

学号填涂区

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

姓名: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_

注意事项

- 必须填涂学号信息. 姓名、学院请填写清楚.
- 超出指定区域的答案无效. 请使用黑色笔, 在指定区域内答题.
- 严禁在答卷上另外粘贴纸张. 在草稿纸上答题无效.

1. (6 分) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \sqrt[n]{3} \right)^n$ .

2. (6 分) 求常数  $a, b$ , 使得  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + b, & (x \leq 0), \\ \sin ax, & (x > 0) \end{cases}$  在点  $x = 0$  可导.

3. (6 分) 找出函数  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$  的所有间断点, 并判断其类型.

4. (6 分) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x - 4 \sin x + \sin x \cos x$  与  $x^n$  为同阶无穷小, 求  $n$ .

5. (6 分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$ .

6. (6 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

7. (6 分) 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} x e^{-2x} dx$ , 求常数  $a$ .

8. (6 分) 求微分方程  $y'' - 7y' + 6y = 6x^2 - 2x - 1$  的通解.

武汉大学 2020—2021 学年第一学期期末考试  
高等数学 A1 · A 卷 · 答题卡 (2)

学号填涂区

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

姓名: \_\_\_\_\_

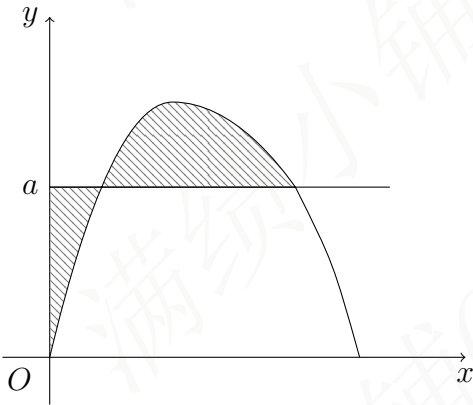
学院: \_\_\_\_\_

注意事项

1. 必须填涂学号信息. 姓名、学院请填写清楚.
2. 超出指定区域的答案无效. 请使用黑色笔, 在指定区域内答题.
3. 严禁在答卷上另外粘贴纸张. 在草稿纸上答题无效.

9. (10 分) 设函数  $f(x)$  有二阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,  $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=0} = 4$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ .

10. (8 分) 如图, 水平直线  $y = a$  与曲线  $y = 2x - 3x^3$  ( $x \geq 0$ ) 相交于第一象限, 求使得两个阴影区域面积相等的数  $a$ .



11. (8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且  $f(x) = \frac{x}{1 + \cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$ , 求  $f(x)$ .

12. (8 分) 已知参数方程  $\begin{cases} x = 2(1 - \cos \theta), \\ y = 4 \sin \theta. \end{cases}$  求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

13. (8 分) 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内具有二阶导数, 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 其中  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ . 证明: 在  $(x_1, x_3)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

14. (10 分) 设直线  $y = tx$  ( $0 < t < 1$ ) 与抛物线  $y = x^2$  所围成的图形面积为  $S_1$ , 它们与直线  $x = 1$  所围成的图形面积为  $S_2$ .

- 试确定  $t$  的值, 使  $S_1 + S_2$  达到最小, 并求出最小值;
- 求该最小值所对应的平面图形围绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

