2003～2004 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题：（5×4 分）

1、 2； 2、 1 ； 3、 $\frac{1}{x}$ ； 4、 2π； 5、 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$.

二、选择题：（5×4 分）

1）、 C ； 2）、 D； 3）、 B； 4）、 A； 5）、 C .

三、计算下列各题：（5×6 分）

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x - x}{x}+1)^{\frac{1}{1-\cos x}\frac{\sin x - x}{x}\frac{x}{\sin x - x}}$

$$= \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x - x}{x}+1)^{\frac{x}{\sin x - x}\frac{\sin x - x}{x}\frac{2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

2） $y^{(2004)} = (\sin^2 x)^{(2004)} = (\sin 2x)^{(2003)} = 2^{2003}\sin(2x+\frac{2003\pi}{2}) = -2^{2003}\cos 2x$

3） $\int\frac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = \int\frac{1}{2+\tan x}dx = \int\frac{1}{t+2}d\arctan t = \int\frac{1}{t+2}\frac{1}{t^2+1}dt$

$$= \int(\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t+2})dt = \frac{1}{5}[2x - \frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)+\ln(\tan x+2)]+C \quad ;$$

或 $\int\frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx = \frac{2}{5}\int\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x+2\cos x}dx + \frac{1}{5}\int\frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx$

$$= \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\ln\left|\sin x + 2\cos x\right| + \mathrm{C}.$$

4）对 $x\in[1,+\infty)$，有 $0\le \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \le \frac{1}{x^2}$，由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，可知 $\int_1^{+\infty}[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}]\mathrm{d}x$ 的收敛。

5） $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{y'_t}{x'_t})}{dx} = \frac{d(-t^2)}{dx} = -2tt'_x = -2t\frac{1}{4t^3\ln t} = -\frac{1}{2t^2\ln t}$

6）由分部积分可知，

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \int_a^b xf(x)d(f(x)) = \frac{1}{2}\int_a^b xd(f^2(x))$$

$$= \frac{x}{2}f^2(x)|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx = \frac{b}{2}f^2(b) - \frac{a}{2}f^2(a) - \frac{1}{2}\cdot 2$$

$$= -1$$

四、(8 分) 1)、切线方程求得为：$16by + 9ax = 25$ 或: $\frac{x}{25/9a} + \frac{y}{25/16b} = 1$.

2)、 $S = \frac{25^2}{2\times 16\times 9}\frac{1}{ab}$,记 $A = \frac{2\times 16\times 9}{25^2\times 4}$, $F = \frac{1}{S} = Aab = Aa\sqrt{25-9a^2}$,

令 $\dfrac{dF}{da}=A(\sqrt{25-9a^2}-\dfrac{9a^2}{\sqrt{25-9a^2}})=\dfrac{A(25-18a^2)}{\sqrt{25-9a^2}}=0$,

得 $a=\dfrac{5\sqrt{2}}{6},b=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$,即 $P(\dfrac{5\sqrt{2}}{6},\dfrac{5\sqrt{2}}{8})$ 为所求.

或 $S=\dfrac{25^2}{2\times16\times9}\dfrac{1}{ab}$ ，其中 $a=\dfrac{5}{3}\cos\theta,b=\dfrac{5}{4}\sin\theta$ 则

$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{12}{25\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{24}{25\sin2\theta}$ ，

即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，有最小值 $S=\dfrac{25}{12}$.此时 $P(\dfrac{5\sqrt{2}}{6},\dfrac{5\sqrt{2}}{8})$ 为所求.

五、（7 分） $V=\pi\int_1^2(x^2-\dfrac{1}{x^2})dx=\dfrac{11}{6}\pi$

六、(8 分) （1）因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2\text{。}$$

（2）由（1）可知 $F'(x)\ge2>0$，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，又对一切 $x\in[a,b],f(x)>0,$ 所以 $F(a)=\int_b^a\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$ ，$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$ 由零点定理及 $F(x)$ 的单调性可知：$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

七、（7 分） 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由积分中值定理知，存在 $\eta\in[\dfrac{3}{2},2]$，使得 $\dfrac{f(c)}{2}=f(\eta)(2-\dfrac{3}{2})=\dfrac{f(\eta)}{2}$ ，即 $f(c)=f(\eta)$ ，故存在 $[c,\eta](or[\eta,c])\subset[0,2]$ ，$f(x)$ 在 $[c,\eta](or[\eta,c])\subset[0,2]$ 上连续，在 $(c,\eta)(or(\eta,c))\subset(0,2)$ 内可导，由罗尔定理知，存在 $\xi\in(c,\eta)(or(\eta,c))\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$。