

武汉大学 2022–2023 学年第一学期
高等数学 A1 期末试题 (A 卷)

一、计算下列各题 (本题满分 70 分, 每小题 7 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^n$, 其中常数 $a > 0, b > 0$.

2. 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{x^k} = a \neq 0,$$

其中 k 为正整数. 试求 k, a .

3. 求不定积分 $I = \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

4. 求函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}}$ 的连续区间和间断点.

5. 设 $\int_0^y e^t dt - \int_0^{e^x-1} |\cos t| dt = 0$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

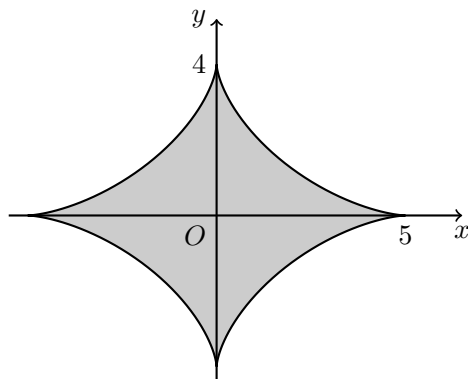
6. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

7. 已知 $y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \arctan x$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

8. 求极坐标曲线 $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ ($0 \leq \theta \leq 3\pi$) 的弧长, 其中常数 $a > 0$.

9. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

10. 求曲线 $x = 5 \sin^3 t, y = 4 \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.



二、解答下列各题 (本题满分 30 分)

11. (7 分) 设实数 a_0, a_1, \dots, a_n 满足条件

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

使用积分中值定理, 证明方程 $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根. (要求使用积分中值定理. 若使用微分中值定理, 将不能得分.)

12. (7 分) 设导函数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上有界, 证明函数 $f(x)$ 也在区间 (a, b) 上有界.

13. (8 分) 求解微分方程 $y'' + 9y = \cos(2x + 5)$.

14. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明在 $[a, b]$ 上有且仅有一点 ξ , 使

$$\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}dt.$$

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^n$, 其中 $a > 0, b > 0$.

解: 1^∞ 型.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a}\right)^n = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{a} \cdot n \right\}.$$

而

$$\exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b^x - 1}{ax} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln b}{ax} \right\} = \sqrt[n]{b}.$$

故原式极限为 $\sqrt[n]{b}$.

2. 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{x^k} = a \neq 0,$$

其中 k 为正整数. 试求 k, a .

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} (1+3x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(3x) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(3x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x - x^2 + o(x^2), \\ (1+4x)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{1}{4}(4x) + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}(4x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x} = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

得 $k = 2, a = \frac{1}{2}$.

3. 求 $I = \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

解: 令 $u = 1 + \sqrt{1+x^2}$, 则 $du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. 故

$$\begin{aligned} I &= \int \ln u du = u \ln u - \int u \cdot \frac{1}{u} du = u \ln u - u + C_1 \\ &= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - 1 - \sqrt{1+x^2} + C_1 \\ &= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

4. 求函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}}$ 的连续区间和间断点.

解: (1) $x > 0$ 时, $e^{tx} \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$. 此时

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}} = \frac{1}{x}.$$

(2) $x < 0$ 时, $e^{tx} \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. 此时

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x.$$

(3) $x = 0$ 时,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0 + 1}{1 + 0} = 1.$$

从而

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

故 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, 而 $x = 0$ 为其间断点.

5. 设 $\int_0^y e^t dt - \int_0^{e^x-1} |\cos t| dt = 0$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

解: 等式两端同时对 x 求导, 得

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} - |\cos(e^x - 1)| e^x = 0,$$

故

$$\frac{dy}{dx} = |\cos(e^x - 1)| e^{x-y}.$$

又 $x = 0$ 时

$$\int_0^y e^t dt - \int_0^0 |\cos t| dt = 0,$$

得 $y \Big|_{x=0} = 0$. 故

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = |\cos(e^x - 1)| e^{x-y} \Big|_{x=0, y=0} = 1.$$

6. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx &= \int_0^1 (x-1)^2 \left[\int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} (x-1)^3 \cdot e^{-x^2+2x} dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d[(x-1)^2] \\ &\stackrel{(x-1)^2=u}{=} \int_1^0 u e^{-u} du = \frac{1}{6} (e-2). \end{aligned}$$

7. 已知 $y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \arctan x$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

解: 即 $y = f(u)$, 而 $u = \frac{x-1}{x+1}$. 故

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = \arctan u \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \arctan \frac{x-1}{x+1},$$

且

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

8. 求极坐标曲线 $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ ($0 \leq \theta \leq 3\pi$) 的弧长, 其中常数 $a > 0$.

解: $s = \int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$, 又 $\rho' = 3a \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} \times \frac{1}{3} = a \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}$, 故

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}} d\theta = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = \frac{3}{2} \pi a.$$

9. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解: 瑕点: $x = 1$.

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} \triangleq I_1 + I_2,$$

注意到 $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$, 得

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}} = \ln \left[(x - \frac{1}{2}) + \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \ln \left(1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \right) - \ln \frac{1}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}).$$

10. 求曲线 $x = 5 \sin^3 t$, $y = 4 \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

解: 曲线第一象限的部分, 旋转而成的体积记为 V_1 , 则所求的体积为

$$V = 2V_1 = 2 \int_{y=0}^{y=4} \pi x^2 dy$$

$$= 2\pi \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} (5 \sin^3 t)^2 d(4 \cos^3 t) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25 \sin^6 t \cdot 4 \cdot 3 \cos^2 t \sin t dt$$

$$= 600\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt \right) = 600\pi \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right) = \frac{640}{21} \pi.$$

11. 设实数 a_0, a_1, \dots, a_n 满足条件

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

使用积分中值定理, 证明方程 $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根. (要求使用积分中值定理. 若使用微分中值定理, 将不能得分.)

证: 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, 则

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$f(\xi) = \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

即 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有一实根.

12. 设导函数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上有界, 证明函数 $f(x)$ 也在区间 (a, b) 上有界.

证: 设 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上有界, 则存在 $M > 0$, 使得当 $x \in (a, b)$ 时, 有 $|f'(x)| \leq M$.
任意取定一点 $x_0 \in (a, b)$, 则对于 $x \in (a, b)$ 和 $x \neq x_0$ 应用拉格朗日定理得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0),$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

由于 $|x - x_0| < (b - a)$, 因此

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + M(b - a),$$

得证 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

13. 求解微分方程 $y'' + 9y = \cos(2x + 5)$.

解: 令 $2x + 5 = t$, 则 $\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \frac{d^2y}{dt^2}$, 所以原方程变为

$$4 \frac{d^2y}{dt^2} + 9y = \cos t$$

特征方程 $4r^2 + 9 = 0$ 的根为 $r_{1,2} = \pm \frac{3}{2}i$, 线性齐次方程的通解

$$\bar{y} = C_1 \cos \frac{3}{2}t + C_2 \sin \frac{3}{2}t.$$

令线性非齐次方程的一个特解

$$y^* = A \cos t + B \sin t,$$

代入方程, 解得 $A = \frac{1}{5}$, $B = 0$, 故线性非齐次方程的通解

$$y = C_1 \cos \frac{3}{2}t + C_2 \sin \frac{3}{2}t + \frac{1}{5} \cos t,$$

将 $t = 2x + 5$ 代回, 得到原方程的通解

$$y = C_1 \cos \left(3x + \frac{15}{2} \right) + C_2 \sin \left(3x + \frac{15}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos(2x + 5),$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明在 $[a, b]$ 上有且仅有一点 ξ , 使

$$\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}dt.$$

证: 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt$. 由题设 $F(x)$ 也为连续函数, 且

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt - \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt = - \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0,$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt - \int_b^b \frac{1}{f(t)}dt = \int_a^b f(t)dt > 0.$$

由零点定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即

$$\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}dt.$$

又因

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2\sqrt{f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}} = 2 > 0,$$

故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 于是有且仅有一点 ξ 使结论成立.