

一、 $n$  名同学正在老师的带领下与亚运会吉祥物“江南忆”做游戏。游戏开始前，同学可以商定在游戏中采取的策略，但游戏进行过程中，同学之间不能互相交流。游戏开始时，老师在每位同学的背后贴上印有三个吉祥物“琮琤”、“宸宸”和“莲莲”之一的图案，不同同学背后的图案可以不同。每个同学不能看到自己背后的图案，但能看到除他自己外所有其他同学的图案。

(1) 现老师要求所有同学分站为 3 列。每列所有同学背后的图案均完全相同时，视为“成功”。试给出一种策略，使成功的可能性尽可能大；

(2) 现老师要求每位同学同时在纸上画出自己背后的图案。一位同学所画的图案与自己背后的图案相同时视为该同学“成功”。试给出一种策略，使该策略能确保成功的同学数量尽可能多。

二、“猜猜我是谁”是一款益智游戏。两人各持一套完全相同的卡牌，每套卡牌共有  $n$  张。每张卡牌上绘有一个头像，不同卡牌上的头像具有不同的特征。对任意卡牌子集，均存在一个只有该子集中卡牌头像才有的特征。如男性、戴眼镜的中年妇女等。游戏时甲从自己的卡牌中选择一张，乙可询问甲所选择的卡牌头像是否具有某种特征。乙希望用最少的询问次数找出甲所选择的卡牌。

(1) 若每次甲作出回答后，乙进行下一次提问，甲每次给出的回答均是正确的。试给出乙的最优策略；

(2) 若乙提出所有问题后，甲再给出全部问题的回答，且甲至多有一次回答“不知道”，其他问题的回答均是正确的。乙又应采取怎样的策略。

三、现有三个容积均为  $n \in \mathbb{N}$  的容器，盛水量总和为  $n$ 。一次合法的倾倒在其中两个容器间进行，即将两个容器中盛水多的容器中的水注入盛水少的容器中，使盛水少的容器中的水量加倍。即若倾倒前它们的盛水量分别为  $x$  和  $y$ ，其中  $x \leq y$ ，则倾倒后它们的盛水量分别为  $2x$  和  $y-x$ 。

(1) 设  $a, b, c$  为正整数，其中  $a \leq b \leq c$ ， $p = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor, q = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil, k = \lfloor \log_2 p \rfloor$ 。证明：

$$\min\{b - pa, qa - b\} \leq \frac{a}{2} \text{ 且 } c \geq 2^k a;$$

(2) 证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为  $a, b, c$ ，其中  $a \leq b \leq c$  且  $b - pa \leq \frac{a}{2}$ ，则必可通过不超过  $k+1$  次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过  $\frac{a}{2}$ ；

(3) 证明：若某一时刻三个容器中的盛水量分别为  $a, b, c$ ，其中  $a \leq b \leq c$  且  $qa - b \leq \frac{a}{2}$ ，则必可通过不超过  $\lfloor \log_2 q \rfloor + 1$  次合法倾倒，使得三个容器中至少一个容器的盛水量不超过  $\frac{a}{2}$ ；

(4) 证明：只要三个容器中的盛水量均为整数，总可通过不超过  $(\log_2 n)^2$  次合法倾倒，使其中一个容器中的水量为 0。