一、n 支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为 r 轮，第 l 轮共有 m_l 场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r 和 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队 i 的水平值为 v_i，$i=1,\cdots,n$，设队 i 与队 j 比赛时，队 i 获胜的概率为 $\dfrac{v_i}{v_i+v_j}$，队 j 获胜的概率为 $\dfrac{v_j}{v_i+v_j}$。记 $n=2^s+k$，其中 s,k 为正整数，$0\le k<2^s$。设 $v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

（1）试给出为保证赛制可行 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 应满足的条件；

（2）问 $n=4$ 时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最小；

（3）若 $m_1=k$，求队 1 在第一轮结束后未被淘汰的概率 f_1，若 $m_1=j<k,m_2=k-j$，求队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率 f_2，并证明 $f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$ 且 $m_1=k,m_l=2^{s-l+1},l=2,3,\cdots,s+1$ 的赛制对队 1 最为有利。

二、一赛季有 $r+1$ 名选手 $A_1,A_2,\cdots,A_{r+1}$ 参加。赛季中的每场比赛在两名选手间进行。一场比赛的参赛者只有胜、负两种结果，两名选手获胜的概率相等。所有选手按编号顺序排为一队列。首先由队列中的前两位选手进行比赛，胜者与队列中下一位选手进行比赛，负者重新排在队列的末尾。上述过程持续进行下去，直至有一人连续战胜所有其他选手，整个赛季结束。

（1）假设选手共 3 人，即 $r=2$。在第一场比赛 A_2 战胜 A_1 的情况下，试给出整个赛季包含 n 场比赛时，获胜的选手及其获胜的概率；

（2）求 $r=2$ 时，每位选手获胜的概率；

（3）一由 n 个数字 0 或 1 组成的序列，最后 $r-1$ 位均为数字 1，但在前 $n-1$ 位中不包含连续 $r-1$ 位数字 1 的子序列，其中 r 为一给定整数。记所有这样的序列的总数为 a_n。试写出 a_n 满足的递推关系；

（4）记 b_n 为整个赛季包含 n 场比赛的概率。试写出 b_n 满足的递推关系。