2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ =__________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)$ =______.

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________.

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ =__________.

第二题：(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

第三题：(15 分)设函数 $f\left(x\right)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第四题：(15 分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：(1) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\ge \dfrac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

第六题：(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

第七题：(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数)，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

第八题：(10 分)求 $x\to 1-$ 时，与 $\sum^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类) 试卷

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设$x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\,\mathrm{d}\,x(n=1,2,\cdots)$.

(4) 设$f\left(t\right)$有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离.

第二题：(15 分)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点x_0，使得$f(x_0)<0$. 证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

第三题: (15 分)设$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$所确定. 且$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}\,u+\dfrac{3}{2e}$在$t=1$处相切. 求函数$\psi(t)$.

第四题: (15 分)设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明: (1) 当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛; (2) 当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

第五题：(15 分)设l 是过原点、方向为(α,β,γ) (其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线，均匀椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ (其中$0<c<b<a$，密度为 1) 绕l旋转.

(1) 求其转动惯量； (2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

第六题：(15 分)设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint\limits_C\dfrac{2xy\,\mathrm{d}\,x+\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$．证明: $\oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}\,x \quad \varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$； (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}\,x+\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}$．

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln\left(1+x\right)\right)}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求 $\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}\left(xy-1\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$.

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设 $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

1．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2．如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f\left(-1\right)=0,$ $f(1)=1,f'(0)=0$，求证：在开区间 $\left(-1,1\right)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点 $\left(a,0\right)$ 向右的射线，线密度为 ρ。在点 $\left(0,h\right)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

第五题：(15 分)设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1 \text{ 和 } x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\left(x-y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}\,S.$$

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}\,u.$

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2．求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

3．已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$,且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

4．设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t.$

第二题：(10 分)计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x.$

第三题：(10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 $0.001.$

第四题：(12 分)设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

第五题：(12 分)求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\le C.$$

第六题：(12 分)设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0.$ Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求 $F'(t)$.

第七题：(14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分）.

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$ 不是绝对收敛的。

3．设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

4．过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\left(x\ge 0\right)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$。求点 A 的坐标。

第二题：(12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x.$

第三题：(12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$ 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

第四题: (10 分) 设 $\left|f(x)\right|\le\pi, f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$, 证明: $\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\le\frac{2}{m}.$

第五题：(14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小，并求该最小值。

第 六 题： (14 分) 设 $I_a(r)=\int\limits_C\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{\left(x^2+y^2\right)^a}$, 其 中 a 为 常 数， 曲 线 C 为 椭 圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r).$

第七题：(14 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知$y_1 = e^x$和$y_2 = xe^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是_____.

(2) 设有曲面$S: z = x^2 + 2y^2$和平面$\pi: 2x + 2y + z = 0$，则与π平行的S的切平面方程是____________________.

(3) 设$y = y(x)$由$x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}\,t$所确定，则$\left.\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=0} =$________.

(4) 设$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$，则$\lim_{n\to\infty} x_n =$____________.

(5) 已知$\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} =$______.

第二题：(12 分)设n为正整数，计算$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}\,x.$

第三题：(14 分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A, B使得$|f(x)| \le A, |f''(x)| \le B$，证明：对于任意$x \in [0,1]$，有$|f'(x)| \le 2A + \frac{B}{2}.$

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为h，所在球半径为R。证明该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R - h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh.$

(2) 设球体$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 12$被平面$P: x + y + z = 6$所截的小球缺为$\Omega$。记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + y\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

第五题：(15 分)设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n \in [a,b]$使得

$$\left[f(x_n)\right]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x)\right]^n \mathrm{d}\,x,\ \text{求} \lim_{n\to\infty} x_n.$$

第六题：(15 分)设$A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right).$

2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$____________.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____.

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为______.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值_____.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}\,t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为_______.

第二题：(12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

第四题：(14 分)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

第五题：(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}\,x=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f\left(x\right)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f\left(a\right)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(a+1/n\right)}{f\left(a\right)}\right]^n=$______.

2．若 $f\left(1\right)=0, f'\left(1\right)$ 存在，则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$___________.

3．设 $f\left(x\right)$ 有连续导数，且 $f\left(1\right)=2$. 记 $z=f\left(e^x y^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f\left(x\right)$ 在 $x>0$ 的表达式为________________.

4．设 $f\left(x\right)=e^x\sin 2x$，则 $f^{(4)}\left(0\right)=$________________.

5．曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为________________.

第二题：(14 分)设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f\left(0\right)=0$,且当 $x\in\left(0,1\right)$, $0<f'\left(x\right)<1$．试证:当 $a\in\left(0,1\right)$ 时，有 $\left(\int_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right)^2>\int_0^a f^3\left(x\right)\mathrm{d}\,x.$

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2\leq x+y+2z$，密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量 $M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z.$

第四题：(14 分)设函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上具有连续导数，$f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1.$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\,x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\neq 0.$ 证明：在 $\left(0,1\right)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2，使得 $\dfrac{1}{f\left(x_1\right)}+\dfrac{1}{f\left(x_2\right)}=\dfrac{2}{I}.$

第六题: (14 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上可导, 且 $f\left(x\right)=f\left(x+2\right)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$, 用傅里叶(Fourier)级数理论证明 $f\left(x\right)$ 为常数。

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类)试卷

一、填空题(本题 42 分,共 6 小题,每小题 7 分)

1. 已知可导函数$f(x)$满足$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$,则$f(x)=$____________。

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$____________。

3. 设$w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数,且$u=x-cy,v=x+cy$,其中c为非零常数,则$w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$________。

4. 设$f(x)$具有二阶连续导数,且$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$________。

5. 不定积分$I=\int\dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$________。

6. 记曲面$z^2=x^2+y^2$和$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$围成的空间区域为V,则三重积分$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$__________。

二、(本题 14 分) 设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数,对任意角度α,定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$,若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$,证明:$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值。

三、(本题 14 分) 设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段。求曲线积分$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$

四、(本题 15 分) 设函数$f(x)>0$且在实轴上连续,若对任意实数t,有$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$。证明:$\forall a,b$,$a<b$,有$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{b-a+2}{2}.$

五、(本题 15 分) 设$\{a_n\}$为一个数列,p为固定的正整数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}.$

2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

(非数学类）试卷

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设$\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$________.

(2) 若曲线$y=y(x)$由$\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$确定,则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为_________.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=$__________.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$__________.

二（本题满分 8 分） 设函数$f(t)$在$t\neq 0$时一阶连续可导，且$f(1)=0$，求函数$f\left(x^{2}-y^{2}\right)$，使得曲线积分$\displaystyle\int_{L} y\left[2-f\left(x^{2}-y^{2}\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^{2}-y^{2}\right)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$L$为任一不与直线$y=\pm x$相交的分段光滑曲线.

三（本题满分 14 分） 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$1\leq f(x)\leq 3$. 证明:

$$1\leq \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leq \frac{4}{3}.$$

四（本题满分 12 分） 计算三重积分$\displaystyle\iiint_{(V)}\left(x^{2}+y^{2}\right)\mathrm{d}V$，其中$(V)$是由

$$x^{2}+y^{2}+(z-2)^{2}\geq 4, x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2}\leq 9$$

及$z\geq 0$所围成的空间图形.

五（本题满分 14 分） 设$f(x,y)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}}\leq M$，$A\left(x_{1},y_{1}\right),B\left(x_{2},y_{2}\right)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内. 证明：$\left|f\left(x_{1},y_{1}\right)-f\left(x_{2},y_{2}\right)\right|\leq M\,|AB|$，其中$|AB|$表示线段$AB$的长度.

六（本题满分 14 分） 证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\displaystyle\ln\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\geq \int_{0}^{1}\ln f(x)\mathrm{d}x.$

七 (本题满分 14 分) 已知$\left\{a_{k}\right\},\left\{b_{k}\right\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_{k}\geq \delta>0, k=1,2,\cdots$，$\delta$为一常数. 证明：若级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k}$收敛，则级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{\left(a_{1}a_{2}\cdots a_{k}\right)\left(b_{1}b_{2}\cdots b_{k}\right)}}{b_{k+1}b_{k}}$收敛.

2019 年第十一届全国大学生数学竞赛

非数学专业竞赛试题

一、填空题（本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$__________.

(2) 设隐函数$y=y\left(x\right)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定，则$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{y^2}=$__________.

(3) 定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}\,x=$__________.

(4) 已知$\mathrm{d}\,u(x,y)=\dfrac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则$u\left(x,y\right)=$__________.

(5) 设$a,b,c,\mu>0$,曲面$xyz=\mu$与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切,则$\mu=$__________.

二、(本题满分 14 分)计算三重积分$\displaystyle\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$，其中$\Omega$是由曲面$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

三、(本题满分 14 分) 设$f\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上可微，$f\left(0\right)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|\,f'\left(x\right)|\le A\,|\,f\left(x\right)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明在$(0,+\infty)$上有$f\left(x\right)\equiv 0$.

四、(本题满分 14 分)计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

五、(本题满分 14 分)设$f\left(x\right)$是仅有正实根的多项式函数，满足$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$，证明：$c_n>0\left(n\ge 0\right)$，极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f\left(x\right)$的最小根.

六、(本题满分 14 分)设$f\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数，满足

$$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2e^{-x^2},$$

且$f\left(0\right)\le 1$. 证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|\,f\left(x\right)|\le M$.

第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-\sin x\right)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$_________.

2、设函数 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n e^{-x^2}$，则 $f^{\left(n\right)}\left(-1\right)=$_________.

3、设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f\left(1\right)=1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为_________.

4、已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin\left(x+y\right)}{x\left(x+y\right)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=$_________.

5、设 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U,f\left(x\right)\neq g\left(x\right)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}g\left(x\right)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[f\left(x\right)\right]^{g\left(x\right)}-\left[g\left(x\right)\right]^{g\left(x\right)}}{f\left(x\right)-g\left(x\right)}=$_________.

二、(10 分) 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\left(n+1\right)\left(a_n+1\right)},n\geq 1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

三、(12 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f\left(x_0\right)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $\left[1+f'(\xi)\right]\left[1+f'(\eta)\right]=4$.

四、(12 分) 已知 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均为二阶可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f\left(y\right)$.

五、(12 分) 计算 $I=\oint\limits_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}\,x-5z\,\mathrm{d}\,z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

六、(12 分) 证明$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x$等于$n$的所有因子（包 1 和$n$本身）之和，其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数，并计算$f(2021)$.

七、(14 分) 设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\geq 1)$.

(1) 证明数列$\{u_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛;

(3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和.

第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$_____.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$_________.

4、过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为_________.

5、记 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\pi\right\}$，则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021$，$x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\ge 1)$. 证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

六、(14 分) 设 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$ 且 $b_n=a_nb_{n-1}-2$，$n=2,3,\cdots$. 又设 $\left\{b_n\right\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.