

11:50

1. (共 18 分, 每小题 6 分) 求极限:

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} \left[(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - 1 \right];$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{n}};$

C. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{x^2(\sqrt{1 + \tan x} - 1)}.$

2. (8 分) 设 $y = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2$, 求 dy .

3. (8 分) 求由方程 $xy + e^y = e$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数值 $y''(0)$.

4. (8 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 9t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 的下凸区间.

5. (8 分) 设 $y = (3x - 2)^3 \sin 2x$, 求 $y^{(100)}(0)$.

6. (8 分) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)]$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$, 求 a .

7. (8 分) 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

8. (8 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $y = f(x)$ 的极值.

9. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f(1)$, 证明: 在 $(0, 1)$ 至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$.

10. (8 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$, 为使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 确定 a 的值; 并求 $f'(x)$.

11. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0$, $f''(x) < 0$, 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a]$ 上单调减少.

12. (6 分) 讨论方程 $4 \arctan x - x + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = 0$ 实根的个数.