第七章 参数估计

点估计(矩估计，极大似然估计)

估计量的评价准则

区间估计(置信度，枢轴量)

正态总体参数的区间估计

参数：反映总体某方面特征的量

例　假设浙江大学某年大一学生的《微积分I》成绩X服从正态分布，$X\geq 90$为优秀，则优秀率

$$p = P\left(X \geq 90\right) = 1 - \Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)$$

就是一个参数，它是μ和σ^2的函数.

当总体的参数未知时，需要利用样本资料对其给出估计——参数估计.

两类参数估计方法：点估计和区间估计

7.1 参数的点估计

设总体***X***有未知参数***θ***, $X_1,\cdots,X_n$是***X***的简单随机样本.

点估计问题：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$用来估计未知参数***θ***，称 $\hat{\theta}$ 为参数***θ***的点估计量.

当给定样本观察值 $x_1,\cdots,x_n$时，称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为参数***θ***的点估计值.

常用的点估计方法：矩估计法和极大似然估计法.

(一) 矩估计法

统计思想： 常以样本矩估计总体矩，以样本矩的函数估计相应总体矩的函数.

设$\mu_k = E(X^k), k=1,\dots,m$存在，$\nu_k = E\{[X-E(X)]^k\}$,

即 $\hat{\mu}_k = A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$，$\hat{\nu}_k = B_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$,

$\hat{g}(\mu_1,\dots,\mu_m) = g(A_1,\dots,A_m)$，其中$g(\bullet)$是连续函数.

理论依据： 辛钦大数定律和依概率收敛的性质.

即 $A_k \xrightarrow{P} \mu_k$，$B_k \xrightarrow{P} \nu_k$，$g(A_1,\dots,A_m) \xrightarrow{P} g(\mu_1,\dots,\mu_m)$.

基本步骤：

设总体**X**有***m***个未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_m$， $\mu_1,\cdots,\mu_m$存在.

(1)求总体前***m***阶矩关于***m***个参数的函数

$$\mu_k = E(X^k) = g_k(\theta_1,\cdots,\theta_m), \quad k = 1,\cdots,m$$

(2)求各参数关于前***m***阶矩的反函数

$$\theta_k = h_k(\mu_1,\cdots,\mu_m), \quad k = 1,\cdots,m,$$

(3)以样本各阶矩 $A_1,\cdots,A_m$ 代替总体各阶矩 $\mu_1,\cdots,\mu_m$, 即得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_k = h_k(A_1,\cdots,A_m), \quad k = 1,\cdots,m.$$

注：在实际应用时，也可以用中心矩代替原点矩，相应地，以样本中心矩估计总体中心矩；

矩估计不唯一，采用的矩不同，得到的参数矩估计也不同.

例1.1　设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad \theta>0为未知参数，$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自X的样本，求θ的矩估计量。

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43　0.01　0.30　0.04　0.54

0.14　0.99　0.18　0.98　0.02

求θ的矩估计值。

解：（1）$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} \mathrm{d}x \quad = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

（2）$\theta = \left(\dfrac{\mu_1}{1-\mu_1}\right)^2$

（3）$\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$

（4）$\bar{x} = 0.363, \quad \hat{\theta} = \left(\dfrac{0.363}{1-0.363}\right)^2 = 0.325.$

例1.2　设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$是X的样本，求下列情况下未知参数的矩估计。

（1）μ未知，$\sigma^2=1$，（2）$\mu=1$，σ^2未知，

（3）μ,σ^2均未知.

解：（1）$\mu = E(X), \quad \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}.$

（2） $E(X) = 1, E(X^2) = \sigma^2 + 1,$

$$\sigma^2 = E(X^2) - 1,$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1.$$

思考题：σ^2的矩估计还有别的吗？

有，因为$\sigma^2 = E(X - E(X))^2$，所以

$$\hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$ 说明矩估计不唯一.

(3) $E(X)=\mu, E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}=\bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2=A_2-\bar{X}^2=B_2. \end{cases}$$

可以看出，矩估计不涉及总体分布.

例1.3　设总体X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$，求a和b的矩估计量.

解（1）求矩关于参数的函数

$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \nu_2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

(2) 求参数关于矩的反函数

$$a = \mu_1 - \sqrt{3\nu_2}, \quad b = \mu_1 + \sqrt{3\nu_2}$$

(3) 以样本矩 $A_1 = \bar{X}$ 代替总体矩 μ_1,

$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 代替 ν_2，得参数

a 和 b 的矩估计量

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3B_2}, \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3B_2}.$$

(二) 极大似然估计法

- 极（最）大似然估计的原理介绍

考察以下例子：

假设在一个罐中放着许多白球和黑球，并假定已经知道两种球的数目之比是1:3，但不知道哪种颜色的球多。如果用放回抽样方法从罐中取5个球，观察结果为：黑、白、黑、黑、黑，估计取到黑球的概率p.

解：设抽到黑球的概率为p，则本例中，$p=\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$.

当$p=\frac{1}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{1024}$.

当$p=\frac{3}{4}$时，出现本次观察结果的概率为$\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{1024}$.

由于 $\frac{3}{1024}<\frac{81}{1024}$，因此认为$p=\frac{3}{4}$比$p=\frac{1}{4}$更有可能，

于是 $\hat{p}$ 取为$\frac{3}{4}$更合理.

一般地，设离散型总体 $X \sim p(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ未知.

从总体*X*中取得样本 $X_1,\ldots,X_n$,**其观察值为** $x_1,\ldots,x_n$,

则事件 $\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\}$**发生的概率为**

$$L(\theta) = P\{X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\} = p(x_1;\theta)\ldots p(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta).$$

似然函数

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta).$

$\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$ 称为θ的极大似然估计值，相应统计量

$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ 称为θ的极大似然估计量（**MLE).**

若总体X为连续型随机变量，概率密度函数为

$f(x,\theta)$，$\theta\in\Theta$，θ为未知参数.

则对于样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$

极大似然原理：$L(\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n))=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)$.

注：这里未知参数θ可能不是一个参数，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$.

极大似然估计的求解：

(1) **注意到**$L(\theta)$**与**$\ln L(\theta)$**的最大值点相同，记** $\ln L(\theta) = l(\theta)$**，称为对数似然函数，**

利用$\left.\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_i}\right|_{\hat{\theta}_i, 1\le i\le k} = 0, i = 1,2,\ldots,k$.解得$\hat{\theta}_i$，$i = 1,2,\ldots,k$.

(2) 若$L(\theta)$关于某个θ_i 单调增(减)，$\theta_i \le (\ge) \hat{\theta}_i(x_1,\ldots,x_n)$,

此时 $\hat{\theta}_i(x_1,\ldots,x_n)$即为$\theta_i$的极大似然估计值,

$\hat{\theta}_i(X_1,\ldots,X_n)$即为$\theta_i$的极大似然估计量；

(3) 若$\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$是$\theta$的极大似然估计量, 则$g(\theta)$的极大似然估计量为$g\left(\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)\right)$.

例1.4　设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$X_1,\dots,X_n$是总体X的样本，求θ的极大似然估计量.

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43	0.01	0.30	0.04	0.54
0.14	0.99	0.18	0.98	0.02

求θ的极大似然估计值.

解：似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}\, x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$$

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\quad \left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0,$$

即：$\dfrac{n}{\sqrt{\hat{\theta}}}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

θ的极大似然估计量为：$\hat{\theta}=n^2\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2$

θ的极大似然估计值为：$\hat{\theta}=0.305.$

例1.5　设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_n$是X的样本，求下列情况下未知参数的极大似然估计。

（1）μ未知,$\sigma^2=1$,（2）$\mu=1$,σ^2未知，

（3）μ,σ^2均未知.

解（1）似然函数$L(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$$l(\mu)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}l(\mu)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}l(\mu)\Big|_{\mu=\hat{\mu}}=0,$$

$$\hat{\mu}=\bar{X}$$

（2）似然函数$L(\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-1)^2}{2\sigma^2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_n-1)^2}{2\sigma^2}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$l(\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2}l(\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2}l(\sigma^2)\Big|_{\sigma^2=\hat{\sigma}^2}=0,\quad\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2.$$

（3）似然函数$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$l(\mu,\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}l(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}l(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}l(\mu,\sigma^2)\Big|_{\hat{\mu},\hat{\sigma}^2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\sigma^2}l(\mu,\sigma^2)\Big|_{\hat{\mu},\hat{\sigma}^2}=0,$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

例1.6　设总体X服从均匀分布$U(a,b)$，a和b是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$，

(1) 求a和b的极大似然估计，

(2) 求$E(X)$的极大似然估计。

解：(1) 似然函数

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_i\le b, i=1,\ldots,n.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注意到，似然函数$L(a,b)$关于a单调增，关于b单调减，

因此，$\dfrac{\partial}{\partial a}\ln L(a,b)>0,\dfrac{\partial}{\partial b}\ln L(a,b)<0.$

另一方面，在得到样本值$x_1,\ldots,x_n$后，

a的取值$\le\min\{x_1,\ldots,x_n\}$，$b$的取值$\ge\max\{x_1,\ldots,x_n\}$.

只要使得a达到最大值$\min\{x_1,\ldots,x_n\}$,

b达到最小值$\max\{x_1,\ldots,x_n\}$,

就能使$L(a,b)$达到最大。

所以，a,b的极大似然估计量分别为

$\hat{a}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(1)},\hat{b}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}=X_{(n)}$

(2)$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$的极大似然估计量为

$$E(\hat{X})=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$$

例1.7　设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\theta}, & x\geq\mu,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中$\theta>0,\theta,\mu$是未知参数,$(X_1,\cdots,X_n)$为X的样本，求θ,μ的矩估计与极大似然估计。

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{\mu}^{+\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} dx = \mu + \theta$$

$$v_2 = Var(X) = E(X-\mu-\theta)^2 = \int_{\mu}^{+\infty} (x-\mu-\theta)^2 \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} dx$$

$$\overset{t=x-\mu}{=} \int_{0}^{+\infty} (t-\theta)^2 \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = \theta^2$$

得 $\begin{cases} \theta = \sqrt{v_2} \\ \mu = \mu_1 - \sqrt{v_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \\ \hat{\mu} = \bar{X} - \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} \end{cases}$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x_i-\mu)/\theta}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{n(\overline{x}-\mu)}{\theta}},\ x_i\geq\mu,1\leq i\leq n.$$

当θ给定时，$L(\theta,\mu)$是μ的单调增函数,

又$x_i\geq\mu$, 故$\mu\leq min(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_{(1)}$,

$\therefore\ \mu$的极大似然估计量为$X_{(1)}=min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,

此时，$l(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})$,

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-X_{(1)}\right),\quad \frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}}=0,$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\bar{X}-X_{(1)},\hat{\mu}=X_{(1)}.$$

例1.8　设总体X的分布律为

$$P(X=1)=2P(X=2)=\theta, P(X=3)=1-\frac{3\theta}{2},$$

其中$0<\theta<\frac{2}{3}$, 未知,

样本观测值为2，3，2，1，3，

求θ的矩估计值与极大似然估计值.

解：(1) 矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \sum x_k p_k$$

$$= \theta + 2 \times \theta/2 + 3 \times (1 - 3\theta/2)$$

$$= 3 - 5\theta/2, \Rightarrow \theta = \frac{2}{5}(3 - \mu_1),$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{5}(3 - \bar{X});$$

$$\bar{x} = 2.2, \quad \Rightarrow \hat{\theta} = 0.32.$$

(2) 极大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)$$

$$=\tfrac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$l(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta},\quad \left.\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}}=0,$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}=0.4.$$

例1.9　设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，$\theta > 0$未知，试由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，求出θ的极大似然估计量和矩估计量.

解：(1) 极大似然估计

X的概率密度函数为：$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

故θ的似然函数为$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$是$\theta$的减函数，且$\theta\ge x_{(n)}=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$，

所以$\hat{\theta}_{MLE}=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(2) 矩估计

由$E(X)=\int_0^\theta \dfrac{1}{\theta}xdx=\dfrac{\theta}{2}$，$\theta=2E(X),\Rightarrow\hat{\theta}=2\bar{X}$.

7.2 估计量的评选准则

从前一节看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

四条评价准则：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则

1.无偏性准则

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,满足

$$E(\hat{\theta})=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量。

若$E(\hat{\theta})\neq\theta$,那么$B(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$称为$\hat{\theta}$的偏差;

若$\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量.

例2.1　设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，记$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$，

(1) 证明：样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计；

（2）判断：B_2是否为σ^2的无偏估计？是否为σ^2的渐近无偏估计？

（1）证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计量.

$$
\begin{aligned}
E\left(S^2\right) &= E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right)-nVar\left(\bar{X}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right)=\sigma^2
\end{aligned}
$$

故S^2是σ^2的无偏估计量.

（2）$B_2=\dfrac{n-1}{n}S^2$

$$E(B_2)=\frac{n-1}{n}E\left(S^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故B_2不是σ^2的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty}E(B_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故B_2是σ^2的渐近无偏估计.

例2.2　设总体X的均值为1，方差为σ^2，

$X_1,\ldots,X_n$是X的样本，判断方差σ^2的三个估计

$$\hat{\sigma}_1^2=S^2,\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2,\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1$$

是否为σ^2的无偏估计？

解：由例2.1知，$\hat{\sigma}_1^2=S^2$是σ^2的无偏估计，

注意到$\sigma^2=E[(X-1)^2]=E(X^2)-1$,

所以，$\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2,\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-1$

也都是σ^2的无偏估计。

例2.3 判断上节例1.9（即总体X服从$\left[0,\theta\right]$上的均匀分布）的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$与极大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}=X_{(n)}$的无偏性。

解：因为 $X \sim U[0,\theta]$，$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，

由于$X_1,\cdots,X_n$与X同分布，

$$\therefore E(\hat{\theta})=E(2\bar{X})$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

因此$\hat{\theta}=2\bar{X}$是θ的无偏估计量；

为考察$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}$的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布，

由第三章第5节知：

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left[F(x)\right]^n = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x^n/\theta^n, 0 \le x \le \theta, \\ 1, x > \theta. \end{cases}$$

于是 $f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

因此有：$E\left(\hat{\theta}_{MLE}\right) = E\left(X_{(n)}\right)$

$$= \int_0^\theta \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta \ne \theta$$

所以$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}$是有偏的.

纠偏方法

如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta,$其中$a,b$是常数，且$a\neq 0,$

则$\dfrac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计.

在例2. 2中，取$X_{(n)}^{*}=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)},$则$X_{(n)}^{*}$是$\theta$的无偏估计量.

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，

由$\hat{\theta}\left(X_1,\cdots,X_n\right)$所作的估计值的平均恰是$\theta,$

从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差.

2. 有效性准则

定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是$\theta$的两个**无偏**估计，

如果$Var\left(\hat{\theta}_1\right) \le Var\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta \in \Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta \in \Theta$成立，则称

$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

例2.4　设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，已知θ的两个无偏估计为$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$，判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个有效$(n \geq 2$时$)$?

解：$Var\left(\hat{\theta}_1\right)=Var\left(2\bar{X}\right)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$,

由 $f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ $E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n\theta}{n+1}$,

$$\Rightarrow E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$\therefore Var\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{E\left(X_{(n)}^2\right)-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$Var\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=Var\left(\hat{\theta}_2\right) \Rightarrow \hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效.

3.均方误差准则

定义：设$\hat{\theta}$是参数θ的点估计，方差存在，则称$E(\hat{\theta}-\theta)^2$是估计量的均方误差，记为$Mse(\hat{\theta})$.

$$Mse(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2$$

若$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则有$Mse(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})$.

设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$是$\theta$的两个估计量，

如果$Mse\left(\hat{\theta}_1\right)\le Mse\left(\hat{\theta}_2\right)$，对一切$\theta\in\Theta$成立，

且不等号至少对某一$\theta\in\Theta$成立，则称$\hat{\theta}_1$优于$\hat{\theta}_2$.

例2.5　试利用均方误差准则，对用样本方差S^2和样本二阶中心矩B_2分别估计正态总体方差σ^2时进行评价.

解：根据第六章抽样分布定理，在正态总体下，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$$\because E(S^2)=\sigma^2, \therefore Mse(S^2)=Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

而 $$Mse(B_2)=E[(B_2-\sigma^2)^2]=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

$$=Var(B_2)+[E(B_2)-\sigma^2]^2$$

$$=Var(\frac{n-1}{n}S^2)+[E(\frac{n-1}{n}S^2)-\sigma^2]^2$$

当$n>1$时，有$\frac{2n-1}{n^2}<\frac{2}{n-1}$，

因此在均方误差准则下，B_2优于S^2.

例2.6　设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，已取得θ的矩估计$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$，极大似然估计$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}$，比较$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_{MLE}$的均方误差$(n \geq 3)$.

解：$Mse\left(\hat{\theta}_1\right)=Var\left(\hat{\theta}_1\right)=Var\left(2\bar{X}\right)=\dfrac{\theta^2}{3n}$,

由 $f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E\left(X_{(n)}\right)=\dfrac{n}{n+1}\theta, \\ E\left(X_{(n)}^2\right)=\dfrac{n}{n+2}\theta^2, \end{array}$

于是，$Mse\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=E[(X_{(n)}-\theta)^2]$

$$=E\left(X_{(n)}^2\right)-2\theta E\left(X_{(n)}\right)+\theta^2=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)},$$

$$Mse\left(\hat{\theta}_1\right)-Mse\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=\frac{(n-1)(n-2)\theta^2}{3n(n+1)(n+2)}>0$$

所以，$\hat{\theta}_{MLE}$优于$\hat{\theta}_1$.

4. 相合性准则

设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta \in \Theta$，当$n \to +\infty$时，$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$,

即$\forall \varepsilon > 0$，有：$\lim\limits_{n \to +\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$成立，

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量.

例2.7　设总体X的k阶矩$E(X^k)=\mu_k(k\geq 2)$存在，

$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，证明：

(1) $\bar{X}$是$\mu_1=E(X)$的相合估计；

（2）$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l, l=2,\ldots,k$是$\mu_l, l=2,\ldots,k$的相合估计；

（3）$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2, S^2$是$Var(X)=\sigma^2$的相合估计；

（4）S是σ的相合估计.

证明：由辛钦大数定律知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$依概率收敛到 $\mu_l = E(X^l), l = 1, 2, \ldots, k.$

因此，(1),(2)成立；

注意到$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$ 是μ_1, μ_2的连续函数,所以，根据依概率收敛的性质，

$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = A_2 - \bar{X}^2$是$\sigma^2$的相合估计，

又 $S^2 = \frac{n}{n-1}B_2$，因此S^2也是σ^2的相合估计；

$S = \sqrt{S^2}$是σ的相合估计. 因此，(3) 和(4)成立.

例2.8　设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是取自X的样本，

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$，$\hat{\theta}_{MLE} = X_{(n)}$和$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$

都是θ的相合估计量。

证明：$E\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)=\dfrac{n\theta}{n+1}$， $E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta$，$Var\left(\hat{\theta}_2\right)=\dfrac{\theta^2}{n\left(n+2\right)}$，

由辛钦大数定律，$\bar{X}\xrightarrow{P}\dfrac{\theta}{2},\Rightarrow\hat{\theta}_1=2\bar{X}\xrightarrow{P}\theta.$

由马尔可夫不等式，$\forall\varepsilon>0,$当$n\to+\infty$时，

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_{MLE}-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{E(\theta-X_{(n)})}{\varepsilon}=\frac{\theta}{(n+1)\varepsilon}\to 0,(\because X_{(n)}\le\theta)$$

由切比雪夫不等式，$\forall\varepsilon>0,$当$n\to+\infty$时，

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le Var\left(\hat{\theta}_2\right)\Big/\varepsilon^2=\frac{\theta^2}{n\left(n+2\right)\varepsilon^2}\to 0$$

所以$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_{MLE}$和$\hat{\theta}_2$都是$\theta$的相合估计.

7.3 区间估计

假设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本,

区间估计的方法是给出两个统计量

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$$

使区间$\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$以一定的可靠程度盖住$\theta$.

（一）置信区间的定义

定义7.3.1：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，$(X_1,\cdots,X_n)$是总体X的一个样本，对给定的值$\alpha(0<\alpha<1)$，

如果有统计量$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)$，使得

$$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta$$

则称随机区间$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$是$\theta$的双侧置信区间；

称$1-\alpha$为置信水平或置信度；

称$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$为双侧置信下限和双侧置信上限.

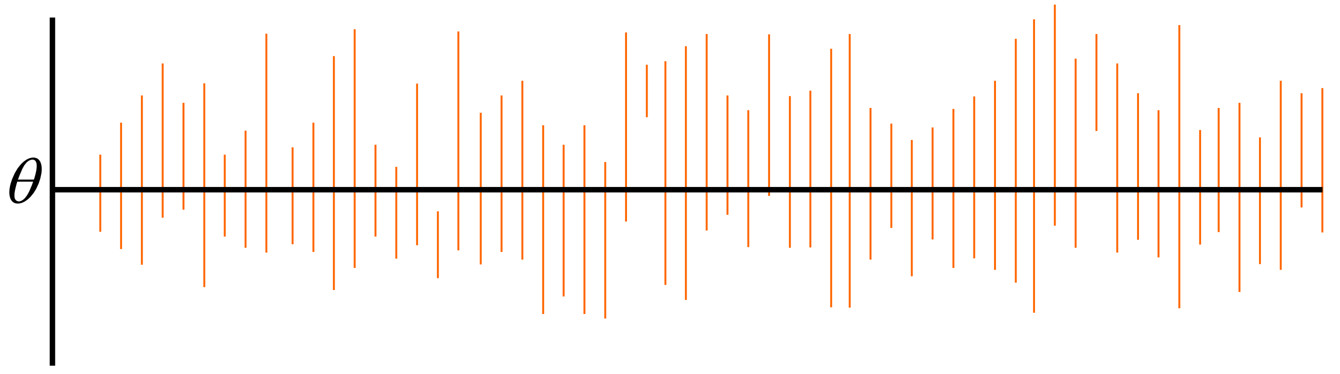
如果θ的置信区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$，满足

$$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta$$

则置信区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$的含义为

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等，都为n)，每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$，每个这样的区间或者包含$\theta$的真值，或者不包含$\theta$的真值.

按伯努里大数定律，在这些区间中，包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$.



如反复抽样10000次，当$\alpha=0.05$,即置信水平为95%时，10000个区间中不包含θ的真值的约为500个；当$\alpha=0.01$,即置信水平为99%时，10000个区间中不包含θ的真值的约为100个。

单侧置信限

定义7. 3. 2 在定义7.3.1中，若$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别满足

$$P\left\{\hat{\theta}_L\left(X_1,\cdots,X_n\right)<\theta\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta$$

则称$\underline{\hat{\theta}_L\left(X_1,\cdots,X_n\right)\text{为}\theta\text{的单侧置信下限}}$。

$$P\left\{\theta<\hat{\theta}_U\left(X_1,\cdots,X_n\right)\right\}\geq 1-\alpha,\quad \forall\theta\in\Theta$$

则称$\underline{\hat{\theta}_U\left(X_1,\cdots,X_n\right)\text{为}\theta\text{的单侧置信上限}}$。

■ 单侧置信限和双侧置信区间的关系：

设$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1$的单侧置信下限，$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，且$\hat{\theta}_L<\hat{\theta}_U$，则$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间.

证明：由置信限的定义知

$$P\{\hat{\theta}_L<\theta\}\geq 1-\alpha_1,\ P\{\hat{\theta}_U>\theta\}\geq 1-\alpha_2,$$

因此，$P\{\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U\}=1-P\{\hat{\theta}_L\geq\theta\}-P\{\hat{\theta}_U\leq\theta\}$

$$\geq 1-\alpha_1-\alpha_2.$$

定义：称置信区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$的平均长度$E(\hat{\theta}_U - \hat{\theta}_L)$
为区间的精确度，并称二分之一区间的
平均长度为置信区间的误差限.

说明：在给定的样本容量下，置信水平和精确度
是相互制约的。

Neman原则：

在置信度达到一定的前提下，选取精确度尽可能高的区间。

例3.1　总体$X \sim N(\mu,1)$，$X_1,\cdots,X_n$为来自X的样本，

样本均值$\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\right)$，则有$P(\sqrt{n}\left|\bar{X}-\mu\right|<z_{\alpha/2})=1-\alpha$，

(1) 求μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间；

(2) 求置信区间的精确度及误差限；

(3) 说明置信度与精确度的关系；

(4) 分别求μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限及上限.

解：(1) $1-\alpha=P(\sqrt{n}\left|\bar{X}-\mu\right|<z_{\alpha/2})=P(\bar{X}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})$，

即　$(\bar{X}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}，\bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})$是$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间；

(2)精确度$=\frac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$，误差限$=\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$；

例3.1　总体$X\sim N(\mu,1)$，$X_1,\cdots,X_n$为来自X的样本,

样本均值$\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{1}{n}\right)$, 则有$P(\sqrt{n}\left|\bar{X}-\mu\right|<z_{\alpha/2})=1-\alpha$,

(3) 说明置信度与精确度的关系;

(4) 分别求μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限及上限.

(3)由(2)精确度$=\dfrac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$知，当$n$给定时，

$1-\alpha\uparrow(\downarrow), z_{\alpha/2}\uparrow(\downarrow), \dfrac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\uparrow(\downarrow), \Rightarrow$ 精确度降低(提高);

(4) $1-\alpha=P(\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)<z_{\alpha})=P(\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)>-z_{\alpha})$,

即　$1-\alpha=P(\bar{X}-\dfrac{z_{\alpha}}{\sqrt{n}}<\mu)=P(\bar{X}+\dfrac{z_{\alpha}}{\sqrt{n}}>\mu)$,

所以，单侧下限为$\bar{X}-\dfrac{z_{\alpha}}{\sqrt{n}}$，单侧上限为$\bar{X}+\dfrac{z_{\alpha}}{\sqrt{n}}$.

（二）枢轴量法

定义7. 3. 3：设总体X有概率密度$f(x;\theta)$(或概率分布律$p(x;\theta)$)，其中θ是待估的未知参数；

设$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体X的简单随机样本，

称$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$为枢轴量，如果$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$只是样本和未知参数θ的函数，且它的分布已知，该分布不依赖于任何未知参数.

- 枢轴量和统计量的区别：
- （1）枢轴量是样本和待估参数的函数，其分布不依赖于任何未知参数；
- （2）统计量只是样本的函数，其分布常常依赖于未知参数。

- **思考题：**

总体$X \sim N(\mu,\sigma^2), X_1,\ldots,X_n$是$X$的样本,

μ,σ^2是未知参数，则$\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$

(1) $\bar{X},\quad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma},\quad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

哪个是统计量？

（2）考虑估计参数μ,

$\bar{X},\quad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma},\quad \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

哪个可以作为枢轴量？

答： (1)$\bar{X}$是统计量；

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$与$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$

含有未知参数，都不是统计量。

（2）$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$是枢轴量；

$\bar{X}$的分布含有未知参数，

$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$含有除了$\mu$以外的其他未知参数$\sigma$，

所以$\bar{X}, \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$都不是枢轴量。

构造置信区间具体步骤：

(1) 构造一个分布已知的枢轴量$G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$;

(2) 对连续型总体和给定的置信度$1-\alpha$，设常数$a<b$满足

$$P\{a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$$

(3) 若能从 $a<G(X_1,\cdots,X_n;\theta)<b$ 得到等价的不等式

$$\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)$$

那么$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

注1： 枢轴量 $G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ 的构造，

通常从参数θ的点估计$\hat{\theta}$

（如极大似然估计，无偏估计，矩估计等）

出发，根据$\hat{\theta}$的分布进行改造而得.

注2：若步骤(2) (3) 中a和b的解不唯一，如何确定？

1.根据Neyman原则：求a和b使得区间长度最短；

2. 如果最优解不存在或比较复杂，

为应用的方便，常取a和b满足

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\le a)=\alpha/2,$$

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\ge b)=\alpha/2.$$

正态总体下常见枢轴量：

(1) 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$情形

$$\mu\text{的枢轴量：}\begin{cases}\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1), & （\sigma^2\text{已知}）\\[2ex] \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1), & （\sigma^2\text{未知}）\end{cases}$$

$$\sigma^2\text{的枢轴量：}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\quad （\mu\text{未知}）$$

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$情形

$\mu_1-\mu_2$的枢轴量：

$$
\begin{cases}
\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0,1), & （\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}） \\
\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2) & (\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}\text{未知})
\end{cases}
$$

$$
\text{其中}S_w^2=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}
$$

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1{}^2),N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$情形

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的枢轴量：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

（μ_1，μ_2未知)

例3.2 设某产品的寿命X服从均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布，

$X_1,\cdots,X_7$是来自该总体的样本，若已经证明，

$$2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i \sim \chi^2(14).$$

并已知$\overline{x}=1258$小时，试利用枢轴量法推断该产品平均寿命的范围（置信水平为0.9）.

解：由于$2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i \sim \chi^2$（14），分布已知且与参数$\lambda$无关，

因此可取枢轴量为 $2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i$，且有

$$P\left\{\chi^2_{0.95}(14) < 2\lambda\sum_{i=1}^{7}X_i < \chi^2_{0.05}(14)\right\}=0.9$$

即 $$P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{7}X_i}{\chi^2_{0.05}(14)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2\sum_{i=1}^{7}X_i}{\chi^2_{0.95}(14)}\right\}=0.9$$

因此该产品平均寿命的置信水平为0.9的置信区间为

$$\left(\frac{2\sum_{i=1}^{7} X_i}{\chi^2_{0.05}(14)}, \quad \frac{2\sum_{i=1}^{7} X_i}{\chi^2_{0.95}(14)} \right)$$

由Excel或查表得 $\chi^2_{0.05}(14) = 23.685$，$\chi^2_{0.95}(14) = 6.571$

并将样本资料$\bar{x} = 1258$代入上式得

（743.6， 2680.3)

即有90%的把握认为该产品平均寿命

在743.6小时到2680.3小时之间.

7.4 正态总体参数的区间估计

(一)单个正态总体情形

设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自$X$的简单随机样本,样本均值和样本方差分别为$\bar{X}$和$S^2$.

分别考虑参数μ与σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

1. 均值μ的置信区间

(1) σ^2已知时

$\bar{X}$是μ的无偏估计,且有$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,分布完全已知,

因此可取枢轴量为$G(X_1,\cdots,X_n)=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

设常数$a<b$且满足:$P\left\{a<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\right\}=1-\alpha$

即等价于 $P\left\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}b<\mu<\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right\}=1-\alpha$

此时区间的长度为 $L=(b-a)\sigma/\sqrt{n}$

根据正态分布的对称性知，取

$$a=-b=-z_{\alpha/2}$$

时，区间的长度达到最短.

从而μ的置信水平为（1－α）的置信区间为：

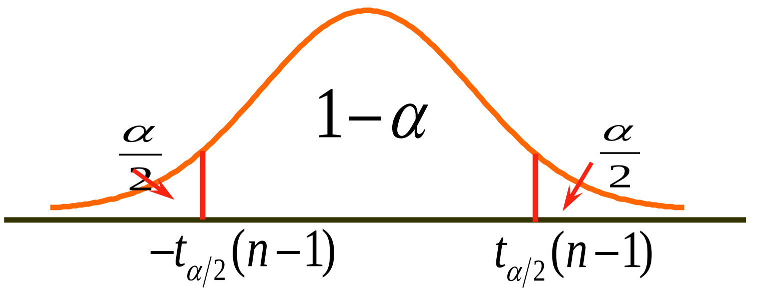
$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

思考题：

均值μ的置信度$1-\alpha$的置信下限是什么呢?

答案: $\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}$

(2) σ^2未知时



取枢轴量为$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$$有P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$即P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为:

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

例4.1 设某种植物的高度$X\,(cm)$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，随机选取36棵，其平均高度为$15cm$. 就以下两种情形，求$\mu$的95%双侧置信区间：

$(1)\ \sigma^2=16$；　　　　$(2)\ \sigma^2$未知，$S^2=16$；

解：$(1)\ n=36, \bar{X}=15, \sigma=4$

$$由P\left\{\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=0.95$$

得：$\bar{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=13.693$

$$\bar{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=16.307$$

μ的置信区间为$(13.693,16.307)$

$(2)\ n=36, \bar{X}=15, S^2=16$

由$P\left\{\bar{X}-t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+t_{0.025}(35)\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-0.05$

查表得：$t_{0.025}(35)=2.0301$

又：$15-\frac{2.0301\times 4}{6}=13.647,\qquad 15+\frac{2.0301\times 4}{6}=16.353$

μ的置信区间为$(13.647,16.353)$

? 求置信度为99%时(1)(2)两种情况下μ的置信区间

答案：(1) $(13.333, 16.667)$,

(2) $(13.184, 16.815)$.

比较(1)(2)两种情形下μ的置信区间:

σ^2已知, $\sigma^2=16$, 置信区间: $(13.693, 16.307)$ 区间短

σ^2未知, $S^2=16$, 置信区间: $(13.647, 16.353)$ 区间长

但第二种情形更实用, 因为多数时候, σ^2未知.

例4.2　某袋装食品重量(单位：克) $X \sim N(\mu, 3^2)$ **现从一大批该产品中随机抽取10件，称得重量如下:**

101.3 99.6 100.4 98.8 96.4

99.1 102.3 97.5   105.4 100.2.

试在置信水平为95%下求总体均值μ **的双侧置信区间.**

解：计算样本均值得 $\bar{x} = 100.1$

查表得：$z_{0.025} = 1.96$

所以 μ **的置信度为95%的双侧置信区间为**

$$(\bar{X} - \frac{3}{\sqrt{10}} z_{0.025}, \bar{X} + \frac{3}{\sqrt{10}} z_{0.025}) = (98.24,\ 101.96)$$

在EXCEL中的实现 本例的计算步骤如下：

(1) 将样本观察值输入EXCEL 表中,设数据区域为A1到A10;

(2) 选中A11单元格=>插入“AVERAGE(A1:A10)”

=>点击Enter键，即显示均值为“250.1”；

(3)选中A12单元格=>插入“ CONFIDENCE(0.05,3,10) ”

=>点击Enter键，即显示误差限为“1.859385”；

(4) μ 的置信水平为0.95的置信区间为

(250.1-1.859385, 250.1+1.859385)=(248.24, 251.96).

例4.3设新生儿体重(单位：克) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2未知. **现对某妇产医院的调查16名新生儿体重分别为：**

3200，3050，2600，3530，3840，4450，2900，4180，2150，2650，2750，3450，2830，3730，3620，2270，

求$\boldsymbol{\mu}$的置信度为95％的双侧置信区间。

解：查附表3得 $t_{0.025}(15)=2.1315,$

计算得，样本均值$\bar{x}=3200,$样本标准差$s=665.48.$

代入（7.4.3）得，$\boldsymbol{\mu}$的置信度为95％的双侧置信区间为（2845.4，3554.6）.

例4. 4 某种材料的长度(单位：**cm**) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知，现随机抽取10件产品进行测量，测得样本均值 $\overline{x}=5.78$,样本标准差 $s=0.92$, 求$\boldsymbol{\mu}$的置信水平为95％的单侧置信下限。

解：查附表3得 $t_{0.05}(9)=1.8331$,

因此，$\boldsymbol{\mu}$的置信水平为95％的单侧置信下限为

$$\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)=5.78-\frac{0.92}{\sqrt{10}}\times 1.8331=5.25.$$

（3）成对数据情形

例：为考察某种降压药的降压效果，测试了n个高血压病人在服药前后的血压（收缩压）分别为

$$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n).$$

由于个人体质的差异，$X_1,\cdots,X_n$不能看成来自同一个正态总体的样本，即$X_1,\cdots,X_n$是相互独立但不同分布的样本，$Y_1,\cdots,Y_n$也是. 另外对同一个个体，X_i和Y_i也是不独立的.

作差值 $D_i = X_i - Y_i$， $i=1,\cdots,n$,则取消了个体的差异，仅与降压药的作用有关，因此可以将$D_1,\cdots,D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，且相互独立.

μ_D的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1)/\sqrt{n}),$$

其中 $\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$， $S_D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2.$

例4.5 为评价某种训练方法是否能有效提高大学生的立定跳远成绩，在某大学随机选中16名学生，测量他们的立定跳远成绩（三次中最好成绩），经过三个月训练后再测量他们的成绩。实验数据如下：

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
训练前	189	193	230	210	198	215	234	234
训练后	220	195	234	231	225	228	238	240
数值差	-31	-2	-4	-21	-27	-13	-4	-6

编号	9	10	11	12	13	14	15	16
训练前	209	220	195	211	228	216	212	231
训练后	221	218	214	236	248	248	230	245
数值差	-12	2	-19	-25	-20	-32	-18	-14

假设训练前后成绩差$D\sim N(\mu_D,\sigma_D^2)$，求$\mu_D$的置信水平为95％的双侧置信区间.

解： 这是成对数据问题，由已知计算得$d_i = x_i - y_i$

$\bar{d} = -15.375$，$s_d = 10.54435$，查表得$t_{0.025}(15) = 2.1315$，

代入公式$\left(\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1) / \sqrt{n}\right)$中，

得所求置信区间为

（-20.9937， -9.7563）.

在EXCEL中的实现

本例的计算步骤如下：

（1） 将上述 d_i 数据值输入EXCEL 表中，设数据区域为A1到A16；

（2）在EXCEL 表中选择任一空白单元格

=>输入”=AVERAGE（A1:A16)”;

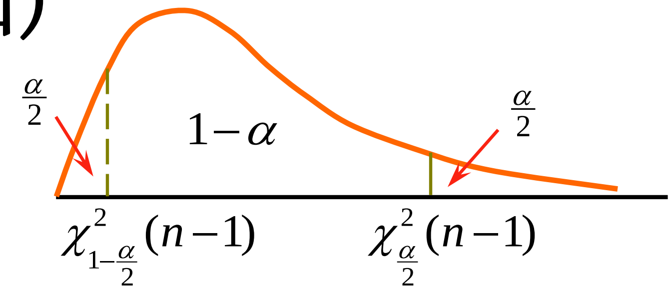
=>点击Enter键，即显示均值 $\bar{d}$为 “16”；

（3）在EXCEL 表中选择任一空白单元格 =>输入“=STDEV（A1:A16)” =>点击Enter键，即显示样本标准差 s_d 为“10.54”；

（4）在EXCEL 表中选择任一空白单元格 =>输入“=TINV（0.05,15）”; =>点击Enter键，即显 示分位数 $t_{0.025}(15)$ 为“2.13145”;

（5）代入公式 $\left(\bar{D} \pm S_D t_{\alpha/2}(n-1)\big/\sqrt{n}\right)$ 得所求区间估计为（-20.99， -9.76）

2. 方差σ^2的置信区间（设μ未知）



取枢轴量为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$有P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$即P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

置信区间为：$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

注：上述所求的区间估计不是最优解.

思考题:

方差σ^2的置信度1-α的置信上限是什么?

答案: $$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

例4. 6 某种材料的长度(单位：**cm**)$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知，现随机抽取10件产品进行测量，测得样本均值 $\bar{x}=5.78$,样本标准差 $s=0.92$, 求σ的置信水平为95%的双侧置信区间和单侧置信上限。

解：σ的置信水平为95%的双侧置信区间为

$$\left(\frac{3S}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(9)}},\ \frac{3S}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(9)}}\right)=(0.633,1.680);$$

查表得：$\chi^2_{0.025}(9)=19.0,\chi^2_{0.975}(9)=2.7;$

σ的置信水平为95%的单侧置信上限为

$$\frac{3S}{\sqrt{\chi^2_{0.95}(9)}}=\frac{3\times 0.92}{\sqrt{3.3}}=1.519.$$

(二)两个正态总体情形

$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$是分别来自$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$,

和$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$的两个独立样本，样本均值为

$\bar{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$，样本方差为$S_1^2$和$S_2^2$,

考虑参数$\mu_1 - \mu_2$和$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由 $\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$知，

可取枢轴量为 $$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

置信区间为： $$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$未知

由定理6.3.4知， $$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

置信区间为: $$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1+n_2-2\right)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

其中 $$S_w^2=\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2+\left(n_2-1\right)S_2^2}{n_1+n_2-2},S_w=\sqrt{S_w^2}$$

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知

当样本量n_1和n_2都充分大时(一般要>50),

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

则$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为: $\left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

对于有限小样本，可以证明

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} t(k),$$

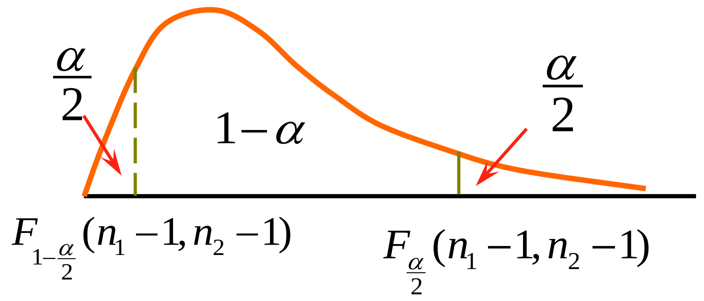
其中$k \approx \min(n_1-1, n_2-1)$，或更精确的

$$k=\frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2)^2}{n_1^2(n_1-1)}+\dfrac{(s_2^2)^2}{n_2^2(n_2-1)}}$$

这里s_1^2, s_2^2是S_1^2, S_2^2的样本值.

则$\mu_1-\mu_2$的近似置信区间为: $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间（设$\mu_1,\mu_2$未知）



由 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

有 $$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$$

即 $$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$$

置信区间为: $$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例4.7　两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径(毫米)如下:

甲机床　15.0　14.8　15.2　15.4　14.9　15.1
　　　　15.2　14.8

乙机床　15.2　15.0　14.8　15.1　14.6　14.8
　　　　15.1　14.5　15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y，且

$$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right).$$

(1) $\sigma_1 = 0.18, \sigma_2 = 0.24,$ 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(2) 若$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(3) 若$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知， 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间；

(4) 若μ_1, μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间.

解：$n_1=8,\ \ \bar{x}=15.05,\ \ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \ \bar{y}=14.9,\ \ S_2^2=0.0575$

(1) 当$\sigma_1=0.18, \sigma_2=0.24$时，$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

查表得：$z_{0.05}=1.645$，从而所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(2) 当$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知时，

$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

$$t_{0.05}\left(15\right) = 1.7531, S_w = 0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.486$$

从而所求区间为$\left(-0.044, 0.344\right)$

(3) 当$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知时，

$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y} \right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k) \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

其中自由度k取$\min(n_1 - 1, n_2 - 1) = 7$，

查表得$t_{0.05}(7) = 1.895$

从而所求区间为$(-0.058, 0.358)$

注：由(1)、（2）和（3）求得的三个区间都包含了0点，说明两机床生产的滚珠的平均直径没有显著差异。

(4) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为：

$$\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$$

由$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$(0.227,2.965)$.

注：因所求置信区间包含1，可以认为两个总体的方差之间没有显著差异。

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限(置信度$1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	W 的 分 布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\mu_U=\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\mu_L=\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\sigma_U^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\sigma_L^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$(\mu_1-\mu_2)_U=\bar{X}-\bar{Y}+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$ $(\mu_1-\mu_2)_L=\bar{X}-\bar{Y}-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_U=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_L=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

7.5非正态总体参数的区间估计

(一) 0-1分布参数的区间估计

设总体$X \sim B(1,\ p)$, 参数$p \in (0,1)$未知，$X_1,\cdots,X_n$是来自该总体的样本。当样本容量$n > 50$时，

由利用中心极限定理得$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$近似服从$N(0,1)$分布.

则有：$P\left\{-z_{\alpha/2} < \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$

即$P\left\{(n+z_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2)p+n\bar{X}^2<0\right\}\approx 1-\alpha$

令$a=n+z_{\alpha/2}^2$， $b=-(2n\bar{X}+z_{\alpha/2}^2)$， $c=n\bar{X}^2$

得参数p的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=:(p_1,\quad p_2)$$

或者，取$p(1-p)$的估计为$\hat{p}(1-\hat{p})$，

得参数p的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right).$$

(二)其他总体均值的区间估计

设总体$X \sim F(x)$,均值为μ,方差为σ^2，样本$X_1,\cdots,\ X_n$

当n充分大（一般$n > 50$）时，由中心极限定理知,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

均值μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right)$$

当σ^2未知时，以样本方差S^2代入,

得μ的置信水平为$1-\alpha$的近似置信区间为

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}S/\sqrt{n},\quad \bar{X}+z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}\right)$$