武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试高等数学 A 解答

一、（10 分）已知：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\int_0^{x^2}\dfrac{t}{\sqrt{a+t}}dt=1$，求$a$的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\dfrac{t}{\sqrt{a+t}}dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x^3}{\sqrt{a+x^2}}}{4x^3}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ $\quad\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=1$，$a=\dfrac{1}{4}$

二、（10 分）设 $y=2^{3x}\cdot\ln(2x)-\sqrt{1+x^2}$,求$y'$.

解 $y'=3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2\cdot\ln(2x)+\dfrac{2^{3x}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

三、（8 分）设$\begin{cases}x=t^3+t\\ y=\dfrac{3}{4}t^4+t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t\end{cases}$且$t=t_0$时,$dy=2dx$，试求$t_0$.

解 $y'=3t^3+3t^2+t+1=(t+1)(3t^2+1)\quad x'=3t^2+1$

$\dfrac{dy}{dx}=t+1$ 从而 $t_0+1=2\quad t_0=1$

四、（8 分）设微分方程$x''-\tan t\cdot x'+2x=0$的一特解为$x_1=\sin t\quad(0<|t|<\dfrac{\pi}{2})$，求它的通解。

解 设方程的另一无关特解为x_2，则

$$x_2=x_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\sin t\int\frac{1}{\sin^2 t}e^{\int\tan t\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sin t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}-1$$

通解为：$x=C_1\sin t+C_2(\sin t\ln\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}-2)$

五、（8 分）验证极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$存在,但不能用罗必塔得出.

证明 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{\sin x\cos x}{x}}{1-\dfrac{1}{x}\sin x\cos x}=1$

但$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x+\sin x\cos x)'}{(x-\sin x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ 不存在

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{x-\sin x\cos x}$存在,不能用罗必塔法则得出.

六、（8 分）求$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<b).$

解　原式$=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$

令　$x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\sin t$

原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{b-a}{2}\cos t}\cdot\frac{b-a}{2}\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt=\pi$

七、（8 分）设$F(x)=\int_0^x \sin^n t dt$，其中$n$为奇数

证明 (1) $F(x)$为偶函数；（2）$F(x)$为以2π为周期的函数。

证明 (1)　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\because F(-x)=\int_0^{-x}\sin^n tdt(t=-u)=\int_0^x \sin^n udu=F(x)$$

(2) $\forall x\in(-\infty\ \ +\infty)$

$$\because F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n tdt=\int_0^x \sin^n tdt+\int_x^{x+2\pi}\sin^n tdt=F(x)+\int_x^{k+2\pi}\sin^n tdt$$

因上式第二个积分与x无关，为此令$x=-\pi$，因$\sin^n t$为奇函数

$\int_x^{x+2\pi}\sin^n tdt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n tdt=0$

$\therefore\quad F(x+2\pi)=F(x)$

八、（8 分）设 $f(x)=[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x), g(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t^3}dt,$ 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\varphi'(0)=1$，

证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\to 0$ 时的同阶无穷小。

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^3}}{2x}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{g(x)}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\cdot\frac{\ln(2x+1)}{x}=2\cdot\varphi'(0)\cdot 2=4$

$\therefore f(x)$与$g(x)$为同阶无穷小$(x\to 0)$

九、（8 分）判断函数　$y=\frac{1}{1+x}$的单调性,并证明$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$

解　函数$y=\dfrac{x}{1+x}$的定义域$(-\infty,-1)$及$(-1,+\infty)$

$$y'=\frac{1}{(1+x)^2}>0 \qquad \text{故在}(-\infty,\ -1)\text{及}(-1,\ +\infty)\text{内}y=\frac{x}{1+x}\text{单调增}$$

令显然 $x_1=|a+b|, x_2=|a|+|b| \quad x_1\le x_2$

$$\therefore\quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

十、（8 分）设 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\frac{\pi}{2})$内可导，且$f(\frac{\pi}{2})=0$，证明 存在一点$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使$f(\xi)+\tan\xi\cdot f'(\xi)=0$.

证明 令 $F(x)=f(x)\sin x$，则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，又因 $f(\frac{\pi}{2})=0$，则 $F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$，即 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上满足罗尔定理的条件，则至少存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $F'(\xi)=0$，而 $F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，即 $f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$ $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\cos\xi\ne0$

即 $f(\xi)+tg\xi\cdot f'(\xi)=0$

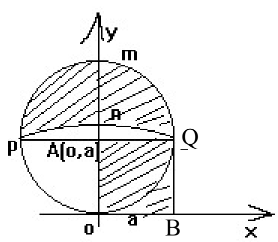
十一、（8 分）位于x轴上区间$\left[0,l\right]$上长为l，密度为$\rho(x)$的杆绕$x=a$旋转的转动惯量为$I=\int_0^l(x-a)^2\rho(x)dx$，试求这个转动惯量为最小时的$a$ 值。

解 由 $\dfrac{dI}{da}=-2\int_0^l(x-a)\rho(x)dx=0.$

$$\int_0^l x\rho(x)dx=a\int_0^l\rho(x)dx \quad a=\frac{\int_0^l x\rho(x)dx}{\int_0^l\rho(x)dx}=\frac{M_y}{M}=\bar{x}$$

而 $\dfrac{d^2I}{da^2}=2\int_0^l\rho(x)dx=2M>0$，故$a=\bar{x}$时这个转动惯量取得极小值。

十二、（8 分）如图所示，设以$(0,a)$为中心的a为半径的圆弧PmQ与以$(0,0)$为中心的$\sqrt{2}a$为半径的圆弧pnQ所围成的平面图形的面积为S，试证明S等于正方形$OAQB$的面积。



证明 设极点 0, $\overline{OA}=a$ 圆 $r=2a\sin\theta$，圆 $r=\sqrt{2}a$

$$S_{阴影}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}4a^2\sin^2\theta\,d\theta-\frac{\pi}{4}2a^2=a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-\cos2\theta)d\theta-\frac{\pi}{2}a^2$$

$$=a^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(-1-1)\right]-\frac{\pi}{2}a^2=a^2$$

$S_{正方形}=a^2$ 所以 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。