武汉大学数学与统计学院

《高等数学》（第一学期）期中试题 2

一、（10 分）已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数，它在$x=1$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小量，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

二、（6 分）已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足$\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$

三、（10 分）求下列函数的极限：

1、试确定常数a,b，使极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}$存在，并求此极限；

2、$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}$

四、（10 分）设$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & x<0 \\ bx+a & x\ge 0 \end{cases}$，

1、确定a的值，使$f(x)$在$x=0$处连续；

2、再确定b的值，使$f(x)$在$x=0$处可导；

3、根据上述结果写出曲线$y=f(x)$在点$(0,a)$处的切线与法线方程。

五、（18 分）求下列函数导数：

1、设$y=(\dfrac{\sin x}{x})^{\ln x}$，求$y'$

2、设$y=x^2\cos^2 x$，求$y^{(n)}$。

3、求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线。

六、（10 分）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$确定，判断函数$y(x)$的单调区间、极值点；

曲线$y=y(x)$凹凸区间、拐点、渐近线。

七、（10 分）设曲线$y=f(x)$过原点，且在原点处与x轴相切，其中$f(x)$具有二阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$，（1）求曲线$y=f(x)$在原点处的曲率半径R；（2）证明$|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2f(x)}|=R$。

八、（15 分）$f(x)$具有三阶连续导数，且$f'''(a)\neq 0$. $f(x)$在$x=a$处的一阶泰勒公式为：

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h),\ (0<\theta<1),$$

试证：当$h\to 0$时，$\theta\to\dfrac{1}{3}$.

九、（11 分）在抛物线$y=4-x^2$上的第一象限部分求一点p，过p点作切线，使该切线与坐标轴所围成的三角形的面积最小。

武汉大学数学与统计学院

《高等数学》（第一学期）期中试题 2 参考解答

一、解　因 $f(x)$ 的周期为 5，故函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 与 $x=6$ 处的切线有相同的斜率。且由上述等式两边对 $x\to 0$ 取极限易得 $f(1)=0$ 。因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(8+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=8$，

另一方面，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=4f'(1)$

故 $f'(1)=2$，故在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程为：$y=2(x-6)$ 。

二、解　设 $y=[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{h}\ln[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]$，

因为 $\lim\limits_{h\to 0}\ln y=\dfrac{1}{h}\ln[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}{hx}=x[\ln f(x)]'$，

故 $\lim\limits_{h\to 0}[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}}=e^{x[\ln f(x)]'}$，由已知条件得 $e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}}$，因此 $x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$，

从而 $[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$，解之得 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 得 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ 。

三、

1、解：　因上式极限存在，故分子的极限必须为零，即 $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\cos 2x+b\cos 4x)=1+a+b=0$

此时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2a\sin 2x-4b\sin 4x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{x}\cdot\dfrac{a+4b\cos 2x}{4x^2}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(a+4b\cos 2x)=a+4b=0$，解得 $a=-\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$ 。此时，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-4\cos 2x}{3x^2}=\dfrac{8}{3}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin x}\ln(x+e^{2x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^{2x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}}}=e^3$

四、1、因 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{2x}=1$，由 $f(x)$，在 $x=0$ 点处连续，故 $a=1$ 。

2、由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+bx)-1}{x-0}=b$　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x-0}=2\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2$
由 $f(x)$，在 $x=0$ 点处可导，故 $b=2$ 。

3、切线方程为：$y=2x+1$；　法线方程为：$y=-\dfrac{1}{2}x+1$ 。

五、1、解：$y=e^{\ln x(\ln\sin x-\ln x)}$，$y'=(\dfrac{\sin x}{x})^{\ln x}[\dfrac{1}{x}(\ln\sin x-\ln x)-\cot x\ln x]$

2、解：由 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$,$(\cos^2 x)^{(k)}=2^{k-1}\cos(2x+\dfrac{k\pi}{2})$

$$y(n)=x^2(\cos^2 x)^{(n)}+n2x(\cos^2 x)^{(n-1)}+n(n-1)(\cos^2 x)^{(n-2)}$$
$$=2^{n-1}x^2\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+2^{n-1}nx\cos(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})+2^{n-3}n(n-1)\cos(2x+\frac{(n-2)\pi}{2})$$

3、解：由 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$，所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线，又

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=+\infty$，所以沿 $x\to+\infty$ 方向没有水平渐近线。又

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\ln(1+e^x)]=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=0$

所以沿 $x\to+\infty$ 方向有斜渐近线 $y=x$ 。

而沿 $x\to-\infty$ 方向：$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以沿 $x\to-\infty$ 方向该曲线有水平渐近线 $y=0$

六、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，判断函数 $y(x)$ 的单调区间、极值点；曲线 $y=y(x)$ 凹凸区间、拐点、渐近线。

解：$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，令 $y'=0\Rightarrow t=\pm1$，（$x=-3,5$）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{t^2-1}{t^2+1})\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$，令 $y''=0\Rightarrow t=0$（$x=1$）

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	−	+	+	+
$y(x)$	↗	极大点	↘		↘	极小值点	↗
$y=y(x)$	上凸		上凸	拐点 $(1,1)$	下凸		下凸

由 $t\to\infty\Leftrightarrow x\to\infty$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{t\to\infty}y=\infty$，故曲线 $y=y(x)$ 没有水平渐近线，没有垂直渐近线。

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^3-3t+1}{t^3+3t+1}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{t\to\infty}(-6t)=-\infty$ 故曲线没有斜渐近线。

七、解：（1）由题设 $f(0)=0,f'(0)=0$，所以 $R=\frac{[1+f'^2(0)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\frac{1}{|f''(0)|}$

（2）将 $f(x)$ 在原点展开为一阶泰勒公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2$

$$\frac{x^2}{2f(x)}=\frac{1}{f''(\theta x)},\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{f''(\theta x)}=\frac{1}{f''(0)}=R$$

八、注意到： $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$ （$0<\theta<1$） （＊）

以及 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta_1 h)$ （$0<\theta_1<1$） （＊＊）

比较（＊）和（＊＊）两式得：$\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)-\frac{h^2}{2}f''(a)=\frac{h^3}{6}f'''(a+\theta_1 h)$，即：$\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h}\theta=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h)$

或 $f'''(a+\theta_2\theta h)\theta=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h)$ （$0<\theta_2<1$），从而，当 $h\to0$ 时，由 $f(x)$ 具有三阶连续导数以及 $f'''(a)\neq0$，得 $\theta\to\frac{1}{3}$.

九、解：设切点坐标为$P(x,y)$，切线方程为$Y-(4-x^2)=-2x(X-x)$，即$\dfrac{X}{\dfrac{x^2+4}{2x}}+\dfrac{Y}{x^2+4}=1$

所以，所求的三角形面积为：$s(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^2+1)^2}{2x}=\dfrac{1}{4}(x^3+8x+\dfrac{16}{x})$

$s'(x)=\dfrac{1}{4}(3x^2+8-\dfrac{16}{x^2}),s''(x)=\dfrac{1}{4}(6x+\dfrac{32}{x^3})$，令$s'(x)=0,x=\dfrac{2}{\sqrt{3}},s''(\dfrac{2}{\sqrt{3}})>0$

$s(\dfrac{2}{\sqrt{3}})$为最小值，$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}},s(\dfrac{2}{\sqrt{3}})=\dfrac{8}{3}$，故所求点$P$的坐标为：（$\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{8}{3}$）。