武汉大学数学与统计学院

《高等数学》（第一学期）期中考试试题 3

一、试解下列各题：（$5\times5'$）

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

2、 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]$

3、确定函数 $f(x)=|x|\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点，并判定其类型。

4、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}}{\ln(1+x^2)}$

5、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{2xt}\cdot x$，求曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

二、计算下列各题：（$5\times5'$）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

2、设 $y=e^{\sin x}+x^{\arctan x}$ 求 $\mathrm{d}y$

3、设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b & x\le0\\ \sin ax & x>0\end{cases}$ 问：a、b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导并求 $f'(0)$。

4、设 $y=\sin^2 x$ ，求 $y^{(2004)}$

5、设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^y$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

三、（8 分）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$

求：1）函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间，极大、极小值；

2）曲线 $y=f(x)$ 的凸性区间、拐点、渐近线方程。

四、（10 分）设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，

1）求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程；

2）求 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

五、（6 分）用定义证明：若 $f(x)$、$g(x)$ 都在区间 I 上一致连续，则 $f(x)+g(x)$ 也在区间 I 上一致连续。

六、（10 分）设 $a>0,b>0,c>0$，$A(x)=\begin{cases}(\dfrac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}} & x\ne0\\ c & x=0\end{cases}$，

1). 讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

2). 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$、$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$、$\lim\limits_{x\to0}A(x)$、$A(-1)$、$A(1)$ 五者之间的大小关系。

七、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，试证：$\forall\alpha\in R,\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$

八、（8 分）设 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)\ne0$，$u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(u)}{f(x)}$.

武汉大学数学与统计学院

《高等数学》（第一学期）期中考试试题 3 参考解答

一、试解下列各题：

1、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解：$\lim\limits_{n\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{n\to 0^-}ae^{2x}=a\quad \lim\limits_{n\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to 0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{n\to 0^+}\dfrac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $a=-2$

2、$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{x})=1$

3、确定函数 $f(x)=|x|\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点，并判定其类型。

解：由在 $x=0$ 处 $f(x)$ 无意义，故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\dfrac{1}{x}=0$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点。

4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}}{\ln(1+x^2)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}=\dfrac{1}{2}e$

5、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{2xt}\cdot x$，求曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

解 由 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{2xt}\cdot x=x\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{2xt}=xe^{2x}$

$f'(x)=(2x+1)e^{2x},f''(x)=(4x+4)e^{2x}$ 令 $f''(x)=(4x+4)e^{2x}=0\Rightarrow x=-1$

又 $f'''(x)=4(2x+3)e^{2x},f'''(0)=12\neq 0$ 所以点 $(-1,-e^{-2})$ 为拐点。

二、计算下列各题：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=1$

2、 设 $y=e^{\sin x}+x^{\arctan x}$ 求 $\mathrm{d}y$

解： $dy=\{e^{\sin x}\cos x+x^{\arctan x}[\dfrac{\ln x}{1+x^2}+\dfrac{\arctan x}{x}]\}dx$

3、设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}+b & x\le 0\\ \sin ax & x>0\end{cases}$ 问：a、b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导并求 $f'(0)$.

解：由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，所以 $f_-(0)=f_+(0)$ 即有

$b+1=0\Rightarrow b=-1$ 得 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 即：

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2\quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin ax-0}{x}=a$

故有：$a=2$，所以 $f'(0)=2$

4、设 $y=\sin^2 x$ ，求 $y^{(2004)}$

解：$y^{(2004)}=(\sin^2 x)^{(2004)}=(\sin 2x)^{(2003)}=2^{2003}\sin(2x+\dfrac{2003\pi}{2})=-2^{2003}\cos 2x$

5、设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^y$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$y' = xe^y y' + e^y$，所以 $y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$；

$$y'' = \frac{2e^y y' + xe^y (y')^2}{1-xe^y} = \frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3} = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

三、设 $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$ 求：1）函数 $f(x)$ 的单调增加、单调减少区间，极大极小值；

2）曲线 $y = f(x)$ 的凸性区间、拐点、渐近线方程。

解：定义域为：$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$y' = \dfrac{x}{(1+x)^3}$ 令 $y' = 0 \Rightarrow$ 驻点 $x = 0$

$y'' = \dfrac{1-2x}{(1+x)^4}$ 令 $y'' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
y'	+		—		+		+
y''	+		+		+		—
y	单增		单减	极小值 0	单增		单增
$y = f(x)$	下凸		下凸		下凸	拐点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{18})$	上凸

1）故单调增加区间为：$(-\infty,-1)$、$(0,+\infty)$ 单调减少区间为：$(-1,0)$

极小值为：$f(0)=0$，无极大值。

2）下凸区间为：$(-\infty,-1)$ $(-1,\dfrac{1}{2})$ 上凸区间为：$(\dfrac{1}{2},+\infty)$

拐点为：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{18})$ $x=-1$ 为垂直渐近线，$y=\dfrac{1}{2}$ 为水平渐近线，无斜渐近线。

四、设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$ 所确定，1）求曲线 $y = y(x)$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程；2）求 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：1). $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-\sin t}{2t} = -\dfrac{\sin t}{2t}$；$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1}{\pi}$

故切线方程为：$y = -\dfrac{1}{\pi}(x-1) + \dfrac{\pi}{4}$

2）由 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2}\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t} = \frac{\sin t - t\cos t}{4t^3}.$$

故 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin t}{2t} = \dfrac{-1}{2}$； $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{d^2y}{dx^2} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3} = \dfrac{1}{12}$

五、用定义证明：若 $f(x)$、$g(x)$ 都在区间 I 上一致连续，则 $f(x)+g(x)$ 也在区间 I 上一致连续。

证明：$\forall\varepsilon>0$，由 $f(x)$、$g(x)$ 都在区间 I 上一致连续，必存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 使得对 $\forall x_1$、$x_2\in I$，只要 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/2$ 只要 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 就有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon/2$ 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

对 $\forall x_1$、$x_2\in I$，只要 ，就有

$|[f(x_1)+g(x_1)]-[f(x_2)+g(x_2)]| = |f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)|$

$<|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

由定义知，$f(x)+g(x)$ 也在区间 I 上一致连续。

六、设 $a>0, b>0, c>0$，$A(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} & x\neq0 \\ c & x=0\end{cases}$,

1). 讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

2). 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$、$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$、$\lim\limits_{x\to0}A(x)$、$A(-1)$、$A(1)$ 五者之间的大小关系.

解 1). 由 $\lim\limits_{x\to0}A(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\exp[\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{a^x+b^x}{2})]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln a+\ln b}{2}=\sqrt{ab}$

即知，当 $c=\sqrt{ab}$ 时，$A(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2). 易知 $A(1)=\dfrac{a+b}{2}$，$A(-1)=\dfrac{2ab}{a+b}$，$\lim\limits_{x\to0}A(x)=\sqrt{ab}$，

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=2^{\frac{-1}{x}}\max(a,b)\left[1+\left(\dfrac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}=\max(a,b)$，同理可求得 $\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)=\min(a,b)$，

则所考虑的五者大小关系为 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)\ge A(1)\ge\lim\limits_{x\to0}A(x)\ge A(-1)\ge\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$，

或：$\max(a,b)\ge\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ge\min(a,b)$.

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，试证：$\forall\alpha\in R,\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$ 。

证明：令 $\varphi(x)=e^{-\alpha x}f(x)$ 　则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\varphi'(\xi)=f'(\xi)e^{-\alpha\xi}-\alpha f(\xi)e^{-\alpha\xi}=0$ 　即 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$

八、设 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)\ne0$，$u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(u)}{f(x)}$.

解 切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$ 　所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $Y=0\Rightarrow X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

由 $\lim\limits_{x\to0}u(x)=\lim\limits_{x\to0}(x-\dfrac{f(x)}{f'(x)})=\lim\limits_{x\to0}(x-\dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}})=0-\dfrac{f'(0)}{f''(0)}=0$

又 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)\ne0$ 和泰勒公式

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{f''(0)}{2!}u^2+o(u^2)=\frac{f''(0)}{2!}u^2+o(u^2)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x)=f''(0)x+o(x)$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(u)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f''(0)}{2!}u^2+o(u^2)}{\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u^2(x)}{x^2}=(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u(x)}{x})^2$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to0}(1-\dfrac{f(x)}{xf'(x)})$

所以有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)}{x(f''(0)x+o(x))}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f''(0)}{2!}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{f''(0)+\frac{o(x)}{x}}=\dfrac{1}{2}$

故有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u(x)}{x}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 　所以有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(u)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u^2(x)}{x^2}=(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u(x)}{x})^2=\dfrac{1}{4}$