概率论与数理统计

第一章　概率论的基本概念

- 样本空间，随机事件
- 频率与概率
- 等可能概型
- 条件概率
- 事件的独立性与独立试验

1.1 样本空间·随机事件

自然界与社会生活中的两类现象

- 确定性现象
- 不确定性现象

- 确定性现象：结果确定
- 不确定性现象：结果不确定

例1.1

- 向上抛出的物体会掉落到地上

（确定）

- 打靶，击中靶心

（不确定）

- 买了彩票会中奖

（不确定）

不确定现象 $\begin{cases} \text{个别现象} \\ \text{随机现象} \end{cases}$

在个别试验中其结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性。

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的学科。

对随机现象的观察、记录、实验统称为**随机试验**。它具有以下特性：

- 可以在相同条件下重复进行；
- 事先知道可能出现的结果；
- 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生。

例1.2 观察下列随机试验：

- 抛一枚硬币，观察试验结果；
- 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
- 对某批电子产品测试其输入电压；
- 对听课人数进行一次登记.

(一) 样本空间

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的 样本空间，记为$S=\{e\}$，

称S中的元素e为样本点，一个元素的单点集称为基本事件.

(一)样本空间

定义：随机试验E的所有结果构成的集合称为E的 样本空间，记为$S=\{e\}$，

称S中的元素e为样本点，一个元素的单点集称为基本事件.

例1.3 写出下列试验的样本空间：

- 一枚硬币抛一次，$S=\{$正面，反面$\}$；
- 记录一城市一日中发生交通事故次数，

  $S=\{0, 1, 2, \cdots\}$；
- 记录一批产品的寿命x，$S=\{\ x \mid x\geqslant 0\ \}$；
- 记录某地一昼夜最高温度x，最低温度y

  $S=\{(x,y) \mid T_0\le y<x\le T_1\}$.

（二）随机事件

一般我们称S的子集A为E的随机事件A，简称事件A. 当且仅当A所包含的一个样本点发生称事件A发生。

随机事件有如下特征：

- 事件A是相应的样本空间S的一个子集，其关系可用维恩(Venn)图来表示；
- 事件A发生当且仅当A中的某一个样本点出现；
- 事件A的表示可用集合，也可用语言来表示。

例1.4　观察89路公交车浙大站候车人数。

$S=\{0, 1, 2, \cdots\}$；

$A=\{$至少有10人候车$\}=\{10, 11, 12, \cdots\}$

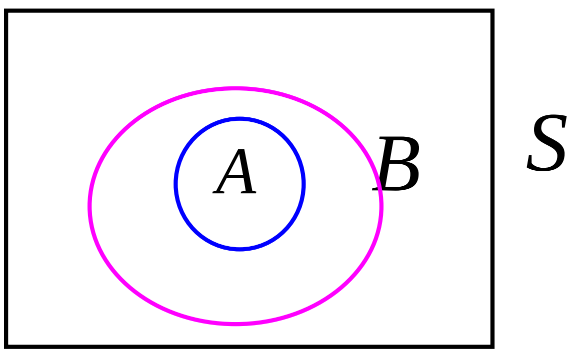
A为随机事件，可能发生，也可能不发生。

- 由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。
- 如果将S亦视作事件，则每次试验S总是发生，故又称S为必然事件。
- 记ϕ为空集，不包含任何样本点，则每次试验ϕ都不发生，称ϕ为不可能事件。

(三) 事件的关系及运算

❖ 事件的包含及相等关系

$1^\circ\ A \subset B$ 事件**A**发生一定导致事件**B**发生.



$$2^\circ\ A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

例1.5 观察下列事件的关系：

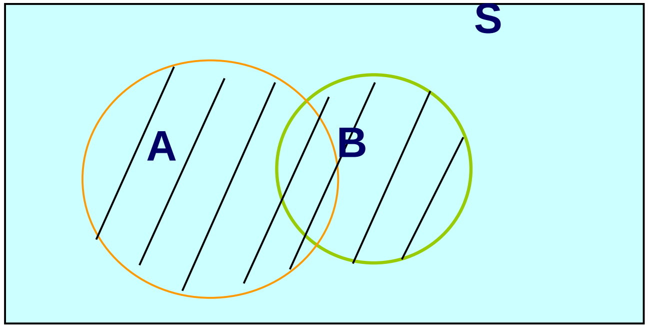
- ✓ 记A={明天天晴}，B={明天无雨}$\Rightarrow B\supset A$
- ✓ 记A={至少有10人候车}，B={至少有5人候车} $\Rightarrow B\supset A$
- ✓ 抛两颗均匀的骰子，两颗骰子出现的点数分别记为x,y. 记A={$x+y$为奇数}，B={两次的骰子点数奇偶性不同}，则 $\Rightarrow B=A$

事件的运算

- $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的**和事件**，记为$A \cup B$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}:$$

A与B至少有一发生。

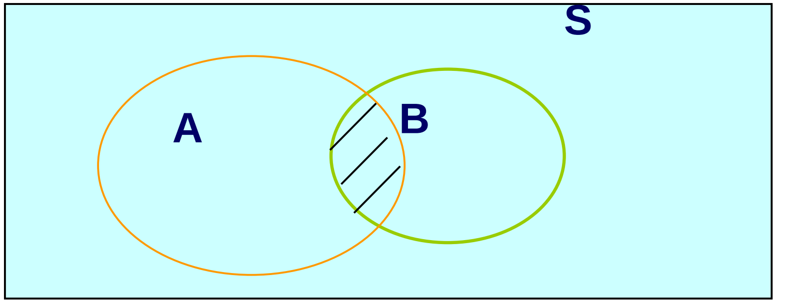


$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: $A_1, A_2, \cdots, A_n$至少有一发生.

- ✓ **A**与**B**的**积事件**，记为$A \cap B, A \cdot B, AB$

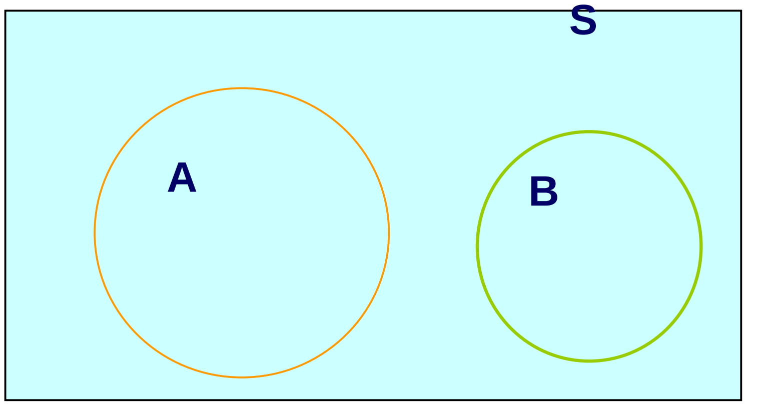
$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}:$$

A与B同时发生。



$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$：$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生.

✓ 当$AB=\phi$时，称事件A与B是互不相容的，或互斥的.

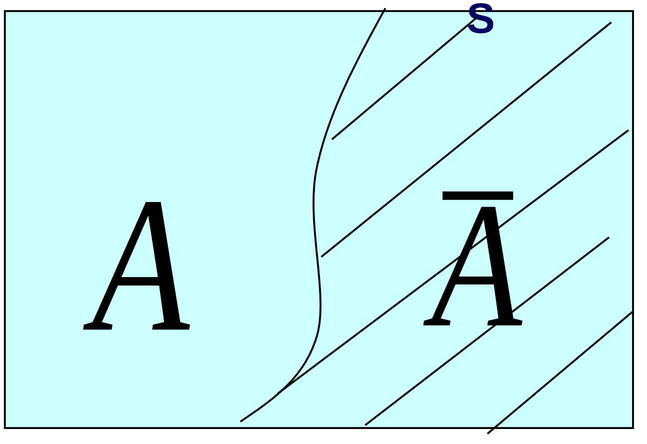


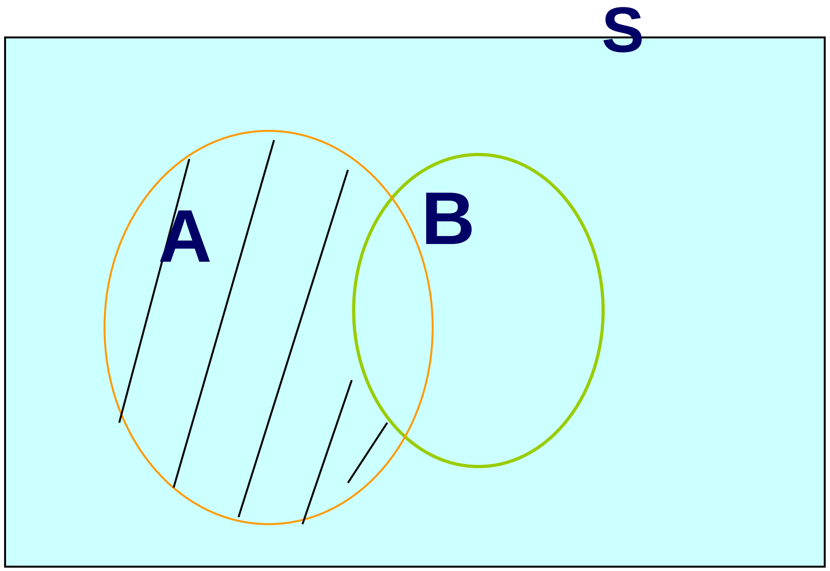
若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j=\phi, i\neq j$,

称$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容.

A的逆事件记为$\bar{A}$（称为A不发生）$\begin{cases} A \cup \bar{A} = S \\ A\bar{A} = \phi \end{cases}$，

若$\begin{cases} A \cup B = S \\ AB = \phi \end{cases}$，称$A, B$互逆（互为对立事件）





事件A对事件B的差事件：A发生且B不发生，

$$A\bar{B}=A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

“和”、“交”关系式——德摩根定律

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n.$$

例1.6 设A={ 甲来听课 }，

B={ 乙来听课 }，则

$$A\bigcup B = \{\text{甲、乙至少有一人来}\}$$

$$A\bigcap B = \{\text{甲、乙都来}\}$$

$$\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\,\overline{B} = \{\text{甲、乙都不来}\}$$

$$\overline{A}\bigcup\overline{B} = \overline{AB} = \{\text{甲、乙至少有一人不来}\}$$

概率中常有以下定义：由n个元件组成的系统，其中一个损坏，则系统就损坏，此时这一系统称为“串联系统”；若有一个不损坏，则系统不损坏，此时这一系统称为“并联系统”。

例1.7 由n个部件组成的系统，记

$A_i=\{$第 i 个部件没有损坏$\}$， $i=1,2,\cdots,n,$

$A=\{$系统没有损坏$\}$, 则

- **串联系统：** $A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

- **并联系统：** $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$

1.2 频率与概率

(一) 频率

定义：记 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$;

其中 $\boldsymbol{n_A}$ —**A**发生的次数（频数）;

n—总试验次数。称 $f_n(A)$ 为**A**在这**n**次试验中发生的频率。

例2.1 2000年悉尼奥运会开幕前，气象学家对两个开幕候选日“9月10日”和“9月15日”的100年气象学资料分析发现，“9月10日”的下雨天数为86天，“9月15日”的下雨天数为22天. 即“9月10日”和“9月15日”的下雨频率分别为86％和22％，因此最后决定开幕日定为“9月15日”。

第二十七届2000悉尼夏季奥运会

- 掷骰子出现“**6**”点的频率＝**1/6**？

频率 $f_n(A)$ 反映了事件A发生的频繁程度。

频率的性质：

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1,$

$2^\circ \quad f_n(S) = 1,$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，

则 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$

例2.2 抛硬币出现的正面的频率

试验序号	n =5		n =50		n =500	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

频率的重要性质：

$f_n(A)$ 随$\boldsymbol{n}$的增大渐趋稳定，记稳定值为$\boldsymbol{p}$.

（二）概率

定义：对样本空间S中任一事件A，定义一个实数$P(A)$，满足以下三条公理：

（1）非负性：$P(A)\geq 0$;

（2）规范性：$P(S)=1$;

（3）可列可加性：若 $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots,$ 两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

称$P(A)$为事件A的概率。

性质：

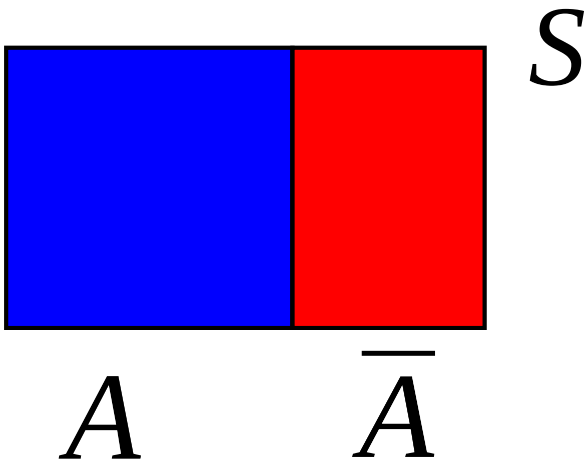
$1^\circ\ P(\phi)=0$

$2^\circ\quad A_1, A_2, \ldots, A_n, A_iA_j=\phi, i\neq j,$:

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

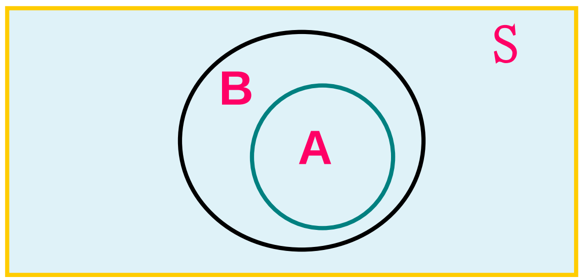
3° $P(A)=1-P(\bar{A})$

证：$\because A\cup\bar{A}=S\Rightarrow P(A)+P(\bar{A})=1$



4° 若$A \subset B$, 则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$, 于是有 $P(A) \leq P(S)=1$

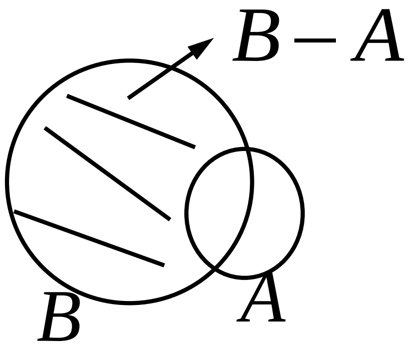


证$: B = A \cup (B-A)$ 不交并

$\Rightarrow P(B)=P(A)+P(B-A)$

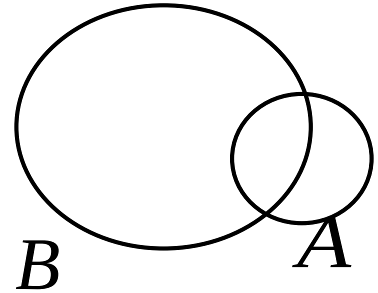
$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

思考题：一般情况下 $P(B-A)=?$



答案：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$

5° 概率的加法公式:



$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证: $\because A\cup B=A\cup(B-A)$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

#5°的推广1：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

证：$P(A \cup B \cup C)$

$$= P(A \cup B) + P(C) - P(AC \cup BC)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

#5°的推广2（一般情形）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例2.3 甲乙丙3人去参加某个集会的概率均为0.4，其中至少有两人参加的概率为0.3，都参加的概率为0.05，求3人中至少有一人参加的概率。

解：设A, B, C分别表示甲, 乙, 丙参加，

由条件知

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0.4,$$

$$P(AB \cup AC \cup BC) = 0.3,$$

$$P(ABC) = 0.05.$$

所求为 $P(A \cup B \cup C)$

由$0.3 = P(AB \cup AC \cup BC)$

$$= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 2P(ABC),$$

得 $$P(AB) + P(AC) + P(BC)$$

$$= 0.3 + 2P(ABC) = 0.4,$$

因此，

$P($甲乙丙至少有一人参加）

$= P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB)$

$- P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.85.$

1.3 等可能概型（古典概型）

定义：若试验E满足：

- S中样本点有限(有限性)
- 出现每一样本点的概率相等(等可能性)

称这种试验为等可能概型(或古典概型)。

$$\Rightarrow P(A)=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{S\text{中的样本点数}}$$

例3.1　一袋中有8个球，其中3个为红球，5个为黄球，设摸到每一球的可能性相等.

（1）从袋中随机摸一球，记A={ 摸到红球 }，求$P(A)$.

（2）从袋中不放回摸两球，记B={恰是一红一黄}，求$P(B)$.

解：（1）$S=\{1,2,\dots,8\}$， $A=\{1,2,3\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{8}$$

$$(2)P(B)=\frac{3\times5+5\times3}{8\times7}$$

$$=\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}.$$

例3.2 有N件产品，其中$D(D\leq N)$件是次品，从中不放回的取$n(n \leq N)$件，记A_k＝{恰有k件次品} $(k\leq D)$，求$P(A_k)$.

解：

$$P(A_k)=\frac{\mathrm{C}_D^k\mathrm{C}_{N-D}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n},\ k=0,1,\cdots,n$$

（注：当$L>m$ 或 $L<0$时，记 $C_m^L=0$）

例3.3　将n个不同的球，投入N个不同的盒中（$n \leqslant N$），设每一球落入各盒的概率相同，且各盒可放的球数不限，记$A=\{$ 恰有n个盒子各有一球 $\}$，求$P(A)$.

解： $P(A)=\dfrac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)}{N^n}=\dfrac{A_N^n}{N^n}.$

- **应用（生日问题）**在一个$\boldsymbol{n}$（≤365）人的班级里，至少有两人生日相同的概率是多少？

记B={至少两人生日相同}

则$p_n \overset{\text{记}}{=} P(B)=1-\dfrac{A_{365}^n}{365^n}.$

- $p_{64}=0.997,$
- $p_{100}=0.9999997.$

例3.4（抽签问题）一袋中有a个红球，b个白球，记$a+b=n$. 设每次摸到各球的概率相等，每次从袋中摸一球，不放回地摸n次。求第k次摸到红球的概率。

记A_k={第**k**次摸到红球}，求 $P(A_k)$.

将***n***个球依次编号为**1**，**2**，**…,*n*,**
其中前***a***号球是红球.

解1：视$1, 2, \cdots, n$的每一个排列为一个样本点，则每个样本点等概率，

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$ ---与***k***无关

解2：视哪几次摸到红球为一样本点，每点出现的概率相等

$$\therefore P(A_k)=\frac{C_{n-1}^{a-1}}{C_n^a}=\frac{a}{a+b}$$

解3：将第k次摸到的球号作为一样本点，

由对称性，取到各球的概率相等，

$$S=\{1,2,\ldots,n\}$$

$$A_k=\{1,2,\ldots,a\}$$

$$\Rightarrow P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b}.$$

例3.5（配对问题）一个小班有n个同学，编号为1, 2, …, n号，中秋节前每人准备一件礼物，相应编号为1, 2, … ,n。将所有礼物集中放在一起，然后每个同学随机取一件，求没有人拿到自己礼物的概率。

解：设A_i表示第i人拿到自己的礼物，

$i=1,2,\ldots,n$，A表示至少有一人拿

到自己的礼物。

$$P(A)=P(A_1\cup\ldots\cup A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\ldots A_n)$$

$$P(A_i) = (n-1)!/n! = 1/n,\quad 共 n 项,$$

$$P(A_i A_j) = (n-2)!/n! = 1/n(n-1),$$

$$i < j,\quad 共 C_n^2 项,$$

$$P(A_i A_j A_k) = (n-3)!/n! = 1/3!C_n^3,$$

$$i < j < k,\quad 共 C_n^3 项,$$

$$P(A_1 \ldots A_n) = 1/n!$$

$$P(\text{没有人取到自己礼物}) = P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} -$$

$$C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \approx e^{-1} \approx 0.368$$ 当n很大时.

人们在长期的实践中总结得到：

“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”

(称之为实际推断原理)。

例3.6　某接待站在某一周曾接待12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12次接待来访者都是在周二、周四的概率不超过

$$2^{12}/7^{12} = 0.000\ 000\ 3.$$

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此，有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

1.4 条件概率

(一)条件概率定义

例4.1 一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？

（假定生男生女是等可能的）

解：由题意，样本空间为

$S=\{(男，男),(男，女),(女，男),(女，女)\}$

A表示事件"至少有一个是女孩"，

$A=\{(男，女),(女，男),(女，女)\}$

$B=\{(女，女)\}$

由于事件A已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B包含的基本事件只占其中的一种， 所以有

$$P(B \mid A)=\frac{1}{3}.$$

$P(B \mid A)$表示A发生的条件下,B发生的条件概率

在这个例子中，若不知道事件A已经发生的信息，那么事件发生的概率为

$$P(B)=\frac{1}{4}.$$

这里 $P(B) \neq P(B|A)$

其原因在于事件A的发生改变了样本空间，使它由原来的S缩减为$S_A = A$，而$P(B|A)$是在新的样本空间S_A中由古典概率的计算公式而得到的。

例4.2 有一批产品，其合格率为90%，合格品中有95%为优质品，从中任取一件，记A={取到一件合格品}，

B={取到一件优质品}。

分别说明 $P(A)$及$P(B|A)$的含义。

答：$P(A)=90\%$ $P(B|A)=95\%$

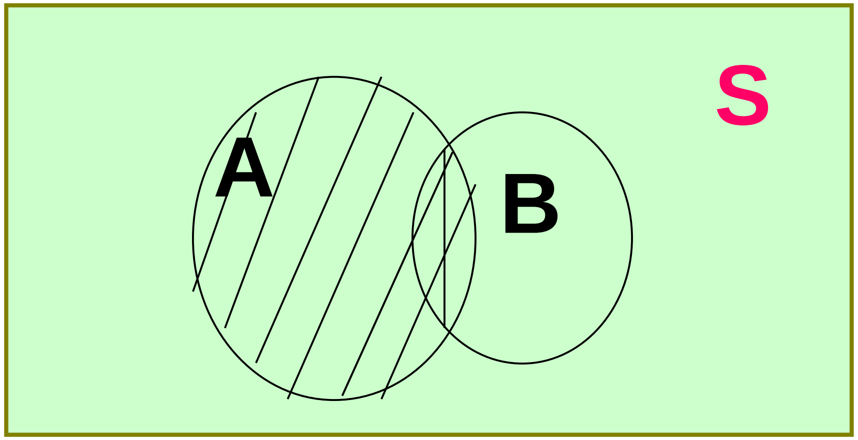
1. $P(A)=0.90$ 是将整批产品记作1时A的测度,
2. $P(B|A)=0.95$ 是将合格品记作1时B的测度,
3. 由$P(B|A)$的意义，其实可将$P(A)$记为$P(A|S)$，而这里的S常常省略而已，$P(A)$也可视为条件概率.

分析：

若记 $P(B|A)=x$ ，

则应有 $x:1=P(AB):P(A)$

解得： $x=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$



条件概率定义

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad P(A)\neq 0}$$

性质：$P(\bullet|A)$ 是概率，满足三条公理

(1)非负性：$P(B|A)\geq 0;$

(2)规范性：$P(S|A)=1;$

(3)可列可加性：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots,$ 两两互斥

$$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A).$$

因此，$P(B|A)$ 具有概率的所有性质。

例如：

$$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$$

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$$

$$B\supset C \Rightarrow P(B|A)\ge P(C|A)$$

(二)乘法公式

当下面的条件概率都有意义时，有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)$$

$$\cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

例4.3 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2},$

求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B).$

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12},$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6},$$

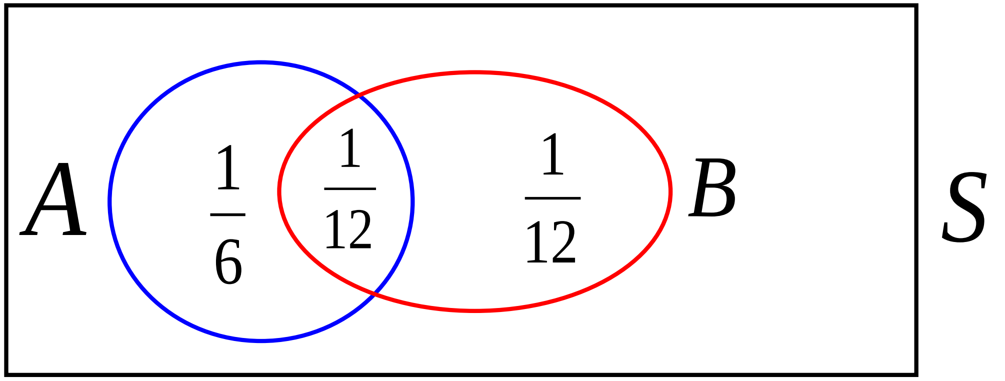
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

另解：通过画图，

由$P(A)=1/4$,

$P(B|A)=1/3$,

$P(A|B)=1/2$.



知，$P(AB)=\dfrac{1}{12}, P(A\overline{B})=\dfrac{1}{6}, P(B\overline{A})=\dfrac{1}{12}$,

$$P(A\cup B)=P(A\overline{B})+P(AB)+P(B\overline{A})$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$, 又算得,

$P(B)=\dfrac{1}{6}, P(AB)=\dfrac{1}{12}$，$P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}$,

所以，$P(\bar{A}\,|\,A\cup B)=1-P(A\,|\,A\cup B)$

$$=1-\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=1-\frac{1/4}{1/3}=\frac{1}{4}.$$

或者，$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{12}$,

$$P(\bar{A}\,|\,A\cup B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{1}{4}.$$

例4. 4 一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取4次，

（1）已知前两次中有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；

（2）已知第4次取到红球，求第1，2次也取到红球的概率。

解：A_i表示第i次取到红球，i=1,2,3,4，B表示前两次中有一次取到红球，C表示前两次中恰有一次取到红球。则

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(C)}{1-P(\bar{B})}=\frac{C_4^1C_5^1/C_9^2}{1-C_4^2/C_9^2}=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1A_2|A_4)=\frac{P(A_1A_2A_4)}{P(A_4)}=\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)}$$

$$=\frac{C_5^3/C_9^3}{5/9}=\frac{3}{14}$$

例4.5　某厂生产的产品能直接出厂的概率为70%，余下的30%的产品要调试后再定，已知调试后有80%的产品可以出厂，20%的产品要报废。求该厂产品的报废率.

解：设 $\boldsymbol{A}$={生产的产品要报废}

$\boldsymbol{B}$={生产的产品要调试}

已知$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$=0. 3，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$=0. 2,

$$A \subset B, A = AB,$$

$$P(A) = P(AB)$$

$$= P(B)P(A|B) = 0.3 \times 0.2 = 6\%$$

例4.6　某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为60%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为80%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为90%。求这人能通过考核的概率。

解：设 A_i={ 这人第i次通过考核 }，

i=1, 2, 3

A={ 这人通过考核 }，

$$A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$$

$$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2\mid\bar{A}_1)\cdot$$

$$+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=0.60+0.4\times0.8+0.4\times0.2\times0.9$$

$$)=0.992$$

$$\boxed{\begin{aligned}&P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)\\&=1-P(A_2\mid\bar{A}_1)\\&=1-0.8=0.2\end{aligned}}$$

亦可：

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

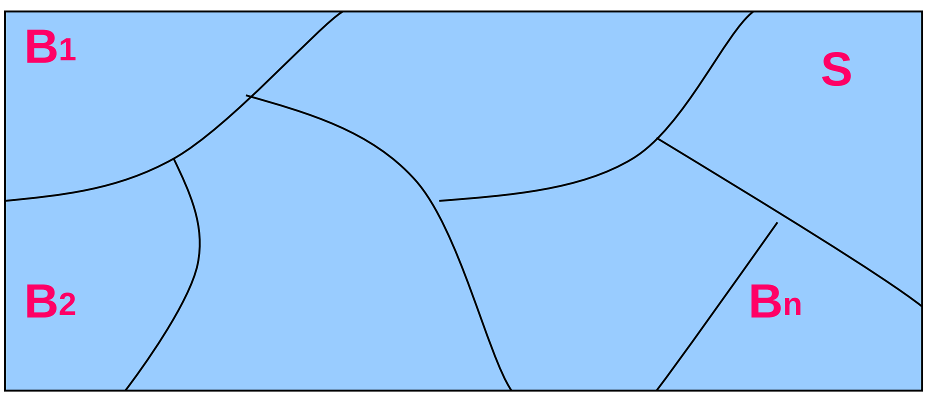
$$=1-0.4\times0.2\times0.1=0.992$$

(三)全概率公式与Bayes公式

定义：称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分, 若

$$(i)\ \text{不漏}\ B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S,$$

$$(ii)\ \text{不重}\ B_i B_j = \phi,\ \ i \neq j.$$



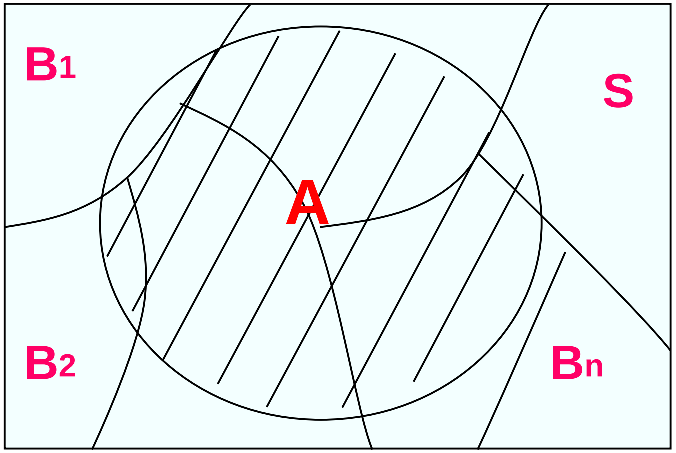
定理：

设$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间S的一个划分，

$P(B_i)>0$，$i=1,2,\ldots,n$；则称：

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)$$

为**全概率公式**



证明 $\because A = AS = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$

$$\therefore P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(AB_j)$$

AB_i与AB_j

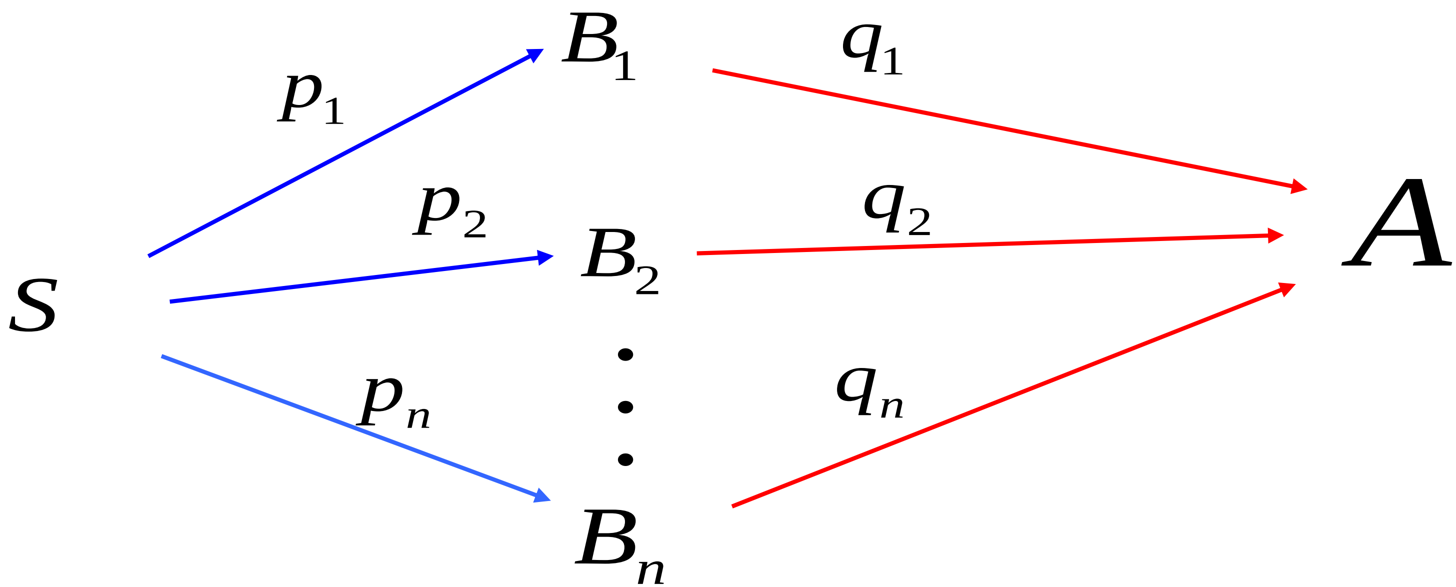
不相容$(i \neq j)$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P(A \mid B_j)$$

注：在运用全概率公式时，一个关键是构造

一组合适的划分。

设$P(B_j)=p_j, P(A|B_j)=q_j, j=1,2,\ldots,n$



$$\boxed{\text{则 } P(A)=\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}$$

定理：接上面全概率公式的条件，且

$P(A)>0$, 则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A\mid B_j)}$$

称此式为**Bayes公式**。

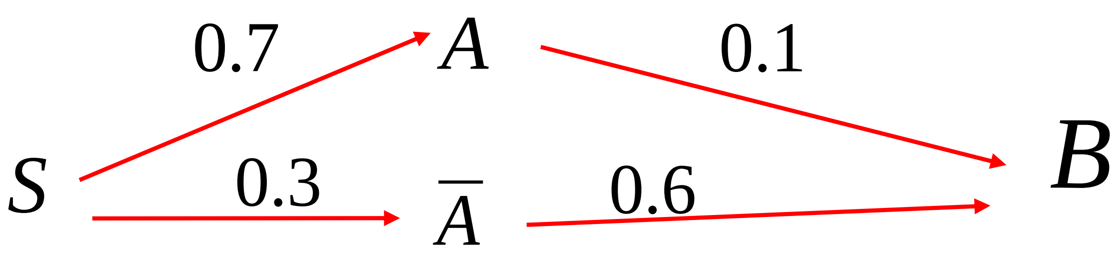
例4.7　一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为70%，若甲出差，则乙出差的概率为10%；若甲不出差，则乙出差的概率为60%。

(1)求近期乙出差的概率；

(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

已知 $P(A)=0.70,\quad P(B\mid A)=0.10,\quad P(B\mid\bar{A})=0.60$



(1) 由全概率公式，

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})$$

$$=0.7\times0.1+0.3\times0.6=25\%,$$

(2) 由Bayes公式，

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{7}{25}.$$

例4.8　根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有5%的假阳性及5%的假阴性：

若设$\boldsymbol{A}$={试验反应是阳性}，

$\boldsymbol{C}$={被诊断患有癌症}

则有：$P(A|\bar{C}) = 5\%, P(\bar{A}|C) = 5\%,$

已知某一群体$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C})$=0.005，问这种方法能否用于普查？

解：

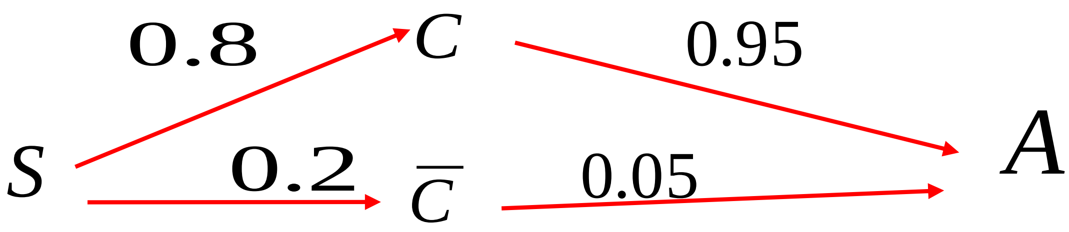
$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "0.95"] & \\
S \arrow[ur, "0.005"] \arrow[dr, "0.995"'] & & A \\
 & \overline{C} \arrow[ur, "0.05"'] &
\end{tikzcd}$$

由Bayes公式，

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)\cdot P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})} = 0.087$$

若用于普查，100个阳性病人中被诊断患有癌症的大约有8.7个，所以不宜用于普查。

若$\boldsymbol{P(C)}$很大，比如$\boldsymbol{P(C)}$=0. 8，则



$$P(C\mid A)=\frac{0.8\times 0.95}{0.8\times 0.95+0.2\times 0.05}=0.987$$

说明此方法在医院可用.

1.5 事件独立性与独立试验

例5.1 有10件产品，其中8件为正品，2件次品。从中取2次,每次取1件，设A_i={第i次取到正品}，i=1,2,在不放回抽样和放回抽样情况下，比较 $P(A_2|A_1)$与$P(A_2)$.

不放回抽样时，$P(A_2|A_1)=\dfrac{7}{9}\neq P(A_2)=\dfrac{8}{10}$

放回抽样时， $P(A_2|A_1)=\dfrac{8}{10}=P(A_2)$

结果发现：

不放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率产生影响；

而放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率没有影响。

定义：设A，B为两随机事件，如果

$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B 相互独立.

若 $P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$,

$P(AB)=P(A)P(B)$等价于$P(B|A)=P(B)$,

$P(AB)=P(A)P(B)$也等价于$P(A|B)=P(A)$.

A, B相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}, B$相互独立

$\Leftrightarrow A, \bar{B}$相互独立 $\Leftrightarrow \bar{A}, \bar{B}$相互独立

证：$\because$ 当$P(AB) = P(A)P(B)$时

$$P(A\bar{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A)P(\bar{B})$$

定义：

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，若对$2 \le k \le n$,

均有：$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$

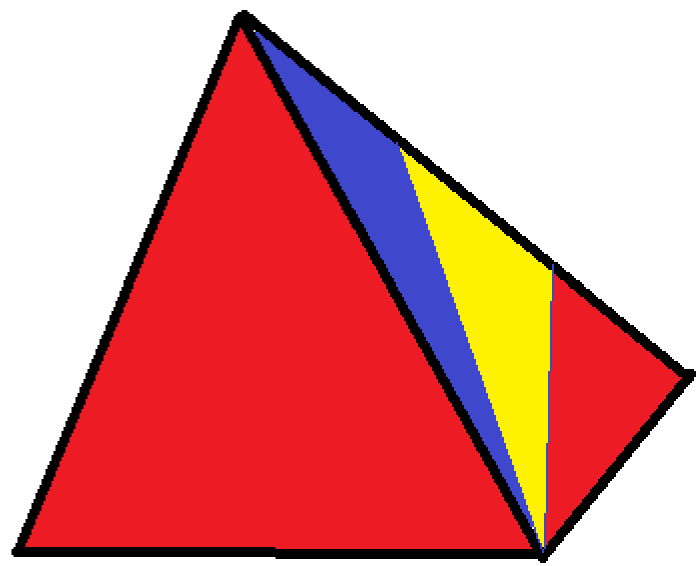
则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立

例5.2 有一个正四面体，现给一面漆上红色，一面漆上黄色，一面漆上蓝色，还有一面漆上红黄蓝三色，现在任取一面，令A={这面含红色}，

B={这面含黄色}，

C={这面含蓝色}.

问：A,B,C是否两两独立？是否相互独立？



解：对这四面分别标号为**1,2,3,4.**则

$$S=\{1,2,3,4\},$$

$$A=\{1,4\}, B=\{2,4\}, C=\{3,4\}$$

$$AB=AC=BC=ABC=\{4\}$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=1/4$$

所以，**A,B,C**两两独立，即

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$$P(AC) = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = P(B)P(C).$$

但不相互独立，

$$\because P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C).$$

注意：

1° 两两独立不能推出相互独立；

2° 实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性。

设一个试验是由一系列子试验组成，

独立试验：指任一次子试验出现的结果都不影响其他各子试验出现的结果；

例如观察十期彩票的开奖结果，是独立试验.

重复试验：如果各子试验是在相同条件下进行的。

例5.3 $P(A)=0.5, P(B)=0.4$, 求下列情况下 $P(A\cup B)$. (1) A与B独立, (2) A与B不相容, (3) $A\supset B$, (4) $P(AB)=0.3$.

解: (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.7$,

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$,

(3) $P(A\cup B)=P(A)=0.5$,

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$.

例5.4 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为$p,p\geq 0.5$，问对甲而言，采用三局两胜制有利，还是采用五局三胜制有利？（设各局胜负相互独立）

解：设$A_i = \{第i局甲胜\}$

$$\Rightarrow P(A_i) = p,\ i = 1,2,\cdots,5$$

再设$A = \{甲胜\}$

(1) 三局二胜制：

$$P(A) = P\left(A_1A_2 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3\right)$$

$$= p^2 + 2p^2(1-p) \overset{记为}{=} p_1$$

(2)五局三胜制：

$$P(A)=P\{A_1A_2A_3\cup(\text{前三次有一次输})A_4$$

$$\cup(\text{前四次有两次输})A_5\}$$

$$=p^3+C_3^1(1-p)p^3+C_4^2(1-p)^2p^3\overset{\text{记为}}{=}p_2$$

$$p_2 - p_1 = p^3 + C_3^1(1-p)p^3 + C_4^2(1-p)^2 p^3$$

$$-p^2 - 2p^2(1-p)$$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2 > p_1, \text{当} p > \dfrac{1}{2} \\ p_2 = p_1, \text{当} p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

例5.5 有5个独立元件构成的系统(如图1)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。

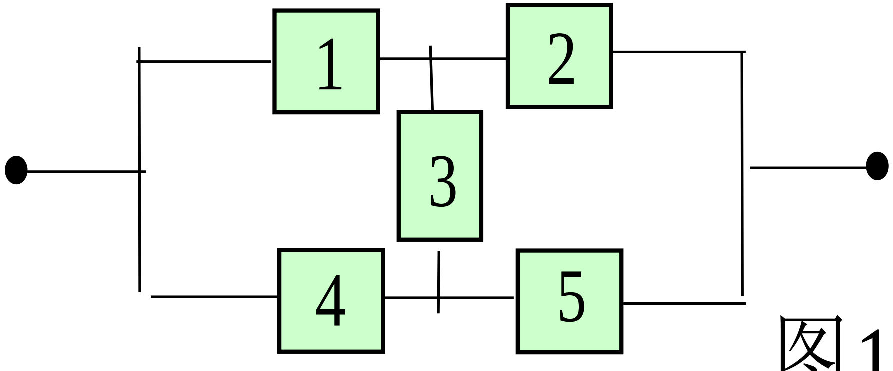
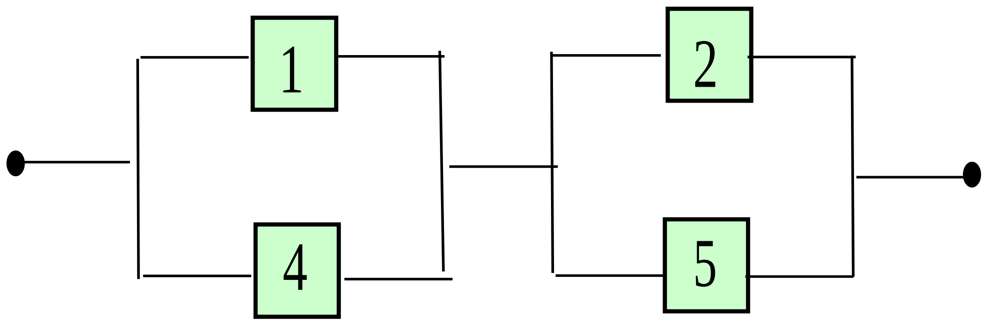


图1

解：设$A_i=\{$第i个元件运行正常$\}, i=1,2,3,4,5$

$$A=\{\text{系统运行正常}\}$$

$$P(A)=P(A_3)\cdot P(A|A_3)+P(\bar{A}_3)\cdot P(A|\bar{A}_3)$$



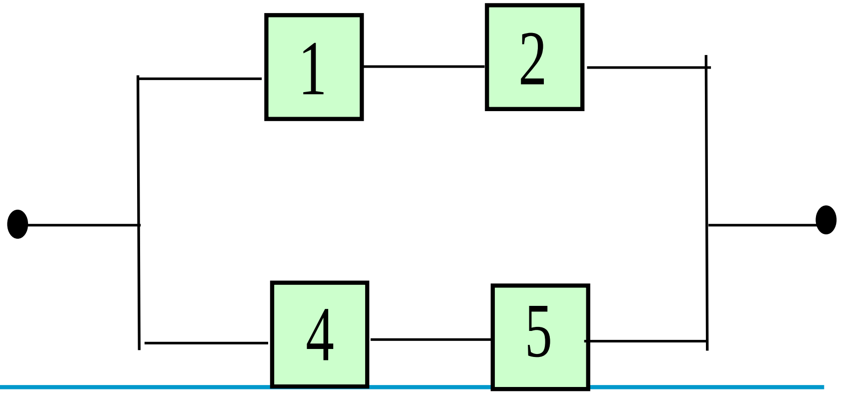
$$p_1 \triangleq P(A|A_3)=P\big((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)\big)$$

$$=[P(A_1\cup A_4)]^2=(2p-p^2)^2$$

$$p_2 \triangleq P(A \mid \bar{A}_3) = P\left(A_1A_2 \cup A_4A_5\right) = 2p^2 - p^4$$

$$P(A) = p(2p - p^2)^2 + (1 - p)(2p^2 - p^4)$$

$$= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$



例5.6 一袋中有编号为1,2,3,4共4个球，采用放回抽样，每次取一球，共取2次，记录号码之和，这样独立重复进行试验，求“和等于3”出现在“和等于5”之前的概率。

解：设A表示“和等于3”出现在“和等于5”之前，

B表示第一次号码之和为3，

C表示第一次号码之和为5，

D表示第一次号码之和既不为3也不为5。

$$P(B)=\frac{2}{16},\quad P(C)=\frac{4}{16},\quad P(D)=\frac{10}{16}$$

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(A|C)P(C)+P(A|D)P(D)$$

$$=\frac{2}{16}\times 1+\frac{4}{16}\times 0+\frac{10}{16}\times P(A|D)$$

$$\Rightarrow\quad P(A)=\frac{1}{3}.$$

$$P(A|D)=P(A)$$

在第一次和不等于3或5的情况下求*A*的条件概率，相当于重新考虑*A*的概率。

例5.7 某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故。设他每次操作发生事故的概率为p，$p>0$，但很小很小，他独立重复进行了n次操作，求(1) n次都不发生事故的概率；(2) 至少有一次发生事故的概率。

解：设*A*={*n*次都不发生事故},*B*={至少有一次发生事故},C_i={第*i*次不发生事故},*i*=1,2,…,*n*

则$C_1,\ldots,C_n$相互独立，$P(C_i)=1-p$

$$P(A)=P(C_1\ldots C_n)=(1-p)^n$$

$$P(B)=1-P(A)=1-(1-p)^n,$$

注意到$\lim_{n\to\infty} P(B)=1$

上式的意义为：“小概率事件”在大量独立重复试验中“至少有一次发生”几乎是必然的。

思考题：若*p*=0.0001，要多少次以上的实验，会使事件*A*“至少有一次发生”的概率超过50％？

$$P(B)=1-(1-0.0001)^n \geq 0.5, \Rightarrow n \geq 6932.$$