

武汉大学测绘学院

2023—2024 第一学期《高等数学 A1》期中考试试题

1. (共 18 分, 每小题 6 分) 求极限:

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right];$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{n}};$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{x^2(\sqrt[3]{1 + \tan^2 x} - 1)}.$

2. (8 分) 设 $y = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)^3$, 求 dy .

3. (8 分) 求由方程 $xy + e^y = e$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数值 $y''(0)$.

4. (8 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 的下凸区间.

5. (8 分) 设 $y = (3x - 2)^2 \sin 2x$, 求 $y^{(100)}(0)$.

⑥ (8 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$, 求 a .

7. (8 分) 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

√ 8. (8 分) 求满足不等式 $\ln x \leq C\sqrt{x}, x > 0$ 的最小正数 C .

⑨ (6 分) 设 $b > a > 0$. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 证明: 在 (a, b) 至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.

10. (8 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$, 为使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 确定 a 的值; 并求 $f'(x)$.

11. (6 分) 已知 $f''(0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - xf(x)}{x^3} = 1$. 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

√ 12. (6 分) 设 $a > 0, b > 0$. 试证明: $\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{(a+b) \ln \frac{a+b}{2}}{2}$.