武汉大学数学与统计学院

《高等数学》第一学期）期中试题 1

一、（6 分）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，且 $A>0$，试用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$。

二、（8 分）设 $y=xf(x-u)$，且当 $x=1$ 时，$y=u^2+e^u$，求：$f(x)$ 和 $f'(2)$。

三、（10 分）求下列函数的极限：

1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$；2、$\lim\limits_{x\to0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}$

四、（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

五、（24 分）求下列函数导数：

1、设 $y=(\dfrac{\sin x}{x})^{\ln x}$，求 y'

2、设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=t^2-2t-3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

3、设 $y=x^2\cos^2 x$，求 $y^{(n)}$。

4、求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线。

六、（8 分）设曲线 $y=f(x)$ 过原点，且在原点处与 x 轴相切，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)\ne 0$，

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在原点处的曲率半径 R；（2）证明 $|\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2f(x)}|=R$。

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[-2a,2a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|<\dfrac{1}{4a}$，又 $f(0)=a, f(a)=b$，$f'(0)=-1$，

证明：（1）$\forall x\in[-2a,2a]$ 有 $|1+f'(x)|<\dfrac{1}{2}$；（2）$a+b\in[-2a,2a]$；（3）$|f(a+b)|<\dfrac{a}{4}$

八、（8 分）在抛物线 $y=4-x^2$ 上的第一象限部分求一点 p，过 p 点作切线，使该切线与坐标轴所围成的三角形的面积最小。

九、（8 分）若 $a\le f(x)\le b, x\in[a,b]$ 且 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$，其中 k 为常数，$0<k<1$，

设 $x_n\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$，证明：

（1）存在惟一的 $x\in[a,b]$，使 $x=f(x)$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

十、（8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1, \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求证：（1）$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；（2）$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

武汉大学数学与统计学院

《高等数学》第一学期）期中试题 1 参考解答

一、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，且 $A>0$，试用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$。

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\forall\varepsilon\sqrt{A}>0,\exists X>0,\forall x>X$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon\sqrt{A}$ 因 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}\le\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}\le\dfrac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}<\dfrac{\varepsilon\sqrt{A}}{\sqrt{A}}=\varepsilon$　　故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$。

二、设 $y=xf(x-u)$，且当 $x=1$ 时，$y=u^2+e^u$，求：$f(x)$ 和 $f'(2)$。

解：当 $x=1$ 时，$y=f(1-u)=u^2+e^u$，令 $t=1-u$，则 $f(t)=(1-t)^2+e^{i-t}$，

故 $f(x)=(1-x)^2+e^{i-x}$，$f'(x)=-2(1-x)-e^{1-x}$，所以 $f'(2)=2-e^{-1}$

三、求下列函数的极限：1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$；2、$\lim\limits_{x\to0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}$

解：1、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1+1-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\tan^2 x}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}-1}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$$

2、$\lim\limits_{x\to0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin x}\ln(x+e^{2x})}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+e^{2x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}}}=e^3$

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解：$\lim\limits_{n\to0^-}f(x)=\lim\limits_{n\to0^-}ae^{2x}=a$　$\lim\limits_{n\to0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{n\to0^+}\dfrac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $a=-2$

五、求下列函数导数：

1、设 $y=(\dfrac{\sin x}{x})^{\ln x}$，求 y'

解：$y=e^{\ln x(\ln\sin x-\ln x)}$，$y'=(\dfrac{\sin x}{x})^{\ln x}[\dfrac{1}{x}(\ln\sin x-\ln x)-\cot x\ln x]$

2、设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=t^2-2t-3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：由方程 $y=e^y\sin t+1$ 两边关于 t 求导数，得 $\dfrac{dy}{dt}-e^y\sin t\dfrac{dy}{dt}-e^y\cos t=0$　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$，

又 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t}{\sin t}$，因此 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^y\sin t}{1-e^y\sin t}=\dfrac{y-1}{2-y}$

3、设 $y=x^2\cos^2 x$，求 $y^{(n)}$　$(n\ge3)$。

解：由$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2},(\cos^2 x)^{(k)}=2^{k-1}\cos(2x+\dfrac{k\pi}{2})$

$$y(n)=x^2(\cos^2 x)^{(n)}+n2x(\cos^2 x)^{(n-1)}+n(n-1)(\cos^2 x)^{(n-2)}$$

$$=2^{n-1}x^2\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+2^{n-1}nx\cos(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})+2^{n-3}n(n-1)\cos(2x+\frac{(n-2)\pi}{2})$$

4、求曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线。

解：由$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$，所以$x=0$是一条铅直渐近线，又

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=+\infty$，所以沿$x\to+\infty$方向没有水平渐近线。又

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\ln(1+e^x)]=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=0$

所以沿$x\to+\infty$方向有斜渐近线$y=x$。

而沿$x\to-\infty$方向：$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以沿$x\to-\infty$方向该曲线有水平渐近线$y=0$。

六、设曲线$y=f(x)$过原点，且在原点处与x轴相切，其中$f(x)$具有二阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$，

（1）求曲线$y=f(x)$在原点处的曲率半径R；（2）证明$|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2f(x)}|=R$。

解：（1）由题设$f(0)=0,f'(0)=0$，所以$R=\dfrac{[1+f'^2(0)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\dfrac{1}{|f''(0)|}$

（2）将$f(x)$在原点展开为一阶泰勒公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\theta x)}{2!}x^2$

$$\frac{x^2}{2f(x)}=\frac{1}{f''(\theta x)},\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f''(\theta x)}=\frac{1}{f''(0)}=R$$

七、设$f(x)$在$[-2a,2a]$上具有二阶导数，且$|f''(x)|<\dfrac{1}{4a}$，又$f(0)=a,f(a)=b$，$f'(0)=-1$，证明：

（1）$\forall x\in[-2a,2a]$有$|1+f'(x)|<\dfrac{1}{2}$；（2）$a+b\in[-2a,2a]$；（3）$|f(a+b)|<\dfrac{a}{4}$

证明：（1）对$x\neq 0$，在$[0,x]\subset[-2a,2a]$或$[x,0]\subset[-2a,2a]$上用拉格朗日中值定理，得

$|f'(x)-f'(0)|=|f'(\xi)||x|$，$\xi$在0与$x$之间，即$|f'(x)+1|=|f'(\xi)||x|<\dfrac{1}{4a}2a=\dfrac{1}{2}$

而对$x=0,|1+f'(0)|=0<\dfrac{1}{2}$，所以$\forall x\in[-2a,2a]$都有$|f'(x)+1|<\dfrac{1}{2}$。

（2）$|a+b|=|a+f(a)|\le a+|f(a)|$,

因为$f(a)=f(0)+f'(\eta)a=a[1+f'(\eta)|,\eta\in(0,a)\subset[-2a,2a]$，

所以$|f(a)|=a|1+f'(\eta)|<\dfrac{a}{2}$即$|f(a)|<\dfrac{a}{2}$，所以$|a+b|<\dfrac{3a}{2}<2a$，即$a+b\in[-2a,2a]$

（3）因$a+b\in[-2a,2a]$，$f(x)$在$[a,a+b]$或$[a+b,a]$上用拉格朗日中值定理，得

$f(a+b)=f(a)+bf'(\xi_1),\xi_1\in(-2a,2a)$，所以

$|f(a+b)|=|f(a)+bf'(\xi_1)|\le|f(a)|+|bf'(\xi_1)|<\dfrac{1}{2}|f(a)|<\dfrac{1}{4}a$

八、在抛物线 $y=4-x^2$ 上的第一象限部分求一点 p，过 p 点作切线，使该切线与坐标轴所围成的三角形的面积最小。

解：设切点坐标为 $P(x,y)$，切线方程为 $Y-(4-x^2)=-2x(X-x)$，即 $\dfrac{X}{\dfrac{x^2+4}{2x}}+\dfrac{Y}{x^2+4}=1$

所以，所求的三角形面积为：$s(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^2+1)^2}{2x}=\dfrac{1}{4}(x^3+8x+\dfrac{16}{x})$

$s'(x)=\dfrac{1}{4}(3x^2+8-\dfrac{16}{x^2}),s''(x)=\dfrac{1}{4}(6x+\dfrac{32}{x^3})$，令 $s'(x)=0,x=\dfrac{2}{\sqrt{3}},s''(\dfrac{2}{\sqrt{3}})>0$

$s(\dfrac{2}{\sqrt{3}})$ 为最小值，$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}},s(\dfrac{2}{\sqrt{3}})=\dfrac{8}{3}$，故所求点 P 的坐标为：（$\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{8}{3}$）。

九、若 $a\le f(x)\le b,x\in[a,b]$ 且 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$，其中 k 为常数，$0<k<1$，设 $x_n\in[a,b],x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$，证明：（1）存在惟一的 $x\in[a,b]$，使 $x=f(x)$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

证明：（1）由于 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$ 知 $f(x)$ 连续，所以 $g(x)=f(x)-x$ 连续，又 $a\le f(x)\le b,x\in[a,b]$，所以，$g(a)=f(a)-a\ge 0,g(b)=f(b)-b\le 0$，若 $g(a)=0$ 或 $g(b)=0$，则 $x=a$ 或 $x=b$ 即为所求。

当 $g(a)g(b)\ne 0$，由界值定理 $\exists x\in[a,b]$，使 $g(x)=0$，即 $x=f(x)$

若另有 $x_0=f(x_0)$ 且 $x_0\ne x$，则有 $|x-x_0|=|f(x)-f(x_0)|\le k|x-x_0|<|x-x_0|$，矛盾

这说明，存在惟一的 $x\in[a,b]$，使 $x=f(x)$；

（2）$|x_n-x|=|f(x_{n-1})-f(x)|\le k|x_{n-1}-x|\le\cdots\le k^{n-1}|x_1-x_0|$

令 $n\to\infty$，夹逼法则得：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

十、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求证：（1）$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$；（2）$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

证明：（1）由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 知 $f(0)=0,f(1)=0,f'(0)=1,f'(1)=2$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1>0$，故 $\exists\delta_1>0,x_1\in(0,\delta_1),\dfrac{f(x_1)}{x_1}>0\Rightarrow f(x_1)>0$

又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2>0$，故 $\exists\delta_2>0,x_2\in(\delta_2,1),\dfrac{f(x_2)}{x_2-1}>0\Rightarrow f(x_2)<0$

由 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，所以 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$

(2) 由 $f''(\eta)=f(\eta)$ 知 $f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Rightarrow f'(x)+f(x)=c_1e^x$

$$f''(x)-f'(x)=-(f'(x)-f(x))\Rightarrow f'(x)-f(x)=c_2e^{-x}$$

故有 $2f'(\eta)=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 由 $f'(0)=1,f'(1)=2\Rightarrow c_1=\dfrac{2(2e-1)}{e^2-1},c_2=\dfrac{2e(e-2)}{e^2-1}$

即有 $f'(x)+f(x)=\dfrac{2(2e-1)}{e^2-1}e^x$　　$f'(x)-f(x)=\dfrac{2(e-2)}{e^2-1}e^{-x+1}$

即 $[f'(x)+f(x)]\dfrac{e^{-x}}{2e-1}=[f'(x)-f(x)]\dfrac{e^{x-1}}{e-2}$，$[f'(x)+f(x)](e-1)e^{-x+1}=[f'(x)-f(x)](2e-1)e^x$

即 $[f'(x)+f(x)](2e-1)e^{-x+1}+[f(x)-f'(x)](e-1)e^x=0$

令 $F(x)=(2-e)e^x(f(x)-f'(x))+(2e-1)e^{-x+1}(f(x)+f'(x))$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=2e^2-2$，由罗尔定理知，$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$，即 $F'(\eta)=[(2-e)e^\eta-(2e-1)e^{1-\eta}](f(\eta)-f''(\eta))=0$ 即 $f''(\eta)=f(\eta)$