武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题 A

一、（48 分）试解下列各题：

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cos n}{(1-\frac{x}{n})^{-n}}$.

2、求微分方程 $y''+y=x$ 的特解，使得该特解在原点处与直线 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 相切。

3、求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点，并判别其类型。

4、设 $f(x)=\begin{cases}e^{x}\cos x+b, x\le 0\\ \sin ax, x>0\end{cases}$，确定 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，求 $y'(0)$.

6、设函数 $f(x)=xe^{x}$，讨论导函数 $f^{(2011)}(x)$ 的极值点以及取得极大、极小值情况。

二、（10 分）已知 $u=\int_0^{\sin y}e^{v}dv$，其中 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2}, a\neq 0)$ 所确定，

求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

三、（12 分）设函数 $y=\ln\cos x \quad x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

(1) 求函数的单调区间和函数图形的的凸性区间；

(2) 在曲线上求曲率半径为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的坐标。

四、（14 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x^3} & x>1\\ x(x^3-e^{-x^2}) & -1\le x\le 1\\ \dfrac{1}{1+x^2} & x<-1\end{cases}$，求积分：$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

五、（10 分）设曲线 $y=x^2\,(0\le x\le 1)$ 和直线 $y=1$，$x=0$ 围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积；

（2）求 D 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积；

六、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$ 求证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)=2$.

武汉大学数学与统计学院

2011—2012 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、（48 分）试解下列各题：

1、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cos n}{(1-\frac{x}{n})^{-n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cos n]}{\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{x}{n})^{-\frac{n}{x}}]^{x}}=\dfrac{1}{e^{x}}=e^{-x}$

2、解：对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为 $y_1=x$，原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$，利用初值条件可求得 $C_1=0,C_2=-\dfrac{3}{2}$，原问题的解为：$y=-\dfrac{3}{2}\sin x+x$

3、解：$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$ $x=-1$ 为第一类可去间断点，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ $x=1$ 为第二类无穷间断点，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$ $x=0$ 为第一类跳跃间断点。

4、解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^x\cos x+b)=1+b,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin ax=0$

$f(0)=1+b$，所以 $1+b=0$，即 $b=-1$，又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\cos x+b-(1+b)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\cos x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x(\cos x-\sin x)}{1}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$，∴ 当 $a=1,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$

5、解： 方程两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{x^2+y}(2x+y')=3x^2y+x^3y'+\cos x$

当 $x=0$ 时，由原方程得 $y=1$，代入上式得 $y'(0)=1$

6、解 由 $f(x)=xe^x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，

$f''(x)=[(1+x)e^x]'=e^x+(1+x)e^x=(x+2)e^x$，以此类推知 $f^{(2011)}(x)=(2011+x)e^x$，

令 $f^{(2012)}(x)=(2012+x)e^x=0\Rightarrow x=-2012$，又 $f^{(2013)}(-2012)=(2013-2012)e^{-2012}>0$，

故 $x=-2012$ 为导函数 $f^{(2011)}(x)$ 的极小值点，导函数的极小值为

$f^{(2011)}(-2012)=(2011-2012)e^{-2012}=-e^{-2012}$，无极大值。

二、（10 分）解 由 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^{\sin y}\cdot\cos y\cdot\dfrac{dy}{dx}$，而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{\frac{b}{a}a\cos t}{-\frac{a}{b}b\sin t}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

故 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-e^{\sin y}\cdot\cos y\cdot\dfrac{b^2x}{a^2y}$

三、（12 分）解：1）$y'=-\tan x$，在 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 内，$y'>0$，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内，$y'<0$，故 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 是单调减少区间，$(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 是单调增加区间；而由 $y''=-\sec^2 x<0$ $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，得 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，函数的图形是凹的。

2）$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=|\cos x|$，由 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $x=\pm\dfrac{\pi}{6}$，故曲率半径为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点是 $(\pm\dfrac{\pi}{6},\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

四、（14 分）解：$f(x)=\begin{cases}\arctan x/x^3 & x>1\\ x(x^3-e^{-x^2}) & -1\le x\le 1\\ 1/1+x^2 & x<-1\end{cases}$

当 $x<-1$， $\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x+\frac{\pi}{2}$

当 $-1\le x\le 1$， $\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{-1}^{x}t(t^3-e^{-t^2})dt=\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}e^{-1}$

当 $x>1$， $\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{-1}^{1}t(t^3-e^{-t^2})dt+\int_{1}^{x}\frac{\arctan t}{t^3}dt$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\arctan t\, d(\frac{1}{t^2})=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2t^2}\arctan t\,\Big|_1^x+\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\frac{1}{t^2(1+t^2)}dt$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int_{1}^{x}(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(1+t^2)})dt=\frac{\pi}{2}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}+1)\arctan x-\frac{1}{2x}$

故 $\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}\arctan x+\frac{\pi}{2} & x<-1\\ \frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}e^{-1} & -1\le x\le 1\\ \frac{\pi}{2}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}+1)\arctan x-\frac{1}{2x} & x>1\end{cases}$

五、（10 分）解：$A=\int_0^1(1-x^2)dx=1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$ $\quad V_x=\pi-\pi\int_0^1(x^2)^2dx=\pi-\frac{1}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi$

六、（6 分）证 1　令 $F(x)=f(x)-x^2+x$　则 $F(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$　$F(0)=F(1)$

由洛尔定理知　$\exists\eta\in(0,1)$，　$F'(\eta)=0$

$F'(x)=f'(x)-2x+1$，　$F'(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，　$F'(1)=f'(1)-1=0=F'(\eta)$

由洛尔定理知　$\exists\xi\in(0,1)$，　$F''(\xi)=0$，　$F''(x)=f''(x)-2$，　$f''(\xi)=2$

证 2　令 $F(x)=f(x)-x^2$　$F(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$　由拉格朗日定理知

$\exists\eta\in(0,1)$，　$F'(\eta)=F'(\eta)(1-0)=F(1)-F(0)=-1$

$F'(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$　　$F'(1)=f'(1)-2=-1=F'(\eta)$

由洛尔定理知　$\exists\xi\in(0,1)$，　$F''(\xi)=0$，　$F''(x)=f''(x)-2$，　$f''(\xi)=2$

证 3　在 $x=1$ 展开为一阶泰勒公式 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2$，　$\xi_1\in(x,1)$

$f(0)=f(1)-f'(1)+\frac{1}{2}f''(\xi)$，　$\xi\in(0,1)$，因 $f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$　故 $\exists\,\xi\in(0,1)$，　$f''(\xi)=2$

证 4　令 $F(x)=f(x)-(x-\frac{1}{2})^2$，　用两次洛尔定理。

证 5　令 $F(x)=xf'(x)-x^2-f(x)$，用一次洛尔定理。