# 武汉大学测绘学院
## 2023—2024 第一学期《高等数学 A1》期中考试试题答案

1.（共 18 分，每小题 6 分）求极限：

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$；

解：原式 $= \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t} = \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t} = e\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}$

$= e\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}$（无穷小替代）

$= e\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}$（洛必达法则）

$= -\dfrac{e}{2}$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}$

解：$1\le\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{n}}$。因 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1, \lim\limits_{n\to\infty}1=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}=1$.

C. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2(\sqrt[3]{1+\tan^2 x}-1)}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2(\sqrt[3]{1+\tan^2 x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{x^2\cdot\frac{1}{3}\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\frac{1}{3}x^4}$ （连续无穷小替代）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\frac{4}{3}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{8x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{8}$ （连续洛必达法则）

$=\dfrac{1}{4}$

2.（8 分）设 $y=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3$，求 $dy$.

$$dy = 3\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}dx = 3\csc x dx.$$

3.（8 分）求由方程 $xy+e^y=e$ 所确定的隐函数 $y$ 的二阶导数值 $y''(0)$.

解：易知当 $x=0$ 时，$y=1$。

直接对方程两边对 x 求导，得 $x\cdot y'+y+e^y\cdot y'=0$，故 $y'(0)=-\frac{1}{e}$。

再次求导，得 $x\cdot y''+2y'+e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''=0$，将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=-\frac{1}{e}$ 代入，可得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

4.（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 的下凸区间.

解：$\frac{dy}{dt}=2t-2$，$\frac{dx}{dt}=3t^2+9$，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t-2}{3t^2+9}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-2(t-3)(t+1)}{9(t^2+3)^3}$.

令 $y''>0$，解得 $-1<t<3$，因 $x(t)$ 是单调增函数，可得区间 $[-10,54]$ 为 $y=y(x)$ 的下凸区间.

5. （8分）设 $y=(3x-2)^2\sin 2x$，求 $y^{(100)}(0)$.

解：由莱布尼兹公式，有 $y^{(100)}=(3x-2)^2\cdot 2^{100}\cdot\sin 2x-C_{100}^1\cdot 6x-4\cdot 2^{99}\cos 2x-C_{100}^2\cdot 6\cdot 2^{98}\sin 2x$．因

而 $y^{(100)}(0)=100\times 2^{101}=25\times 2^{103}$.

6. （8分）已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，求 $a$.

解：由拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$，其中 $\xi\in(x-1,x)$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e。$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$，故 $a=\frac{1}{2}$.

7. （8分）求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解：$\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$.

故 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$。易知：$x=0$ 为函数的第一类间断点，是可去间断点。$x=k\pi$，$k\in Z,k\neq 0$ 是第二类间断点.

8. （8分）求满足不等式 $\ln x\le C\sqrt{x},x>0$ 的最小正数 $C$.

解：令 $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$，$x>0$．则

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\begin{cases}>0, & x<e^2\\ =0, & x=e^2\\ <0 & x>e^2\end{cases}$$

因此．$x=e^2$ 是 $f(x)$ 唯一极大点．从而

$$f(x)\le f(e^2)=\frac{2}{e},x>0,$$

其中等号仅当 $x=e^2$ 成立．因此 $\ln x\le\frac{2}{e}\sqrt{x}$，其中等号仅当 $x=e^2$ 成立 于是最小正数 $C=\frac{2}{e}$.

9. （8分）设 $b>a>0$．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可微，证明：在 $(a,b)$ 至少存在一点 $\xi$，使得 $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

[分析] 令 $C=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$．则结论等价于 $C-f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，这等价于

$$\frac{C-f(\xi)+\xi f'(\xi)}{\xi^2}=0\Longleftrightarrow\left(\frac{f(x)-C}{x}\right)'_{x=\xi}=0$$

证法一：作辅助函数 $F(x)=\frac{f(x)-C}{x}$，$x\in[a,b]$．显然，$F\in C[a,b]$ 且 $F$ 在 $(a,b)$ 可导

$$\underline{F(b)-F(a)}=\frac{f(b)-C}{b}-\frac{f(a)-C}{a}=\frac{[af(b)-bf(a)]-C(b-a)}{ba}=0$$

因此，$F$ 满足 Rolle 定理条件 于是，$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0$．结论由此得证．#

证法二：结论等价于

$$\frac{f(b)/b - f(a)/a}{1/b - 1/a} = \frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} \qquad (1)$$

这启示构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$G(x)=\frac{1}{x}$ 显然，F及G在$[a,b]$上满足Cauchy中值定理条件。因此，根据Cauchy中值定理，$\exists \xi\in(a,b)$ s.t

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

这就是(1)式。因此，结论成立。 #

10.（8 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，确定 $a$ 的值；并求 $f'(x)$。

解：因 $f(x)$ 在在 $x=0$ 处连续，故 $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}$，因 $g(0)=1$，且 $g(x)$ 有二阶连续导数，得

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\ g'(x)+\sin x\ =g'(0)\text{。}$$

当 $x\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{g'(x)+\sin x\ \ x-\ g(x)-\cos x}{x^2}$，

当 $x=0$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}$$

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{g'(x)+\sin x\ \ x-\ g(x)-\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

11.（6 分）已知 $f''(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-xf(x)}{x^3}=1$. 求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

解：首先，由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=-\frac{1}{3} \qquad (1)$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-xf(x)}{x^3}=1 \qquad (2)$$

(2)−(1) 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}=\frac{4}{3} \qquad (3)$$

这蕴含

$$\lim_{x\to 0}[1-f(x)]=0 \Longrightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

现把(3)改写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(0)-f(x)]/x}{x}=\frac{4}{3} \qquad (4)$$

(4) 又蕴含: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)-f(x)}{x}=0 \Longrightarrow f'(0)=0$

最后，把(3)改写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)]}{x^2}=\frac{4}{3}$$

即

$$-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{4}{3}\Longrightarrow f''(0)=-\frac{8}{3}.$$ ($f''(0)$不能由洛必达法则得到!)

12. (6分) 设 $a>0,b>0$. 试证明: $a\ln a+b\ln b\geq(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}$.

证: 结论等价于

$$\frac{1}{2}(a\ln a+b\ln b)\geq\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

为证明(1). 构造辅助函数 $f(x)=x\ln x$ 于是

$$f'(x)=\ln x+1,\quad x\in(0,+\infty)$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad x\in(0,+\infty)$$

因此, $f(x)$为下凸函数. 从而

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

这等价于待证结论. #