

## 武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

- 1、(9 分) 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x})(e^x - 1)$
- 2、(9 分) 计算反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$ .
- 3、(9 分) 设函数  $y = y(x)$  有方程  $xy^2 + \sin \frac{\pi}{2} = ye^x$  所确定, 求  $y''(0)$ .
- 4、(9 分) 设函数  $y = y(x)$  是方程  $y''' - y' = 0$  的解, 且当  $x \rightarrow 0$  时  $y(x)$  是  $x^2$  的等价无穷小, 求  $y = y(x)$  的表达式.
- 5、(10 分) 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$  为可导函数, 其中  $a, b$  为常数, 求  $a^2 + b^2$ .
- 6、(9 分) 设函数  $f$  可导, 由参数方程  $\begin{cases} x = (t-2)f(t) \\ y = tf(t) \end{cases}$  所确定的函数  $y = y(x)$  的导数  $\frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{2t-3}$ , 求满足  $f(-\ln 3) = 1$  的  $f(x)$ .
- 7、(10 分) (1) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处满足  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , 证明: 点  $(0, f(0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点. (2) 如果函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  的某邻域内有二阶导数, 且  $f'(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\sin x} = 1$ , 试说明点  $(0, f(0))$  是否是曲线  $y = f(x)$  的拐点.
- 8、(10 分) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  点附近有定义, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$   
(1) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} = 0$ ; (2) 试证: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  点二阶可导, 则  $x = 0$  点为函数  $f(x)$  的极小值点.
- 9、(9 分) 设  $f(x) = \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt$ , 计算定积分  $\int_0^1 xf(x)dx$ .
- 10、(10 分) 已知曲线  $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).  
(1) 求该曲线的弧长; (2) 证明该曲线与直线  $x = \pi, y = 0$  所围平面图形的面积不小于  $\pi$ .
- 11、(6 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ .  
(1) 如果  $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) < 0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f''(\xi) + f(\xi) = 2f'(\xi)$ .  
(2) 如果  $x \in (0, 1)$  时  $f''(x) + f(x) \neq 2f'(x)$ , 证明  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内没有零点.

# 武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 A1 期末试题 A 解答

1、(9 分) 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x})(e^x - 1)$

解  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x})(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x})x$  5 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \quad 9 \text{ 分}$$

2、(9 分) 计算反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$ .

解:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{1+x^{-2}}} dx$  5 分

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} d(x^{-2}) = -\sqrt{1+x^{-2}} \Big|_1^{+\infty} = \sqrt{2} - 1 \quad 9 \text{ 分}$$

或 令  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$  5 分

$$= -\frac{1}{\sin t} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad 9 \text{ 分}$$

3、(9 分) 设函数  $y = y(x)$  有方程  $xy^2 + \sin \frac{\pi}{2} = ye^x$  所确定, 求  $y''(0)$ .

解: 方程两边关于  $x$  求导得  $2xyy' + y^2 = e^x(y + y')$  (1)

由方程知  $x=0 \Rightarrow y(0)=1$  由 (1) 得  $y'(0)=0$  5 分

对 (1) 两边关于  $x$  求导得  $2yy' + 2xyy'' + 2xyy'' + 2yy' = e^x(y + 2y' + y'')$  (2)

将  $x=0, y(0)=1, y'(0)=0$  代入 (2) 从而有  $y''(0)=-1$  9 分

4、(9 分) 设函数  $y = y(x)$  是方程  $y''' - y' = 0$  的解, 且当  $x \rightarrow 0$  时  $y(x)$  是  $x^2$  的等价无穷小, 求  $y = y(x)$  的表达式。

解: 由  $y''' - y' = 0$  知其特征方程为  $r^3 - r = 0$ , 故方程的通解为  $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$  3 分

又当  $x \rightarrow 0$  时  $y(x)$  是  $x^2$  的等价无穷小, 所以有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}}{x^2} = 1$

从而有  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$  由洛必达法则知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_2 e^x - C_3 e^{-x}}{2x} = 1$

从而有  $C_2 - C_3 = 0$  由洛必达法则知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_2 e^x + C_3 e^{-x}}{2} = 1$

从而有  $C_2 + C_3 = 2$  故有  $C_1 = -2, C_2 = C_3 = 1$

所以有  $y(x) = e^x + e^{-x} - 2$  9 分

5、(10 分) 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$  为可导函数, 其中  $a, b$  为常数, 求  $a^2 + b^2$ .

解: 要使  $f(x)$  在  $x=0$  可导, 首先须在  $x=0$  连续即  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$

即  $b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ , 4 分 要使  $f(x)$  在  $x=0$  可导, 须  $f'_-(0) = f'_+(0)$ ,

$$\text{即 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

则  $a = b = 0$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  可导, 从而处处可导 故  $a^2 + b^2 = 0$  9 分

6、(9 分) 设函数  $f$  可导, 由参数方程  $\begin{cases} x = (t-2)f(t) \\ y = tf(t) \end{cases}$  所确定的函数  $y = y(x)$  的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{2t-3}, \text{ 求满足 } f(-\ln 3) = 1 \text{ 的 } f(x).$$

$$\text{解: 由 } \frac{dy}{dx} = \frac{f(t) + tf'(t)}{f(t) + (t-2)f'(t)} \quad \text{故有} \quad \frac{f(t) + tf'(t)}{f(t) + (t-2)f'(t)} = \frac{2t+1}{2t-3} \quad 5 \text{ 分}$$

$$\text{即 } f'(t) = 2f(t) \quad \text{所以有 } f(t) = Ce^{2t} \quad \text{由 } f(-\ln 3) = 1 \text{ 得 } C = 9 \text{ 从而得 } f(x) = 9e^{2x} \quad 9 \text{ 分}$$

7、(10 分) (1) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处满足  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , 证明: 点  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点。(2) 如果函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  的某邻域内有二阶导数, 且

$$f'(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\sin x} = 1, \text{ 试说明点 } (0, f(0)) \text{ 是否是曲线 } y = f(x) \text{ 的拐点.}$$

$$\text{解 (1) 因为 } f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} \neq 0 \quad 2 \text{ 分}$$

不妨设  $f'''(x_0) > 0$ , 故当  $x < x_0$  时,  $f''(x) < 0$ , 当  $x > x_0$  时,  $f''(x) > 0$

故曲线过点  $(x_0, f(x_0))$  改变符号, 故点  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点。 5 分

$$(2) \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\sin x} = 1, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} (f'(x) + f''(x)) = 0,$$

而  $f'(0) = 0$ , 所以有  $f''(0) = 0$ , 8 分

$$\text{再由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f''(x)}{x} = f''(0) + f'''(0) = 1$$

故有  $f'''(0) = 1$ , 由 (1) 知  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点。 10 分

8、(10 分) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  点附近有定义, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$

(1) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2}$ ; (2) 试证: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  点二阶可导, 则  $x = 0$  点为函数  $f(x)$  的极小值点。

$$\text{解: (1) 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0 \text{ 知, 存在 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0 \text{ 使得 } \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = \alpha$$

$$\text{即 } \frac{f(x)}{x^2} = \alpha - \frac{\sin 2x}{x^3}, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x^2} - \alpha + \frac{\sin 2x}{x^3} \right)$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x - \sin 2x}{x^3} - \alpha \right) \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2} = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2} = \frac{4}{3} \quad 5 \text{ 分}$$

$$(\text{或 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x + 2x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} + \frac{2 + f(x)}{x^2} \right) = 0)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2} = -\frac{4}{3}, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = \frac{4}{3}$$

(2) 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = \frac{4}{3}$  知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ , 又函数  $f(x)$  在  $x=0$  点二阶可导, 所以

$$f(0) = -2, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{4}{3}, \text{ 故 } f'(0) = 0 \quad 8 \text{ 分}$$

所以  $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \frac{8}{3} > 0$ , 因此  $x=0$  点为函数  $f(x)$  的极小值点。 10 分

9、(9 分) 设  $f(x) = \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt$ , 计算定积分  $\int_0^1 xf(x)dx$ .

$$\text{解: } \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \int_{x^2}^1 e^{-t^2} dt \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x^3 e^{-x^4} dx \quad 6 \text{ 分}$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^1 e^{-x^4} d(-x^4) = -\frac{1}{4} e^{-x^4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(1 - e^{-1}) \quad 9 \text{ 分}$$

10、(10 分) 已知曲线  $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

(1) 求该曲线的弧长; (2) 证明该曲线与直线  $x = \pi, y = 0$  所围平面图形的面积不小于  $\pi$ .

(1) 解 由弧长公式知该曲线的弧长为

$$S = \int_0^\pi \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x} dx = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad 3 \text{ 分}$$

$$\int_0^\pi (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx = 2(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) \Big|_0^\pi = 4 \quad 5 \text{ 分}$$

(2) 证明: 该曲线与直线  $x = \pi, y = 0$  所围平面图形的面积为

$$A = \int_0^\pi (\int_0^x \sqrt{\sin t} dt) dx \quad \text{当 } 0 \leq x \leq \pi \text{ 时, 有 } \sqrt{\sin x} \geq \sin x$$

$$\text{于是 } \int_0^x \sqrt{\sin t} dt \geq \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } A = \int_0^\pi (\int_0^x \sqrt{\sin t} dt) dx \geq \int_0^\pi (1 - \cos x) dx = \pi \quad 10 \text{ 分}$$

11、(6 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ .

(1) 如果  $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) < 0$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$  使得

$$f''(\xi) + f(\xi) = 2f'(\xi).$$

(2) 如果  $x \in (0, 1)$  时  $f''(x) + f(x) \neq 2f'(x)$ , 证明  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内没有零点。

证明: (1) 由题设条件以及  $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x) \cdot \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) < 0$  知, 存在  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  且  $x_1 \neq x_2$  使得  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , 有零点值定理知存在点  $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = 0$

$$\text{令 } F(x) = e^{-x} f(x), \text{ 则 } F(0) = F(x_0) = F(1) = 0$$

由罗尔定理存在  $\xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$  使得  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$

再由罗尔定理存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$  使得  $F''(\xi) = 0$  即  $f''(\xi) + f(\xi) = 2f'(\xi)$  4 分

(2) 反证法, 若  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内存在零点  $x \in (0, 1)$ , 由 (1) 知必有  $f''(\xi) + f(\xi) = 2f'(\xi)$

2 分