武汉大学 2019 −2020 第一学期

《高等数学 A》（A 卷）试题

1、（6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{5x}-1)}{\sin 3x^2}$.

2、（6 分）求曲线 $y=x^3-3x^2+24x-19$ 在拐点处的切线方程。

3、（6 分）确定函数 $f(x)=|x|\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点，并判定其类型。

4、（6 分）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(0)=0, f'(0)=1$，$F(n)=\lim\limits_{x\to\infty}xf(\dfrac{1}{n})\sin\dfrac{n}{x}$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)$.

5、（6 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且对任何 x、y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+f(x)\sin x)\sin x\mathrm{d}x$ 的值。

6、（6 分）设 $f(x)$ 为连续函数，函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^x yt\mathrm{d}t+\int_{y^2}^2 u^2\mathrm{d}u=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7、（6 分）若 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

8、（10 分）设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+2f'(x)+\dfrac{3}{4}f(x)=0$.

（1）证明反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；（2）若 $f(0)=1, f'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 的值。

9、（8 分）设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x\ , & x\geq 0\end{cases}$，求 $\varphi(x)=\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的表达式，并研究 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性和可微性。

10、（10 分）设平面图形 D 是由 $y=\sin x, y=\cos x$（其中 $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$）及直线 $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形；求：1）平面图形 D 的面积；2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所成的立体体积。

11、（8 分）设 $a>1, f(x)=a^x-ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$，问 a 为何值时 $x(a)$ 最小，并求最小值。

12、（10 分）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

13、（5 分）设函数 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$（$n$ 是正整数），证明：当 $x\geq 0$ 时成立

$$f(x)\leq\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

14、（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x)\geq 0$（$x\in[a,b]$）。又已知 $\varphi(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，且满足 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：

（1）$a \le \int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x \le b$；（2）$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \ge f[\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x]$.

武汉大学 2019 −2020 第一学期

《高等数学 A》试题 A 参考答案

1、（6 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{5x}-1)}{\sin 3x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{5x}-1)}{\sin 3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{3x^2}=\dfrac{5}{3}$

2、（6 分）求曲线 $y=x^3-3x^2+24x-19$ 在拐点处的切线方程。

解 由 $y'=3x^2-6x+24$，$y''=6x-6=0$，得 $x=1$，又 $y'''(1)=6\ne 0$

所以点 $(1,3)$ 为曲线拐点，而 $y'(1)=21$，故拐点处的切线方程为：$y=21x-19$

3、（6 分）确定函数 $f(x)=|x|\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点，并判定其类型。

解：由在 $x=0$ 处 $f(x)$ 无意义，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\dfrac{1}{x}=0$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点。

4、（6 分）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(0)=0, f'(0)=1$，$F(n)=\lim\limits_{x\to\infty}xf(\dfrac{1}{n})\sin\dfrac{n}{x}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)$.

解：由 $F(n)=nf(\dfrac{1}{n})\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n}{x}}{\frac{n}{x}}=nf(\dfrac{1}{n})$， 又 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=1$

由归结原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{1}{n})=f'(0)=1$

5、（6 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且对任何 x、y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+f(x)\sin x)\sin x\mathrm{d}x$ 的值。

解：由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 则有 $f(x)=f(0)+f(x)$ 故 $f(0)=0$

$f(x)=f(0)-f(-x)=-f(-x)$ 故 $f(x)$ 为奇函数，而 $f(x)\sin^2 x$ 是奇函数，

所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x=0$

而 $x\sin x$ 是偶函数，所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-2(x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}(\sin x)=2\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

6、（6 分）设 $f(x)$ 为连续函数，函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^x yt\mathrm{d}t+\int_{y^2}^2 u^2\mathrm{d}u=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解：两边对 x 求导数得：$y'\int_1^x tdt + yx - y^4 2yy' = 0$

即：$y'\dfrac{1}{2}(x^2-1) + yx - y^4 2yy' = 0$

$y'[\dfrac{1}{2}(x^2-1) - 2y^5] = -xy$　故有：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{4y^5 - x^2 + 1}$

7、（6 分）若 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解　由 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，令 $A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

则有　$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + A\sqrt{1-x^2}$，所以有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x + A\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(1+A)$$

所以 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4-\pi}$.

8、（10 分）设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + 2f'(x) + \dfrac{3}{4}f(x) = 0$.

（1）证明反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；（2）若 $f(0)=1, f'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 的值。

解：（1）法一　由 $f''(x) + 2f'(x) + \dfrac{3}{4}f(x) = 0$，故有对应的特征方程 $r^2 + 2r + \dfrac{3}{4} = 0$，解之得

$r_1 = -\dfrac{3}{2}, r_2 = -\dfrac{1}{2}$　　故　$f(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

由于 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = (-\dfrac{2}{3}C_1 e^{-\frac{3}{2}x} - 2C_2 e^{-\frac{1}{2}x})|_0^{+\infty} = -\dfrac{2}{3}C_1 - 2C_2$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

法二　由 $f''(x) + 2f'(x) + \dfrac{3}{4}f(x) = 0$，故有对应的特征方程 $r^2 + 2r + \dfrac{3}{4} = 0$，

解之得 $r_1 = -\dfrac{3}{2}, r_2 = -\dfrac{1}{2}$　　故　$f(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

由对 $\forall A > 0$，有 $|\int_0^A f(x)dx| = |(-\dfrac{2}{3}C_1 e^{-\frac{3}{2}x} - 2C_2 e^{-\frac{1}{2}x})|_0^A| = |-\dfrac{2}{3}C_1 e^{-\frac{3}{2}A} - 2C_2 e^{-\frac{1}{2}A}) - (-\dfrac{2}{3}C_1 - 2C_2)|$

$$= |\frac{2}{3}C_1(1 - e^{-\frac{3}{2}A}) + 2C_2(1 - e^{-\frac{1}{2}A})| < \frac{2}{3}|C_1| + 2|C_2| = M$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

（2）由 $f(0)=1, f'(0)=1$，故有　$C_1 + C_2 = 1, -\dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{1}{2}C_2 = 1$，从而有　$C_1 = -\dfrac{3}{2}, C_2 = \dfrac{5}{2}$

所以有 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 4$

9、（8 分）设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x\ , & x \geq 0 \end{cases}$，求 $\varphi(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 的表达式，并研究 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 的连续性和可微性。

解　当 $x \in [-1,0)$ 时，$\varphi(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^x (t+1)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

当 $x\in[0,1]$ 时，$\varphi(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(t+1)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

所以有 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & -1\le x<0\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$，

且 $\varphi(0)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

而 $$\varphi'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=1;$$

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，但在 $x=0$ 不可导

10、（8 分）设平面图形 D 是由 $y=\sin x$　,$y=\cos x$　$(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $x=0$　,$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形，求：1）平面图形 D 的面积；2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所成的立体体积。

解：1）$s=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=2(\sqrt{2}-1)$

2）　$s=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\cos^2 x)dx$

$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\pi$

11、（8 分）设 $a>1, f(x)=a^x-ax$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$，问 a 为何值时 $x(a)$ 最小，并求最小值。

解：由　$y'=a^x\ln a-a=0$　得驻点 $x(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$　又 $x'(a)=\dfrac{\ln\ln a-1}{a(\ln a)^2}=0$

得　唯一驻点　$a=e^e$　当　$a>e^e$ 时，$x'(a)>0$；当　$a<e^e$ 时，$x'(a)<0$；

所以 $a=e^e$ 为 $x(a)$ 的极小值点，即为最小值点。

故最小值为 $x(e^e)=1-\frac{1}{e}$.

12、（10 分）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 由 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{2t}=-\frac{\sin t}{2t}$$

而 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

故 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t}=\frac{-1}{2}$； $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{d^2y}{dx^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}=\frac{1}{12}$

13、（5 分）设函数 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t$（$n$ 是正整数），证明：当 $x\ge0$ 时成立

$$f(x)\le\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

证明　由于 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x$，则当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)\le0$，

因此 $f(x)$ 在点 $x=1$ 取 $[0,+\infty)$ 上的最大值。于是

$$f(x)\le\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\le\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},(x\ge0).$$

14、（7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x)\ge0$（$x\in[a,b]$）。又已知 $\varphi(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，且满足 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. 证明：

（1）$a\le\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x\le b$；　（2）$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\ge f[\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x]$.

证明：（1）对于 $x\in[a,b]$，由于 $\varphi(x)$ 非负，则显然成立 $a\varphi(x)\le x\varphi(x)\le b\varphi(x)$

由于 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，上式在 $[a,b]$ 上取定积分得：$a\le\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x\le b$

（2）取 $x_0=\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x$，则 $x_0\in[a,b]$.由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x)\ge0$（$x\in[a,b]$）。由泰勒公式得 $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),x\in[a,b]$，因此

$$\varphi(x)f(x)\ge\varphi(x)f(x_0)+f'(x_0)(x\varphi(x)-x_0\varphi(x)),x\in[a,b]$$

取积分得到 $\int_a^b\varphi(x)f(x)dx\ge f(x_0)\int_a^b\varphi(x)dx+f'(x_0)(\int_a^b x\varphi(x)dx-x_0\int_a^b\varphi(x)dx)$

$$=f(x_0)=f[\int_a^b x\varphi(x)dx]$$