武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 A1 期末试题 A

1、（9 分）求极限: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\frac{1}{x})(e^x-1)$

2、（9 分）计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

3、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 有方程 $xy^2+\sin\frac{\pi}{2}=ye^x$ 所确定，求 $y''(0)$.

4、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 是方程 $y'''-y'=0$ 的解，且当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是 x^2 的等价无穷小，求 $y=y(x)$ 的表达式。

5、（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,\ x<0 \\ ax+b & ,\ x\ge 0 \end{cases}$ 为可导函数，其中 a,b 为常数，求 a^2+b^2。

6、（9 分）设函数 f 可导，由参数方程 $\begin{cases} x=(t-2)f(t) \\ y=tf(t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t+1}{2t-3}$，求满足 $f(-\ln 3)=1$ 的 $f(x)$.

7、（10 分）（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，证明：点 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。（2）如果函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=1$，试说明点 $(0,f(0))$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

8、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有定义，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=0$

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x^2}=0$；（2）试证：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，则 $x=0$ 点为函数 $f(x)$ 的极小值点。

9、（9 分）设 $f(x)=\int_{x^2}^{1}e^{-t^2}dt$，计算定积分 $\int_0^1 xf(x)dx$.

10、（10 分）已知曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt\ (0\le x\le \pi)$.

（1）求该曲线的弧长；（2）证明该曲线与直线 $x=\pi, y=0$ 所围平面图形的面积不小于 π.

11、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$.

（1）如果 $\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)\cdot\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)<0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi).$$

（2）如果 $x\in(0,1)$ 时 $f''(x)+f(x)\neq 2f'(x)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内没有零点。

武汉大学 2018-2019 第一学期高等数学 A1 期末试题 A 解答

1、（9 分）求极限: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\frac{1}{x})(e^x-1)$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\frac{1}{x})(e^x-1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\frac{1}{x})x$ 5 分

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}=0$$ 9 分

2、（9 分）计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}dx$ 5 分

$$=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}d(x^{-2})=-\sqrt{1+x^{-2}}\,\Big|_1^{+\infty}=\sqrt{2}-1$$ 9 分

或 令 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ 5 分

$$=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$ 9 分

3、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 有方程 $xy^2+\sin\frac{\pi}{2}=ye^x$ 所确定，求 $y''(0)$.

解：方程两边关于 x 求导得 $2xyy'+y^2=e^x(y+y')$ （1）

由方程知 $x=0\Rightarrow y(0)=1$ 由（1）得 $y'(0)=0$ 5 分

对（1）两边关于 x 求导得 $2yy'+2xy'^2+2xyy''+2yy'=e^x(y+2y'+y'')$ (2)

将 $x=0,y(0)=1$，$y'(0)=0$ 代入（2）从而有 $y''(0)=-1$ 9 分

4、（9 分）设函数 $y=y(x)$ 是方程 $y'''-y'=0$ 的解，且当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是 x^2 的等价无穷小，求 $y=y(x)$ 的表达式。

解：由 $y'''-y'=0$ 知其特征方程为 $r^3-r=0$，故方程的通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$ 3 分

又当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是 x^2 的等价无穷小，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}}{x^2}=1$

从而有 $C_1+C_2+C_3=0$ 由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{C_2e^x-C_3e^{-x}}{2x}=1$

从而有 $C_2-C_3=0$ 由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{C_2e^x+C_3e^{-x}}{2}=1$

从而有 $C_2+C_3=2$ 故有 $C_1=-2,C_2=C_3=1$

所以有 $y(x)=e^x+e^{-x}-2$ 9 分

5、（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\ge 0\end{cases}$ 为可导函数，其中 a,b 为常数，求 a^2+b^2.

解：要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 首先须在 $x=0$ 连续即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=b$

即 $b=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\sin\frac{1}{x}=0$， 4 分 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 须 $f'_-(0)=f'_+(0)$，

即$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$，$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax}{x}=a$

则$a=b=0$时,$f(x)$在$x=0$可导,从而处处可导 故 $a^2+b^2=0$ 9 分

6、（9 分）设函数 f 可导，由参数方程$\begin{cases}x=(t-2)f(t)\\y=tf(t)\end{cases}$所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+1}{2t-3}$，求满足 $f(-\ln3)=1$ 的 $f(x)$.

解：由$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(t)+tf'(t)}{f(t)+(t-2)f'(t)}$ 故有 $\dfrac{f(t)+tf'(t)}{f(t)+(t-2)f'(t)}=\dfrac{2t+1}{2t-3}$ 5 分

即 $f'(t)=2f(t)$ 所以有 $f(t)=Ce^{2t}$ 由 $f(-\ln3)=1$ 得 $C=9$ 从而得 $f(x)=9e^{2x}$ 9 分

7、（10 分）（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq0$，证明：点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。（2）如果函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=1$，试说明点 $(0,f(0))$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

解（1）因为 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}\neq0$ 2 分

不妨设 $f'''(x_0)>0$，故当 $x<x_0$ 时，$f''(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$

故曲线过点 $(x_0,f(x_0))$ 改变符号，故点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。 5 分

（2）由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=1$，且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}(f'(x)+f''(x))=0$，

而 $f'(0)=0$，所以有 $f''(0)=0$， 8 分

再由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{x}=f''(0)+f'''(0)=1$

故有 $f'''(0)=1$，由（1）知 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。 10 分

8、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有定义，且满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+xf(x)}{x^3}=0$

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}$；（2）试证：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，则 $x=0$ 点为函数 $f(x)$ 的极小值点。

解：（1）由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x+xf(x)}{x^3}=0$ 知，存在 $\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$ 使得 $\dfrac{\sin2x+xf(x)}{x^3}=\alpha$

即 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\alpha-\dfrac{\sin2x}{x^3}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2}{x^2}-\alpha+\dfrac{\sin2x}{x^3})$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2x-\sin2x}{x^3}-\alpha)$ 3 分

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\dfrac{4}{3}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\dfrac{4}{3}$ 5 分

（或 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-2x+2x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin2x-2x}{x^3}+\dfrac{2+f(x)}{x^2})=0$

又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2x}{x^3}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos 2x}{3x^2}=-\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=-\dfrac{4}{3}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\dfrac{4}{3}$）

（2）由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=\dfrac{4}{3}$ 知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-2$，又函数$f(x)$在$x=0$点二阶可导，所以

$f(0)=-2$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{4}{3}$，故 $f'(0)=0$　　　　8 分

所以 $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{8}{3}>0$，因此$x=0$点为函数$f(x)$的极小值点。　10 分

9、（9 分）设$f(x)=\int_{x^2}^1 e^{-t^2}dt$，计算定积分$\int_0^1 xf(x)dx$.

解：$\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\dfrac{1}{2}x^2\int_{x^2}^1 e^{-t^2}dt\Big|_0^1+\dfrac{1}{2}\int_0^1 2x^3e^{-x^4}dx$　　　6 分

$=-\dfrac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=-\dfrac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}(1-e^{-1})$　　　9 分

10、（10 分）已知曲线$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt\ (0\le x\le\pi)$.

（1）求该曲线的弧长；（2）证明该曲线与直线$x=\pi,y=0$所围平面图形的面积不小于π.

(1)　解 由弧长公式知该曲线的弧长为

$$S=\int_0^\pi\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}dx=\int_0^\pi\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}dx\quad 3\text{ 分}$$

$$\int_0^\pi(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=2(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})\Big|_0^\pi=4\quad 5\text{ 分}$$

（2）　证明：该曲线与直线$x=\pi,y=0$所围平面图形的面积为

$A=\int_0^\pi(\int_0^x\sqrt{\sin t}dt)dx$　　当$0\le x\le\pi$时，有 $\sqrt{\sin x}\ge\sin x$

于是$\int_0^x\sqrt{\sin t}dt\ge\int_0^x\sin tdt=1-\cos x$　　　　8 分

因此 $A=\int_0^\pi(\int_0^x\sqrt{\sin t}dt)dx\ \ge\int_0^\pi(1-\cos x)dx=\pi$　　　10 分

11、（6 分）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$.

（1）如果$\max\limits_{0\le x\le1}f(x)\cdot\min\limits_{0\le x\le1}f(x)<0$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得

$$f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi).$$

（2）如果$x\in(0,1)$时$f''(x)+f(x)\ne2f'(x)$，证明$f(x)$在$(0,1)$内没有零点。

证明：（1）由题设条件以及$\max\limits_{0\le x\le1}f(x)\cdot\min\limits_{0\le x\le1}f(x)<0$知，存在$x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\ne x_2$使得$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，有零点值定理知存在点$x_0\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使得$f(x_0)=0$

令$F(x)=e^{-x}f(x)$，则$F(0)=F(x_0)=F(1)=0$

由罗尔定理存在$\xi_1\in(0,x_0),\xi_2\in(x_0,1)$使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$

再由罗尔定理存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$使得$F''(\xi)=0$ 即$f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$　　4 分

（2）反证法，若$f(x)$在$(0,1)$内存在零点$x_0\in(0,1)$，由（1）知必有$f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$与题设矛盾，故$f(x)$在$(0,1)$内没有零点。　　　2 分