

武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试

高等数学 A1（A 卷答题卡）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|--|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 姓名 _____ 班级 _____ | | 考 生 学 号 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 注意事项 | 1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题；字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。 | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | |
| | | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | [1] | |
| | | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | [2] | |
| | | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | [3] | |
| | | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | [4] | |
| | | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | [5] | |
| | | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | [6] | |
| | | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | [7] | |
| | | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | [8] | |
| [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | [9] | | | |

一、（10 分）已知： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{t}{\sqrt{a+t}} dt = 1$ ，求 a 的值。

二、（10 分）设 $y = 2^{3x} \cdot \ln(2x) - \sqrt{1+x^2}$ ，求 y' 。

三、（8 分）设 $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = \frac{3}{4}t^4 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \end{cases}$ 且 $t = t_0$ 时, $dy = 2dx$ ，试求 t_0 。

四、（8 分）设微分方程 $x'' - \tan t \cdot x' + 2x = 0$ 的一特解为 $x_1 = \sin t$ ($0 < |t| < \frac{\pi}{2}$)，求它的通解。

五、（8 分）验证极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{x-\sin x \cos x}$ 存在,但不能用罗必塔得出.

六、（8 分）求 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} (a < b)$.

七、（8 分）设 $F(x)=\int_0^x \sin^n t dt$, 其中 n 为奇数

八、（8 分）设 $f(x)=[\varphi(x)-\varphi(0)]\ln(1+2x),g(x)=\int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\varphi'(0)=1$, 证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x\rightarrow 0$ 时的同阶无穷小。

九、（8 分）判断函数 $y=\frac{1}{1+x}$ 的单调性, 并证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$

十、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导, 且 $f(\frac{\pi}{2})=0$, 证明 存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $f(\xi)+\tan \xi\cdot f'(\xi)=0$.

十一、（8 分）位于 x 轴上区间 $[0,l]$ 上长为 l , 密度为 $\rho(x)$ 的杆绕 $x=a$ 旋转的转动惯量为 $I=\int_0^l (x-a)^2 \rho(x)dx$, 试求这个转动惯量为最小时的 a 值。

十二、（8 分）如图所示, 设以 $(0,a)$ 为中心的 a 为半径的圆弧 PmQ 与以 $(0,0)$ 为中心的 $\sqrt{2}a$ 为半径的圆弧 pnQ 所围成的平面图形的面积为 S , 试证明 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。

武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试高等数学 A 解答

一、(10 分) 已知: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{t}{\sqrt{a+t}} dt = 1$, 求 a 的值.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{t}{\sqrt{a+t}} dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{\sqrt{a+x^2}}}{4x^3} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \frac{1}{2\sqrt{a}} = 1, \quad a = \frac{1}{4}$$

二、(10 分) 设 $y = 2^{3x} \cdot \ln(2x) - \sqrt{1+x^2}$, 求 y' .

$$\text{解} \quad y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \ln(2x) + \frac{2^{3x}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

三、(8 分) 设 $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = \frac{3}{4}t^4 + t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \end{cases}$ 且 $t = t_0$ 时, $dy = 2dx$, 试求 t_0 .

$$\text{解} \quad y' = 3t^3 + 3t^2 + t + 1 = (t+1)(3t^2+1) \quad x' = 3t^2+1$$

$$\frac{dy}{dx} = t+1 \quad \text{从而} \quad t_0+1=2 \quad t_0=1$$

四、(8 分) 设微分方程 $x'' - \tan t \cdot x' + 2x = 0$ 的一特解为 $x_1 = \sin t$ ($0 < |t| < \frac{\pi}{2}$), 求它的通解。

解 设方程的另一无关特解为 x_2 , 则

$$x_2 = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(x) dt} dt = \sin t \int \frac{1}{\sin^2 t} e^{\int \tan t dt} dt = \frac{1}{2} \sin t \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} - 1$$

$$\text{通解为: } x = C_1 \sin t + C_2 \left(\sin t \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} - 2 \right)$$

五、(8 分) 验证极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{x-\sin x \cos x}$ 存在, 但不能用罗必塔得出.

$$\text{证明 因为} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{x-\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1 + \frac{\sin x \cos x}{x}}{1 - \frac{1}{x} \sin x \cos x} = 1$$

$$\text{但} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x+\sin x \cos x)'}{(x-\sin x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} \quad \text{不存在}$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{x-\sin x \cos x}$ 存在, 不能用罗必塔法则得出.

六、(8分) 求 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} (a < b)$.

解 原式 $= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2 - (x - \frac{a+b}{2})^2}}$

令 $x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} \sin t$

原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{b-a}{2} \cos t} \cdot \frac{b-a}{2} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$

七、(8分) 设 $F(x) = \int_0^x \sin^n t dt$, 其中 n 为奇数

证明 (1) $F(x)$ 为偶函数; (2) $F(x)$ 为以 2π 为周期的函数。

证明 (1) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$\because F(-x) = \int_0^{-x} \sin^n t dt (t = -u) = \int_0^x \sin^n u du = F(x)$$

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$$\because F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \sin^n t dt = \int_0^x \sin^n t dt + \int_x^{x+2\pi} \sin^n t dt = F(x) + \int_x^{x+2\pi} \sin^n t dt$$

因上式第二个积分与 x 无关, 为此令 $x = -\pi$, 因 $\sin^n t$ 为奇函数

$$\int_x^{x+2\pi} \sin^n t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n t dt = 0$$

$$\therefore F(x+2\pi) = F(x)$$

八、(8分) 设 $f(x) = [\varphi(x) - \varphi(0)] \ln(1+2x)$, $g(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且

$$\varphi'(0) = 1,$$

证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的同阶无穷小。

证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x^3}}{2x} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{g(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \cdot \frac{\ln(2x+1)}{x} = 2 \cdot \varphi'(0) \cdot 2 = 4$$

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小 ($x \rightarrow 0$)

九、(8分) 判断函数 $y = \frac{1}{1+x}$ 的单调性, 并证明 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

解 函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 的定义域 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$

$$y' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{故在 } (-\infty, -1) \text{ 及 } (-1, +\infty) \text{ 内 } y = \frac{x}{1+x} \text{ 单调增}$$

令显然 $x_1 = |a+b|, x_2 = |a|+|b| \quad x_1 \leq x_2$

$$\therefore \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

十、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内可导, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 证明 存在一点 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(\xi) + \tan \xi \cdot f'(\xi) = 0$.

证明 令 $F(x) = f(x) \sin x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内可导, 又因 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 则 $F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$, 即 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上满足罗尔定理的条件, 则至少存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $F'(\xi) = 0$, 而 $F'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$, 即 $f(\xi) \cos \xi + f'(\xi) \sin \xi = 0 \quad \xi \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \cos \xi \neq 0$
即 $f(\xi) + \tan \xi \cdot f'(\xi) = 0$

十一、(8 分) 位于 x 轴上区间 $[0, l]$ 上长为 l , 密度为 $\rho(x)$ 的杆绕 $x = a$ 旋转的转动惯量为

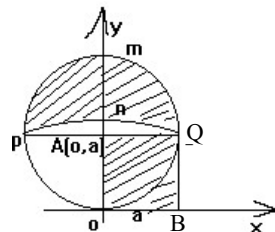
$$I = \int_0^l (x-a)^2 \rho(x) dx, \text{ 试求这个转动惯量为最小时的 } a \text{ 值.}$$

解 由 $\frac{dI}{da} = -2 \int_0^l (x-a) \rho(x) dx = 0$.

$$\int_0^l x \rho(x) dx = a \int_0^l \rho(x) dx \quad a = \frac{\int_0^l x \rho(x) dx}{\int_0^l \rho(x) dx} = \frac{M_y}{M} = \bar{x}$$

而 $\frac{d^2 I}{da^2} = 2 \int_0^l \rho(x) dx = 2M > 0$, 故 $a = \bar{x}$ 时这个转动惯量取得极小值。

十二、(8 分) 如图所示, 设以 $(0, a)$ 为中心的 a 为半径的圆弧 PmQ 与以 $(0, 0)$ 为中心的 $\sqrt{2}a$ 为半径的圆弧 $p n Q$ 所围成的平面图形的面积为 S , 试证明 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。



证明 设极点 O , $\overline{OA} = a$ 圆 $r = 2a \sin \theta$, 圆 $r = \sqrt{2}a$

$$\begin{aligned} S_{\text{阴影}} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4a^2 \sin^2 \theta d\theta - \frac{\pi}{4} 2a^2 = a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} a^2 \\ &= a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-1-1) \right] - \frac{\pi}{2} a^2 = a^2 \end{aligned}$$

$S_{\text{正方形}} = a^2$ 所以 S 等于正方形 $OAQB$ 的面积。