Notes

- 警惕积分中的「奇点」。

  eg. 设 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$，求 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}(\varphi(x))}{4+\varphi^2(x)}$。

  > 注意到 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处间断，我们得分区间 $(0,1)$，$(1,2)$ 单独计算。
  >
  > $\varphi(0)=-1$，$\varphi(1-0)=-\infty$，$\varphi(1+0)=+\infty$，$\varphi(2)=3$。
  >
  > 可见如果不考虑奇点，答案会出错。

- 弧长公式。

  直角坐标形式：$\int\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$；

  参数方程形式：$\begin{cases}x=\alpha(t)\\y=\beta(t)\end{cases}$，$\int\sqrt{(\alpha'(t))^2+(\beta'(t))^2}\mathrm{d}t$；

  极坐标形式：$\int\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$。

- Stolz 定理。

  设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 为数列，其中 $\{y_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$。

- 曲率半径。

  曲率为

$$K=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}$$
$$R=\frac{1}{K}$$

  曲率圆圆心坐标 (x_0,y_0) 为

$$x_0=x-\frac{f'(x)[1+(f'(x))^2]}{f''(x)}$$
$$y_0=f(x)+\frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$$

- Wallis 公式
  - (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} & n\text{ is odd}\\\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{ is even}\end{cases}$；
  - (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。留意「双阶乘」，联想到 Wallis 公式即可。
- 反常积分（aka. 广义积分）：① 无限区间；② 无界函数（aka. 瑕积分，注意**瑕点**）。

- 伽马函数（Γ）：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$，有递推式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$。当 $s>0$ 时，$\Gamma(s)$ 收敛。

  $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$。记 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 为泊松积分。
- p - 积分：$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty & p\le 1\\ \frac{1}{p-1} & p>1\end{cases}$。

妙计

「P1」证明：$\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

> 朴素方法是三角换元，LHS 为 $\cos(\sin u)$，RHS 为 $\sin(\cos u)$，显然 LHS > RHS。
>
> 存在一步到位的方法。注意到对于 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，有 $\sin x\le x$，于是：
>
> $$\begin{aligned}\text{LHS}&>\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}\mathrm{d}x=1\\ \text{RHS}&<\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=1\end{aligned}$$

「P2」计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$。

> ★ 遇到 $(0,+\infty)$，可尝试倒变换，实现区间再现。
>
> 考虑区间再现，换元 $u=\frac{1}{x}$，则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{u^\alpha\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$。因此 $2I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$。

「P3」计算 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

> ★ 遇到开根 / 乘积，通常可以考虑 $\ln$。
>
> 由 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}}$，$\ln I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$，因此 $I=\frac{1}{e}$。
>
> 当然也可以直接用 Stirling 公式秒杀。

「P4 · 2021 期末考加强版」设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，当 $x\in[0,1]$ 时，$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\ge\frac{1-x^3}{2}$，证明：

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x\ge\frac{9}{20}$$

> ★ 尝试构造 f 的原函数，即 f 的积分。
>
> 两边求导，猜出 $f(x)\equiv\frac{3x^2}{2}$ 时取等，根据此构造 $F(x)=\int_x^1(f(t)-\frac{3t^2}{2})\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=-f(x)+\frac{3x^2}{2}$。
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\frac{3x^2}{2}-F'(x)\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{9x^4}{4}\mathrm{d}x-\int_0^1 3x^2F'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(F'(x))^2\mathrm{d}x\\&\ge\frac{9}{20}-\int_0^1 3x^2\mathrm{d}(F(x))\\&=\frac{9}{20}-(3x^2F(x))\mid_0^1+\int_0^1 6xF(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
>
> 由于 $F(1)=0$，且对 $\forall x\in[0,1]$，有 $F(x)\ge 0$，因此原式 $\ge\frac{9}{20}$。

「P5 · 2022 期末考」已知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增且可导，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(0)\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(1)\int_{\xi}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

> ★ 同样，我们可以尝试构造 f 的原函数，毕竟有 $g'(x)$，可以做分部积分。
>
> 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}\left(F(x)\right)\\&=g(x)F(x)|_0^1-\int_0^1 F(x)g'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
>
> 由于 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由积分第一中值定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^1 F(x)g'(x)\mathrm{d}x=F(\xi)\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x$。因此：
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x&=g(1)\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t\int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t\\&=g(1)\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-(g(1)-g(0))\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t\\&=g(0)\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(1)\int_{\xi}^1 f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$