

数论模型

题目 3.

n 名同学正在老师的带领下与亚运会吉祥物“江南忆”做游戏. 游戏开始前, 同学可以商定在游戏中采取的策略, 但游戏进行过程中, 同学之间不能互相交流. 游戏开始时, 老师在每位同学的背后贴上印有三个吉祥物“琮琤”“宸宸”和“莲莲”之一的图案, 不同同学背后的图案可以不同. 每个同学不能看到自己背后的图案, 但能看到除他自己外所有其他同学的图案.

(1) 现老师要求所有同学分站为 3 列. 每列所有同学背后的图案均完全相同时, 视为“成功”. 试给出一种策略, 使成功的可能性尽可能大;

(2) 现老师要求每位同学同时在纸上画出自己背后的图案. 一位同学所画的图案与自己背后的图案相同时视为该同学“成功”. 试给出一种策略, 使该策略能确保成功的同学数量尽可能多.

解答.

(1) 所有人约定: 视“琮琤”为 0, “宸宸”为 1, “莲莲”为 2, 并不妨假设所有人的数字和为 $S \equiv 0(\text{mod } 3)$.

接着游戏开始, 第 i 位同学计算其他同学的数字和 T_i , 然后推断自己的数字为 $x_i \equiv (S - T_i)(\text{mod } 3)$, 接着:

- 若 $x_i = 0$, 站到第 1 列;
- 若 $x_i = 1$, 站到第 2 列;
- 若 $x_i = 2$, 站到第 3 列.

显然, 即使数字和 S 推断错误, 所有数字相同的人仍然会站到同一列, 可以保证 100% 成功.

(2) 由于三个吉祥物本质相同 (完全对称), 因此能确保成功的同学不会超过 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 位, 下面给出构造:

将所有同学平均分成三组, 第一组约定 $S \equiv 0(\text{mod } 3)$, 第二组约定 $S \equiv 1(\text{mod } 3)$, 第三组约定 $S \equiv 2(\text{mod } 3)$.

采取同样的推断方式, 可以保证至少 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 位同学成功.

题目 4.

“猜猜我是谁”是一款益智游戏. 两人各持一套完全相同的卡牌, 每套卡牌共有 n 张. 每张卡牌上绘有一个头像, 不同卡牌上的头像具有不同的特征. 对任意卡牌子集, 均存在一个只有该子集中卡牌头像才有的特征, 如男性, 戴眼镜的中年妇女等. 游戏时甲从自己的卡牌中选择一张, 乙可询问甲所选择的卡牌头像是否具有某种特征. 乙希望用最少的询问次数找出甲所选择的卡牌.

(1) 若每次甲作出回答后, 乙进行下一次提问, 甲每次给出的回答均是正确的, 试给出乙的最优策略;

(2) 若乙提出所有问题后, 甲再给出全部问题的回答, 且甲至多有一次回答“不知道”, 其他问题的回答均是正确的. 乙又应采取怎样的策略.

解答.

(1) 即自适应提问. 题意等价于甲选择一个数 $x \in [1, n]$, 乙每次可以挑选一个集合 $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 甲回答 $[x \in S]$.

这显然可以采取二分查找, 乙每次选择一个特征, 使得当前所有可能的卡牌集被划分成两部分 (尽可能相等).

根据甲的回答, 每次可以排除一半数目的卡牌. 重复此过程, 直至剩一张卡牌, 即为 x .

这样操作, 可以得到最优询问次数 $\lceil \log_2 n \rceil$.

(2) 即非自适应提问. 乙预先选择 m 个特征, 为每张卡牌分配一个长度为 m 的向量 (0 为“否”, 1 为“是”).

由于甲可以回答一次“不知道”，我们必须保证任意两个不同的卡牌向量至少有两个对应位置不同。

考虑抽屉原理，对于每一个 1 的个数为偶数的向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ，向量 $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m \oplus 1)^T$ 与其不能共存，两者构成一个抽屉。于是我们得到了 2^{m-1} 个抽屉，每个抽屉中至多选取 1 个向量，于是得到理论上界能取出 2^{m-1} 个向量。

构造是平凡的，我们取所有 1 的个数为偶数的向量，显然它们来自不同的抽屉，并且至少有两个对应位置不同。于是只需要 $2^{m-1} \geq n$ 即可，得到最优询问次数 $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ 。

题目 5.

现有三个容积均为 $n \in \mathbb{N}$ 的容器，盛水量总和为 n 。一次合法的倾倒在两个容器间进行，即将两个容器中盛水多的容器中的水注入盛水少的容器中，使盛水少的容器中的水量加倍。即若倾倒下它们的盛水量分别为 x 和 y ，其中 $x \leq y$ ，则倾倒下它们的盛水量分别为 $2x$ 和 $y - x$ 。

(1) 设 a, b, c 为正整数，其中 $a \leq b \leq c$ ， $p = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ ， $q = \lceil \frac{b}{a} \rceil$ ， $k = \lfloor \log_2 p \rfloor$ 。证明： $\min(b - pa, qa - b) \leq \frac{a}{2}$ 且 $c \geq 2^k a$ ；

(2) 证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为 a, b, c ，其中 $a \leq b \leq c$ 且 $b - pa \leq \frac{a}{2}$ ，则必可通过不超过 $k + 1$ 次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过 $\frac{a}{2}$ ；

(3) 证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为 a, b, c ，其中 $a \leq b \leq c$ 且 $qa - b \leq \frac{a}{2}$ ，则必可通过不超过 $\lfloor \log_2 q \rfloor + 1$ 次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过 $\frac{a}{2}$ ；

(4) 证明：只要三个容器中的盛水量均为整数，总可通过不超过 $(\log_2 n)^2$ 次合法倾倒，使其中一个容器中的水量为 0。

解答.

假设三个容器分别为 A, B, C 。

(1) 记 $b = pa + r$ ，显然 $0 \leq r < a$ 。因此 $\min(b - pa, qa - b) \leq \min(r, a - r) \leq \frac{a}{2}$ 。

由 $2^k \leq p$ 知 $2^k a \leq pa \leq b \leq c$ 。

(2) 记 p 的二进制表示为 $p = (\overline{p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0})_2$ ，其中 $p_k = 1$ 。我们采用构造性证明：

- 按照 p_0, p_1, \dots, p_{k-1} 的顺序依次遍历。假设当前处理到了 p_i ：
 - 若 $p_i = 0$ ，则将 C 倒向 A ，即 $(a, b, c) \rightarrow (2a, b, c - a)$ ；
 - 若 $p_i = 1$ ，则将 B 倒向 A ，即 $(a, b, c) \rightarrow (2a, b - a, c)$ 。

经过如上 k 次倾倒，最初的 (a, b, c) 变成了 $(2^k a, b', c')$ 。

此时再将 B 倒向 A ，显然 B 剩余的水量为 $b' - 2^k a = b - pa \leq \frac{a}{2}$ ，共用 $k + 1$ 次倾倒实现了构造。

(3) 记 q 的二进制表示为 $q = (\overline{q_t q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2$ ，其中 $t = \lfloor \log_2 q \rfloor$ ， $q_t = 1$ 。同样采用构造性证明：

- 按照 q_0, q_1, \dots, q_{t-1} 的顺序依次遍历。假设当前处理到了 q_i ：
 - 若 $q_i = 0$ ，则将 C 倒向 A ，即 $(a, b, c) \rightarrow (2a, b, c - a)$ ；
 - 若 $q_i = 1$ ，则将 B 倒向 A ，即 $(a, b, c) \rightarrow (2a, b - a, c)$ 。

经过如上 t 次倾倒，最初的 (a, b, c) 变成了 $(2^t a, b', c')$ 。而 $(\overline{q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2 < \frac{q}{2}$ ，因此 $b' > b - \frac{q}{2} a \geq 0$ 。

对于容器 C 而言，由 $(\overline{q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2 \leq q - 1 \leq p$ ，因此 $c' \geq c - pa \geq b - pa \geq 0$ 。

由 $qa - b \geq 0$ 知 $2^t a \geq b'$ ，此时再将 A 倒向 B ，显然 A 的剩余水量为 $2^t a - b' = qa - b \leq \frac{a}{2}$ ，共用 $t + 1$ 次倾倒实现了构造。

(4) 当 $n = 1, 2$ 时显然。下考虑 $n \geq 3$ 的情形。

假设当前三个容器的盛水量分别为 (a_0, b_0, c_0) , 其中 $a_0 \leq b_0 \leq c_0$, 记 $q_0 = \left\lceil \frac{b_0}{a_0} \right\rceil$.

由 (2)(3) 知我们可以在 $\lfloor \log_2 q_0 \rfloor + 1$ 步内将 $(a_0, b_0, c_0) \rightarrow (a_1, b_1, c_1)$, 其中 $a_1 \leq b_1 \leq c_1$ 且 $a_1 \leq \frac{a_0}{2}$ (将三个容器按照盛水量大小重标号 A, B, C).

由此可见, 在经过至多 $z = \lceil \log_2 a_0 \rceil$ 轮后, 得到的 (a_z, b_z, c_z) 必然满足 $a_z = 0$. 总合法倾倒数不超过:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{z-1} \left(\left\lfloor \log_2 \left\lceil \frac{b_i}{a_i} \right\rceil \right\rfloor + 1 \right) \\ & \leq \sum_{i=0}^{z-1} \left(\log_2 \left(\frac{n}{a_i} \right) + 1 \right) \\ & \leq 1 + z \log_2 n \\ & \leq 1 + \left\lceil \log_2 \left(\frac{n}{3} \right) \right\rceil \log_2 n \\ & \leq (\log_2 n)^2 \end{aligned}$$

注记.

- 浙江大学 2023-2024 学年春夏学期《数学建模 (H)》课程期末考试