第三章　多元随机变量及其分布

二元离散型随机变量

二元随机变量的分布函数

二元连续型随机变量

随机变量的独立性

二元随机变量函数的分布

问题的提出

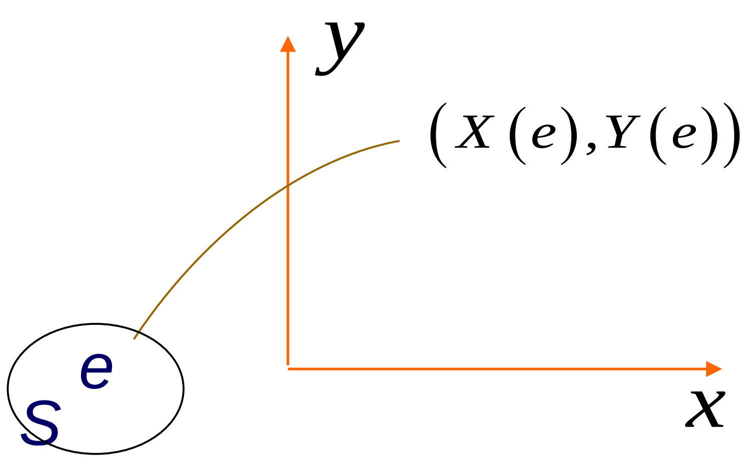
例1：研究某一地区学龄儿童的发育情况。仅研究身高H的分布或仅研究体重W的分布是不够的。需要同时考察每个儿童的身高和体重值，研究身高和体重之间的关系，这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量。

例**2**：研究某种型号炮弹的弹着点分布。每枚炮弹的弹着点位置需要由横坐标和纵坐标来确定，而它们是定义在同一样本空间的两个随机变量。

3.1　二元离散型随机变量

定义：设E是一个随机试验，样本空间$S=\{e\}$；

设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的向量(X,Y)叫做二元随机变量或二维随机变量。



（一）联合概率分布

定义：若二元随机变量(X,Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X,Y)是离散型随机变量。

离散型随机变量的联合概率分布律：

设(X,Y)所有可能取值为

$(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \cdots$

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots.$$

为二元离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布律。

可以如右表格表示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

联合概率分布律的性质：

$$1^{\circ}\quad p_{ij} \geq 0,\ \ i, j = 1, 2, \cdots$$

$$2^{\circ}\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

例1.1 设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取 一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一 整数值，试求(X,Y)的联合概率分布。

解：$(X=i, Y=j)$的取值情况为

$$i=1,2,3,4;\ \ 1\le j\le i.$$

$$P(X=i, Y=j)=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i},$$

$$i=1,2,3,4;\ \ 1\le j\le i.$$

即 (X,Y) 的联合概率分布为：

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$1/4$	0	0	0
2	$1/8$	$1/8$	0	0
3	$1/12$	$1/12$	$1/12$	0
4	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$

（二）边际分布

对于离散型随机变量 (X,Y)，联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

X,Y 的**边际（边缘）分布律**为：

$$P(Y=y_j)=P(X<+\infty，Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=}p_{\bullet j}\ j=1,2,\cdots$$

$$P(X=x_i)=P(X=x_i，Y<+\infty)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=}p_{i\bullet}\ i=1,2,\cdots$$

注意： 记号$p_{i\bullet}$表示是由p_{ij}关于j 求和后得到的；

同样$p_{\bullet j}$是由p_{ij}关于i 求和后得到的.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
$P(Y = y_j)$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

例**1.2** 设一群体**80%**的人不吸烟，**15%**的人少量吸烟，**5%**的人吸烟较多，且已知近期他们患呼吸道疾病的概率分别为**5%**，**25%**，**70%**.记

$$X=\begin{cases}0, & \text{不吸烟},\\ 1, & \text{少量吸烟}\\ 2, & \text{吸烟较多},\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{患病},\\ 0, & \text{不患病}.\end{cases}$$

求**(1)** (X,Y)的联合分布律和边际分布律；**(2)**患病人中吸烟的概率。

解：(1)由题意可得

X	0	1	2
p	0.80	0.15	0.05

$$P\{Y=1 \mid X=0\}=0.05,\ P\{Y=1 \mid X=1\}=0.25,$$

$$P\{Y=1 \mid X=2\}=0.70$$

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j \mid X=i)$$

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=i)$
0	0.76	0.04	0.80
1	0.1125	0.0375	0.15
2	0.015	0.035	0.05
$P(Y=j)$	0.8875	0.1125	1

$$(2)\,P(\text{患病人中吸烟}) = P\left\{X=1\text{或}2 \mid Y=1\right\}$$

$$=\frac{0.0375+0.035}{0.1125}=0.6444$$

（三）条件分布

对于两个事件A, B, 若$P(A)>0$, 考虑条件概率$P(B|A)$.

对于二元离散型随机变量(X,Y)，设其分布律为

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}\quad i,j=1,2,\cdots$$

若$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}>0$,

考虑条件概率 $P(X=x_i\,|\,Y=y_j)$

由条件概率公式可得：

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

当i取遍所有可能的值，就得到了条件分布律。

定义：设(X,Y)是二元离散型随机变量，对于固定的 y_j ，若 $P(Y=y_j)>0$，称

$$\boxed{P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}\quad i=1,2\cdots}$$

为在$\{Y=y_j\}$条件下，随机变量X的**条件分布律**；

同样，对于固定的 x_i，若 $P(X=x_i)>0$，称

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \quad j=1,2\cdots$$

为在 $\{X=x_i\}$ 条件下，随机变量 Y 的**条件分布律**.

例1.3 设 (X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

已知 $P(Y \le 0 \mid X < 2) = 0.5.$

求：(1)a,b的值；

(2)$\{X=2\}$条件下Y的条件分布律；

(3)$\{X+Y=2\}$条件下X的条件分布律。

解：（1）由分布律性质知 $a+b+0.6=1$ 即$a+b=0.4$

$$0.5 = P(Y \le 0 \mid X < 2) = \frac{P(X < 2, Y \le 0)}{P(X < 2)} = \frac{a+0.2}{a+0.4},$$

$$\Rightarrow a = 0, \quad \Rightarrow b = 0.4.$$

$(2) P(X = 2) = 0.6,$

$$P(Y = j \mid X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = j)}{P(X = 2)} = \begin{cases} 1/6, & j = -1, \\ 1/6, & j = 0, \\ 2/3, & j = 1. \end{cases}$$

$$(3)\ P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)$$

$$+P(X=2,Y=0)=0.3,$$

$$P(X=i\mid X+Y=2)=\frac{P(X=i,Y=2-i)}{P(X+Y=2)}$$

$$=\begin{cases} 2/3, & i=1, \\ 1/3, & i=2. \end{cases}$$

例1.4 盒子里装有3只黑球，2只红球，1只白球，在其中不放回任取2球，以*X*表示取到黑球的数目，*Y*表示取到红球的只数。求:

(1)(X, Y)的联合分布律;

(2)$\{X=1\}$时Y的条件分布律;

(3) $\{Y=0\}$时X的条件分布律。

若采用放回抽样呢？求相应的(1),(2),(3).

解：采用不放回抽样，(*X*,*Y*) 的联合分布律为

$X \diagdown Y$	0	1	2	$P(X=i)$
0	0	2/15	1/15	1/5
1	3/15	6/15	0	3/5
2	3/15	0	0	1/5
$P(Y=j)$	6/15	8/15	1/15	1

Y	0	1
$P(Y=j \mid X=1)$	1/3	2/3

X	1	2
$P(X=i \mid Y=0)$	1/2	1/2

采用放回抽样， (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
0	1/36	4/36	4/36	1/4
1	6/36	12/36	0	1/2
2	9/36	0	0	1/4
$P(Y=j)$	4/9	4/9	1/9	1

Y	0	1
$P(Y=j \mid X=1)$	1/3	2/3

X	0	1	2
$P(X=i \mid Y=0)$	1/16	6/16	9/16

例1.5 一射手进行射击，击中目标的概率为

$p(0 < p < 1)$, 射击直中目标两次为止.

以X表示首次击中目标所进行的射击次数，

以Y表示总共进行的射击次数.

试求X和Y的联合分布律和条件分布律。

解：(X,Y)的联合分布律为

$$P(X=m,Y=n)=p^2q^{n-2},\ q=1-p,$$

$$n>m\geq 1.$$

X 的边际分布律为

$$P(X=m)=pq^{m-1},\qquad m=1,2,\cdots$$

Y 的边际分布律为

$$P(Y=n)=(n-1)p^2q^{n-2},\ n=2,3,\cdots$$

对每一$m(m=1,2,\cdots), P(X=m)>0,$

在$\{X=m\}$条件下，Y的条件分布律为：

$$P(Y=n \mid X=m)=pq^{n-m-1},\ n=m+1,m+2,\cdots$$

如：$P(Y=n \mid X=3)=pq^{n-4},\ n=4,5,\cdots$

对每一$n(n=2,3,\cdots),P(Y=n)>0,$

在$\{Y=n\}$条件下，X的条件分布律为：

$$P(X=m|Y=n)=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\ m=1,2,\cdots,n-1.$$

如：$P(X=m|Y=10)=\dfrac{1}{9},\ m=1,2,\cdots,9.$

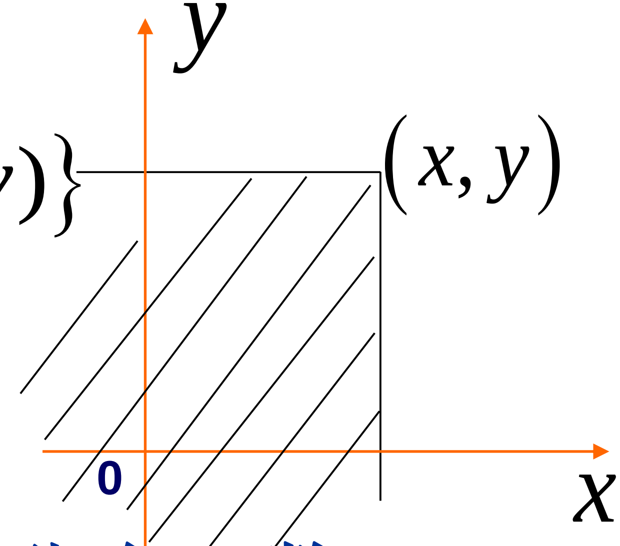
3.2 二元随机变量的分布函数

（一） 联合分布函数

定义：设(X,Y)是二元随机变量,对于任意实数x,y，二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}$$

$$\overset{\text{记成}}{=}P(X\le x,Y\le y)$$



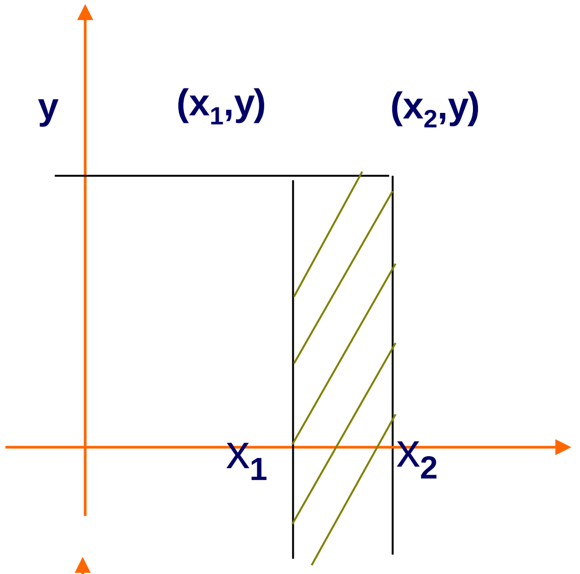
称为二元随机变量(X,Y)的联合分布函数。

分布函数 $F(x,y)$ 的性质

1° $F(x,y)$关于x,y单调不减，即：

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1,y) \le F(x_2,y),$$

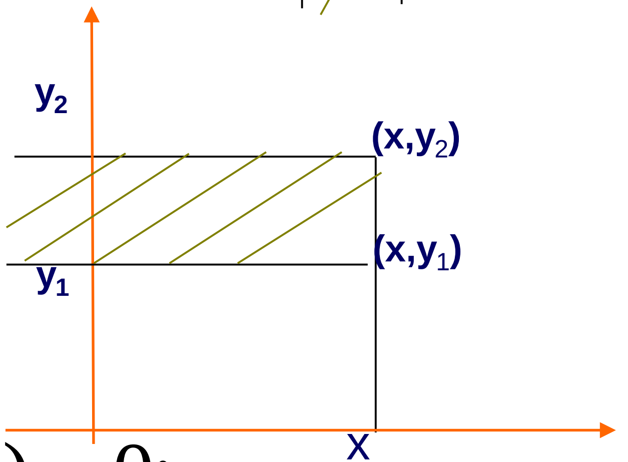
$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x,y_1) \le F(x,y_2);$$



2° $0 \le F(x,y) \le 1,\ F(+\infty,+\infty) = 1,$

对任意x,y

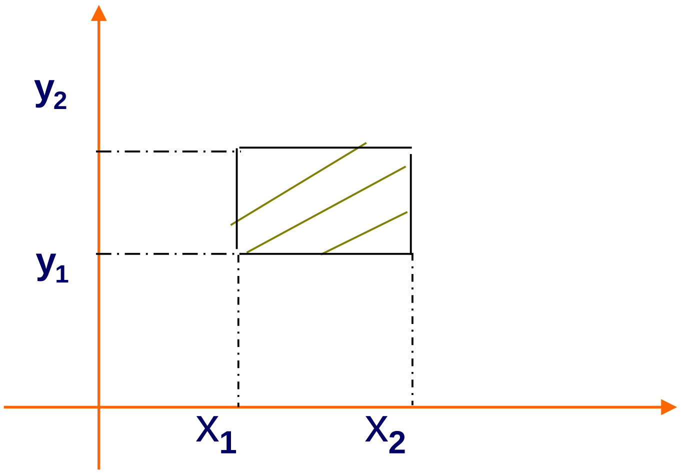
$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0;$$



3° $F(x,y)$关于x,y右连续，即：

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} F(x+\varepsilon,y)=F(x,y),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} F(x,y+\varepsilon)=F(x,y);$$



4° 若$x_1<x_2, y_1<y_2$

$$\Rightarrow F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

因为$P\left(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\right)=$

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

（二） 边际（边缘）分布函数

二元随机变量(X,Y)作为整体，有分布函数$F(x,y)$，其中X和Y都是随机变量，它们的分布函数, 记为 $F_X(x), F_Y(y)$ 称为边际分布函数。

$$F_X(x) = F(x,+\infty)$$
$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

事实上，

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

即在分布函数$F(x,y)$中令$y \to +\infty$，就能得到$F_X(x)$

同理得：$F_Y(y) = P(Y \le y) = F(+\infty, y).$

（三） 条件分布函数

定义：条件分布函数 若$P(Y=y)>0,$

则在$\{Y=y\}$条件下，X的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\frac{P(X\le x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

若$P(Y=y)=0,$ 但对任给$\varepsilon>0, P(y<Y\le y+\varepsilon)>0$

则在$\{Y=y\}$条件下，X的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x | y < Y \le y + \varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \le x, y < Y \le y + \varepsilon)}{P(y < Y \le y + \varepsilon)}$$

仍记为$P(X \le x | Y = y)$

例2.1 设 (X,Y)的联合分布律为

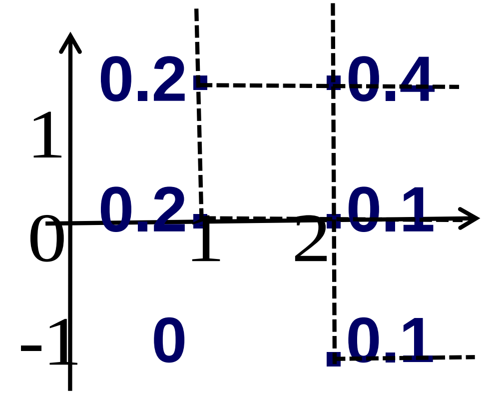
$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.4

求：(1) (X,Y)的联合分布函数；

(2)在$\{X=2\}$条件下Y的条件分布函数.

解:

$$(1)F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1\text{或}y<-1\text{或} \\ & 1\le x<2,-1\le y<0, \\ 0.1, & x\ge 2,-1\le y<0, \\ 0.2, & 1\le x<2,0\le y<1, \\ 0.4, & x\ge 2,0\le y<1, \\ 0.4, & 1\le x<2,y\ge 1, \\ 1, & x\ge 2,y\ge 1.\end{cases}$$



Y	-1	0	1
$P(Y=j \mid X=2)$	$1/6$	$1/6$	$2/3$

$$(2)F_{Y|X}(y|2)=\begin{cases}0, & y<-1 \\ 1/6, & -1\le y<0, \\ 1/3, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

3.3 二元连续型随机变量

（一） 联合概率密度函数

定义：对于二元随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，

如果存在非负函数$f(x,y)$，使对于任意x,y，

有$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv}$

称(X,Y)为二元连续型随机变量

称$f(x,y)$为二元随机变量(X,Y)的

(联合)概率密度函数.

联合密度函数性质：

1. $f(x,y)\geq 0,$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1,$

3. 设 G是平面上区域,(X,Y)落在G内的概率

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy,$$

4. 在$f(x,y)$的连续点(x,y), 有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

注:(1)在几何上，$z=f(x,y)$表示空间一个曲面，

介于它和xoy平面的空间区域的体积为1.

(2)$P((X,Y)\in G)$等于以G为底，以曲面

$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积.

所以(X,Y)落在面积为零的区域的概率为零.

例3.1 设二元随机变量(X,Y)的概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求常数k;

(2)求联合分布函数$F(x,y)$;

(3)求$P(Y\le X)$.

解：**(1)**利用 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1,$ 得

$$k\int_0^{\infty} e^{-2x}dx\int_0^{\infty} e^{-3y}dy = k/6 = 1$$

$$\Rightarrow k = 6$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 6e^{-(2u+3v)}dudv, & x>0, y>0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2u}du\int_0^y 3e^{-3v}dv, & x>0, y>0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$(3)\ P(Y \le X) = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} 6e^{-(2x+3y)}dxdy$$

$$= \int_0^{\infty} 3e^{-3y}(-e^{-2x}\mid_y^{\infty})dy$$

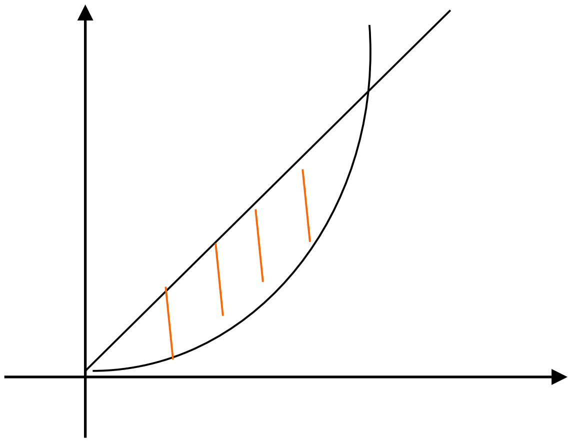
$$= \int_0^{\infty} 3e^{-3y}e^{-2y}dy$$

$$= \int_0^{\infty} 3e^{-5y}dy$$

$$= -\frac{3}{5}e^{-5y}\mid_0^{\infty} = \frac{3}{5}$$

例3.2 设随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy, & 0<x<1, x^2<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



求(1) 常数c;

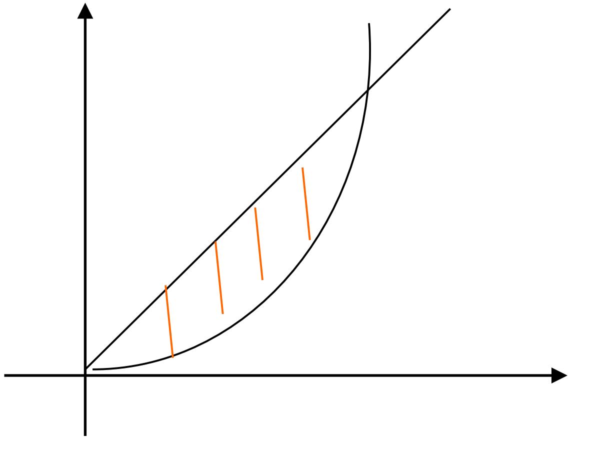
(2) $P(X>0.5)$;

(3) $P(Y\le 0.5)$;

(4) $P(X>0.5, Y\le 0.5)$.

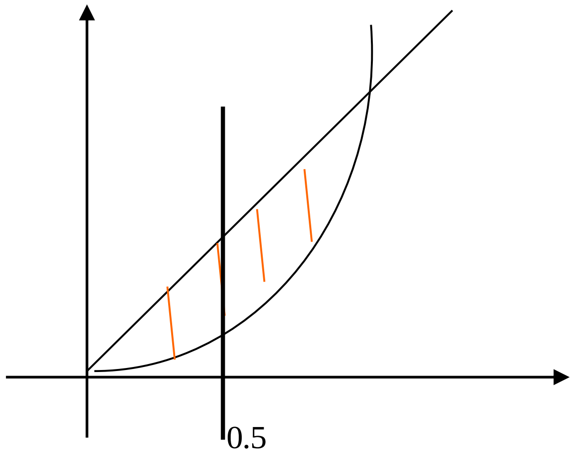
解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} cydy=\frac{c}{15}$$



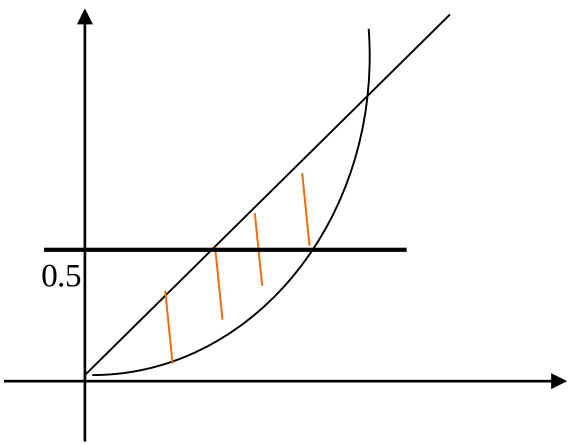
$$\Rightarrow c=15$$

$$(2)\ P(X>0.5)=1-\int_0^{1/2}dx\int_{x^2}^{x}15y\,dy=\frac{47}{64}=0.734$$



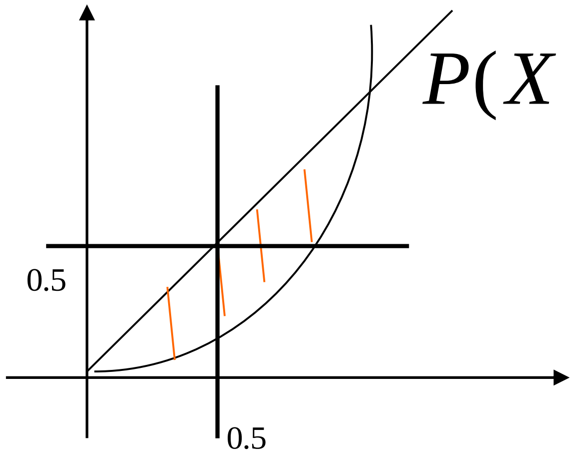
$$(3)\ P(Y \le 0.5) = \int_0^{1/2} dy \int_y^{\sqrt{y}} 15y\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} 15(y^{3/2} - y^2)\,dy = \frac{6\sqrt{2} - 5}{8} = 0.436$$



$$(4)\ P(X>0.5, Y\le 0.5)=\int_{1/4}^{1/2}dy\int_{0.5}^{\sqrt{y}}15y\,dx$$

$$=\int_{1/4}^{1/2}15(y^{3/2}-0.5y)\,dy=\frac{48\sqrt{2}-57}{64}=0.170$$



$$P(X>0.5, Y\le 0.5)\neq P(X>0.5)P(Y\le 0.5)$$

（二） 边际（边缘）概率密度函数

设连续型随机变量**(*X*,*Y*)**的密度函数为 $f(x,y)$,

则***X*,*Y***的边际概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

事实上，

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$$

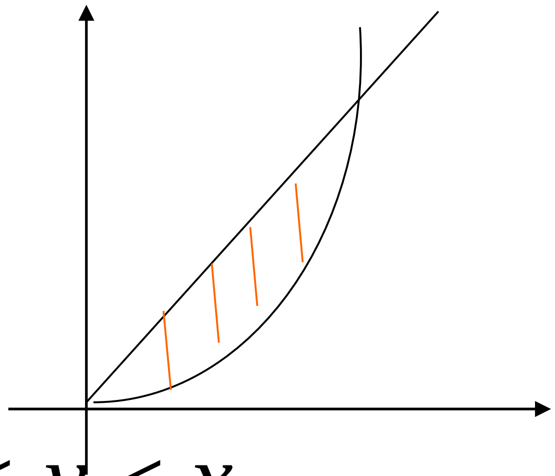
$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

同理：

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv$$

$$=\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$$

例3.3：(续上例)设二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases}15y, & 0<x<1, x^2<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 X, Y 的边际概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \;=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 15ydy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{15}{2}(x^2-x^4), & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 15ydx = 15(y^{\frac{3}{2}}-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（三） 条件概率密度函数

定义：条件概率密度函数

设二元随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$,

X,Y的边际密度函数为$f_X(x), f_Y(y)$,

则在$\{Y=y\}$条件下X的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, f_Y(y)>0.$$

在$\{X=x\}$条件下，Y的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x)>0.$$

即 $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\frac{1}{\Delta y}\int_{-\infty}^{x}du\int_{y}^{y+\Delta y}f(u,v)dv}{\frac{1}{\Delta y}\int_{y}^{y+\Delta y}f_Y(v)dv}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

$\therefore F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du.$

条件密度函数性质(以 $f_{X|Y}(x|y)$为例):

1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0,$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = 1,$

3. $P\{a < X < b \mid Y = y\} = \int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx,$

4. 在$f_{X|Y}(x|y)$的连续点x, 有$\dfrac{\mathrm{d}F_{X|Y}(x|y)}{\mathrm{d}x} = f_{X|Y}(x|y),$

5. $f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x).$

例3.4 设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了X分钟，再由乙完成，加起来共用Y分钟。若$X\sim U(0, 30)$，在$\{X=x\}$条件下，$Y\sim U(x, 30)$。

(1) 求(X, Y)的联合密度函数以及条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；

(2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

解：已知 $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}, & 0<x<30,\\ 0, & 其它.\end{cases},$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{30-x}, & x<y<30,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{30(30-x)}, & 0<x<30, x<y<30,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{30(30-x)} dx = \frac{1}{30} \ln \frac{30}{(30-y)}, & 0 < y < 30, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

当$0 < y < 30$时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{(30-x)\ln \frac{30}{(30-y)}}, & 0 < x < y, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$P(X < 10 \mid Y = 25) = \int_0^{10} f_{X|Y}(x \mid 25)\,dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{1}{(30 - x)\ln 6}\,dx = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 6} \approx 0.2263.$$

(四)二元均匀分布与二元正态分布

（1）若二元随机变量(X,Y)在二维有界区域D上取值，且具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\\ 0\,, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布。

若D_1是D的子集，则

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

即

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{D_1\text{的面积}}{D\text{的面积}}.$$

例3.5 设二元随机变量(X,Y)在区域

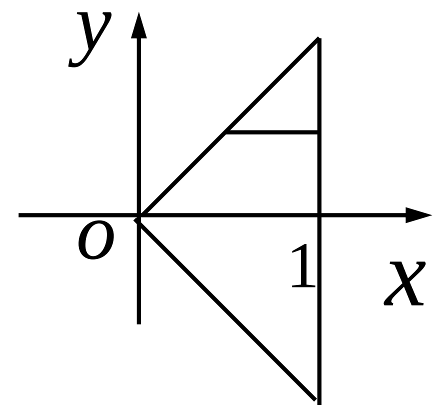
$$\left\{(x,y):|y|<x<1\right\}$$

内均匀分布，求条件密度函数

$$f_{X|Y}(x\mid y)\text{及}P\left(X>\tfrac{2}{3}\middle|Y=\tfrac{1}{2}\right).$$

解： 根据题意，(X,Y)的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



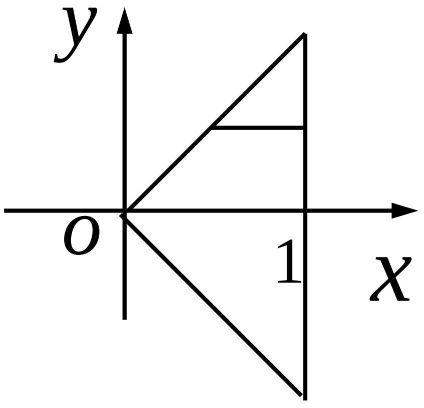
Y的边际概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{|y|}^{1} dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是给定$y(-1<y<1)$，X的条件密度函数为:

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$



二元均匀分布的条件分布仍为均匀分布

$$P(X>\tfrac{2}{3}\big|Y=\tfrac{1}{2})=\int_{2/3}^{\infty}f_{X|Y}(x\big|\tfrac{1}{2})dx$$

$$=\int_{2/3}^{1}2dx=\frac{2}{3}$$

二元正态分布　设二元随机变量(X,Y)的概率密度函数为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

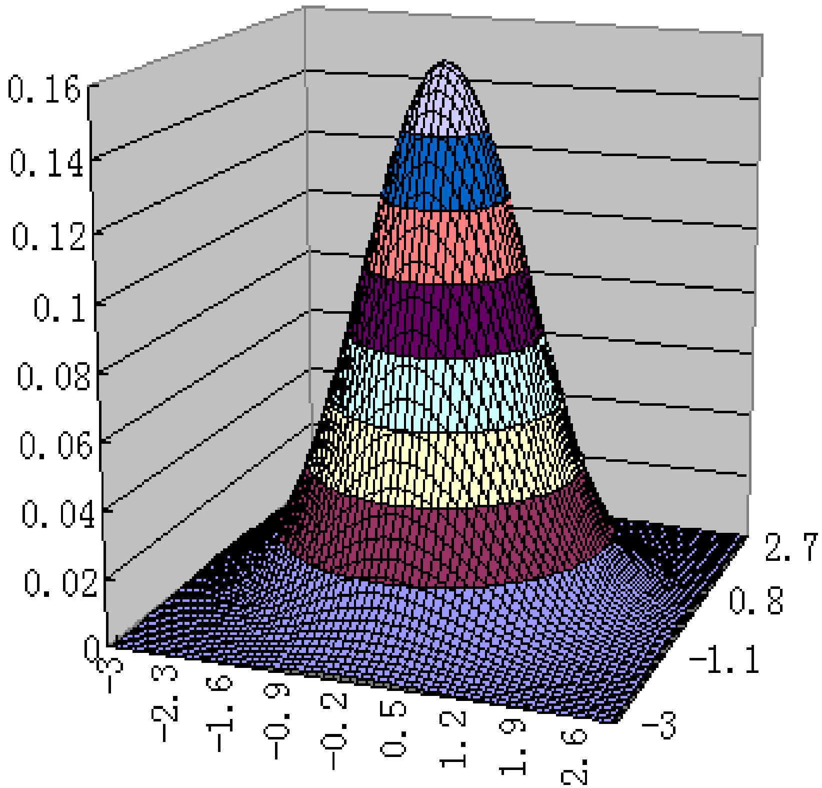
$$\left(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\right)$$

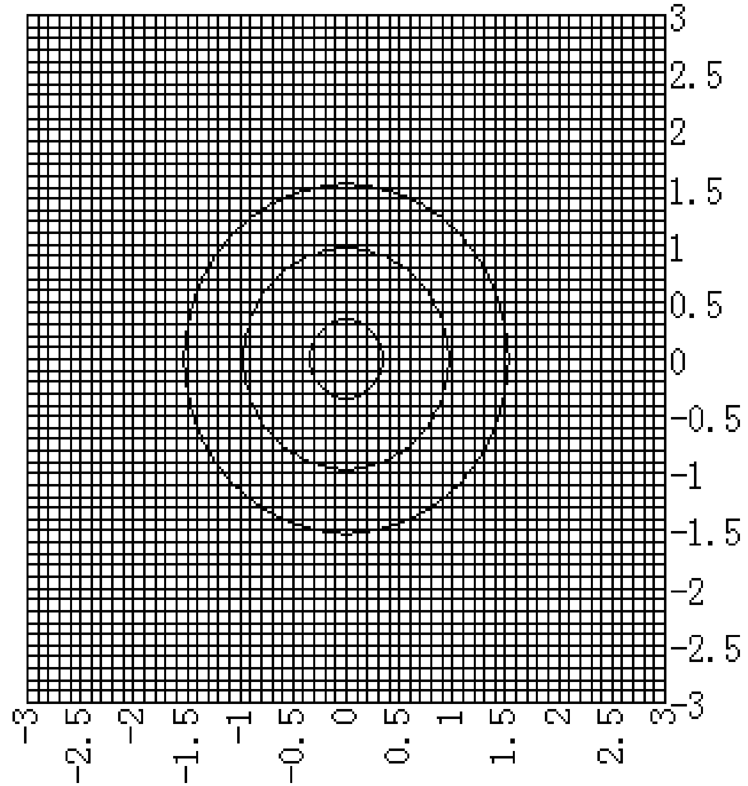
其中μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ都是常数，且$\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$;

称(X,Y)为服从参数为μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ的二元正态分布，

记为:$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$。

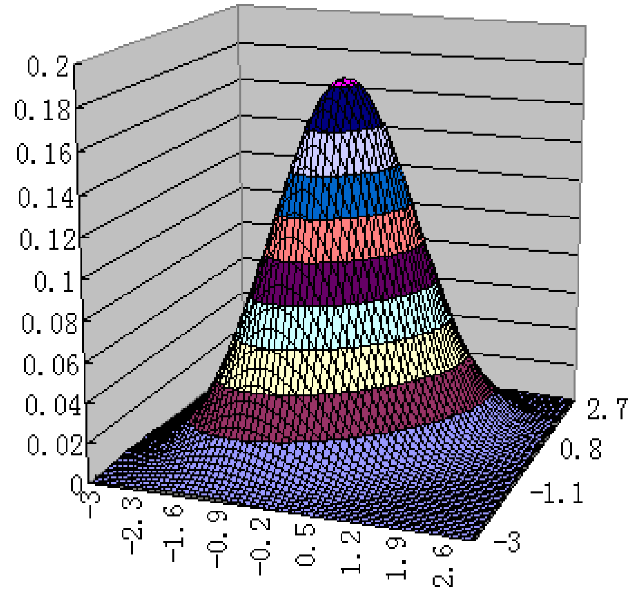
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=0$的顶曲面图及俯瞰图

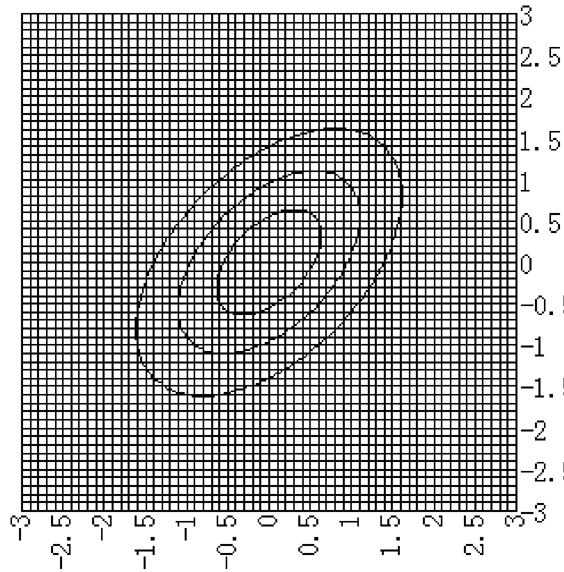




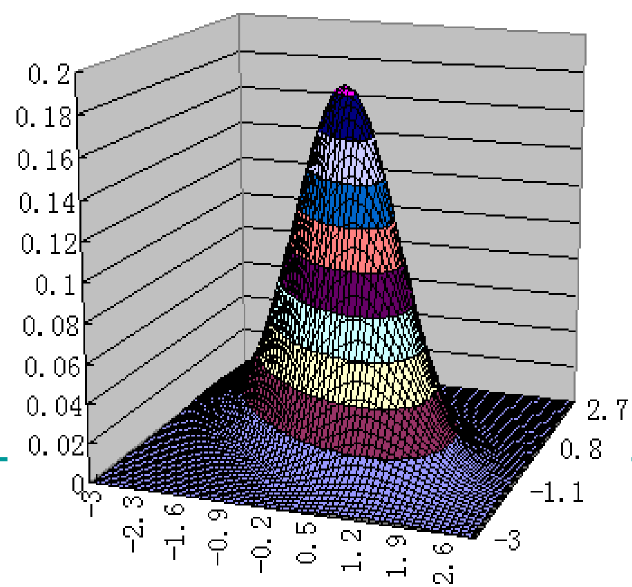
以下为$(X,Y) \sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho = \pm 0.5$的顶曲面图及俯瞰图

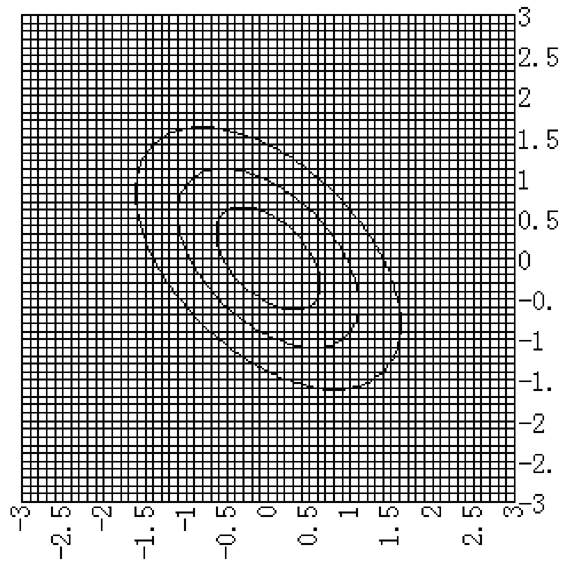
$\rho = 0.5$





$\rho = -0.5$





例3.6 设随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$;

求(1) X,Y 的边际密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(2)条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$.

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}\left\{y-\left[\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]\right\}^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\qquad -\infty<x<+\infty \quad \text{即} \quad X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2).$$

同理 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}, \quad -\infty < y < +\infty$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

即二元正态分布的边际分布是正态分布，

并且都不依赖于参数ρ.

(2) $$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2{}^2}\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2\right\}$$

即在$\{X=x\}$条件下，Y的条件分布是正态分布

$$N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ (1-\rho^2)\sigma_2{}^2)$$

同理，在$\{Y=y\}$条件下，X的条件分布是正态分布

$$N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ (1-\rho^2)\sigma_1{}^2).$$

3.4 随机变量的独立性

定义：设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是随机变量(X,Y)的联合分布函数及边际分布函数，若对所有实数 x,y 有

$$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$$

即
$$\boxed{F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)}$$

称随机变量X,Y相互独立.

若(X,Y)是离散型随机变量，则X,Y相互独立的条件等价于：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即 $\boxed{p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}}$ 对一切i,j都成立.

若(X,Y)是连续型随机变量，$f(x,y), f_X(x)$, $f_Y(y)$分别是(X,Y)的联合密度函数和边缘密度函数，则X,Y相互独立的条件等价于：

$\boxed{f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)}$ 几乎处处成立；

即平面上除去零“面积”集以外，处处成立.

例4.1 判断在例3.1中X和Y是否相互独立？

即(X,Y)具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解：计算得，*X*和*Y*的边际概率密度分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0\ , & y\le 0.\end{cases}$$

故有$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,因而$X,Y$是相互独立的。

请问：连续型随机变量***X*,*Y***相互独立，其密度函数***f*(*x*,*y*)**有何特征？

定理3.4.1　连续型随机变量***X*,*Y***相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y)=m(x)\cdot n(y),\quad |x|<+\infty,|y|<+\infty.$$

思考题：若随机变量（X，Y）的密度函数如下所示，问哪些密度函数对应的X与Y是相互独立的？

（1）$f(x,y)=\begin{cases} e^{-2x}, & x>0,0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（2）$f(x,y)=\begin{cases} xy/2, & 0<x<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（3）$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（4）$f(x,y)=\begin{cases} xy, & 0<x<2,0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

答：（1），（4）。

例4.2 (X,Y)具有分布律如下，则

$$P(X=1,Y=0)=1/6=P(X=1)P(Y=0)$$

$$P(X=2,Y=0)=1/6=P(X=2)P(Y=0)$$

$$P(X=1,Y=1)=2/6=P(X=1)P(Y=1)$$

$$P(X=2,Y=1)=2/6=P(X=2)P(Y=1)$$

因而X,Y是相互独立的。

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=j)$
1	$1/6$	$2/6$	$1/2$
2	$1/6$	$2/6$	$1/2$
$P(Y=i)$	$1/3$	$2/3$	

例4.3 若(X,Y)具有分布律如下，则

$$P(X=1,Y=0)=1/6$$

$$P(X=1)P(Y=0)=1/2\times1/2=1/4$$

故$P(X=1,Y=0)\neq P(X=1)P(Y=0)$

因而X与Y不相互独立。

$X \backslash Y$	0	1	P(X=j)
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P(Y=i)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

例4.4　设X与Y是相互独立的随机变量，已知(X, Y)的联合分布律的部分值，求其余未知的概率值.

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	
$P(Y=j)$	0.04	0.8		

例4.5 证明：对于二维正态随机变量(X,Y)，

X与Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$.

证：因为(X,Y)的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

又由例题3.6知，其边际密度函数的乘积为：

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

$"\Leftarrow"$ 如果$\rho=0$，则对于所有x, y，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,

即X,Y相互独立。

$"\Rightarrow"$ 反之，若X,Y相互独立，

由于$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$都是连续函数，

故对于所有的x, y，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,

特别的有$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$ ，

即$\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \quad \Rightarrow \rho=0$

例4.6 设甲乙两种元件的寿命X,Y相互独立服从同一分布，其密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$$

求甲元件寿命不大于乙元件寿命2倍的概率.

解：(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}} & x>0,y>0,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P(X\le 2Y)=\int_0^{+\infty}dx\int_{x/2}^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{4}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{3x}{4}}dx=\frac{2}{3}$$

一般n元随机变量的一些概念和结果

n元随机变量

设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$;

设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$是定义在$S$上的随机变量，由它们构成的一个$n$元向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为$n$元随机变量。

分布函数

对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，n元函数：

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)=P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

称为n元随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数。

离散型随机变量的分布律

设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$所有可能取值为$(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})$ $\quad i_j = 1, 2, \cdots$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}) \quad j = 1, 2, \cdots n, \quad i_j = 1, 2, \cdots$$

称为n元离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布律。

连续型随机变量的概率密度函数

若存在非负函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对于任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为n元连续型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的密度函数。

边际分布

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$已知，

则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的$k(1 \leq k \leq n)$元边际分布函数

就随之确定。

例如：

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$P(X_1 = x_{1i_1}) = \sum_{i_2, i_3, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}) = \sum_{i_3, i_4, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n$$

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n$$

多元随机变量相互独立

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的。

$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的独立性

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$的分布函数为$F_1(x_1, x_2, \cdots x_m)$,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为$F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$,

$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots x_m, y_1, y_2, \cdots y_n)$$

若$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$

称$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立。

- 定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立，

则$X_i\ (i=1,2,\cdots,m)$与$Y_j\ (j=1,2,\cdots,n)$相互独立；

若$h(x_1, x_2, \cdots, x_m)$和$g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是连续函数，

则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立。

3.5 二元随机变量的函数的分布

设二元离散型随机变量(X,Y)具有概率分布

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\ldots$$

（1）设$U=u(X,Y), V=v(X,Y)$,

则(U,V)的分布律是什么？

（2）$Z=g(X,Y)$的分布律是什么？

对于(1)，先确定(U,V)的取值(u_i,v_j)， $i,j=1,2,\ldots$ 再找出$(U=u_i,V=v_j)=\{(X,Y)\in D\}$，从而得出分布律；

对于(2),类似(1)，先确定Z的取值$z_i,i=1,2,\ldots$ 再找出$(Z=z_i)=\{(X,Y)\in D\}$，从而得到Z的分布律.

例5.1　设(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

令$U=X+Y, V=\max(X,Y)$,

求(U,V)的联合分布律及U,V的边际分布律。

解：

$U \backslash V$	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

U	2	3	4
p	0.2	0.4	0.4

V	1	2
p	0.2	0.8

例5.2 设X的密度函数$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

令$U=\begin{cases} 1, & X>1 \\ 0, & X\le 1 \end{cases}$，$V=\begin{cases} 1, & X>2 \\ 0, & X\le 2 \end{cases}$

求(U,V)的联合分布律.

解：$P(U=1,V=1)=P(X>1,X>2)=P(X>2)=e^{-2}$

$P(U=1,V=0)=P(X>1,X\leq 2)=P(1<X\leq 2)=e^{-1}-e^{-2}$

$P(U=0,V=1)=P(X\leq 1,X>2)=0$

$P(U=0,V=0)=P(X\leq 1,X\leq 2)=P(X\leq 1)=1-e^{-1}$

(一) $Z = X + Y$的分布

设(X,Y)为离散型随机变量，分布律为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots$$

设Z的可能取值为$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$，则

$Z = X + Y$的分布律为

$$P(Z = z_k) = P(X + Y = z_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = x_i, Y = z_k - x_i), k = 1, 2, \ldots$$

或 $P(Z = z_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = z_k - y_j, Y = y_j), k = 1, 2, \ldots$

特别地，当X与Y相互独立时，

$$P(Z=z_k)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=x_i)P(Y=z_k-x_i),\ k=1,2,\ldots$$

或 $$P(Z=z_k)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=z_k-y_j)P(Y=y_j),\ k=1,2,\ldots$$

例5. 3设随机变量$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$,

且X, Y相互独立。若$Z = X + Y$,

求Z的概率分布律。

解：$P(X=i)=\dfrac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!},\quad i=0,1,2,\ldots,$

$$P(Y=j)=\frac{\lambda_2^j e^{-\lambda_2}}{j!},\quad j=0,1,2,\ldots$$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!},k=0,1,2,\ldots$$

即 $Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$

设连续型随机变量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$,

则$Z=X+Y$的分布函数为:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定z,y
令$u=x+y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$

故Z的密度函数为$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

由 X,Y 的对称性，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx.$

当**X**与**Y**相互独立时，

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx}$$

称为卷积公式.

例5.4 设X和Y是相互独立的标准正态随机变量，

求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

解：由卷积公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\frac{z}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$

一般地，设*X*与*Y*相互独立，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2}), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$$

则 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2})$

结合 $aX \sim N(a\mu_1, a^2\sigma_1^{\ 2}),$

$bY + c \sim N(b\mu_2 + c, b^2\sigma_2^{\ 2}),$ 得

$$aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, \quad a^2\sigma_1^{\ 2} + b^2\sigma_2^{\ 2})$$

例5.5　设X,Y相互独立，同服从[0,1]上的均匀分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

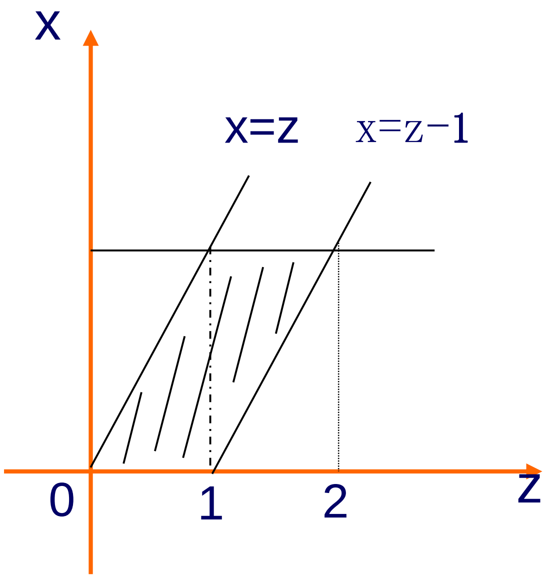
解：（方法1）利用卷积公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

易知仅当

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零



参考图得：

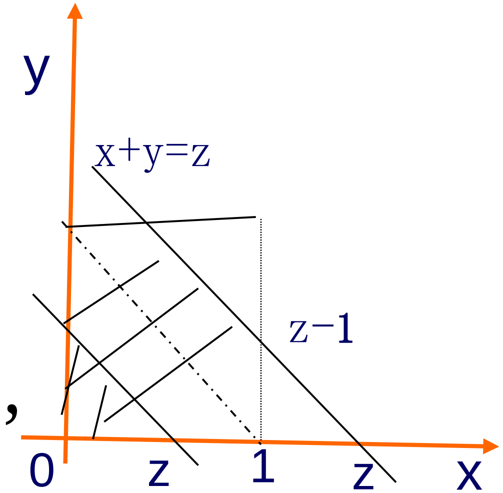
$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z & 0\le z\le 1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z & 1<z\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(方法2)利用分布函数 $F_Z(z)=P(X+Y\le z)$

当$z<0$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=0,$

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=1,$

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\frac{1}{2}z^2,$



当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=1-\frac{1}{2}(1-(z-1))^2,$

求导得 $f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z\le 1, \\ 2-z, & 1<z\le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

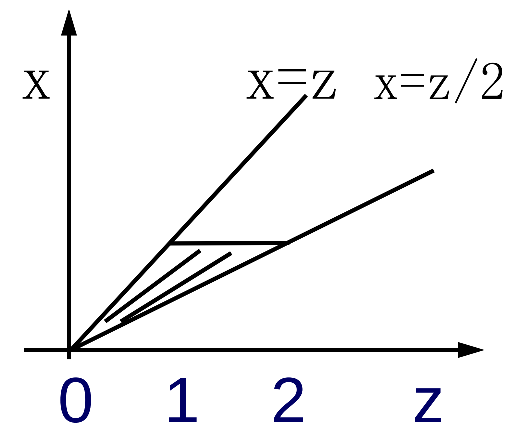
例5. 6设随机变量（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

记$Z=X+Y$，求Z的概率密度函数。

解：（方法1）利用公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$



$$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<z-x<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

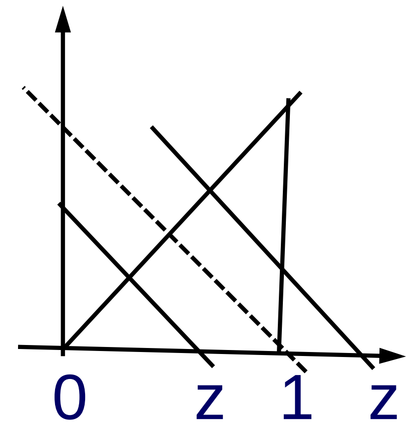
$$0<z-x<x<1 \Leftrightarrow \frac{z}{2}\le x\le \min(z,1),\ 0<z<2$$

参考图得：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{z} 3x dx=\frac{9}{8}z^2, & 0<z\le 1\\ \int_{\frac{z}{2}}^{1} 3x dx=\frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4}), & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(方法2)利用分布函数 $F_Z(z)=P(X+Y\le z)$

当$z<0$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=0,$



当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=1,$

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=\int_0^{z/2}\mathrm{d}y\int_y^{z-y}3x\mathrm{d}x=\frac{3}{8}z^3,$

当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=1-\int_{z/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{x}3x\mathrm{d}y=-\frac{z^3}{8}+\frac{3z}{2}-1.$

求导得：$f_Z(z)=\begin{cases}9z^2/8, & 0<z\le 1,\\ 3(4-z^2)/8, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例5.7：某人一天做两份工作，一份工作的酬金X为100元、150元、200元的概率各为1/3，另一份工作的酬金$Y \sim N(150,400)$.设X,Y相互独立，记一天的酬金总数为Z，$Z=X+Y$。求

(1)Z的概率密度函数；

(2)求一天酬金多于300元的概率。

解：(1) 先求Z的分布函数，利用全概率公式

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P\{X+Y \le t\}$$

$$= P(X=100)P\{X+Y \le t \mid X=100\} +$$

$$P(X=150)P\{X+Y \le t \mid X=150\} +$$

$$P(X=200)P\{X+Y \le t \mid X=200\}$$

$$= \frac{1}{3}[P\{Y \le t-100 \mid X=100\} + P\{Y \le t-150 \mid X=150\}$$

$$+ P\{Y \le t-200 \mid X=200\}]$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le t-100\}+P\{Y\le t-150\}+P\{Y\le t-200\}]$$

$$=\frac{1}{3}[F_Y(t-100)+F_Y(t-150)+F_Y(t-200)]$$

$$f_Z(t)=F_Z{}'(t)=\frac{1}{60\sqrt{2\pi}}[e^{\frac{-(t-250)^2}{800}}+e^{\frac{-(t-300)^2}{800}}+e^{\frac{-(t-350)^2}{800}}]$$

$$(2)P(Z>300)=1-F_Z(300)$$

$$=1-\frac{1}{3}[\Phi(\frac{5}{2})+\Phi(0)+\Phi(-\frac{5}{2})]=0.5.$$

(二) $M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$, 记M,N的分布函数分别为$F_{max}(z)$和$F_{min}(z)$。则

$$F_{max}(z)=P(M\le z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即 $F_{max}(z)=F_X(z)F_Y(z);$

$$F_{min}(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

即 $F_{min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)).$

推广到n个相互独立的随机变量的情况

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为：$F_{X_i}(x_i)\quad i=1,2,\cdots n,$ 则：

$M=\max\limits_{1\le i\le n} X_i$及 $N=\min\limits_{1\le i\le n} X_i$的分布函数$F_{max}(z)$和$F_{min}(z)$为

$$F_{max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)\overset{F_{X_i}(z)=F(z)}{=}(F(z))^n,$$

$$F_{min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

$$\overset{F_{X_i}(z)=F(z)}{=}1-[1-F(z)]^n.$$

例5.8　设X与Y独立，均服从$U(0,1)$,

分别求$M=\max(X,Y), N=\min(X,Y)$的密度函数。

解：X, Y的分布函数均为$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

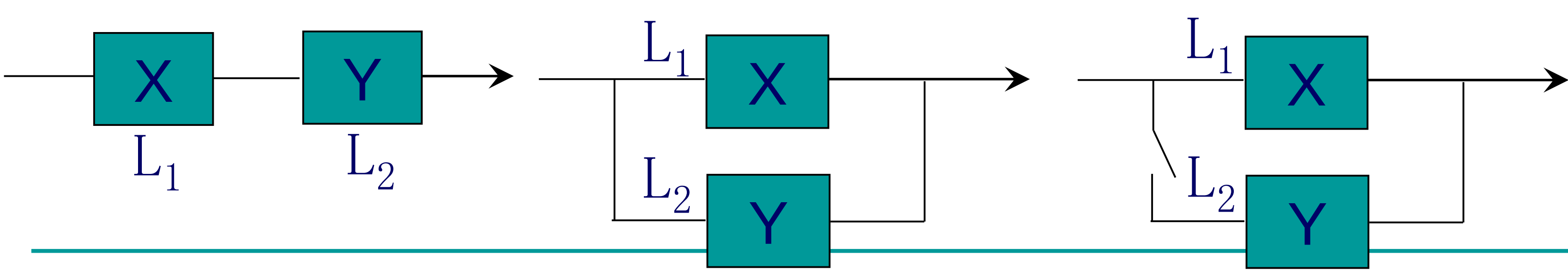
$$F_M(x)=[F(x)]^2=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$f_M(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_N(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1 - x)^2, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f_N(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例5.9 设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联结而成，联结的方式分别为：(1)串联；(2)并联；(3)备用(当系统L_1损坏时，系统L_2开始工作)。如图，设L_1, L_2的寿命为$\boldsymbol{X,Y}$，分别服从参数为 α, β 的指数分布($\alpha \neq \beta$)，试分别就以上三种联结方式写出L的寿命$\mathbf{Z}$的概率密度函数.



解：根据题意，**X,Y**的密度函数分别为

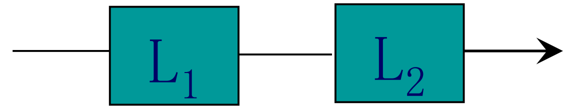
$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

X,Y的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

(1)串联的情况



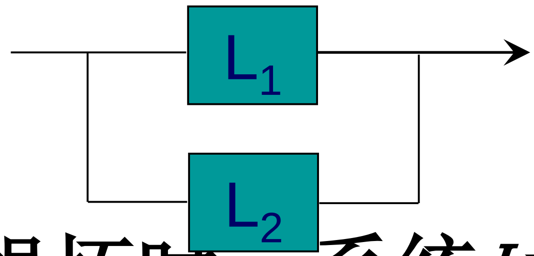
由于当L_1,L_2中由一个损坏时，系统L就停止工作，所以L的寿命为$Z=\min(X,Y)$；

$$F_{\min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

Z的概率密度函数为：

$$f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}\qquad Z\sim E(\alpha+\beta).$$

(2) 并联的情况



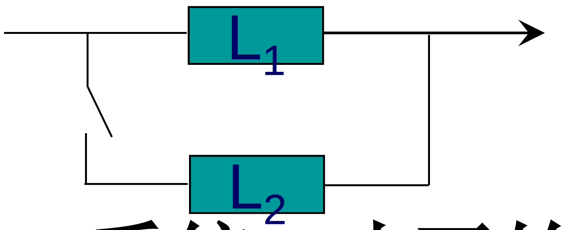
由于当且仅当L_1, L_2都损坏时，系统L才停止工作，所以这时L的寿命为$Z=max(X,Y)$，Z的分布函数为：

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

Z的概率密度函数为：

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(3) 备用的情况



由于这时当系统L_1损坏时，系统L_2才开始工作，

因此整个系统L的寿命**Z=X+Y**;

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$;　当$z>0$时，

$$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}].$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy$$

例5.10　设$Z = AX + (1-A)Y, A \sim B(1,p)$,

且$F_X(x), F_Y(y)$已知, A, X, Y相互独立,

(1) 求Z的分布函数$F_Z(z)$;

(2)若$p = \frac{1}{2}, P(X = 2) = 1, Y \sim U(0,1)$,

求$F_Z(z)$,

并判断此时Z是什么类型的随机变量?

解：（1）Z的分布函数为

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(AX + (1-A)Y \le z)$$

$$= P(A=1)P(AX + (1-A)Y \le z \mid A=1)$$

$$+ P(A=0)P(AX + (1-A)Y \le z \mid A=0)$$

$$= pP(X \le z) + (1-p)P(Y \le z) = pF_X(z) + (1-p)F_Y(z)$$

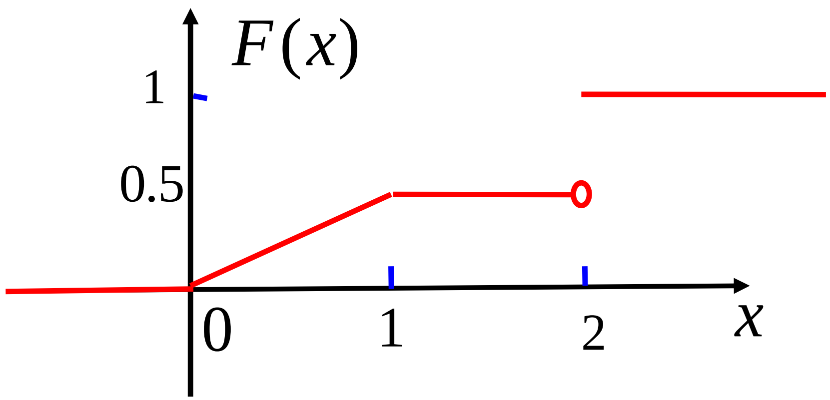
(2)由题意，可知X和Y的分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 2, \\ 1, x \ge 2; \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ y, 0 \le y < 1, \\ 1, y \ge 1. \end{cases}$$

现$p=0.5$, 故Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}F_X(z)+\frac{1}{2}F_Y(z)$$

$$=\begin{cases}0, & z<0;\\ z/2, & 0\le z<1;\\ 1/2, & 1\le z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$



由此判断Z是既非连续型又非离散型的随机变量.