2023－2024 学年第一学期《高等数学》期中考试参考答案 · 卷 (A)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x-\sin(\sin x))^{\frac{1}{x^3}}$.

解: 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\right\}$, 其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{(\sin x)^3}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x-\sin(\sin x))^{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{6}$.

2. 用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$, $\quad(a\neq 0)$.

解: 由 $\ln(1+ax)=ax-\dfrac{a^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\left(ax-\frac{a^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\frac{a}{x}+a^3x+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{2}x^2+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}+o\left(x^2\right)\right]=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

3. $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n.

解: 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+o\left(x^2\right)$, $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right)$, 得

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+o\left(x^4\right),$$

$$\cos\sqrt{2}x=1-\frac{1}{2!}2x^2+\frac{1}{4!}4x^4+o\left(x^4\right),$$

$$\mathrm{e}^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^4+o\left(x^4\right),$$

故 $n=4$.

4. 设 $f(x)$ 对任意的 x,y 恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant \mathrm{e}^{(x-y)^2}-1$, 求 $f'(x)$.

解: 因 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, 又由题设有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{h^2}-1}{|h|}.$$

于是

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h^2}-1}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|}=0.$$

故 $f'(x)=0$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}-x\right)+\dfrac{\pi}{4}, & x>1.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解: $x\neq 1$ 时,

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & x<1,\\ \dfrac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}-1\right), & x>1.\end{cases}$$

又

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to0-}\frac{\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{1}{2},$$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(1+x)^2-1}-(1+x)\right)+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{x}=\frac{1}{2},$$

故

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}-1\right), & x>1.\end{cases}$$

6. 设函数 $y=f(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t\\ y=\mathrm{e}^y\sin t+1\end{cases}$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解: 方程组两边同时对 t 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin t+\mathrm{e}^y\cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(6t+2)}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3-x)-7}{\arcsin 2x}=5$, 证明: $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导, 并求 $f'(3)$.

证: 由 $\lim\limits_{x\to0}[f(3-x)-7]=0$ 及 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续知: $f(3)=7$; 所以

$$f'(3)=\lim_{x\to0}\frac{f(3-x)-f(3)}{-x}=\lim_{x\to0}\frac{f(3-x)-7}{\arcsin 2x}\cdot\frac{\arcsin 2x}{-x}=-10,$$

即 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导, $f'(3)=-10$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 且满足: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2$, 求 $f'(0)$.

解: 由 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0\cdot2=0$, 得

$$\lim_{x\to0}f(x)=-1\Rightarrow f(0)=-1,$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x},$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2\Rightarrow\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}=2+\alpha,\lim_{x\to0}\alpha=0,$$

$$f(x)=2x+\alpha x-\frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)+1}{x}=2+\alpha+\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2},$$

$$\Rightarrow f'(0)=2+\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=2.$$

9. 求函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的极值, 并求曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解: $y'=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}, y''=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$. 令 $y'=0$, 得 $x=-2$. 令 $y''=0$, 得 $x=-3$,

因为当 $x\in(-3,-2)$ 时, $y'<0$, 当 $x\in(-2,0)$ 时, $y'>0$. 所以函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 有极小值 $y(-2)=-3$.

又当 $x\in(-\infty,-3)$ 时, $y''<0$, 当 $x\in(-3,+\infty)$ 时, $y''>0$. 所以曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $\left(-3,-\dfrac{26}{9}\right)$.

10. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,4]$ 上连续, 在开区间 $(1,4)$ 内可导, 且满足 $f(4)=0$, 证明在区间 $(1,4)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证: 设 $F(x)=(1-x)^2f(x)$, 则 $F(x)$ 在闭区间 $[1,4]$ 上连续, 在开区间 $(1,4)$ 内可导. 由于 $f(4)=0$, 所以 $F(1)=0, F(4)=0$.

故由 Rolle 定理知至少有一点 $\xi\in(1,4)$ 使 $F'(\xi)=0$. 即 $F'(x)=(1-x)^2f'(x)-2(1-x)f(x)$, 亦即 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

11. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的所有渐近线.

解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$, 曲线没有水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\infty$, 故曲线有一条铅直渐近线 $x=0$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)=1$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=0+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=0$, 故曲线有斜渐近线 $y=x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=0+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)=-1$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+x\right)=0+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)=0$, 故曲线有斜渐近线 $y=-x$.

12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=f(b)=0$, 且 $f'(a)f'(b)>0$, 证明：在区间 (a,b) 内存在点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

证: 已知 $f'(a)\cdot f'(b)>0$, 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$. 因为

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限的局部保号性知, 在 a 的某个右邻域内, 必有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ 所以必有 $x_1>a$, 使得 $x_1-a>0$, 从而 $f(x_1)>f(a)=0$;

因为

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

在 b 的某个左邻域内, 必有 $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ 所以必有 $x_2<b$, 使得 $x_2-b<0$, 从而 $f(x_2)<f(b)=0$.
于是在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上, 由连续函数的零点定理知, 必有 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

13. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 试证明: $f(x)\geqslant x(-\infty<x<+\infty)$.

证: 因为 $f''(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, 从而有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$,

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 由 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\xi)=x+\frac{1}{2}x^2f''(\xi)\geqslant x \quad (\xi \text{ 在0 与}x\text{ 之间}).$$