武汉大学 2021–2022 学年第一学期

《高等数学 A1》 期末试题 (A 卷)

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \cdot \sqrt[n]{2021} \cdot \left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

2. 当 $x \to 1$ 时, $x^3 - x^2 - x + 1$ 与 $(x-1)^n$ 是同阶无穷小, 求正整数 n.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0, \\ a, & x=0, \\ \dfrac{\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}{bx}, & x>0. \end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 求 a, b.

4. 已知 e^{x^2} 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

5. 计算不定积分 $\int \dfrac{\cos x \sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

6. 判断积分 $\int_1^{+\infty} \left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性.

7. 设 $\begin{cases} x = \cos\left(t^2\right), \\ y = t\cos\left(t^2\right) - \int_1^{t^2} \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u, \end{cases}$ $t>0$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

8. 试确定 a, b, c 使 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有一拐点 $(1,-1)$, 且在 $x=0$ 处有极大值 1.

9. 利用定积分定义求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

10. 求由曲线 $y = 1-x^2$ 与 x 轴所围图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所成旋转体的体积.

二、解答下列各题 (本题满分 30 分)

11. (8 分) 设某直线同时与曲线 $y = x^2$ 和曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 相切, 求该直线的方程.

12. (10 分) 求初值问题 $y'' + y = 3\sin 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

13. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $0 < f(x) < 1$, 对于 $(0,1)$ 内所有 x 有 $f'(x) \neq 1$, 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x 使 $f(x) = x$.

14. (6 分) 设 $f(x)$ 对一切 x 满足 $\left|f(x)\right| \leqslant x^2$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是可微的.

2021–2022 学年第一学期《高等数学 A1》参考答案 · 卷 (A)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\cdot\sqrt[n]{2021}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2021}=1$. 使用等价无穷小代换,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}}{\sqrt{n^2+1}-n}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}=1.
\end{aligned}$$

2. 当 $x\to1$ 时, x^3-x^2-x+1 与 $(x-1)^n$ 是同阶无穷小, 求正整数 n.

解: 由 $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$, 则

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}(x+1)=2,$$

故 $n=2$ 时, x^3-x^2-x+1 与 $(x-1)^n$ 是同阶无穷小.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\int_0^x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t}{bx}, & x>0.\end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 求 a, b.

解: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{bx}=\dfrac{1}{b}\lim\limits_{x\to0^+}\cos x^2=\dfrac{1}{b}$,

得 $a=f(0)=\dfrac{1}{2}$, $b=2$.

4. 已知 e^{x^2} 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

解: $f(x)=\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'=2x\mathrm{e}^{x^2}$, 由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}\big(f(x)\big)=\Big[xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&=2\left[x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1-\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1=2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)\\
&=\mathrm{e}+1.
\end{aligned}$$

5. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int\frac{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}(\cos x)\xlongequal{\text{令 } t=\cos x}-\int\frac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int\left[t-\frac{2t}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t=\int t\,\mathrm{d}t-\int\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t^2-\ln\left(1+t^2\right)+C=\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C.
\end{aligned}$$

6. 判断积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 考虑 $x\to+\infty$ 时, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$ 关于 $\dfrac{1}{x}$ 是几阶无穷小.
因 $y=\ln(1+t)$ 在 $t=0$ 的泰勒公式为

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\Big(\big(\frac{1}{x}\big)^2\Big),$$

故

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2x^2(1+x)}+o\Big(\big(\frac{1}{x}\big)^2\Big),$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

又 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 可得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\right]$ 收敛.
另解: 由教材例题结论 “$x>0$ 时, $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$”, 知: 对 $\forall x\in[1,+\infty)$, 有

$$0\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x(1+x)}\leqslant\frac{1}{x^2}.$$

再由 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 可得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\right]$ 收敛.

7. 设 $\begin{cases} x=\cos\left(t^2\right) \\ y=t\cos\left(t^2\right)-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u \end{cases}$ $t>0$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
解: $x'=-2t\sin\left(t^2\right)$,
$y'=\cos\left(t^2\right)-2t^2\sin\left(t^2\right)-\dfrac{1}{2t}\cos\left(t^2\right)\cdot 2t=-2t^2\sin\left(t^2\right)$,
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$,
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t)=-\dfrac{1}{2t\sin\left(t^2\right)}$.

8. 试确定 a,b,c 使 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 有一拐点 $(1,-1)$, 且在 $x=0$ 处有极大值 1.
解: $y'=3x^2+2ax+b$, $y''=6x+2a$.
因 $(1,-1)$ 为拐点, 故 $\therefore y''|_{x=1}=0$, 解得 $a=-3$.
再由于 $x=0$ 处有极大值, 故 $\therefore y'|_{x=0}=0$, 解得 $b=0$.
由 $(0,1)$ 为 $y=f(x)$ 的极大值, 故 $1=y|_{x=0}=c$. 从而 $y=x^3-3x^2+1$.

9. 利用定积分定义求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
解: 因 $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=-1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

10. 求由曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴所围图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转所成旋转体的体积.

解: 曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴的交点坐标分别为 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$.

(1) 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

$$\begin{aligned}V_x&=\pi\int_{-1}^{1}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{16}{15}\pi.\end{aligned}$$

(2) 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积

$$V_y=\pi\int_0^1x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-y)\mathrm{d}y=\pi\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

11. 设某直线同时与曲线 $y=x^2$ 和曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切, 求该直线的方程.

解: 对曲线 $y=x^2$, 设切点为 $\left(a,a^2\right)$, 则切线斜率 $y'|_{x=a}=2x|_{x=a}=2a$, 切线方程为

$$y-a^2=2a(x-a).$$

对曲线 $y=\dfrac{1}{x}$, 设切点为 $\left(b,\dfrac{1}{b}\right)$, 则切线斜率 $y'|_{x=b}=-\left.\dfrac{1}{x^2}\right|_{x=b}=-\dfrac{1}{b^2}$.

两条曲线的切线斜率相等, 且切点 $\left(b,\dfrac{1}{b}\right)$ 满足切线方程, 即有

$$\begin{cases}2a=-\dfrac{1}{b^2},\\ \dfrac{1}{b}-a^2=2a(b-a),\end{cases}$$

可解得 $a=-2$, $b=-1/2$. 得所求切线方程为

$$y-4=-4(x+2),\quad \text{即 } y=-4x-4.$$

12. 求初值问题 $y''+y=3\sin 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

解: 齐次方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. 可求得其特解为 $y_1^*=-\sin 2x$, 于是它的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x.$$

代人 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, 得 $C_1=0$, $C_2=\sqrt{2}$, 故特解为

$$y=\sqrt{2}\sin x-\sin 2x.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $0<f(x)<1$, 对于 $(0,1)$ 内所有 x 有 $f'(x)\neq 1$, 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x 使 $f(x)=x$.

证: 作函数 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)>0$, $g(1)<0$. 又 $g(x)$ 连续, 由零点定理, 存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$.

下证唯一性, 用反证法. 若有两点 $x_1,x_2\in(0,1)$, 使 $f(x)=x$, 即 $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1,$$

这与题设 $f'(x)\neq 1$ 矛盾.

14. 设 $f(x)$ 对一切 x 满足 $|f(x)| \leqslant x^2$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是可微的.

证: 已知 $|f(x)| \leqslant x^2$, 得 $f(0)=0$. 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

由

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{|x^2|}{|x|}=\lim_{x\to 0}|x|=0,$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 即 $f'(0)=0$.

另证: 或者讨论单侧导数. 已知 $|f(x)| \leqslant x^2$, 得 $f(0)=0$. 对

$$-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2,$$

(1) 当 $x>0$ 时, 两边除以 x 得

$$-\frac{x^2}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{x^2}{x},$$

故

$$-x \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant x.$$

令 $x\to 0+$, 两边夹法则得 $f'_+(0)=0$.

(2) 当 $x<0$ 时, 两边除以 x 得

$$-\frac{x^2}{x} \geqslant \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{x^2}{x},$$

即

$$-x \geqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant x.$$

令 $x\to 0-$, 两边夹法则得 $f'_-(0)=0$. 综上得 $f'(0)=0$. 得证.