

## 数论模型

### 题目 3.

$n$  名同学正在老师的带领下与亚运会吉祥物“江南忆”做游戏。游戏开始前，同学可以商定在游戏中采取的策略，但游戏进行过程中，同学之间不能互相交流。游戏开始时，老师在每位同学的背后贴上印有三个吉祥物“琮琮”“宸宸”和“莲莲”之一的图案，不同同学背后的图案可以不同。每个同学不能看到自己背后的图案，但能看到除他自己外所有其他同学的图案。

- (1) 现老师要求所有同学分站为 3 列。每列所有同学背后的图案均完全相同时，视为“成功”。试给出一种策略，使成功的可能性尽可能大；
- (2) 现老师要求每位同学同时在纸上画出自己背后的图案。一位同学所画的图案与自己背后的图案相同时视为该同学“成功”。试给出一种策略，使该策略能确保成功的同学数量尽可能多。

解答。

- (1) 所有人约定：视“琮琮”为 0，“宸宸”为 1，“莲莲”为 2，并不妨假设所有人的数字和为  $S \equiv 0 \pmod{3}$ 。

接着游戏开始，第  $i$  位同学计算其他同学的数字和  $T_i$ ，然后推断自己的数字为  $x_i \equiv (S - T_i) \pmod{3}$ ，接着：

- 若  $x_i = 0$ ，站到第 1 列；
- 若  $x_i = 1$ ，站到第 2 列；
- 若  $x_i = 2$ ，站到第 3 列。

显然，即使数字和  $S$  推断错误，所有数字相同的人仍然会站到同一列，可以保证 100% 成功。

- (2) 由于三个吉祥物本质相同（完全对称），因此能确保成功的同学不会超过  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  位，下面给出构造：

将所有同学平均分成三组，第一组约定  $S \equiv 0 \pmod{3}$ ，第二组约定  $S \equiv 1 \pmod{3}$ ，第三组约定  $S \equiv 2 \pmod{3}$ 。

采取同样的推断方式，可以保证至少  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  位同学成功。

### 题目 4.

“猜猜我是谁”是一款益智游戏。两人各持一套完全相同的卡牌，每套卡牌共有  $n$  张。每张卡牌上绘有一个头像，不同卡牌上的头像具有不同的特征。对任意卡牌子集，均存在一个只有该子集中卡牌头像才有的特征，如男性、戴眼镜的中年妇女等。游戏时甲从自己的卡牌中选择一张，乙可询问甲所选择的卡牌头像是否具有某种特征。乙希望用最少的询问次数找出甲所选择的卡牌。

- (1) 若每次甲作出回答后，乙进行下一次提问，甲每次给出的回答均是正确的，试给出乙的最优策略；
- (2) 若乙提出所有问题后，甲再给出全部问题的回答，且甲至多有一次回答“不知道”，其他问题的回答均是正确的。乙又应采取怎样的策略。

解答。

- (1) 即自适应提问。题意等价于甲选择一个数  $x \in [1, n]$ ，乙每次可以挑选一个集合  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ，甲回答  $[x \in S]$ 。

这显然可以采取二分查找，乙每次选择一个特征，使得当前所有可能的卡牌集被划分成两部分（尽可能相等）。

根据甲的回答，每次可以排除一半数目的卡牌。重复此过程，直至剩一张卡牌，即为  $x$ 。

这样操作，可以得到最优询问次数  $\lceil \log_2 n \rceil$ 。

- (2) 即非自适应提问。乙预先选择  $m$  个特征，为每张卡牌分配一个长度为  $m$  的向量（0 为“否”，1 为“是”）。

由于甲可以回答一次“不知道”，我们必须保证任意两个不同的卡牌向量至少有两个对应位置不同。

考虑抽屉原理，对于每一个 1 的个数为偶数的向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ，向量  $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_m \oplus 1)^T$  与其不能共存，两者构成一个抽屉。于是我们得到了  $2^{m-1}$  个抽屉，每个抽屉中至多选取 1 个向量，于是得到理论上界能取出  $2^{m-1}$  个向量。

构造是平凡的，我们取所有 1 的个数为偶数的向量，显然它们来自不同的抽屉，并且至少有两个对应位置不同。于是只需要  $2^{m-1} \geq n$  即可，得到最优询问次数  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ 。

### 题目 5.

现有三个容积均为  $n \in \mathbb{N}$  的容器，盛水量总和为  $n$ 。一次合法的倾倒在其中两个容器间进行，即将两个容器中盛水多的容器中的水注入盛水少的容器中，使盛水少的容器中的水量加倍。即若倾倒前它们的盛水量分别为  $x$  和  $y$ ，其中  $x \leq y$ ，则倾倒后它们的盛水量分别为  $2x$  和  $y - x$ 。

(1) 设  $a, b, c$  为正整数，其中  $a \leq b \leq c$ ,  $p = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ ,  $q = \lceil \frac{b}{a} \rceil$ ,  $k = \lfloor \log_2 p \rfloor$ . 证明:  $\min(b - pa, qa - b) \leq \frac{a}{2}$  且  $c \geq 2^k a$ ;

(2) 证明: 若某一时刻三个容器中的盛水量分别为  $a, b, c$ , 其中  $a \leq b \leq c$  且  $b - pa \leq \frac{a}{2}$ , 则必可通过不超过  $k + 1$  次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过  $\frac{a}{2}$ ;

(3) 证明: 若某一时刻三个容器中的盛水量分别为  $a, b, c$ , 其中  $a \leq b \leq c$  且  $qa - b \leq \frac{a}{2}$ , 则必可通过不超过  $\lfloor \log_2 q \rfloor + 1$  次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过  $\frac{a}{2}$ ;

(4) 证明: 只要三个容器中的盛水量均为整数，总可通过不超过  $(\log_2 n)^2$  次合法倾倒，使其中一个容器中的水量为 0.

解答.

假设三个容器分别为  $A, B, C$ .

(1) 记  $b = pa + r$ , 显然  $0 \leq r < a$ . 因此  $\min(b - pa, qa - b) \leq \min(r, a - r) \leq \frac{a}{2}$ .

由  $2^k \leq p$  知  $2^k a \leq pa \leq b \leq c$ .

(2) 记  $p$  的二进制表示为  $p = (\overline{p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0})_2$ , 其中  $p_k = 1$ . 我们采用构造性证明:

- 按照  $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$  的顺序依次遍历。假设当前处理到了  $p_i$ :
  - 若  $p_i = 0$ , 则将  $C$  倒向  $A$ , 即  $(a, b, c) \rightarrow (2a, b, c - a)$ ;
  - 若  $p_i = 1$ , 则将  $B$  倒向  $A$ , 即  $(a, b, c) \rightarrow (2a, b - a, c)$ .

经过如上  $k$  次倾倒，最初的  $(a, b, c)$  变成了  $(2^k a, b', c')$ .

此时再将  $B$  倒向  $A$ ，显然  $B$  剩余的水量为  $b' - 2^k a = b - pa \leq \frac{a}{2}$ , 共用  $k + 1$  次倾倒实现了构造。

(3) 记  $q$  的二进制表示为  $q = (\overline{q_t q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2$ , 其中  $t = \lfloor \log_2 q \rfloor$ ,  $q_t = 1$ . 同样采用构造性证明:

- 按照  $q_0, q_1, \dots, q_{t-1}$  的顺序依次遍历。假设当前处理到了  $q_i$ :
  - 若  $q_i = 0$ , 则将  $C$  倒向  $A$ , 即  $(a, b, c) \rightarrow (2a, b, c - a)$ ;
  - 若  $q_i = 1$ , 则将  $B$  倒向  $A$ , 即  $(a, b, c) \rightarrow (2a, b - a, c)$ .

经过如上  $t$  次倾倒，最初的  $(a, b, c)$  变成了  $(2^t a, b', c')$ . 而  $(\overline{q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2 < \frac{q}{2}$ , 因此  $b' > b - \frac{q}{2} a \geq 0$ .

对于容器  $C$  而言，由  $(\overline{q_{t-1} \dots q_1 q_0})_2 \leq q - 1 \leq p$ , 因此  $c' \geq c - pa \geq b - pa \geq 0$ .

由  $qa - b \geq 0$  知  $2^t a \geq b'$ , 此时再将  $A$  倒向  $B$ ，显然  $A$  的剩余水量为  $2^t a - b' = qa - b \leq \frac{a}{2}$ , 共用  $t + 1$  次倾倒实现了构造。

(4) 当  $n = 1, 2$  时显然。下考虑  $n \geq 3$  的情形。

假设当前三个容器的盛水量分别为  $(a_0, b_0, c_0)$ , 其中  $a_0 \leq b_0 \leq c_0$ , 记  $q_0 = \lceil \frac{b_0}{a_0} \rceil$ .

由 (2)(3) 知我们可以在  $\lfloor \log_2 q_0 \rfloor + 1$  步内将  $(a_0, b_0, c_0) \rightarrow (a_1, b_1, c_1)$ , 其中  $a_1 \leq b_1 \leq c_1$  且  $a_1 \leq \frac{a_0}{2}$  (将三个容器按照盛水量大小重标号  $A, B, C$ ).

由此可见, 在经过至多  $z = \lceil \log_2 a_0 \rceil$  轮后, 得到的  $(a_z, b_z, c_z)$  必然满足  $a_z = 0$ . 总合法倾倒数不超过:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{z-1} \left( \left\lceil \log_2 \left\lceil \frac{b_i}{a_i} \right\rceil \right\rceil + 1 \right) \\ & \leq \sum_{i=0}^{z-1} \left( \log_2 \left( \frac{n}{a_i} \right) + 1 \right) \\ & \leq 1 + z \log_2 n \\ & \leq 1 + \left\lceil \log_2 \left( \frac{n}{3} \right) \right\rceil \log_2 n \\ & \leq (\log_2 n)^2 \end{aligned}$$

注记.

- 浙江大学 2023-2024 学年春夏学期《数学建模 (H)》课程期末考试