数学分析 quiz 1 补天

单选

> 下列无穷级数中收敛的是（A）

- A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{1/n}}{\sqrt{n}}$

  狄利克雷判别法：$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$（交错级数）收敛，$3^{1/n}$ 递减趋于 0，收敛。

- B. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sin \frac{1}{\ln n}$

  比值判别法：$\sin \frac{1}{\ln n} \sim \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$，发散。

- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

  法一. 比值判别法：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+1/n}}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 1$，发散。

  法二. 比较判别法：$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n \ln n}$（因为 $n^{1/n} < \ln n$，$n \to \infty$），发散。

- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

  比值判别法：奇偶两项 $\frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \sim -\frac{2}{n}$（$n \to \infty$），发散。

Notes

- 正项级数

比较判别法，比值判别法，根式判别法。

- 交错级数

Leibniz 判别法：单调递减趋于 0。

- 一般级数

Abel 判别法：单调有界，部分和收敛；

Dirichlet 判别法：单调趋于 0，部分和有界；

> 已知正项级数 $\sum a_n$ 发散，则下列级数中必定发散的是（C）

- A. $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$

  $a_n = n^2$，$\sim \frac{1}{n^2}$，收敛。

- B. $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

  $a_n = \frac{1}{n}$，$\sim \frac{1}{n^2}$，收敛。

- ☆ C. $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$

  【习题课讲过】假设收敛，记 $b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \Rightarrow a_n = \frac{b_n}{1-b_n}$。

  因为 $\sum b_n$ 收敛，故 $b_n \to 0$，因此 $\exists N, \forall n > N, a_n < 2b_n$。

于是 $\sum a_n$ 收敛，矛盾！因此发散。

- ☆ D. $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$

  构造 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & \text{n是完全平方数}\\ \frac{1}{n^2} & \text{n不是完全平方数}\end{cases}$。

  当 n 是完全平方数，$=\frac{1}{\sqrt{n}+n}=\frac{1}{k+k^2}$，$k\in Z$，收敛；

  当 n 不是完全平方数，$=\frac{1}{n+n^2}$，收敛。

  因此整体收敛。

Notes. 待定系数 $a_n=n^{\alpha}$，搞一个 α 举反例。以上 4 个都可能发散（$a_n=1$）。

> 下列命题中正确的有（C）

- A. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum a_n^3$ 收敛。

  $a_{3n+1}=a_{3n+2}=\frac{1}{n^{1/3}}, a_{3n+3}=-\frac{2}{n^{1/3}}$，$\sum a_n^3$ 发散。

  反命题也不成立，$a_n=\frac{1}{n}$，$\sum a_n$ 发散。
- B. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum a_n^2$ 收敛。

  $a_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}$，$a_{2n+2}=-\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum a_n^2$ 发散。

  反命题也不成立，$a_n=\frac{1}{n}$，$\sum a_n$ 发散。
- ☆ C. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛，且 $\{a_n\}$ 单调，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$。

  说明 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0。对 $\forall\varepsilon>0$，由柯西准则 $\exists N$，$\forall n>N$，

  $$\varepsilon>a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\geq na_{2n}$$

  因此 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$。
- D. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum a_{2n}$ 与 $\sum a_{2n-1}$ 也收敛。

  同 B，错误。

> 下列函数列中一致收敛的是（B）

- A. $f_n(x)=n\sin\frac{x}{n}$，$n\in N$，$x\in R$

  $f(x)=x$，上确界判别法：

  $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in R}\{|x-n\sin\frac{x}{n}|\}=+\infty$（取 $x=\frac{n\pi}{2}$），非一致收敛。
- B. $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$，$n\in N$，$x\in R$

  $f(x)=0$，上确界判别法：

  $|f_n(x)|=|\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}|\leq\frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in R}\{|f_n(x)|\}=0$，一致收敛。
- C. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$，$n\in N$，$x\in R$

  $f(x)=0$，上确界判别法：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in R}\{|f_n(x)|\}\geq\frac{1}{2}$（取 $x=\frac{1}{n}$），非一致收敛。

- D. $f_n(x)=\frac{x}{n}$，$n\in N$，$x\in R$

  显然非一致收敛。

> 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径是 1，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^na_n$（发散）
>
> 发散 / 条件收敛 / 绝对收敛 / 无法确定

代入 $x=3$，发散。

Notes. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$，$R=\frac{1}{\rho}$（收敛半径）。

> 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$，记 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n\sin n\pi x$，则：
>
> $S(0)=0$，$S(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$。

奇延拓，$b_n=2\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\cdot\sin n\pi x dx$，$S(0)$ 显然 $=0$。$S(\frac{3}{2})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_{2n-1}(-1)^n$。

$b_1=\frac{1}{2}$，$b_{2n-1}=0$。因此 $S(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$。

多选

> ### 级数
>
> 下述说法正确的有（AC）

- A. 若级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 收敛，且 $a_n\leq u_n\leq b_n$，那么 $\sum u_n$ 也收敛。

  柯西收敛准则：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N,p\geq 1$，有

  $$-\varepsilon\leq a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\leq u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}\leq b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}\leq\varepsilon$$

  因此收敛。

- B. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，且 $|b_n|\leq|a_n|$，那么 $\sum b_n$ 也收敛。

  搞个交错级数，$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，$b_n=\frac{1}{n}$，$\sum b_n$ 发散。

- C. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，那么 $\sum b_n$ 收敛。

  正项级数的比值判别法，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=C$ 为常数，都收敛。

- D. 若 $\sum a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，那么 $\sum b_n$ 收敛。

  ☆ 不是正项级数，就会出问题。

  构造 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$\sum b_n$ 发散。

> **函数列级数**
>
> 下列陈述错误的有（ABCD）

- A. 若 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛。

  搞个条件收敛的经典例子 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\cdots$，即 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，并非绝对收敛。
- B. 若 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

  构造一：$u_n(x)=\begin{cases}x^n & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$，$S(x)-S_n(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\{\frac{x^{n+1}}{1-x}\}=+\infty$$

  取 $x=1-\frac{1}{n}$。

  构造二：$u_n(x)=x^n-x^{n+1}$，$S(x)-S_n(x)=\begin{cases}x^{n+1} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1)}\{x^{n+1}\}=1$$

  因此并非一致收敛。
- C. 若函数列 $\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$ 在 R 上一致收敛，则 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 R 上也一致收敛。

  构造 $f_n(x)=g_n(x)=x+\frac{1}{n}$，则 $f(x)=g(x)=x$，显然两者都一致收敛。

  而 $f_n(x)g_n(x)=x^2+\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}$，$f(x)g(x)=x^2$，并非一致收敛。
- D. 设 $a_n>0$，若级数 $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，则级数 $\sum a_n$ 收敛。

  奇偶分别 $\frac{1}{n^5},n$ 即可，$\sum a_n$ 发散。

Notes. 绝对收敛和一致收敛没有直接联系（两者不能互推）

- ☆ 构造多考虑正负交替、奇偶交替。

> 已知 $\forall x\in(-1,1)$，有 $\frac{1}{1+x+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$，则（ABCD）
>
> A. $a_4=-1$
>
> B. $a_2=0$

> C. $a_{2022}=1$
>
> D. $a_6=1$

$=\frac{1-x}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}$。