武汉大学 2023-2024 学年第一学期

《高等数学A1》期中考试试卷

一、(6*4 分) 求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{1-\cos x}-1\right)\ln(1+\tan x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[\ln(1+x)-x]}$

二、(10 分) 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1,2,3,\cdots$)，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

三、(8 分) 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)\neq 0$，且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

四、(8 分) 设函数 $f(x)=(x\sin x)^2$，求 $f^{(50)}(0)$.

五、(8 分) 设函数 $\varphi(u)$ 可微，求函数 $y=\ln[\varphi^2(\sin x)]$ 的微分 dy.

六、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$ 使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

七、(10 分) 设 $x>0$，常数 $a>e$，证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，证明

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2).$$

九、(12 分) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且满足：$y'=x^2+y^2$，$y(0)=0$.

(I) 研究 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的单调性和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸性(8 分)，

(II) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x^3}$ (4 分).