概率论（H）2023-2024 秋冬小测

2023 年 10 月 31 日 13:25–14:25

$P(AB)=0.2$

1. (a) 设事件 $P(A)=0.5, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B) = P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.4$

   (b) 已知 $(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})+\overline{(A\cup B)}+\overline{\overline{A}\cup B}=C$，且 $P(C)=0.2$，试求 $P(B)$. $=0.8$

   $\Rightarrow \overline{B}=C$

2. 老师给学生们布置 10 道习题，某同学能解出其中 7 道习题. 期中考试从中随机选择 5 道题，求

   (a) 该同学能解出所有 5 道考试题的概率

   (b) 至少能解出其中 4 道题的概率.

   (a) $\dfrac{C_7^5}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{12}$ (b) $\dfrac{1}{12}+\dfrac{C_7^4\times C_3^1}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{2}$.

3. 设有两批数量相同的零件，已知有一批产品全部合格，另一批产品有五分之一不合格，从两批产品中任取 1 只，经检验是正品，放回原处，并从原所在批次再取 1 只，求这只产品是次品的概率.

   $$\frac{\frac{1}{2}\times1\times0+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}=\frac{4}{45}$$

"Ballot Theorem"

4. 甲、乙两人比赛羽毛球，最终甲赢，比分为 21:17，求全程甲都领先于乙的概率.

   $$\frac{C_{36}^{19}-C_{36}^{20}}{C_{37}^{20}}=\frac{3}{37}$$

2023 年 11 月 28 日 13:25–14:25

1. 假设 X 的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases} x/4 & 0\leqslant x<1 \\ 1/2+(x-1)/4 & 1\leqslant x<2 \\ 11/12 & 2\leqslant x<3 \\ 1 & 3\leqslant x \end{cases}$$

   (a) 计算 $P\{X=i\}$，$i=1,2,3$. $P(X=1)=\frac{1}{4}$，$P(X=2)=\frac{1}{6}$，$P(X=3)=\frac{1}{12}$.

   (b) 求 $P\{1<X\leqslant 2\}$. $P(1<X\leq2)=F(2)-F(1)=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

2. 随机变量 ξ 在区间 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上均匀分布，求随机变量 $\eta=|\sin\xi|$ 的分布密度.

   $$F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{2\arcsin x}{\pi}, & 0\leq x<1\\ 1, & x\geq1\end{cases}\qquad f_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\leq0 \text{ 或 } x\geq1\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

• 以下二选一.

3. 设随机变量 X,Y 相互独立，Y 为 $[0,1]$ 上的均匀分布，X 的概率分布为 $P(X=i)=1/3$，$i=-1,0,1$. 记 $Z=X+Y$.

   (a) $P(Z\leqslant 1/2\mid X=0)$. $=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

   (b) 求 Z 的概率密度.

   (b) $$F(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \dfrac{z+1}{3}, & -1\leq z<2\\ 1, & z\geq2\end{cases}\qquad f(z)=\begin{cases}0, & z\leq-1 \text{ 或 } z\geq2\\ \dfrac{1}{3}, & -1<z<2\end{cases}$$

4. 假设 X 是正随机变量，且有连续密度函数 $p(x)$. 给定 $X=x$ 的条件下，Y 是 $[0,x]$ 上的均匀分布. 证明：如果 Y 与 $X-Y$ 相互独立，那么

$$p(x)=a^2xe^{-ax}\quad x>0,\ a>0$$

$f_{X,Y}(x,y)=p(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{p(x)}{x}$

令 $\begin{cases}u=Y\\ v=X-Y\end{cases}$，则 $\begin{cases}X=u+v\\ Y=u\end{cases}$

$|J|=\left\|\begin{matrix}1&1\\1&0\end{matrix}\right\|=1$，$(u,v)$ 的联合密度函数为

$g(u,v)=f_{X,Y}(u+v,u)=\dfrac{p(u+v)}{u+v}$

由于 u,v 相互独立，记 $g_1(u), g_2(v)$ 为 u,v 的边际密度函数，有 $\dfrac{p(u+v)}{u+v}=g_1\cdot g_2$

$\Rightarrow \dfrac{p(x)}{x}=\lambda e^{cx}$，即 $p(x)=\lambda xe^{cx}$

由 $\int_0^{+\infty}p(x)dx=1$，故 $c<0$，记 $c=-a\ (a>0)$.

则得 $\lambda=a^2$，故 $p(x)=a^2xe^{-ax}$，$x>0, a>0$.

概率论（H）2023-2024 秋冬小测

shrike505

第一次小测：2024 年 10 月 11 日

一、(1) 假设事件 A, B, C 互不相容，且 $P(A) = P(B) = 0.2, P(C) = 0.4$. 求 $P\left(A\bar{C} \cup B\right)$. $= P(\overline{A}\cup B) = P(A) + P(B) = 0.4$

(2) 假设事件 A, B 相互独立，且 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$. 求 A 与 B 至少有一个发生的条件下 A 发生的概率. $P(A|A\cup B) = \dfrac{0.6}{0.6+0.3-0.6\times 0.3} = \dfrac{5}{6}$

(3) 对随机事件 A, B，若 $P(A \mid B) = 0.2, P\left(\bar{A} \mid \bar{B}\right) = 0.3, P(B) = 0.4$，求 $P(B \mid A)$. $\dfrac{4}{25}$

$P(AB)=0.08,\ P(\overline{B})=0.6,\ P(\overline{A}\overline{B})=0.18\ \ P(A)=0.5$

二、在线段 AB 中随机取三点 C, D, E, 求三线段 AC, AD, AE 可构成三角形的概率. $1-3\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}$

三、投票选举甲乙两人，已知甲共得 m 张，乙共得 n 张，$m \geq n + 2$. 求在第一张票后的计票过程中，甲得票数始终至少领先乙得票数 2 张的概率. $P(\dots) = \dfrac{C_{m+n-2}^{m-2} - C_{m+n-2}^{m-1}}{C_{m+n}^{m}} = \dfrac{m(m-n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$

第二次小测：2024 年 11 月 22 日

一、设随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $\boxed{\text{相互独立}}$，且同分布. $P(\xi_1 = i) = \frac{2}{3^i}, i = 1, 2, \dots, n$. 令 $\eta = \min_{1\leq k\leq n} \xi_k$

(1) 求 $P(\eta \geq i)$.

(2) 求 η 的分布列.

(1) $P(\eta\geq i) = P(\xi_1\geq i)P(\xi_2\geq i)\dots P(\xi_n\geq i)$
$= \dfrac{1}{3^{n(i-1)}}$

(2) $P(\eta = i) = \dfrac{1}{3^{n(i-1)}} - \dfrac{1}{3^{ni}}$

二、设 X, Y 为非负整数值随机变量，$X + Y \sim P(\lambda)$（泊松分布），并在给定 $X + Y = n$ 的条件下，$X \sim B(n, p)$. 求 X, Y 的分布.

三、设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，

记 $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}, Y_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}, Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

(1) 求 (Y_1, Y_2, Y_3) 的联合密度函数.

(2) 证明 Y_1, Y_2, Y_3 相互独立.

二. $P(X=k, Y=l) = P(X+Y=k+l)\cdot P(X=k, Y=l \mid X+Y=k+l)$

$= e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}C_{k+l}^{k}p^k(1-p)^l = \dfrac{\lambda^{k+l}e^{-\lambda}}{k!\,l!}p^k(1-p)^l$

故 $X\sim P(\lambda p)$, $Y\sim P(\lambda(1-p))$，且 X 与 Y 独立.

三. (1) $X_1 = Y_1Y_2Y_3$, $X_2 = (1-Y_1)Y_2Y_3$, $X_3 = (1-Y_2)Y_3$.

$$|J| = \begin{vmatrix} Y_2Y_3 & Y_1Y_3 & Y_1Y_2 \\ -Y_2Y_3 & (1-Y_1)Y_3 & (1-Y_1)Y_2 \\ 0 & -Y_3 & 1-Y_2 \end{vmatrix} = Y_2Y_3^2$$

$f_{Y_1Y_2Y_3}(y_1,y_2,y_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)}\cdot|J| = e^{-y_3}y_2y_3^2$，其中 $\begin{cases} 0<y_1<1 \\ 0<y_2<1 \\ y_3>0 \end{cases}$

(2) $f_{Y_1}(y_1) = 1$, $f_{Y_2}(y_2) = 2y_2$, $f_{Y_3}(y_3) = \frac{1}{2}e^{-y_3}y_3^2$

∴ 两两独立.

概率论（H）2020-2021 期中考试试题

2020 年 11 月 11 日

用完就旧了.

1. 盒中放有 12 个乒乓球，其中有 9 个是新球，第一次比赛时，从中任取 3 个来用，用完仍放回，第二次比赛时，再从盒中任取三个，求第二次取出 3 个新球的概率.（可用排列组合表示最终答案）

$$P(\ldots)=\frac{\sum_{k=0}^{3}\binom{9}{k}\binom{3}{3-k}\binom{9-k}{3}}{C_{12}^{3}\times C_{12}^{3}}$$

2. 若有一个均匀正八面体，其中第 1,2,3,4 面染成红色，第 1,2,3,5 面染成白色，第 1,6,7,8 面染成黑色，（同一面可出现多种颜色）现在以 A,B,C 分别表示投一次正八面体出现红，白，黑的事件，问这三个事件是否独立？给出理由.

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$.

$P(AB)=\frac{3}{8}$, $P(AC)=\frac{1}{8}$, $P(BC)=\frac{1}{8}$

$P(ABC)=\frac{1}{8}$

由于 $P(AB)\neq P(A)P(B)$

$P(AC)\neq P(A)P(C)$

$P(BC)\neq P(B)P(C)$

∴不独立.

3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立且同服从 $[0,a]$ 上的均匀分布，求 $Y=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ 和 $Z=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ 的联合分布.

$$F(y,z)=\begin{cases}0, & y<0 \text{ 或 } z<0.\\ \left(\frac{y}{a}\right)^n, & 0\le y<z\le a.\\ \left(\frac{y}{a}\right)^n-\left(\frac{y-z}{a}\right)^n, & 0\le z\le y\le a\\ 1-\left(\frac{a-z}{a}\right)^n, & y>a,\ 0\le z\le a.\\ \left(\frac{y}{a}\right)^n, & 0\le y\le a,\ z>a\\ 1, & y>a,\ z>a\end{cases}$$

4. 在 $(0,a)$ 线段上独立随机投掷两点，试求两点间距离的分布函数.

当 $x<0$, $F(x)=0$; 当 $x\geq a$, $F(x)=1$.

当 $0\le x<\frac{a}{2}$, $F(x)=\frac{1}{a^2}\int_0^x (u+x)\,du+\frac{1}{a^2}\int_x^{a-x}2x\,du+\frac{1}{a^2}\int_{a-x}^{a}(-u+a+x)\,du$

$$=\frac{2ax-x^2}{a^2}$$

当 $\frac{a}{2}\le x<a$, $F(x)=1-\frac{1}{a^2}\int_0^{a-x}(a-x-u)\,du-\frac{1}{a^2}\int_x^{a}(u-x)\,du$

$$=\frac{2ax-x^2}{a^2}$$

测验1　　剩余时间：56:04　概率论与数理统计

23秋冬小测一.

1. 有甲乙两盒，甲盒有3个红球，2个白球，乙盒有2个红球，4个白球，从甲盒中不放回取2球放入乙盒，搅匀后再从乙盒中不放回取出2球，若从乙盒中取到的是1个红球1个白球，则从甲盒中取到的是2个红球的概率为 A

单选题(10 分)

A. 8/25.　$\frac{3}{10}$ 2R : $\frac{16}{28}$

B. 15/28.　$\frac{3}{5}$ 1R1W: $\frac{15}{28}$

C. 3/7.　$\frac{1}{10}$ 2W : $\frac{12}{28}$

D. 3/10.

$$\frac{3\times16}{3\times16+6\times15+1\times12}=\frac{8}{25}$$

2. 设连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，f是偶函数，即$f(x)=f(-x)$，$F(x)$是X的分布函数，则$F(-2)$= C

单选题(10 分)

A. $2F(2)-1$.

B. 0.

C. $1-F(2)$.

D. $F(2)$.

3. 一系统由甲乙两个子系统组成。甲系统正常工作的概率为0. 90, 乙系统正常工作的概率为0.85, 在甲失效条件下, 乙正常工作的概率为0.60,则以下选项错误的是 B

单选题(10 分)

$P(X)=0.9$　$P(Y)=0.85$

$P(Y|\overline{X})=0.6 \Rightarrow P(Y\overline{X})=0.06$

$P(XY)=0.79$

A. 甲乙同时正常工作的概率为0.79.

B. 甲乙至少有一个正常工作的概率为0.985. 0.96.

C. 甲失效且乙正常工作的概率为0.06.

D. 在乙正常工作条件下,甲正常工作的概率大于0.9.

$P(X\overline{Y})=0.11$

$P(\overline{X}\,\overline{Y})=0.04$

4. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x/4, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$ 则以下正确的选项是 D

单选题(10 分)

A. $P(X=1)=0$.

B. $P(X\geqslant1)=0.75$.

C. $P(X<2)=1$.

D. $P(X=2)=0.5$.

$P(X=1)=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}$

5. 有六张卡片，其中有两张有特别标识，抽到此种卡片表示获奖，现有六个人依次不放回各抽得一张卡片. 则以下选项正确的是 D

单选题(10 分)

A. 第一个人获奖的概率为1.

B. 第六个人获奖的概率为1.

C. 第二个人获奖的概率是1/5.

D. 第三个人获奖的概率为1/3.

6. 设随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=ae^{-\frac{(x-4)^2}{4}}$，$-\infty<x<\infty$. 其中$a$为常数.则以下选项正确的是 B

单选题(10 分)

$X \sim N(4,2)$

A. $X+4 \sim N(0, 4)$.

B. $2-X/2 \sim N(0,1/2)$.

C. $X-4 \sim N(0, 4)$.

D. $X/2-1 \sim N(1, 1)$.

7. 假设有4个罐子，每个罐子都有3个球，其中第k个罐子里有$k-1$个红球和$4-k$个蓝球，$k=1,2,3,4$. 现随机取出一个罐子，然后不放回地从中取两球. 则以下选项正确的是 D

单选题(10 分)

0 3
1 2
2 1
3 0

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

A. 取出的两个球颜色相同的概率为1/2.

B. 取出的两个球颜色相同的概率为3/4.

C. 在第一个取到的球是红球的条件下两个都是红球的概率为3/4.

D. 在第一个取到的球是红球的条件下两个都是红球的概率为2/3.

$\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\right)}=\frac{2}{3}$

8. 设A,B,C为三个随机事件, 已知$0<P(A)P(B)P(C)<1$, $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$，则以下选项正确的是 ~~AC~~

单选题(10 分)

A. A,B, C同时发生是不可能事件. $P(ABC)=P(C).P(AB|C)=0.$ C

B. $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A}\,\overline{B}C)$.

C. $P(AB)=P(AB-C)$. $P(AB)=P(ABC)+P(AB\overline{C})$
$=0+P(AB-C).$

D. $P(AB|\overline{C})=0$.

9. 设随机变量 X 的分布律如下：

X	-1 1 2
p	1/3 1/2 1/6

X的分布函数为$F(x)$，则以下选项正确的有 BC

多选题(10 分)

A. $P(X\le 1)=1/2$.

B. 当$0\le x<1$时，$F(x)=1/3$.

C. 当$1<x<2$时，$F(x)=5/6$.

D. $P(1<X\le 5/2)=2/3$.

10. 设X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.1+a, & 0\le x\le 1,\\ 0.4x+b, & 1<x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$，其中$a,b$是两个常数，则以下选项正确的有 AB

多选题(10 分)

$0.1+a=0.4+b.$

A. $a-b=0.3$.

B. $F(0.1)=F(0.9)$.

C. $F(1.1)=F(1.5)$.

D. $b=0.3$. $b<0.2$

概率论与数理统计

23春夏小测一

2022-2023春夏概统第一次小测

2023.4.14 21:30-22:30

1.设随机变量x服从参数为3的指数分布，常数$a>0$，则$P(X\le a+ln2|X>a)=$ $\frac{7}{8}$

2.考卷中某选择题有四个选项，其中只有一个是正确答案。某考生可能知道正确答案，也有可能乱猜一个。假设此考生知道正确答案的概率为$\frac{1}{5}$，而不知道正确答案时随便猜一个。如果已知他答对了这道题，则他省食知道正确答案的概率是 $\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}}$$

3.一系统由甲乙两个子系统组成。甲系统正常工作概率0.90，乙系统正常工作概率0.85，在甲失效条件下，乙正常工作概率为0.60，则以下选项错误的是 C

A. 甲失效且乙正常工作概率0.06

B. 甲乙同时正常工作概率为0.79

C. 甲乙至少有一个正常工作的概率为0.985

D. 乙正常工作条件下，甲正常工作概率大于0.9

4.设随机变量分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\1/8,0\le x<1\\x^2/6,1\le x<2\\1,x\ge 2\end{cases}$，则下列选项正确的是 A

A. $P(X=1)=1/24$

B. $P(X=0.8)=1/8$

C. $P(X\le 0)=0$

D. $P(X\ge 2)=1$

5.假设有4个罐子，每个罐子都有3个球，其中第k个罐子里有$k-1$个红球和$4-k$个蓝球，$k=1,2,3,4.$ 现随机取出一个罐子，然后不放回地从中取两个球，求(1)在第一个取到的球是红球的条件下两个都是红球的概率；(2)取出的两个球颜色相同的概率 (2) $\frac{2}{3}$

(1) $\frac{2}{3}$

6.向线段$[0,2]$内任投一个质点，质点落在$[0,2]$任一子区间的概率与子区间的长度成正比，记$A=\{$质点落在1或1.5处$\}$，$B=\{$质点落在区间$[1,1.5]$内部$\}$，则以下选项正确的是 B

A. $P(A)=0.25$

B. $P(A\cup B)=0.25$

C. $P(AB)=0.25$

D. A与B不相容

7.设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}k(4-x),-1<x<1\\0,其他\end{cases}$，则$k=$ $\frac{1}{8}$

8.设随机变量$X\sim U(-1,3)$，若$P(k<X<4-k)=3/4$，则$k=$ 0

9.(多选题)一盒中有7只红球3只白球，第一次从盒中任取一个球不放回，同时另外加入一只红球，第二次再从这已加入红球的盒中任取一球。则以下选项正确的有 ABCD

A. 在第二次取得白球的条件下第一次取得白球的概率为2/9

B. 在第二次取得白球的条件下第一次取得白球的概率大于在第一次取得白球的条件下第二次取得白球的概率

C. 这两次取到的球颜色不同的概率为9/20

D. 第二次取得白球的概率为27/100

10.(多选题)设随机变量$X\sim N(\mu,4)$，则以下选项正确的有 ABCD

A. $P(X<2\mu+4)$随着μ的增加而增加

B. $P(|X-\mu|>1)=2\Phi(-0.5)$

C. $4\mu-2X\sim N(2\mu,16)$

D. $(\mu-X)/2\sim N(0,1)$

A. $\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}{\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}=\frac{2}{9}$

B. $\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{5}.$

C. $\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{9}{20}.$

D. $\frac{27}{100}.$

小测两次机会，11 ～ 15是第二次不一样的题目

11.设一公交车站单位时间内等车的人数服从参数为4的泊松分布，现独立观察4个单位时间，X表示单位时间内无人等车出现的次数，则$P(X=0)=$ $\underline{(1-e^{-4})^4}$

12.有六张卡片，其中两张有特别标识，抽到此种卡片表示获奖，现有六个人依次不放回各抽一张卡片。则以下选项正确的是 $\underline{\quad A \quad}$

A. 第三个人获奖的概率为1/3

B. 第一个人获奖的概率为1

C. 第二个人获奖的概率为1/5

D. 第六个人获奖的概率为1

13.某射手有5发子弹，每次射击命中率为0.6，射击独立进行，如果命中目标就停止射击，不命中就一直到用完5发子弹后停止射击。则在他停止射击时，以下选项错误的是 $\underline{\quad BC \quad}$

A. 至少用3发子弹的概率为0.16

B. 至少用3发子弹的概率为0.064

C. 至少用5发子弹的概率为~~0.01024~~ $0.4^4=0.0256$

D. 恰好用3发子弹的概率为0.096

14.(多选题)设随机变量服从参数为1/3的指数分布，对X独立重复观察3次，以Y表示$\{X>3\}$出现的次数，则以下选项正确的有 $\underline{\quad ABCD \quad}$

A. $P(X\geq 3)=e^{-1}$

B. $P(X<5|X<2)=P(X<3)$

C. 当$x>0$时，X的分布函数为$F(x)=1-e^{-x/3}$

D. $P(Y<3)=1-e^{-3}$

15.(多选题)设随机变量X的分布律如下：

X	-1	1	2
p	$1/3$	$1/2$	$1/6$

X的分布函数为$F(x)$, 则以下选项正确的有 $\underline{\quad AD \quad}$

A. 当$1<x<2$时，$F(x)=5/6$

B. $P(1<X\leq 5/2)=2/3$

C. $P(X\leq 1)=1/2$

D. 当$0\leq x<1$时，$F(x)=1/3$

by hyw

Exercise

2025 概率论小测一

3.5学分.

一. 将 m 个不同的小球等可能地放入 n 个不同的盒子, $m > n$. 求无空盒出现的概率.

$\dfrac{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m}{n^m}$

二. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为一列相互独立的事件(即它们中任意有限个都是相互独立的), $P(B_n) = p_n$, $0 < p_n < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$. 证明

$$P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n\right) = 1, \ \forall m.$$

$P(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n) = 1 - P(\bigcap_{n=m}^{\infty} \overline{B_n})$ 凑相互独立.

$= 1 - \prod_{n=m}^{\infty}(1-P_n).$

由 $1-P_n \le e^{-P_n}$ 知 $\prod_{n=m}^{\infty}(1-P_n) \le e^{-\sum_{n=m}^{\infty} P_n} = 0$ #.

三. 考虑进行 n 次独立试验, 第 i 次试验成功的概率为 $\frac{1}{2i+1}$. 令 P_n 表示总的成功次数为奇数的概率.

1. 导出用 P_{n-1} 表示 P_n 的递推公式; $P_n = \frac{2n}{2n+1}P_{n-1} + \frac{1}{2n+1}(1-P_{n-1})$ $= \frac{2n-1}{2n+1}P_{n-1} + \frac{1}{2n+1}$
2. 导出 P_n 的表达式. $P_n = \frac{n}{2n+1}$

四. 假设 E, F 为任意两个事件, $P(F) > 0$. 证明 $P(E|E \cup F) \geq P(E|F)$. $\Leftrightarrow P(E)P(F) \ge P(E\cup F)P(E\cap F)$.

$\Leftrightarrow P(E)[\lambda - P(E)] \ge P(EF)[\lambda - P(EF)]$

不妨 $P(E) \le P(F)$.

其中 $\lambda = P(E) + P(F)$.

$= P(E\cup F) + P(E\cap F)$

同构.

2025 SZG 概率论小测一

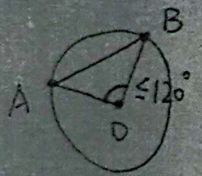
一、A, B为两个事件，求证：

(1). $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$; (2). $P(A)P(B)-P(A\cap B)\leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)\leq 1$. 显然

$= P(A)[P(AB)+P(\overline{A}B)]-P(AB) = P(A)P(\overline{A}B)-P(AB)[1-P(A)] \leq P(A)P(\overline{A}B) \leq P(A)P(\overline{A}) \leq \frac{1}{4}$.

二、在单位圆周上，独立等可能地选取两点A、B，以弦AB为边构造等边三角形$\triangle ABC$。求$\triangle ABC$可以完全放进单位圆内的概率？



$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

三、(1) 若$P(A|B)=0.3$, $P(\overline{A}|\overline{B})=0.8$, $P(B)=0.4$，求$P(B|A)$？

(2) 若事件A, B互不相容，$P(C)=\frac{1}{6}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{18}$, $P((A\cup B)|C)=\frac{8}{9}$，求$P(A|C)$？

三. (1) $P(AB)=0.12$, $P(\overline{B})=0.6$, $P(\overline{A}\overline{B})=0.48$. $\therefore P(A)=0.24$

$P(A\overline{B})=0.12$ $\quad P(B|A)=\frac{1}{2}$

(2) $P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)=\frac{8}{9}$. $\quad P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(A|C)=\frac{5}{9}$