chapter1

事件的运算法则，在后续的古典概型计算概率常常用到:

$$
\begin{aligned}
&A\cup B=B\cup A, AB=BA && (5)\\
&(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC) && (6)\\
&(A\cup B)\cap C=AC\cup BC,(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) && (7)\\
&\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i},\cap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{\cup_{i=1}^{n}A_i} && (8)
\end{aligned}
$$

其中第四条被称为`De Morgan`律，证明方法为先后证明两集合互为子集，同时两个等式只要证明了一个，变换可得另一个等式。

证明第一个等式:

$$
\begin{gathered}
\forall x\in\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\exists k\leq n,x\in\overline{A_k}\\
\therefore x\in\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i},\text{那么}\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\subset\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i}\\
\text{换个方向，}x\in\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i},\text{于是我们有},x\notin\cap_{i=1}^{n}A_i,\exists k\leq n,x\notin A_k,x\in\overline{A_k},\text{那么显然},x\in\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\\
\therefore\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i}\subset\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\ \therefore\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i}=\cup_{i=1}^{n}\overline{A_i}
\end{gathered}
$$

另一个比较重要的知识点是多还少补定理，通过归纳法证明，`n=2`的结论是我们熟识的，后面的题目也会用到:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})$$

另一个我觉得比较重要的是，组合计算的*分离*:

Define:

将 n 个不同的元素，分离到 k 个不同的集合里(e.g 不同的盒子)，这 k 个集合分别装了 $n_1,n_2,\ldots,n_k$个元素

共有 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

独立

若事件A和事件B独立，那么$\overline{A}$,$\overline{B}$也相互独立,独立容易和事件的交并补关系搞混，实际上两个啥关系没有。

独立的意思是时候A事件发生不会泄露B事件的信息，因此A,B独立，$\overline{A}$,$\overline{B}$也相互独立就比较好理解了。

Exercise

以下题目来自作业题:

Tag:分配类问题

T11.

如果从选题目分配给人角度，难以求解，如果先选20个人分配到各异的题目，剩下n-20随机分配，会导致重复。

记A_i表示 i 题被分配，$P(A_1A_2\ldots A_{20})=P(\overline{\cap_{i=1}^{2}0\overline{A_i}})=1-P(\cup_{i=1}^{20}\overline{A_i})$,然后采用多还少补定理计算，

从反面来讲，不被分配是好计算的,假设有 k 个题目不被分配，共有$|\overline{A_{i_1}}\ \overline{A_{i_2}}\dots\overline{A_{i_k}}| = \binom{20}{k}(20-k)^n$个基本事件。

$$P = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k-1}\binom{20}{k}(20-k)^n}{20^n}$$

T30.记事件A_i为第 i 人拿到了自己的枪。

$$P = \binom{n}{k}P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\dots\overline{A_{i_n}})$$

记B_i为n-k人里的第 i 人拿错了枪：

$|A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\dots\overline{A_{i_n}}| = |\{n-k\text{个人拿}n-k\text{个枪，结果全拿错了}\}| = |\cap_{i=1}^{n-k}B_i| = (n-k)! - |\cup_{i=1}^{n-k}\overline{B_i}|$

计算得$|A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{A_{i_{k+1}}}\dots\overline{A_{i_n}}| = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}(n-k-i)!$

$$P = \frac{\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}(n-k-i)!}{n!}$$

Tag:几何概型计算

T16.~~感觉助教做错了，问了下gemini 应该是$\frac{1}{4}$，助教写了$\frac{3}{8}$,面积算错了。~~

小丑了🤡，以下是错误做法:

设AC = x,CD = y, DB = 1-x-y，x,y满足的约束:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < 1-x-y < 1 \end{cases}$$

为三角形时满足的方程:

$$\begin{cases} x+y > 1-x-y \\ 1-x-y+x > y \\ 1-x-y+y > x \end{cases}$$

计算下面积比例为$\frac{1}{4}$

以下是正确做法,注意这里C，D是不知道顺序的，意味着AC，BD可能重叠

设$x_C = x, x_D = y$,$AC = x, CD = |x-y|, DB = 1-y$，$x, y$满足的约束:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

为三角形时满足的方程:

$$\begin{cases} x+1-y > |x-y| \\ x+|x-y| > 1-y \\ 1-y+|x-y| > x \end{cases}$$

计算面积比例为$\frac{3}{8}$

Tag:杂项

T74. 反射原理:一个比较孤立的知识点，简单理解就是数形结合，然后用反射的几何关系，进行组合事件的对应，进而简化求解。

(1)看成在二维平面，从原点出发，得到甲票走(1,1)，乙票走(1,-1)，形成了一个折线图

$$\text{甲始终得票超过乙} \Leftrightarrow \text{折线图不碰到} y=0$$

所有可能情况为$\binom{m+n}{m}$

碰到$y=0$有两种可能，第一步是乙票，走了(1,-1)，那么必定碰到$y=0$,另一种可能是第一步是甲票,走了(1，1),我们可以建立一个反射关系，第一步是甲票的折线图，和$y=0$交点记为$(x,0)$,我们将$0\to x$部分的折线反射，$x\to m+n$这段折线不变，发现和第一步走乙票的事件可能是一一对应的(两个互为子集，都可以通过反射互相对应)，所以组合事件数相等，都为$\binom{m+n-1}{n-1}$。

$$P=\frac{\binom{m+n}{m}-2\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{m-n}{m+n}$$

(2)这里做法一样，从(0,0)出发碰到$y=-1$,我们记交点为$(x,-1)$，反射$0\to x$部分，后半部分不变，从$(0,0)$出发变成了从$(0,-2)$出发

$$\text{甲始终得票不低于乙} \Leftrightarrow \text{折线图不碰到} y=-1$$

最终达到了$(m+n,m-n)$,注意这里抽象层面的往上走的次数和往下走的次数改变了，这是因为反射改变了前半部分方向。

$$\begin{cases}x+y=m+n\\x-y=m-n+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=m+1\\y=n-1\end{cases}$$

$$P=\frac{\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{m+1-n}{m+1}$$

Test:来自概率论3.5第一次小测 - CC98论坛

(1)将 m 个不同的小球等可能地放入 n 个不同的盒子，m > n。求无空盒出现的概率。

记事件A_i为i盒非空，

$|\cap_{i=1}^n A_i|=n^m-|\cup_{i=1}^n\overline{A_i}|=n^m-\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$

$$P=\frac{\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m}{n^m}$$

---

(2)设 $B_1,B_2,\ldots,B_n,\ldots$ 为一列相互独立的事件（即它们中任意有限个都是相互独立的），$P(B_n)=p_n,0<p_n<1,\sum_{n=1}^\infty p_n=\infty$。证明:

$$P\left(\bigcup_{n=m}^\infty \mathring{B}_n\right)=1,\quad \forall m.$$

$$P\left(\bigcup_{n=m}^\infty B_n\right)=1-P(\bigcap_{n=m}^\infty\overline{B_n})=1-\Pi_{n=m}^\infty(1-p_n),\text{这里不能武断的下结论，}\Pi_{n=m}^\infty(1-p_n)=0$$

我们需要利用$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$,$1 - p_n \leq e^{-p_n}$,$\Pi_{n=m}^{\infty}(1 - p_n) \leq e^{-\sum_{n=m}^{\infty} p_n} = 0$

得证.

---

(3)考虑进行 n 次独立试验，第 i 次试验成功的概率为 $\frac{1}{2i+1}$。
令 P_n 表示总的成功次数为奇数的概率。

1. 导出用 P_{n-1} 表示 P_n 的递推公式；
2. 导出 P_n 的表达式。

写成一个递归的形式，比较简单。

$$P_n = \frac{2n-1}{2n+1} P_{n-1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$P_n = \frac{n}{2n+1}$$

---

(4)假设 E, F 为任意两个事件，$P(F) > 0$。证明:

$$P(E \mid E \cup F) \geq P(E \mid F).$$

没想出简洁的方法，可以用n=2的多用少补定理来完成。

$$P(E \mid E \cup F) = \frac{P(E \cap (E \cup F))}{P(E \cup F)} = \frac{P(E)}{P(E \cup F)}$$

$$P(E \mid F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$\Leftrightarrow P(E)P(F) \geq P(E \cup F)P(EF)$$

而$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(EF) = P$,不妨设$P(E) \leq P(F)$,显然，$P(EF) \leq P(E)$

$$\Leftrightarrow P(E)(P - P(E)) \geq P(EF)(P - P(EF))$$

这个是一个同构函数，因此得证。

$$\boxed{P(E \mid E \cup F) \geq P(E \mid F)}$$

一些期末题目或者复习题

（1）2024-2025概率论H第一题

A 和 B 互不相容，B 和 C 互相独立，$A \subset C$，已知 $P(\bar{A}C) = P(BC) = 0.2$，$P(A \cup (B\bar{C})) = 0.5$，求 $P(A), P(B), P(C)$

由于A和B互不相容，那么A和$B\overline{C}$互不相容，$\therefore P(A \cup (B\overline{C})) = P(A) + P(B\overline{C}) = P(A) + P(B)P(\overline{C})$

因为$A \subset C$,$P(\overline{A}C) = P(C) - P(A)$,且由独立性知，$P(BC) = P(B)P(C) = 0.2$

求解这三个方程可得，$P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(C) = 0.4$或者$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(C) = 0.5$

（2）24-25秋冬概率论(H)期末卷

20个球1-20编号随机分给20个1-20学号的同学.求恰好有3人拿到自己对应编号的球的概率?

和前面题目分配类一样做法，不过是给了k=3罢了，不写过程哩。

参考的一些复习资源

24-25秋冬概率论(H)回忆卷&期末复习

2024-2025秋冬概率论(3学分)回忆卷

概率论3.5第一次小测

概率论资料整理（tag：概率论H）