

2022-2023学年春夏学期数学分析(甲)II(H)第二次小测

1. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义, 并且 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的所有方向导数都存在, 则以下说法错误的是()。

多选题(10分)

A. 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ 一定都存在.

B. f 一定在点 P_0 处可微.

C. f 一定在点 P_0 处连续.

D. f 在点 P_0 处不一定连续.

2. 设函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 则下述命题不正确的是()。

单选题(10分)

A. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y), \lim_{y\rightarrow 0} \lim_{x\rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x\rightarrow 0} \lim_{y\rightarrow 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有两个存在.

B. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y), \lim_{y\rightarrow 0} \lim_{x\rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x\rightarrow 0} \lim_{y\rightarrow 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有一个存在.

C. 若 $\lim_{y\rightarrow 0} \lim_{x\rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x\rightarrow 0} \lim_{y\rightarrow 0} f(x, y)$ 都存在, 则它们必然相等.

D. 若 $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y)$ 和 $\lim_{x\rightarrow 0} \lim_{y\rightarrow 0} f(x, y)$ 都存在, 则它们必然相等.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), 1)$ 上有定义, 下面有关 $f(x, y)$ 的四个命题:

(1) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;

(2) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微;

(3) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的两个偏导数 $f'_1(x_0, y_0), f'_2(x_0, y_0)$ 存在;

(4) $f(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), 1)$ 上每点 (x, y) 处 $f'_1(x, y), f'_2(x, y)$ 都存在, 且 $f'_1(x, y), f'_2(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

若用 $P \Rightarrow Q$ 表示命题 P 可推出命题 Q , 则有()。

单选题(10分)

A. (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).

B. (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).

C. (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).

D. (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1).

4. 设 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上具有连续的偏导数, 且 $f(1, 1) = 1, f'_x(1, 1) = 1, f'_y(1, 1) = 2$. 如果 $\varphi(x) = f(x, f(x, x^2))$, 则 $\varphi'(1) = ()$.

单选题(10分)

A. 7

B. 3

C. 5

D. 11

5. 曲线 $\Gamma: \int x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线一定平行于()

$$x + y + z = 0$$

单选题(10 分)

- A. 平面 $x + y + z = 0$.
- B. 坐标平面 YOZ.
- C. 坐标平面 ZOX.
- D. 坐标平面 XOY.

6. 设函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的某个邻域内有定义且在点 $(0, 0)$ 处连续, 则下述命题正确的是()。

单选题(10 分)

- A. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
- B. 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在.
- C. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
- D. 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

7. 设二元函数 $\varphi(u, v)$ 在 \mathbb{R}^2 上有所有的二阶偏导函数, 且所有的二阶偏导函数在 \mathbb{R}^2 上连续. 再设 $z = \sin(xy) + \varphi(x+y, \frac{x}{y})$, 则下述结论正确的有()。

多选题(10 分)

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$.
- B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \varphi''_{11}(x+y, \frac{x}{y}) + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}) \varphi''_{12}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} \varphi''_{22}(x+y, \frac{x}{y})$.
- C. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \varphi''_{11}(x+y, \frac{x}{y}) + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}) \varphi''_{12}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} \varphi''_{22}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$.
- D. $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$.

8. 二元函数 $u = u(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上可微, 且当 $y = x^2$ 时, 有 $u(x, y) = 1$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = x$, 则当 $y = x^2 (x \neq 0)$ 时, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = ()$.

单选题(10 分)

- A. $\frac{1}{2}$.
- B. $-\frac{1}{2}$.
- C. 0.
- D. 1.

9. 下述命题中正确的有()。

多选题(10 分)

- A. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 在点 $(3, 4)$ 处沿方向 $\vec{l} = (3, 4)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right|_{(3,4)} = \frac{1}{5}$.
- B. $f(x, y) = x^2 y (4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D 上的最大值为 4, 最小值为 -64.

C. $z = z(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 满足方程 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{-x^2 y^2}$.

D. 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 上点 $(1, -1, 1)$ 处的切平面方程为 $x - 2y + 3z = 6$.

E. $z = z(x, y) = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ 满足方程 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

10. 设 $f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^2 + dy^3 + 2xy$, 其中 a, b, c, d 为常数。则满足条件() 的点 (x_0, y_0) 必定不是 $f(x, y)$ 的极值点.

单选题(10 分)

A. $3ax_0 + b > 0$ 且 $(3ax_0 + b)(3dy_0 + c) > 1$.

B. $(3ax_0 + b)(3dy_0 + c) = -1$.

C. $3ax_0 + b < 0$ 且 $(3ax_0 + b)(3dy_0 + c) > 1$.

D. $(3ax_0 + b)(3dy_0 + c) = 1$.

数学分析第二次小测

汤俊浩

May 25, 2023

1

1. 设 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上具有连续的偏导数, 且 $f(1, 1) = 1, f'_x(1, 1) = 1, f'_y(1, 1) = 2$. 如果 $\varphi(x) = f(x, f(x, x^2))$, 则 $\varphi'(1) = (\quad)$.
- 单选题(10分) (难易度: 中)



答题数据分析 答对: 87 答错: 17 未答: 11 正确率: 83.65%

Figure 1:

$$\varphi(x) = f(x, f(x, x^2)), \text{ 记 } g(x) = f(x, x^2). \text{ 则 } g'(x) = f'_x(x, x^2) + f'_y(x, x^2)(2x).$$

$$\varphi'(x) = f'_x(x, g(x)) + f'_y(x, g(x)) * g'(x)$$

由于 $g(1) = f(1, 1) = 1, g'(1) = f'_x(1, 1) + f'_y(1, 1) * 2 = 5$,

$$\varphi'(1) = f'_x(1, g(1)) + f'_y(1, g(1)) * g'(1) = f'_x(1, 1) + f'_y(1, 1) * 5 = 11$$

2

2. 设 $f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cy^2 + dy^3 + 2xy$, 其中 a, b, c, d 为常数. 则满足条件(\quad)的点 (x_0, y_0) 必定不是 $f(x, y)$ 的极值点.
- 单选题(10分) (难易度: 中)



答题数据分析 答对: 81 答错: 23 未答: 11 正确率: 77.88%

Figure 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2 + 2bx + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 3dy^2 + 2cy + x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3ax^2 + 2bx + y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6dy + 2c,$$

$$\text{Hesse 矩阵 } A = \begin{pmatrix} 6ax + 2b & 1 \\ 1 & 6dy + 2c \end{pmatrix}$$

A 的顺序主子式 $|A_1| = 6ax + 2b, |A_2| = 4(3ax + b)(3dy + c) - 1$.

若 $|A_1| > 0, |A_2| > 0$, 则 A 正定, 此时在驻点处取得极小值. 若 $|A_1| < 0, |A_2| > 0$, 则 A 负定, 此时在驻点处取得极大值. 若 $|A_2| < 0$, 则 A 不定, 此时不能取得极值.

3

3. 设函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 则下述命题不正确的是().

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. 若 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 都存在, 则它们必然相等. 7人 6.5%
- B. 若 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 都存在, 则它们必然相等. 98人 90.7%
- C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有一个存在. 1人 0.9%
- D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 有可能三者恰有两个存在. 2人 1.9%

答题数据分析 答对: 98 答错: 10 未答: 7 正确率: 90.74%

Figure 3:

重极限与累次极限的关系反映在下面的命题中.

命题 18.1.1 当重极限存在且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 时,

- (1) 如果 $y \neq y_0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 则 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A$;
- (2) 如果 $x \neq x_0$ 时, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A$.

由此命题可见: 当重极限和某个累次极限都存在时, 则该累次极限的值应该等于重极限的值. 但在一般情况下, 重极限与累次极限没有什么必然的关系.

当重极限存在时, 两个二次极限可以都不存在, 也可以一个存在而另一个不存在, 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

此时 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在.

当重极限不存在时, 可以是两个二次极限存在且相等, 也可以是两个二次极限存在但不相等, 还可以是两个二次极限中一个存在而另一个不存在. 例如

$$f(x, y) = \frac{y}{x}, \text{ 当 } x \neq 0,$$

显然有 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, 但是 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 与 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 都不存在.

Figure 4:

参考谢惠民《数学分析习题课讲义(下册)》. 图4.

4. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义, 并且 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的所有方向导数都存在, 则以下说法错误的是()。

多选题(10 分) (难度: 中)

- | | | |
|---|------------|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> A. f 一定在点 P_0 处可微. | 100人 92.6% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> B. f 一定在点 P_0 处连续. | 87人 80.6% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> C. 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ 一定都存在. | 50人 46.3% | |
| <input type="checkbox"/> D. f 在点 P_0 处不一定连续. | 18人 16.7% | |

答题数据分析 答对: 39 答错: 69 未答: 7 正确率: 36.11%

Figure 5:

4

B

以下例子来源于汪林《实分析中的反例》.

考虑

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

首先证明 f 在 $(0, 0)$ 处沿任意方向都可微. 取

$$F(t) = f(t \cos \theta, t \sin \theta) = \begin{cases} \frac{(t \cos \theta)^5}{((t \sin \theta) - (t \cos \theta)^2)^2 + (t \cos \theta)^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

当 $\sin \theta \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos^5 \theta}{(\sin \theta - t \cos^2 \theta)^2 + t^4 \cos^6 \theta} = 0 \end{aligned}$$

当 $\sin \theta = 0$ 时,

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^5 \theta}{\cos^4 \theta + t^2 \cos^6 \theta} = \cos \theta \end{aligned}$$

因此函数 f 在 $(0, 0)$ 处沿任意方向都可微. 但是点 (x, y) 沿曲线 $y = x^2$ 趋近于 $(0, 0)$ 时, 极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=x^2} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=x^2} \frac{1}{x}$$

不存在, 从而极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在. 因此, 函数 f 在 $(0, 0)$ 不连续.

A,C

若 f 在 P_0 处不连续, 则显然不可微.

另外, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ 存在要求两侧的方向导数存在且相等, 上述例子中的 f 即不满足此条件.

5

参考谢惠民《数学分析习题课讲义(下册)》. 图7.

5. 设函数 $f(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), 1)$ 上有定义, 下面有关 $f(x, y)$ 的四个命题:
- (1) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;
 - (2) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微;
 - (3) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的两个偏导数 $f'_1(x_0, y_0), f'_2(x_0, y_0)$ 存在;
 - (4) $f(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0), 1)$ 上每点 (x, y) 处 $f'_1(x, y), f'_2(x, y)$ 都存在, 且 $f'_1(x, y), f'_2(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.
- 若用 $P \Rightarrow Q$ 表示命题 P 可推出命题 Q , 则有() .

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). 6人 5.8%
- B. (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1). 3人 2.9%
- C. (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3). 90人 86.5%
- D. (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). 5人 4.8%

答题数据分析 答对: 90 答错: 14 未答: 11 正确率: 86.54%

Figure 6:

多元函数在一个点处的连续性、偏导数存在性及可微性之间有下列关系:

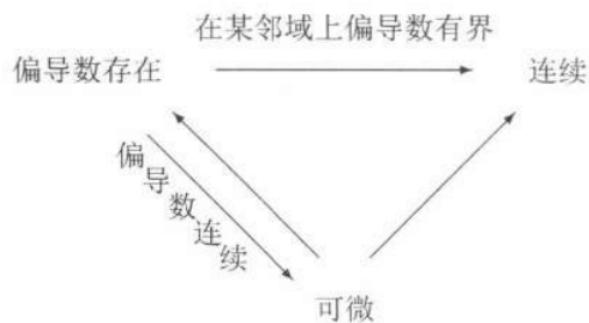


Figure 7:

(2) \Rightarrow (1),(3)

$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 即存在常数 A, B 使得 $f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(r)$, 其中 $o(r)$ 为 $r \rightarrow 0$ 时关于 r 的高阶无穷小量. 显然 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数存在. 例如

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(r)}{x - x_0} = A$$

(4) \Rightarrow (2)

我们来证明此时有 $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(r)$, 利用中值定理

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

记 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| &= \left| \frac{(f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0))\Delta x + (f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0))\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \\ &\leq |(f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0))| + |(f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0))| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

6

6. 二元函数 $u = u(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上可微, 且当 $y = x^2$ 时, 有 $u(x, y) = 1$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = x$, 则当 $y = x^2$ ($x \neq 0$) 时, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (\quad)$.

单选题(10分) (难度: 中)

- | | | |
|--|-----------|--|
| <input type="radio"/> A. $\frac{1}{2}$. | 17人 15.9% | |
| <input checked="" type="radio"/> B. $-\frac{1}{2}$. | 85人 79.4% | |
| <input type="radio"/> C. 0. | 2人 1.9% | |
| <input type="radio"/> D. 1. | 3人 2.8% | |

答题数据分析 答对: 85 答错: 22 未答: 8 正确率: 79.44%

Figure 8:

记 $f(x) = u(x, x^2) \equiv 1$. 故 $f'(x) \equiv 0 = u'_x(x, x^2) + u'_y(x, x^2) * (2x)$. 故 $u'_y(x, x^2) \equiv -\frac{1}{2}$

7

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos(xy)y + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) + \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})(\frac{1}{y}) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \cos(xy)x + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) + \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \cos(xy) - \sin(xy)xy + \varphi''_{11}(x+y, \frac{x}{y}) + \varphi''_{12}(x+y, \frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) \\ &\quad + \left(\varphi''_{21}(x+y, \frac{x}{y}) + \varphi''_{22}(x+y, \frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) \right) (\frac{1}{y}) + \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})(-\frac{1}{y^2}) \end{aligned}$$

7. 设二元函数 $\varphi(u, v)$ 在 \mathbb{R}^2 上有所有的二阶偏导函数, 且所有的二阶偏导函数在 \mathbb{R}^2 上连续. 再设 $z = \sin(xy) + \varphi(x+y, \frac{x}{y})$, 则下述结论正确的有() .

多选题(10分) (难度: 中)

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$. 104人 96.3%
- B. $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) + \varphi'_1(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$. 104人 96.3%
- C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \varphi''_{11}(x+y, \frac{x}{y}) + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}) \varphi''_{12}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} \varphi''_{22}(x+y, \frac{x}{y})$. 16人 14.8%
- D. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \varphi''_{11}(x+y, \frac{x}{y}) + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}) \varphi''_{12}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^3} \varphi''_{22}(x+y, \frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2} \varphi'_2(x+y, \frac{x}{y})$. 93人 86.1%

答题数据分析 答对: 87 答错: 21 未答: 7 正确率: 80.56%

Figure 9:

8. 曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线一定平行于().

单选题(10分) (难度: 中)

- A. 坐标平面 XOY. 0人 0%
- B. 坐标平面 YOZ. 0人 0%
- C. 坐标平面 ZOX. 99人 91.7%
- D. 平面 $x + y + z = 0$. 9人 8.3%

答题数据分析 答对: 99 答错: 9 未答: 7 正确率: 91.67%

Figure 10:

如果空间曲线 l 是用两个曲面

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

的交线来表示的, 又设 F 和 G 关于 x, y, z 有连续的偏导数. 点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足这一方程组, 即 $F(x_0, y_0, z_0) = 0, G(x_0, y_0, z_0) = 0$, 并且 F, G 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

在点 p_0 的秩为 2, 则曲线 l 在点 p_0 的切向量为

$$\tau = \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right) \Big|_{p_0}.$$

Figure 11:

8

参考谢惠民《数学分析习题课讲义(下册)》. 图11.

$$Jocobi \text{ 矩阵 } J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

该点切向量为 $\tau = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)|_{(1,-2,1)} = (-6, 0, 6)$. 该点的切线方程为

$$\frac{x}{-6} = \frac{z}{6}, y = -2$$

切向量 $\tau \perp \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, 而 $(0, 1, 0)$ 为坐标平面 ZOX 的法向量, 故该点的切线垂直于坐标平面 ZOX.

9

9. 设函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处连续, 则下述命题正确的是()。

单选题(10分) (难度: 中)

- | | |
|---|-----------|
| <input checked="" type="radio"/> A. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微. | 67人 62.6% |
| <input type="radio"/> B. 若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{ x + y }$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微. | 13人 12.1% |
| <input type="radio"/> C. 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{ x + y }$ 存在. | 13人 12.1% |
| <input type="radio"/> D. 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在. | 14人 13.1% |

答题数据分析 答对: 67 答错: 40 未答: 8 正确率: 62.62%

Figure 12:

A

不妨设

$$A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$$

上式极限存在, 显然有 $f(0, 0) = 0$. 则上式可知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{r} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{r^2} * r = 0$$

故 $f(x, y) = f(0, 0) + o(r)$ 即为 $f(x, y)$ 在零点的可微性.

B

考虑 $f(x, y) = |x| + |y|$ 即可. 显然 $f(x, y)$ 满足条件, 但是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数不存在, 进而也不可微.

C,D

考虑 $f(x, y) = x + y$ 即可. 显然 $f(x, y)$ 满足可微条件, 但是两者的极限都不存在.

10

10. 下述命题中正确的有()。

多选题(10分) (难度: 中)

- | | | |
|---|-----------|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> A. $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 在点 $(3, 4)$ 处沿方向 $\vec{l} = (3, 4)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right _{(3,4)} = \frac{1}{5}$. | 86人 80.4% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> B. $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D 上的最大值为 4, 最小值为 -64. | 85人 79.4% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> C. 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 上点 $(1, -1, 1)$ 处的切平面方程为 $x - 2y + 3z = 6$. | 96人 89.7% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> D. $z = z(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 满足方程 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{-x^2 y^2}$. | 82人 76.6% | |
| <input checked="" type="checkbox"/> E. $z = z(x, y) = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ 满足方程 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. | 93人 86.9% | |

答题数据分析 答对: 48 答错: 59 未答: 8 正确率: 44.86%

Figure 13:

A

$$\nabla z = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right|_{(3,4)} = \nabla z \cdot \vec{l} \Big|_{(3,4)} = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{5}$$

B

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2y = xy(8 - 3x - 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2y = x^2(4 - x - 2y)$$

在 $x \neq 0, y \neq 0$ 下解 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 得到 $x = 2, y = 1$. 此时 $f(2, 1) = 4$.

再来考虑边界处, $x = 0$ 或 $y = 0$ 时, $f(x, y) = 0$. $x + y = 6$ 时, $f(x, y) = x^2(6 - x)(-2) = 2x^3 - 12x^2$. 通过求导知 $x = 4$ 取极小值, $f(4, 2) = -64$.

C

法向量 $\vec{n} = (F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)) = (2x, 4y, 6z)$ 切平面 $2(x-1) - 4(y+1) + 6(z-1) = 0$, 即 $x - 2y + 3z = 6$.

D

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2 y^2} * y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2 y^2} * x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-x^2 y^2} * (-2xy^3), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-x^2 y^2} * (1 - 2x^2 y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2 y^2} * (-2x^3 y)$$

E

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z * \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z * \frac{1}{y^2}$$

2023-24春夏学期...

剩余时间：15:50

1. 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，则以下情形可能发生的是（ ）.
- 多选题(10分)

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 都存在，但 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 不存在.
- B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 都存在，但至少两个不相等.
- C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 都存在但不相同.
- D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ 存在，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 不存在.

ACD

2. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P(1, -2)$ 处连续，且满足

$$f(x, y) = 5 + x - y + x^2 + 4(x-1)(y+2) + (y+2)^2 + o((x-1)^2 + (y+2)^2). (x \rightarrow 1, y \rightarrow -2)$$

则下列结论正确的有（ ）.

多选题(10分)

CD

- A. $f(x, y)$ 在 $(1, -2)$ 处取到极值.

- B. $f'_x(1, -2) = 1$.

- C. $df|_{(1,-2)} = 3dx - dy$.

- D. 曲面 $z = f(x, y)$ 在 $(1, -2)$ 处的切平面方程为 $z = 3x - y + 4$.

3. 二元函数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ 在 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ 上的最大值为(B).

单选题(10分)

- A. $\frac{5}{4}$.

- B. 1 .

- C. $\frac{3}{4}$.

- D. $\frac{1}{4}$.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则下述结论不正确的有(D).

单选题(10分)

- A. f 在 $(0, 0)$ 处可求偏导.

- B. f 在 $(0, 0)$ 处可微.

- C. f 在 $(0, 0)$ 处连续.

- D. f 在 $(0, 0)$ 处不可微.

D

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上处处存在所有连续的二阶偏导函数，且在点 $(0, 0)$ 处取极大值，则必有 (B).

单选题(10 分)

A. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) < 0.$

B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) \leq 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) \leq 0.$

C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) > 0.$

D. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) \geq 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) \geq 0.$

6. 曲线 $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ 2z = xy \end{cases}$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切线方程为 (A)

单选题(10 分)

A. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{3}.$

B. $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ x+2y-2z=3 \end{cases}$

C. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}.$

D. $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x-y-2z=-2 \end{cases}$

7. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} \cdot \tan(x^2+y^2), & (x, y) \in O((0, 0), 1) \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $df|_{(0,0)} = (B).$

单选题(10 分)

A. $-dx - dy.$

B. $dx - dy.$

C. $-dx + dy.$

D. $dx + dy.$

8. 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域 $O((x_0, y_0), 1)$ 内有定义，则下述正确的有 (ABD)

多选题(10 分)

A. 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 处连续.

B. 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在.

C. 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，且在 $O((x_0, y_0), 1)$ 上每点处关于 x 可求偏导，则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

D. 若 f 在 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 处可求偏导.

9. 设二元函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上处处可微. 已知 $f(1, 2) = 2, f'_1(1, 2) = 3, f'_2(1, 2) = 4$. 令 $\varphi(t) = f(t, f(t, 2t))$, 则 $\varphi'(1) = (A)$.

单选题(10 分)

A. 47.

B. 11.

C. -11.

D. 其余三个选项均不正确.

10. 设 $z = f(x, y)$ 在 $(1, 2)$ 处有一阶连续偏导数, 且沿 $\vec{u} = (3, 4), \vec{v} = (4, -3)$ 在 $(1, 2)$ 处的方向导数

$$\text{为 } \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 18, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -1,$$

则 $z = f(x, y)$ 在 $(1, 2)$ 处的全微分为()

单选题(10 分)

D

A. $dz = 2dx + 3dy$.

B. $dz = 15dx + 10dy$.

C. $dz = 18dx - dy$

D. $dz = 10dx + 15dy$.

1. 下述二重极限存在的有()。

单选题 (10 分) (难易度: 中)

A. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

100人 84%



B. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

7人 5.9%

C. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

6人 5%

D. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

6人 5%

3. 设 $f(x, y)$ 的两个一阶偏导函数存在, 且恒有 $f'_x(x, y) > 0, f'_y(x, y) < 0$, 则 () .

单选题 (10分) (难度: 中)

- A. $f(0, 0) < f(1, 1)$ 1人 0.9% 
- B. $f(0, 0) > f(1, 1)$ 2人 1.7% 
- C. $f(0, 1) < f(1, 0)$ 108人 93.9% 
- D. $f(0, 1) > f(1, 0)$ 4人 3.5% 

7. 设 D 是 \mathbb{R}^2 的子集, f 是 D 上连续函数, 且 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在 D 的内部恒等于0. 则当以下那个条件满足时, f 不一定是常值函数. ()

单选题 (10分) (难度: 中)

A. 闭区域

31人 27.9%



B. 开区域

4人 3.6%



C. 开集

68人 61.3%



D. 凸开域

8人 7.2%



6. 若二元函数 $f(x, y)$ 的偏导数 f_x 与 f_y 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内存在，且在点 P_0 处不连续，则下述结论正确的是()。

单选题 (10 分) (难度: 中)

- A. $f(x, y)$ 在 P_0 处可微，且 $df|_{P_0} = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$.
- B. $f(x, y)$ 在 P_0 处不可微.
- C. $f(x, y)$ 在 P_0 处沿任意方向都存在方向导数.
- D. $(0, 1, f_y(P_0))$ 是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切向量.

2人 1.8%

26人 23.4%

18人 16.2%

65人 58.6%

9. 多选题(10 分)

中

设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则有().

- A | $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处一阶偏导数存在.
- B | $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.
- C | $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处沿任意方向的方向导数存在.
- D | 若 $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，则 $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

5. 单选题(10 分)

中

设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} \sin(x^2y), & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 则
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ ().

A 等于2

B 等于1

C 等于0

D 不存在

2. 单选题(10 分)

中

设函数 $z = z(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上处处存在所有连续的二阶偏导函数，且在点 $(0, 0)$ 处取极大值，则必有 () .

- A | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) \geq 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) \geq 0$
- B | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) \leq 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) \leq 0$
- C | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) < 0$
- D | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) > 0$

3. 单选题(10 分)

中

设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，且

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的
() .

A | 不是极值点

B | 极小值点

C | 极大值点

D | 不能判断是否极值点.

4. 单选题(10 分)

中

设二元函数 $f(x, y)$ 可微, 且

$$f(x+1, e^x) = x^2(x+1), f(x, x^2) = x \ln x,$$

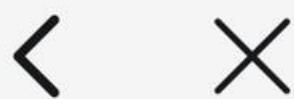
则 $df|_{(1,1)} = (\quad).$

A | dy

B | $dx - dy.$

C | $dy - dx.$

D | $dx.$



7/10



答题卡

7. 单选题(10分) 中

$$\text{曲线 } \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

在点(1, -2, 1)处的切线一定平行于 ().

A | 坐标平面XOY.

B | 平面 $x + y + z = 0$.

C | 坐标平面ZOX.

D | 坐标平面YOZ.



下一题

7. 单选题(10 分)

中

设 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 则下述命题中不正确的是().

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

- A $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 三者有可能刚好有两个存在.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

- B $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 三者有可能都不存在.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

- C $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 三者有可能只有一个存在.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y),$$

- D $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 三者若有两个存在, 则一定相等.



下一题

8. 多选题(10 分)

中

设 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，则以下说法正确的是（ ）。

若 f 在 P_0 处关于任一方向 \vec{u} 的方向导数

A $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right|_{P_0}$ 存在，则 f 在 P_0 处可微。

若 f 在 P_0 处可微，则 f 在 P_0 处关于任

B 一方向 \vec{u} 的方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right|_{P_0}$ 存在。

若 f 的偏导数 f_x 与 f_y 在 $U(P_0)$ 内存

C 在，且在点 P_0 处连续，则 f 在 P_0 处可微。

若 f 在 P_0 处关于任一方向 \vec{u} 的方向导

D 数 $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right|_{P_0}$ 存在，则 f 在 P_0 处连续。

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域 U 内有定义. 下面有4个命题:

$P_1 : z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;

$P_2 : z = f(x, y)$ 的两个偏导函数

$f'_1(x, y), f'_2(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;

$P_3 : z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微;

$P_4 : z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的两个偏导函数

$f'_1(x_0, y_0), f'_2(x_0, y_0)$ 存在.

则下述正确的是().

A | $P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_1$

B | $P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_1$

C | $P_3 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_4$

D | $P_3 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_1$