''=3(2x-2),y''=0$得$x=1$，且当$1<x\le6$　$y''>0$，故曲线在$1<x\le6$时下凸，且当$-2\le x<1$　$y''<0$，故曲线在$-2\le x<1$时上凸，

又$y=3\int_0^1(t^2-2t-3)dt+1=-10$点$(1,-10)$为曲线的拐点.

七、（7分）求$\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{(1+x)^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+b}+\frac{1}{2(1+b)^2})=\frac{1}{2}$$

八、(**8** 分)设 $\begin{cases}x=t+arc\cot t\\ y=t-\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\dfrac{(1-t)^2}{t^2}=(1-\dfrac{1}{t})^2$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2(1-\dfrac{1}{t})\dfrac{1}{t^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\dfrac{2(t-1)(1+t^2)}{t^5}$

九、(**6** 分)求微分方程 $y''+4y=3\sin x$ 的一条积分曲线，使其与曲线 $y=\tan 3x$ 相切于原点.

解　方程的通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\sin x$

由已知得初始条件 $y(0)=0, y'(0)=3$，代入上式得 $C_1=0, C_2=1$

故所求积分曲线的方程为 $y=\sin 2x+\sin x$

十、(6 分)证明 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x} & , x\neq 0,\\ 0 & , x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$　　$\therefore f(x)$在$x=0$处连续

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

故 当$x\to 0$时极限不存在,故$f(x)$在$x=0$处不可导.

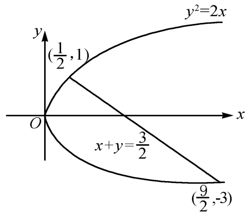
十一、(6 分)研究函数 $y=(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!})e^{-x}$ 的极值(n 为自然数).

解 $y'=(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!})e^{-x}-$

$(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{x^n}{n!})e^{-x}=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$　　唯一驻点 $x=0$

当 n 为偶数时, 对一切 x 值, $y'<0$,故函数不存在极值点. 当 n 为奇数时, 对 $x>0$ 时, $y'<0$,对 $x<0$ 时, $y'>0$,故函数极大值为 $y(0)=1$.

十二、(10 分)求曲线 $y^2=2x$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 处法线与曲线所围成图形的面积.



解　由 $2yy'=2$　$y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},1\right)}=\dfrac{1}{y}\Big|_{y=1}=1$

故法线方程为 $y-1=(-1)(x-\dfrac{1}{2})$　即 $x+y=\dfrac{3}{2}$

曲线 $y^2=2x$ 和法线 $x+y=\dfrac{3}{2}$ 的另一交点为 $\left(\dfrac{9}{2},-3\right)$

所求面积 $S=\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-y\right)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\frac{16}{3}$

十三、(**6** 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0f(1)=f'(1)=0$，证明:在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f''(c)=0$.

证明: 因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导.且 $f(0)=f(1)=0$,即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$,又 $f'(x)$ 在 $[\xi,1]$ 连续,在 $(\xi,1)$ 可导且 $f'(1)=f'(\xi)=0$ 即 $f'(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上满足罗尔定理的条件,则至少存在 $c\in(\xi,1)\subset(0,1)$ 使

则至少存在使 $f''(c)=0$

十四、(6 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有连续导数 $(a>0)$，又设 $x=r\cos\theta$，$f(x)=r\sin\theta$，

试证明：$2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=bf(b)-af(a)$

其中：$\alpha=\arctan\frac{f(a)}{a}$，$\beta=\arctan\frac{f(b)}{b}$

证明 因为 $r^2=x^2+f^2(x)$，$\theta=\arctan\frac{f(x)}{x}$，$d\theta=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}dx$

于是 $\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=\int_a^b[xf'(x)-f(x)]dx=\int_a^b xf'(x)dx-\int_a^b f(x)dx$

$$=xf(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)-2\int_a^b f(x)dx$$

所以 $2\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta=bf(b)-af(a)$