初赛11月，决赛4月．中国数学会．

2025年浙江大学非数类数学竞赛讲座

非数初赛：高数，常微分．

决赛：80'+线代20'

训练：保前8道题做对．剩2题难，练(分析味重)

步骤写清楚

去年开始电脑阅卷，75分入围决赛．

~50 一等．

决赛：四川大学，成都理工大学．

1. 柯西收敛准则．(数列)

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$\forall p\in N^*$，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$．

2. 泰勒展开． $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$．Peano余项．

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$．

3. 夹逼放缩／转换定积分．

eg. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$

当然用STOLZ也行．

4. Stolz定理．

① $\frac{0}{0}$型：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$．$\{a_n\}$严格单调递增．

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=A$

② $\frac{*}{\infty}$型：$\{a_n\}$是严格单调递增的无穷大量

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=A$.

5. 导数：Darboux定理.（利器）.

设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f_+'(a)\,f_-'(b)<0$.
则$\exists\,\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$.

※导函数未必连续，但存在介值性.

6. 中值定理.

设$f(x)$是$[-1,1]$上二阶可导的奇函数，
证$\exists\,\xi\in(-1,1)$，$f''(\xi)-f'(\xi)+f(1)=0$.

设 $g(x)=f'(x)-f(x)+f(1)x$，
则 $g'(x)=f''(x)-f'(x)+f(1)$.

$$\begin{cases} g(-1)=f'(-1)-f(-1)-f(1)=f'(-1) \\ g(1)=f'(1)-f(1)+f(1)=f'(1) \end{cases}$$

⇒ 罗尔定理，$\exists\,\xi\in(-1,1)$，$g'(\xi)=0$.

7. 综合：

eg. $\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx<2\pi e^{\frac{1}{4}}$.

由于 $e^{\sin x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x)^n}{n!}$

$\therefore\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^n x}{n!}dx$

Wallis定理

$=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^n n!)^2}=2\pi e^{\frac{1}{4}}$.

25.11.7

第十六届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(非数学 A 类, 2024 年)

86

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业:

座位号:

考场号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x =$ $\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$.

(2) 设 $D: x^2+y^2 \leqslant r^2$，其中 $r>0$. 则

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\iint_D (\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^4} = \frac{\pi}{2}.$$

(3) 已知函数 $z=f(xy,\mathrm{e}^{x+y})$, 且 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_1'+xyf_{11}''+e^{x+y}(x+y)f_{12}''+e^{x+y}f_2'+e^{2x+2y}f_{22}''$$

(4) 直线 $L: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的单位方向向量为 $\pm\left(\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{2}{\sqrt{21}},-\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$　(得到一个即可)

(5) 设 L 为圆周 $x^2+y^2=9$，取逆时针方向，则第二型曲线积分

$$\int_L \frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y = \pi.$$

六. -14.

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 求微分方程 $(x^3-y^2)\mathrm{d}x+(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ k, & x=0.\end{cases}$$

(1) 求常数 k 的值，使得$f(x)$在区间[0,1]上连续；

(2) 对(1)中 k 的值，求函数 $f(x)$ 的最小值λ 与最大值μ.

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分) 求曲面积分 $I=\iint\limits_S(x^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$是 $(-\infty,+\infty)$上具有连续导数的非负函数，且存在 $M>0$ 使得对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|$. 证明：对于任意实数 x, 恒有 $(f'(x))^2\leqslant 2Mf(x)$.

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2+k^2}$ 收敛, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

二. 令 $u=y^2$，则 $(x^3-u)dx+(x^2+x)\cdot\frac{du}{2}=0$

$$\therefore \frac{du}{dx}\cdot\frac{x^2+x}{2}+x^3-u=0.$$

即 $u'-\frac{2}{x^2+x}u=-\frac{2x^2}{x+1}$

$$\therefore u=e^{\int\frac{2}{x^2+x}dx}\left(\int-\frac{2x^2}{x+1}e^{\int-\frac{2}{x^2+x}dx}dx+C\right)$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)^2}\left(\int-\frac{2x^2}{x+1}\frac{(x+1)^2}{x^2}dx+C\right)$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)^2}\left(-x^2-2x+C\right)$$

$\therefore$ 通解为 $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2y^2+(x+1)^2=C'$.

三. (1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}, & 0<x\le 1.\\ k, & x=0\end{cases}$

显然 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上连续　$f(0)=k$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot x}=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$.

(2) $f(0)=\frac{1}{2}$. 对于 $x\in(0,1)$，有 $f'(x)=\frac{-1}{\ln^2(1+x)\,(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$

令分子为 $g(x)$，$g'(x)=\ln^2(1+x)+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}\cdot(1+x)-2x$

$$=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2\ln(1+x)+2-2-2x}{1+x}<0.$$

$\therefore g'(x)<g'(0)=0$，故 $g(x)<g(0)=0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)\downarrow$.

$\therefore \mu=\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{1}{\ln2}-1$

四. 由高斯公式. 记 S' 为 $x^2+y^2\le R^2, z=0$.

则 $\iint_{S+S'}(x^2-x)dydz+(y^2-y)dzdx+(z^2-z)dxdy$　而 $\iint_{S'}\cdots=0$

$$=\iiint_\Omega(2x-1+2y-1+2z-1)dxdydz.$$

$$=\iiint_\Omega(2z-3)dxdydz=\int_0^R(2z-3)\pi(R^2-z^2)dz=\pi\left(\frac{R^4}{2}-2R^3\right)$$

$\therefore I=\pi\left(\frac{R^4}{2}-2R^3\right)$.

五. $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)\geq 0$.

故 $\forall \Delta x$，有 $f(x+\Delta x)\geq 0$，因此

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\int_0^{\Delta x}f'(x+t)dt$$

$$=f(x)+\Delta x f'(x)+\int_0^{\Delta x}[f'(x+t)-f'(x)]dt \geq 0.$$

$$\therefore -\Delta x f'(x)\leq f(x)+\int_0^{\Delta x}[f'(x+t)-f'(x)]dt$$

$$\leq f(x)+\left|\int_0^{\Delta x}Mt\,dt\right|=f(x)+M\cdot\frac{(\Delta x)^2}{2}$$

由于 Δx 的任意性，必 $\exists \Delta x$，使得 $-\Delta x f'(x)\geq 0$.

两边同时除以 Δx，有 $|f'(x)|\leq \dfrac{f(x)}{\Delta x}+M\cdot\dfrac{\Delta x}{2}$.

故取 $|\Delta x|=\sqrt{\dfrac{2f(x)}{M}}$，即得 $(f'(x))^2\leq 2Mf(x)$.

↑

显然是可以取到的.

六. 不会. -14

也不打算会.

25.11.8

第十五届全国大学生数学竞赛初赛

94

（非数学 A 类，2023）

一、（本题 30 分，每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$ $-\frac{1}{3}$.

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $f_2'-4xyf_{11}''+(2x^2-2y^2)f_{12}''+xyf_{22}''$

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，则 $f^{(n)}(0)=$ $n!\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ $f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

5. 设曲面 Σ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dS=$ $125\sqrt{2}\pi$.

$\iint\limits_{D}\sqrt{2}dxdy(x+5)=5\sqrt{2}.25\pi$

$dS=\sqrt{2}dxdy.$

二、（本题 14 分）

-6

解方程 $(x^2+y^2+3)\dfrac{dy}{dx}=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$.

三、（本题 14 分）

设 Σ_1 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1\,(y>0)$ 相切的圆锥面，求曲面 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积. π

四、（本题 14 分）

倒变换.

设 $I_n=n\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{1+x^n}$，其中 $a>1$．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$. $\ln 2$

五、（本题 14 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$．求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx\leqslant 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\,dx,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$. $f(x)\equiv 0.$

六、（本题 14 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=\frac{1}{3}$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}$，$n\geqslant 0$．证明：无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ 收敛，并求其和．$\frac{1}{2}$

CMC 2023 初赛.

二. 令 $u=x^2$, 则 $(u+y^2+3)\dfrac{dy}{du}=2y-\dfrac{u}{y}=\dfrac{2y^2-u}{y}$

令 $v=y^2$, 则 $(u+v+3)\dfrac{dv}{du}=4y^2-2u=4v-2u$

$\therefore \dfrac{dv}{du}=\dfrac{4v-2u}{u+v+3}$ ~~令~~ $\cancel{t=\dfrac{v+1}{u+2}}$ ~~则~~ $\cancel{(2+u)\dfrac{dt}{du}=\dfrac{4t-2}{1+t+3/u}\ \dfrac{4t-2}{1+t}}$

$\cancel{\therefore \dfrac{du}{2+u}=\dfrac{1+t}{4t-2}dt \Rightarrow \ln(2+u)=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{3}{2}\ln\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right)+C\ ?}$

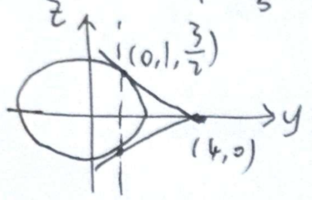
不是标准的形式. 记 $t=\dfrac{v+1}{u+2}$, $p=u+2$, $q=v+1$. $\cancel{dt=\dfrac{dq}{p}-\dfrac{q}{p^2}dp}$

则 $\dfrac{dq}{dp}=\dfrac{4q-2p}{p+q} \Rightarrow t+p\dfrac{dt}{dp}=\dfrac{4t-2}{t+1} \Rightarrow \dfrac{dp}{p}=\dfrac{(1+t)dt}{-t^2+3t-2}$ $dq=pdt+tdp$.

$\therefore \ln p=\ln\dfrac{(t-1)^2}{(t-2)^3}+C$ $\therefore p=\dfrac{(t-1)^2}{(t-2)^3}\cdot C'$

即 $(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2$

三. 令 $x=0$. $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1$.



$\dfrac{4y}{4}=1 \Rightarrow y=1$

切点 $(0,1,\dfrac{3}{2})$.

$V_{锥}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\pi\cdot\dfrac{9}{4}\right)\cdot 3=\dfrac{9\pi}{4}$.

$V_{椭}=\displaystyle\int_1^2 \pi\left(3-\dfrac{3}{4}y^2\right)dy=\dfrac{5\pi}{4}$

$\therefore V=\pi$.

四. $I_n=n\displaystyle\int_1^a\dfrac{dx}{1+x^n}$. $[\ln(1+x^n)]'=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$

用倒变换, 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $I_n=n\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^1\left(\dfrac{t^{n-2}}{1+t^n}\right)dt=\int_{\frac{1}{a}}^1\dfrac{d\ln(1+t^n)}{t}$

$=\dfrac{\ln(1+t^n)}{t}\Big|_{\frac{1}{a}}^1-\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^1\ln(1+t^n)\,d\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

$=\ln 2-a\ln\left(1+\dfrac{1}{a^n}\right)+\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^1\dfrac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}a\ln\left(1+\dfrac{1}{a^n}\right)=0$, $0\le\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^1\dfrac{\ln(1+t^n)}{t^2}dt\le\int_{\frac{1}{a}}^1 t^{n-2}dt=\dfrac{1-\frac{1}{a^{n-1}}}{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{a^{n-1}}}{n-1}=0$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}I_n=0-0+\ln 2=\ln 2$.

五. $\int_0^1 (1-x)^2(f'(x))^2dx \cdot \int_0^1 (f(x))^2dx \geqslant \left(\int_0^1 (1-x)f'(x)f(x)dx\right)^2$

而 $\int_0^1 (1-x)f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,d(f(x))^2$

$= \frac{1}{2}\left[(1-x)(f(x))^2\Big|_0^1 + \int_0^1 (f(x))^2dx\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x))^2dx$

$\therefore \int_0^1 (1-x)^2(f'(x))^2dx \geqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (f(x))^2dx$. #

取等条件: $\frac{(1-x)f'(x)}{f(x)}$ 为定值

即 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{C}{1-x}$

$(\ln f(x))' = \frac{C}{1-x} \Rightarrow \ln f(x) = C'\ln(1-x)$

$f(x) = C_1(1-x)^{C_2}$.

而 $f(0)=0$, 故 $C_1=0$.

$\therefore f(x)\equiv 0$ 时取等.

六. $x_0=\frac{1}{3}, x_1=\frac{1}{7}, x_2=\frac{1}{43}$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

令 $a_n=\frac{1}{x_n}$, 则 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1-a_{n-1}+a_{n-1}^2} \Rightarrow a_n = 1-a_{n-1}+a_{n-1}^2$

显然 $x_n < \frac{1}{n(n+1)}$, 而 $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛 ✓.
$(n\geqslant 1)$.

$(x_nx_{n+1}-x_n-x_{n+1}+1)x_n = x_n - x_{n+1}$

$\Rightarrow x_n = \frac{x_n-x_{n+1}}{(x_n-1)(x_{n+1}-1)} = \frac{1}{x_{n+1}-1} - \frac{1}{x_n-1}$

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}-1}-\frac{1}{x_n-1}\right) = -1-\frac{1}{x_0-1} = \frac{1}{2}$.

25.11.8

第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题

（非数学类，2022 年）

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

2、设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的间断点为 $x=$ $\underline{\ 1\ }$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n=\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{3}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}$

3、 极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$ $\underline{\ 2\ }$.

4、 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的通解为 $\underline{\ln x=\cos y(x+C)}$

5、记 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x+y\le\dfrac{\pi}{2},0\le x-y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，则 $\iint\limits_D y\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\ \dfrac{4\pi-\pi^2}{32}\ }$

二、(14 分) 记向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 α，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$，$0\le\lambda\le 1$.

（1）问当 λ 为何值时，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取得最小值；

（2）设（1）中的 λ 满足 $0<\lambda<\dfrac{1}{5}$，求夹角 α 的取值范围.

三、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge 0$，$f'(x)\le 0$，$f''(x)\le f(x)$，证明：$f'(0)\ge-\sqrt{2}$.

四、(14 分) 证明：对任意正整数 n，恒有：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x\le\left(\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{1}{8}\right)\pi^2$.

五、(14 分) 设 $z=f(x,y)$ 是区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上的可微函数，$f(0,0)=0$，且 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}$.

六、(14 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

以下内容是我大一备赛时编辑的，当时才疏学浅，仅供参考

6 第十五届全国大学生数学竞赛初赛（非数学 A, B 类）✓

CMC 2023 非数 A, 2

设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ____。

解答. 由于二阶偏导连续，因此 u,v 的偏导顺序不影响结果。
理清 $z\to(u,v)\to(x,y)$ 的关系，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，于是:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial v}\\&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+0+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\\&=(f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x)\cdot(2x)+(f_{22}''\cdot x+f_{21}''\cdot(-2y))\cdot y+f_2'\\&=\boxed{-4xyf_{11}''+\left(2x^2-2y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'}\end{aligned}$$

备注. 多元复合函数的求导法则

CMC 2023 非数 A, 5

设曲面 $\sum$ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分，则 $\iint_{\sum}(x+y+z)\mathrm{d}S=$ ____。

解答.

空间有界曲面 $\sum$ 的面积计算

设空间有界曲面 $\sum$ 满足 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in\mathrm{D}_{x,y}$（其中 $\mathrm{D}_{x,y}$ 是 $\sum$ 在 xOy 面上的投影），$z(x,y)$ 在 $\mathrm{D}_{x,y}$ 上具有连续的偏导。则 $S=\iint_{\mathrm{D}_{x,y}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

证明. 设 $\sum$ 上一点 $P(x,y,z)$，作点 P 处的切平面，易知 $\vec{n}=(-z_x',-z_y',1)$。
它与 xOy 平面的夹角 θ 满足 $|\cos\theta|=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$，$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\theta|}=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。 □

对于本题，$z=5-y$，$\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。
因此 $\iint_{\sum}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint_{\mathrm{D}_{x,y}}\sqrt{2}(x+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\sqrt{2}\iint_{\mathrm{D}_{x,y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\boxed{125\sqrt{2}}$。
备注. 对面积的曲面积分的基本概念与计算法

CMC 2023 非数 A, 二

解方程 $(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\frac{x^2}{y})$。

解答. 观察到出现很多遍 x^2,y^2，将其换元为 $u=x^2,v=y^2$:

$$\frac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\frac{2(2y^2-x^2)}{x^2+y^2+3}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2(2v-u)}{u+v+3}$$

将其齐次化，施 $\begin{cases}2v-u=0\\u+v+3=0\end{cases} \to \begin{cases}u=-2\\v=-1\end{cases}$，因此换元为 $p=u+2, q=v+1$，则:

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{2(2q-p)}{p+q}$$

换元 $t=\frac{q}{p}$，则 $\mathrm{d}q=p\mathrm{d}t+t\mathrm{d}p$，于是:

$$\Rightarrow t+p\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p}=\frac{2(2t-1)}{1+t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{(1+t)\mathrm{d}t}{t^2-3t+2} \Rightarrow p(t-2)^3=C(t-1)^2$$

回代得到 $\boxed{(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2}$，其中 $C>0$。

备注. 改写微分方程构建变换式求解微分方程的思路与方法

CMC 2023 非数 A, 四

设 $I_n=n\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$，其中 $a>1$。求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$。

解答. $\frac{1}{1+x^n}$ 让我们有往 $\ln(1+x^n)$ 凑的冲动，求倒数便可做到。令 $t=\frac{1}{x}$，$A=\frac{1}{a}\in(0,1)$，则:

$$I_n=n\int_1^A \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^n}\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\int_A^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_A^1 \frac{\mathrm{d}\left(\ln(1+t^n)\right)}{t}$$

用分部积分，得到:

$$I_n=\frac{\ln(1+t^n)}{t}\Big|_A^1-\int_A^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=\ln 2-\frac{\ln(1+A^n)}{A}+\int_A^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t$$

显然 $0\le \frac{\ln(1+A^n)}{A}\le A^{n-1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} A^{n-1}=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+A^n)}{A}=0$。
同理 $0\le \int_A^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t\le \int_A^1 t^{n-2}=\frac{1-A^{n-1}}{n-1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-A^{n-1}}{n-1}=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\mathrm{d}t=0$。
因此 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\boxed{\ln 2}$。
备注. 倒代换，将分母的高次向分子转移；定积分求极限，将其转换为熟悉的积分范围 $[0,1]$ 以方便放缩。

7 第十四届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）✓

CMC 2022 非数, 4

微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的通解为 ____。

解答. 先将 $\sin y, \cos y$ 剔除，换元 $u=\cos y$，则:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(-x\ln x)+u(1-xu)=0$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{u}{x\ln x}=-\frac{u^2}{\ln x}$$

形式颇似一阶线性微分方程，容易想到倒代换，换元 $v=\frac{1}{u}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{v}{x\ln x}&=\frac{1}{\ln x}\\
v&=e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{\ln x}e^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\mathrm{d}x+C\right)\\
&=\frac{1}{\ln x}(x+C)
\end{aligned}
$$

故 $\boxed{(x+C)\cos y=\ln x}$。

备注. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)y^n$，在 $n=0$ 时为非齐次线性方程，$n=1$ 时为齐次线性方程。一般的非线性方程是很难求解的，而上述形式的方程可以通过转换为非齐次线性方程求解。

CMC 2022 非数，三

设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$，$f'(x)\leq 0$，$f''(x)\leq f(x)$，证明：$f'(0)\geq-\sqrt{2}$。

解答. 对 $\forall x\in(0,1)$，由 Lagrange 中值定理，知 $\exists\zeta\in(0,x)$，$f(x)-f(0)=xf'(\zeta)$，故 $-\frac{1}{x}\leq f'(\zeta)\leq 0$。

构造 $g(x)=f^2(x)-f'^2(x)$，则 $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)-f''(x)\right)\leq 0$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减。

因此 $g(\zeta)\leq g(0)\Rightarrow f'^2(0)\leq \boxed{1+f'^2(\zeta)-f^2(\zeta)\leq 1+\dfrac{1}{x^2}}$。

由于 x 的任意性，$f'^2(0)\leq\lim\limits_{x\to1^-}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=2$，故 $f'(0)\geq-\sqrt{2}$。

探索. 用 Lagrange 中值定理时，我们在 $\boxed{\text{蓝框}}$ 处的放缩较松，很可能存在更紧的下界。

探索 · 最佳系数

证明：$f'(0)\geq-\frac{e^2+1}{e^2-1}$。

解答. 还是往 $f''(x)\leq f(x)$ 靠拢，之前我们选取了 $g(x)$，这次我们构造 $h(x)=e^x(f(x)-f'(x))$。

则 $h'(x)=e^x(f(x)-f''(x))\geq 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递增。于是有：

$$
\begin{aligned}
&h(0)\leq h(x)\\
\iff\quad &1-f'(0)\leq e^x(f(x)-f'(x))\\
\iff\quad &\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}+\frac{1-f'(0)}{e^{2x}}\leq 0
\end{aligned}
$$

这启发我们构造 $p(x)=\frac{f(x)}{e^x}+\frac{f'(0)-1}{2e^{2x}}$，则 $p(x)$ 在 $(0,1)$ 递减。于是有：

$$
\begin{aligned}
&p(x)\leq p(0)\\
\iff\quad &\frac{f(x)}{e^x}+\frac{f'(0)-1}{2e^{2x}}\leq\frac{f'(0)+1}{2}\\
\implies\quad &\frac{f'(0)-1}{2e^{2x}}\leq\frac{f'(0)+1}{2}\\
\iff\quad &f'(0)\geq-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}
\end{aligned}
$$

由于 x 的任意性，$f'(0)\geq\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)=-\frac{e^2+1}{e^2-1}$。

最后考虑取等条件，即 $f(x)-f'(x)=\frac{2e^2}{(e^2-1)e^x}$，$f(x)=f''(x)$，$f(1)=0$。

因此 $f(x)=\frac{e^2}{(e^2-1)e^x}-\frac{e^x}{e^2-1}$，我们证明了它是最优系数。

2021年 第十三届全国大学生数学竞赛初赛

《非数学类》试题

25.10.31

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\,\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$ __0__.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __1__.

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$ __1__.

4、过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为 $2x^2+y^2-2yz+z^2=4$

☆:中心轴线

5、记 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq\pi\right\}$，则

重积分的对称性.

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\quad\pi\quad}.$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021$，$x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\geq 1)$．证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

−4

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

☆ **四、(14 分)** 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$.

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

鸽了.

六、(14 分) 设 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$ 且 $b_n=a_nb_{n-1}-2$，$n=2,3,\cdots$．又设 $\left\{b_n\right\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.

2021 CMC 非数A.

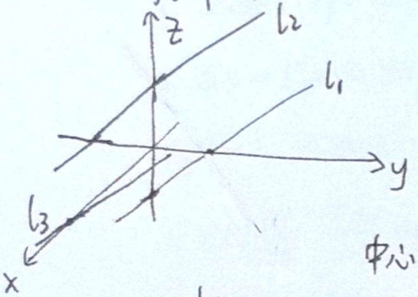
$\boxed{1.}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x-\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=1\times 0=0$

$\boxed{2.}$ $2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\frac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}$

$\boxed{3.}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2xf(x)}{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}+2$

$\xlongequal{0<\xi<x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2f(x)}{f(\xi)+f(x)}+2=1$

$\boxed{4.}$ 

中心轴线：$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

$\frac{|(x_0,y_0,z_0)\times(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(y_0-z_0)^2+x_0^2+x_0^2}=2$

$\therefore 2x_0^2+y_0^2-2y_0z_0+z_0^2=2^2=4.$

$\boxed{5.}$ $\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\,dxdy$

$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho d\rho\int_0^{2\pi}\sin\rho^2d\theta=\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\sin\rho^2d\rho=\pi.$

二. $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-1+\frac{2022}{x_n+1}\right)\geqslant\frac{1}{2}(2\sqrt{2022}-2)=\sqrt{2022}-1.$

且当 $x>\sqrt{2022}-1$ 时，有 $\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{2022}{x+1}\right)<x$.

故 $\{x_n\}$ 单调递减，且有下界 $\sqrt{2022}-1$.

由单调收敛准则，$\{x_n\}$ 收敛. $x=\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{2022}{x+1}\right)\Rightarrow x=\sqrt{2022}-1$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{2022}-1$.

三. ① $\left[e^{13x}(y+y')\right]'=f(x)e^{13x}\Rightarrow y+y'=e^{-13x}\left(\int_0^x f(t)e^{13t}dt+C_1'\right)$

② $\left[e^x(y'+13y)\right]'=f(x)e^x\Rightarrow y'+13y=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^tdt+C_2'\right)$

$\therefore y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}+\underline{\frac{e^{-x}}{12}\int_0^x f(t)e^tdt}-\underline{\frac{e^{-13x}}{12}\int_0^x f(t)e^{13t}dt}.<\frac{e^{-13x}}{12}M.\int_0^x e^{13t}dt<\frac{M}{12\times 13}.$

记 $|f(x)|<M.\ \forall x\geqslant 0.$

$\left|\frac{e^{-x}}{12}\int_0^x f(t)e^tdt\right|<\frac{e^{-x}}{12}M.\int_0^x e^tdt<\frac{M}{12}$

则 $|y|\leq|C_1|+|C_2|+\underline{\frac{M}{12}+\frac{M}{12}}$ 有界. ×

四. 由于 $f(x,y,z)$ 为齐次函数，故 $f(tx,ty,tz)=t^4 f(x,y,z)$.

关于 t 求导，得 $x f_x(tx,ty,tz)+y f_y(tx,ty,tz)+z f_z(tx,ty,tz)=4t^3 f(x,y,z)$.

代入 $t=1$，有 $4f(x,y,z)=x f_x+y f_y+z f_z$.

设 (x,y,z) 处切平面的法线为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$\because$ Σ 为球心为 $(0,0,0)$ 的完整球壳.

$\therefore$ $x=\cos\alpha,\ y=\cos\beta,\ z=\cos\gamma$.

$$\therefore \oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma}(\cos\alpha f_x+\cos\beta f_y+\cos\gamma f_z)\,dS$$

$$=\frac{1}{4}\oiint_{\Sigma}(f_x\,dydz+f_y\,dzdx+f_z\,dxdy)$$

高斯公式

$$=\frac{1}{4}\iiint_{\Omega}(f_{xx}+f_{yy}+f_{zz})\,dV$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{6}a_i\right)\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i$$

2025.11.1

2020年 第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题

74

-6

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\sin x\right)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$ $-\frac{1}{3}$.

2、设函数 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}\left(-1\right)=$ $n!e^{-1}$.

3、设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f\left(1\right)=1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为 $y=1$.

4、已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin\left(x+y\right)}{x\left(x+y\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $\frac{\pi^2}{8}$.

5、设 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U, f\left(x\right)\neq g\left(x\right)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}g\left(x\right)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[f\left(x\right)\right]^{g(x)}-\left[g\left(x\right)\right]^{g(x)}}{f\left(x\right)-g\left(x\right)}=$ $\cancel{1}$ a^a.

-8

二、(10 分) 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\left(n+1\right)\left(a_n+1\right)}, n\geq 1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

三、(12 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$. 证明：

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f\left(x_0\right)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f\left(y\right)$.

五、(12 分) 计算 $I=\oint\limits_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

六、(12 分) 证明 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子（包 1 和 n 本身）之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

七、(14 分) 设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\geq 1)$.

−12

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p\geq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

2020 非数A.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=-\dfrac{1}{3}$

2. $f^{(n)}(-1)=n!\,e^{-1}$

3. $\dfrac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\dfrac{y-xy'}{y^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\dfrac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$

代入 $x=1,y=1$，得 $y'=0$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\int_x^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right)^2=\frac{\pi^2}{8}$

5. ~~$\lim\limits_{x\to 0}e^{g(x)\ln f(x)}-e^{f(x)\ln g(x)}$? 特殊值 $f(x)=1+\frac{1}{n}$，$g(x)=1$.~~

5. $\displaystyle=\lim_{x\to 0}g(x)^{g(x)}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}g(x)^{g(x)}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}{f(x)-g(x)}$

$=a^a$

二. $(n+1)!\,a_{n+1}=n!\,a_n\cdot\dfrac{1}{a_n+1}$，$a_n>0$

故 $\{n!a_n\}\downarrow$. $\Rightarrow$ 收敛.

~~设 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=A$，则 $\dfrac{A}{(n+1)!}=\dfrac{\frac{A}{n!}}{(n+1)(\frac{A}{n!}+1)}$~~

取倒数.

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=(n+1)+(n+1)\dfrac{1}{a_n}$

$=(n+1)+(n+1)n+\cdots$

$\displaystyle=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)$

$\displaystyle=(n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n=\dfrac{1}{e}$

三. (1) 令 $g(x)=f(x)+3x-2$，则 $g(0)=-2$，$g(1)=2$

由 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续知 $\exists x_0\in(0,1)$，$f(x_0)=2-3x_0$.

(2) $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 可导，$[0,x_0]$ 连续，由Lagrange中值定理知：

$\exists\xi\in(0,x_0)$，$f'(\xi)=\dfrac{2-3x_0}{x_0}$.

同理 $\exists\eta\in(x_0,1)$，$f'(\eta)=\dfrac{3x_0-1}{1-x_0}$

$(1+f'(\xi))(1+f'(\eta))=\dfrac{2-2x_0}{x_0}\cdot\dfrac{2x_0}{1-x_0}=4$.

四. (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})+xf'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+2y\varphi'(\frac{x}{y})\cdot(\frac{1}{y})=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2\varphi'(\frac{x}{y})$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\dfrac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y})$

(2) $\dfrac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})+\dfrac{2a}{y^2}f''(\frac{a}{y})=by^2$

$\dfrac{1}{y}f''(\frac{a}{y})+\dfrac{2y^2}{a^3}f''(\frac{y}{a})=\dfrac{ba^4}{y^2}$

令 $u=\frac{y}{a}$，则 $f''(u)=\dfrac{2a^3b}{3u^4}-\dfrac{a^3bu}{3}$

$\Rightarrow f(u)=\dfrac{a^3b}{9u^2}-\dfrac{a^3bu^3}{18}+C_1'u+C_2'$

$\therefore f(y)=\dfrac{a^3b}{9y^2}-\dfrac{a^3by^3}{18}+C_1y+C_2$.

五. $z^2+2z=8 \Rightarrow z=2/-4$(舍).

$\therefore \Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$ 换元 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

$$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|dx=\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta)(-2\sin\theta)d\theta+$$

$$\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}}(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=-2\sqrt{3}\pi+2\sqrt{3}\pi=0$$

六. $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2\pi nk}{m}$

$$=\sum_{m=1}^{n}Re\left(\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{2\pi n}{m}\cdot k}\right)$$

若 $m|n$, 则 $Re\left(\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{2\pi n}{m}k}\right)=m$;

若 $m\nmid n$, 则 $Re\left(\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{2\pi n}{m}k}\right)=Re\left(\frac{1-e^{2\pi n}}{1-e^{\frac{2\pi n}{m}}}\right)=0$

$\therefore f(n)=\sum_{m|n}m$, 即$n$的所有因子和.

$f(2021)=1+43+47+2021=2112$

七. (1) $\{u_n\}\downarrow$, $u_n>0$ 由单调收敛准则知$\{u_n\}$收敛

没办法了,
回归定义法.

~~$\forall n, \exists \xi(n)\in[0,1], u_n=\frac{1}{(1+\xi^4)^n}$~~

~~$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\xi^4)^n}$~~

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $a=\min(1,\frac{\varepsilon}{2})$, 则

$$u_n=\int_0^a\frac{dt}{(1+t^4)^n}+\int_a^1\frac{dt}{(1+t^4)^n}.$$

前者 $<a\le\frac{\varepsilon}{2}$, 后者 $<\int_a^1\frac{dt}{(1+a^4)^n}=\frac{1-a}{(1+a^4)^n}<\frac{1}{(1+a^4)^n}\to 0$

$\exists N, \forall n>N$, 有 $u_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

又 $u_n>0$, 故 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

(2) $\because \{u_n\}\downarrow$ 且 $u_n>0$, $\boxed{\lim_{n\to\infty}u_n=0}$

$\therefore$ 由Leibniz判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

~~又 $\lim_{n\to\infty}u_n>0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\to+\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛~~

(2) 当$n\ge 2$时,

$$u_n>\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^n}=\frac{1}{n-1}(1-2^{1-n})$$

而 $\sum\frac{1}{n-1}$ 发散, $\sum\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ 收敛.

由比较判别法 $\sum u_n$ 发散. $\Rightarrow \sum(-1)^n u_n$ 条件收敛.

(3) ~~当$p>1$时, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n/n^p}{1/n^p}=\lim_{n\to\infty}u_n\triangleq A>0$~~

~~故由比值判别法知收敛.~~

~~当$p=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dt}{n(1+t^4)^n}$~~

$$u_n=\frac{t}{(1+t^4)^n}\Big|_0^1+n\int_0^1\frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}}dt$$

$$=\frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1})$$

(3) $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1$ ← 这个算起来是💩~

$$=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$$

$\Rightarrow p\ge 1$ 收敛.

25.11.7

2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

非数学专业竞赛试题

-6

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$ $\underline{\ \frac{1}{4}\ }$.

(2) 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{y^2}=$ $3\frac{y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$

(3) 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$ $\underline{\ e^{\frac{\pi}{2}}\ }$.

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}dx$

$=e^{\frac{\pi}{2}}$.

→刚好抵消←

(4) 已知 $\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u(x,y)=$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right)+C$

$=\dfrac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+3}$

(5) 设 $a,b,c,\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\mu=$ $\underline{\ \frac{abc}{3\sqrt{3}}\ }$.

二、（本题满分 14 分）计算三重积分 $\iiint_\Omega\dfrac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

$\frac{1}{72}$

三、（本题满分 14 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，且存在常数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

连续⇒在 $[0,\frac{1}{2A}]$ 有最大值 $f(x_0)\ge 0$，由 $|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)\cdot x_0|\le A|f(\xi)|\cdot x_0\le\frac{|f(x_0)|}{2}\Rightarrow|f(x_0)|=0$

递推.✓

四、（本题满分 14 分）计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

五、（本题满分 14 分）设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数，满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$，证明：$c_n>0\,(n\ge 0)$，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在，且等于 $f(x)$ 的最小根.

六、（本题满分 14 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数，满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\le 1$. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $|f(x)|\le M$.

25.11.7

94

2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类)试卷

一、填空题(本题满分 24 分,共 4 小题,每小题 6 分)

(1) 设 $\alpha\in(0,1)$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$ $\underline{\ 0\ }$.

(2)若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定,则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 $\underline{y=-x+1}$

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=$ ________. $\displaystyle=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}}{x^{2}}=$ $\underline{\ 3\ }$.

二(本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq0$ 时一阶连续可导,且 $f(1)=0$,求函数 $f\left(x^{2}-y^{2}\right)$,使得曲线积分 $\displaystyle\int_{L}y\left[2-f\left(x^{2}-y^{2}\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^{2}-y^{2}\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即 $f(x^2-y^2)=1-(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)\Rightarrow f(x^2-y^2)=\dfrac{-1}{x^2-y^2}+1$

注:$uf'(u)+f(u)-1=0$ 的通解可改写成 $(uf(u))'=1$
$\Rightarrow uf(u)=u+C$ 得到.

三(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,且 $1\le f(x)\le3$. 证明:

$$1\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$$

左侧:柯西不等式,显然.
右侧:$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{3}{f(x)}dx\le\frac{1}{4}\left[\int_0^1 \left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)dx\right]^2\le4.$

四(本题满分 12 分) 计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{(V)}\left(x^{2}+y^{2}\right)\mathrm{d}V$,其中 (V) 是由

-6

$\dfrac{648\pi}{5}-\dfrac{136\pi}{5}=\dfrac{512\pi}{5}$

$x^{2}+y^{2}+(z-2)^{2}\ge4,x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2}\le9$ 及 $z\ge0$ 所围成的空间图形. $\dfrac{1053\pi}{10}-\dfrac{256\pi}{15}=\dfrac{2647\pi}{30}$ $\dfrac{256\pi}{3}$

不能直接 $z_{min}=0$,$z_{max}=1+\sqrt{9-x^2-y^2}$!因为 z 不一定能取到 0.
(只在 $x^2+y^2\le8$ 时可以取到)
所以不如整体减去 [$z<0$ 的部分]

五(本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微,且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}}\le M$,$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点,线段 AB 包含在 D 内. 证明:$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\,|AB|$,其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度. 设 $g(\lambda)=f(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))$,则 $g(0)=f(x_1,x_2)$,$g(1)=f(x_2,y_2)$. $g'(\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_2-x_1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(y_2-y_1)$

六(本题满分 14 分) 证明:对于连续函数 $f(x)>0$,有 $\ln\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$

由Jensen不等式,$\ln\frac{\sum a_i}{n}\ge\frac{1}{n}\sum\ln a_i$;由于 $\ln x$ 连续,两边取极限.

七(本题满分 14 分) 已知 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正数数列,且 $b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,k=1,2,\cdots$,$\delta$ 为一常数. 证明:若级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛,则级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛. 柯西不等式

$\dfrac{k\sqrt[k]{a_1\cdots a_kb_1\cdots b_k}}{b_{k+1}b_k}\le\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{b_{k+1}b_k}.$ 记 $S_k=a_1b_1+\cdots+a_kb_k$

则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{+\infty}S_k\cdot\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)\ge\delta\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ ← 收敛. #.

五.(补充)也可以从中值角度想:
$g(1)-g(0)=g'(\xi).$
$g'(\xi)\le\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$=M\cdot|AB|.$

一(1)补充：在 $f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$ 这一步，还可以直接套公式：

$f(x)=e^{-\int\tan x dx}\left(\int\sec x\, e^{\int\tan x dx}dx+C\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C\right)$

74

25.11.7

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛 $=\sin x+C\cos x$.

（非数学类）试卷

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

-7

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,dt=x+1$，则 $f(x)=$ ~~$(1+x)\sin x+\cos x+\cos x\ln(\cos x)$~~ $\sin x+\cos x$

对x求导，右边变成1（忘记求导了）。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ 1。

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$，其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$ $4f_{uv}$。

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ 3。

5. 不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=$ $\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=$ 2π。

⇒二阶可微

二、（本题 14 分）

-14

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ 且 $\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。 没考虑到点上

保号性，$\exists\delta,\forall x\in(-\delta,\delta)$，$\frac{d^2g_0(x)}{dt^2}>0$，$\frac{d^2g_{\frac{\pi}{2}}(x)}{dt^2}>0\Rightarrow g_0(x)>g_0(0)$，$g_{\frac{\pi}{2}}(x)>g_{\frac{\pi}{2}}(0)$ ×

三、（本题 14 分）

设曲线 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\ge0, y\ge0, z\ge0$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz.$ $=\iint\limits_D -dxdy-dydz-dzdx+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

Stokes公式

四、（本题 15 分）

设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)dx\le1$。证明：$\forall a,b$，$a<b$，有 $\int_a^b f(x)dx\le\frac{b-a+2}{2}$. $\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx=\int_a^b(2-e^{a-x}-e^{x-b})f(x)dx\le b-a.$

再用一次#.

五、（本题 15 分）

-5

设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

$\forall\varepsilon$，对于 $t\ (1\le t\le p)$，$\exists N_t$，$\forall n>N_t$ 且 $p\mid n-t$，有 $|a_{n+p}-a_n-\lambda|<\varepsilon$.

不严谨！ 即 $\lambda-\varepsilon<a_{n+p}-a_n<\lambda+\varepsilon$.

取 $N=\max(N_1\ldots N_p)$，则 $\forall n>N$，有 $\left|\frac{a_n}{n}-\frac{\lambda}{p}\right|<\varepsilon$ ×（细节呢）.

本题难在表述上.

官方表述：对于 $0\le i<p$，记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+\ldots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$. （这一步很妙！）

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$

而对于正整数 $m=np+i\ (0\le i<p)$，从而可以将 $\mathbb{Z}^+$ 划分成 p 个子列，每个子列极限均为 $\frac{\lambda}{p}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

二. 判定极小值 ⇒ 看"黑塞矩阵"!

1° 梯度向量 $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$. 符合极小值的条件.

2° 充分条件: $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)}$ 为正定矩阵.

$g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, 则

$g'_\alpha(t) = f'_x \cdot \cos\alpha + f'_y \cdot \sin\alpha$

$g''_\alpha(t) = f''_{xx}\cos^2\alpha + 2f''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + f''_{yy}\sin^2\alpha$.

$= (\cos\alpha, \sin\alpha)\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ← 这一步写成这种形式特别精彩!

而 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$, 故 $(\cos\alpha, \sin\alpha)\begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{xy}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} > 0$.

由 α 的任意性, 可知这是一个正定二次型, 并且矩阵为实对称矩阵.

⇒ 这是一个正定矩阵.

∴ $(0,0)$ 为极小值点.

25.11.7

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛
（非数学类）试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n =$ $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

2．若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在，则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$ $\frac{3}{2}f'(1)$

3．设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$．记 $z=f\left(e^x y^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为 $f(x)=2x$．

4．设 $f(x)=e^x\sin 2x$，则 $f^{(4)}(0)=$ -24．

5．曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 $-2x-2y+z=-3$．

(2,1,3)

第二题：(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$．试证：当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

第三题：(14 分) 某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量 $M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

第四题：(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. 证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2，使得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

第六题：(14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，用傅里叶(Fourier)级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

25.11.6

80.

2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类) 试卷

一、填空题 (共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 极限 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ $\frac{2}{\pi}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则 (结果要求不显含有 F 及其偏导数) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ $z-xy$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ~~$\frac{25}{2}\pi$~~ $\frac{\pi}{2}$.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值 $\frac{3}{2}$.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

第二题：(12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。 $xy+yz+zx=0$，~~$x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$~~ $x+y+z\geq 0$.

-4

第三题：(12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

① $\beta=0$，则 $f(x)=\alpha f(x)$ $\Rightarrow f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x)$.

$\beta\neq 0$ ② $f''(x)=\alpha f'(x)+\beta f'''(x)$

第四题：(14 分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

$\rho=0$，$R=+\infty$. $(-\infty,+\infty)$.

$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\neq 1\\ 2, & x=1.\end{cases}$

第五题：(16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leq M$. 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leq\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

-16

五. (1) 若 $\forall x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\leq 4$，则 $\left|\int_0^1 xf(x)dx\right|=\left|\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx\right|\leq 4.\left|2\int_0^{\frac{1}{2}}xdx\right|=1$

由于 $\int_0^1 f(x)dx=0$，故等号无法取到. 矛盾!

$\therefore \exists x_0\in[0,1]$，$|f(x_0)|>4$.

(2) 若 $\forall x$，$|f(x)|>4$，由于 $f(x)$ 连续，故 i) $\forall x$，$f(x)>4$. ii) $\forall x$，$f(x)<-4$. 均不满足 $\int_0^1 f(x)dx=0$.

故 $\exists x_2$，$|f(x_2)|\leq 4$. 由介值性知 $\exists x_1$ 介于 x_0,x_2，s.t. $|f(x_1)|=4$.

六. 不会，鸽了.