新生入学测试题

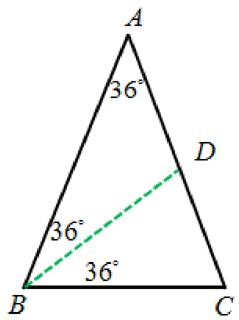
1. 设 a，b，c 为质数，且 $a+b+c+abc=239$，则：$a+b+c=$ 【　　】

(A) 49;　　(B) 51;　　(C) 53;　　(D) 55.

(1) 若 a，b，c 均为奇数，则：$a+b+c+abc$ 为偶数；
因此，a，b，c 中必有一个为偶数；不妨假设 $a=2$.
(2) 若 b，c 均为奇数，则：$a+b+c+abc$ 为偶数；故，b，c 中必有一个偶数.
不妨假设 $b=2$；进而，$c=47$.　所以，$a+b+c=51$.

2. $\sin 18^\circ=$ 【　　】

(A) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$;　　(B) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$;　　(C) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$;　　(D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



(1) 作等腰 ΔABC，$\angle B=\angle C=72^\circ$，$AB=AC=1$，再作 $\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 D，设 $BC=x(0<x<1)$.
由于 ΔBCD 与 ΔDAB 均为等腰三角形，则：$AD=BD=BC=x$.

(2) 由于 $\Delta ABC\sim\Delta BCD$，则：$BC^2=CD\cdot CA.\Rightarrow x^2=1-x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(3) 由此可得，$\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Rightarrow \sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\cos 36^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 72^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

【注】：两底角为 72° 的等腰三角形称为“**黄金三角形**”.

3. 下列陈述**正确**的是

(A) $e^{\pi} > \pi^{e}$;　(B) $\pi^{e} > e^{\pi}$;　(C) $\frac{1}{e} > \frac{\ln 3}{3}$;　(D) $\ln\sqrt{2} > \frac{1}{e}$.

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}\,(x>0)$，则：$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

故，当 $x \in (0,\ e)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (e, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$.

因此，$f(x)$ 在 $x = e$ 处取最大值.

故，$f(e) > f(\pi)$，$f(e) > f(3)$，$f(e) > f(2)$；即 $e^{\pi} > \pi^{e}, \frac{1}{e} > \frac{3}{\ln 3}, \frac{1}{e} > \ln\sqrt{2}$.

所以，(A),(C) 是正确的；(B),(D) 是错误的.

4. 下列陈述**正确**的是　【　】

(A) 区间 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 之间不存在一一映射；

(B) 设集合 $|A| = m, |B| = n$，则从集合 A 到 B 的映射共有 n^m 个 $(m,\ n \in \mathbb{N}_+)$；

(C) 设集合 $|A| = |B| = n(\in \mathbb{N}_+)$，则从集合 A 到 B 的一一映射共有 $n!$ 个；

(D) 有理数集是稠密的，而无理数也是稠密的.

(A) (1) 区间 $(0,1)$ 内的有理数是可数的，将其排列如下

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots \quad (0 < a_n < 1).$$

(2) 作如下映射 $f : [0,1] \to (0,1)$

- $f(0) = a_1$，$f(1) = a_2$，$f(a_n) = a_{n+2}\ (n \in \mathbb{N}_+)$
- 当 $x \in [0,1]$ 且 x 为无理数时，$f(x) = x$.

容易验证：f 是 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的一一映射. 故，(A) 是错误的.

(B) 设集合 $A = \{a_1,\ a_2, \cdots,\ a_m\}$，集合 $B = \{b_1,\ b_2, \cdots,\ b_n\}$，

则：集合 A 中的每个元素 a_i，集合 B 中的每个元素均有可能成其像，共有 n 种可能，因此，从集合 A 到集合 B 的映射共有 n^m 个.

(C) 若 $|A| = |B| = n$，则：从集合 A 到集合 B 的一一映射共有 $n!$ 种.

(D) 有理数与无理数均是稠密的；故，(B),(C),(D) 等都是正确的.

5. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\arccos\dfrac{7}{\sqrt{50}}+\arctan\dfrac{7}{31}+\arctan\dfrac{1}{10}=$ 【　　】

(A) $\dfrac{\pi}{4}$;　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$;　　(C) $\dfrac{2}{3}\pi$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 可看成是复数 $3+i$ 的幅角，同样，$\arccos\dfrac{7}{\sqrt{50}}$、$\arctan\dfrac{7}{31}$、$\arctan\dfrac{1}{10}$ 分别可以看成是复数:$7+i$、$31+7i$、$10+i$ 的幅角，且均为锐角.

故，I 为复数 $(3+i)(7+i)(31+7i)(10+i)$ 的主幅角.

(2) $I=\arg\big((3+i)(7+i)(31+7i)(10+i)\big)=\arg\big((20+10i)(303+101i)\big)$

$$=\arg 1010\big((2+i)(3+i)\big)=\arg\big(5050(1+i)\big)=\frac{\pi}{4}.$$

所以 $$\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}+\arccos\frac{7}{\sqrt{50}}+\arctan\frac{7}{31}+\arctan\frac{1}{10}=\frac{\pi}{4}.$$

6. $\sum\limits_{k=0}^{1012}(-1)^k\times 3^{1012-k}C_{2024}^{2k}=$ 【　　】

(A) -2^{2024};　　(B) 2^{2024};　　(C) -2^{2023};　　(D) 2^{2023}.

【分析】: $\sum\limits_{k=0}^{1012}(-1)^k\times 3^{1012-k}C_{2024}^{2k}=\sum\limits_{k=0}^{1012}i^{2k}\times\sqrt{3}^{2024-2k}C_{2024}^{2k}$,

因此，可考虑 $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2024}$ 的二项展开式.

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2024}=2^{2024}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2024}=2^{2024}\left(\cos\frac{2024}{6}\pi+i\sin\frac{2024}{6}\pi\right)$$

$$=2^{2024}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=2^{2024}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

又 $$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2024}=\sum_{k=0}^{1012}C_{2024}^{2k}i^{2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2024-2k}+\sum_{k=0}^{1011}C_{2024}^{2k+1}i^{2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2024-2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\times 3^{1012-k}C_{2024}^{2k}+i\sum_{k=0}^{1011}C_{2024}^{2k+1}(-1)^k\left(\sqrt{3}\right)^{2023-2k}.$$

因此 $$\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\times 3^{1012-k}C_{2024}^{2k}=-2^{2023}.$$

7. 若实数 m，使得关于 x 的方程 $x^2+(m+4i)x+1+2mi=0$ 至少有一个实数根，则实数 m 的取值为 【 】

(A) $|m|\ge 2\sqrt{5}$; (B) $m=2$; (C) $m=-2$; (D) $m=\pm 2$.

$\Delta=(m+4i)^2-4(1+2mi)=m^2-20\ge 0\Rightarrow |m|\ge 2\sqrt{5}$. **【错误做法】**

因为方程的系数是复数，因此 $\Delta>0$，并不能保证一定有实数根.

假设 a 为方程的实数根，则：$a^2+(m+4i)a+1+2mi=0$.

则
$$\begin{cases} a^2+ma+1=0 \\ 4a+2m=0 \end{cases} \Rightarrow m=\pm 2.$$

当 $m=2$ 时，有一个实根 $x=-1$；当 $m=-2$ 时，有一个实根 $x=1$.

因此
$$m=\pm 2.$$

8. 设 a，b，c 为方程 $x^3-3x^2-2x+1=0$ 的三个根，其中 $[x]$：表示不超过 x 的最大整数，则：$\left[\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right]=$ 【 】

(A) 68; (B) 70; (C) 72; (D) 74.

(1) 因为 a，b，c 为方程 $x^3-3x^2-2x+1=0$ 的三个根，则：$abc\ne 0$.

因此，$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 为方程 $\boxed{u^3-2u^2-3u+1=0}$ 的根；记 $\frac{1}{a}=u_1,\frac{1}{b}=u_2,\frac{1}{c}=u_3$.

(2) 根据韦达定理，有
$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=(-1)^1(-2)=2 \\ u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1=(-1)^2(-3)=-3. \\ u_1u_2u_3=(-1)^3=-1 \end{cases}$$

因此
$$\sum_{k=1}^{3}u_k^2=\left(\sum_{k=1}^{3}u_k\right)^2-2(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)=10.$$

所以
$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=\sum_{k=1}^{3}u_k^4=\left(\sum_{k=1}^{3}u_k^2\right)^2-2(u_1^2u_2^2+u_2^2u_3^2+u_3^2u_1^2)$$
$$=100-2\left[(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)^2-2u_1u_2u_3(u_1+u_2+u_3)\right]=74.$$

9. 当 $0<x<2\pi$ 时，和式 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=$ 【　　】

(A) $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}x\right)$; (B) $\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}x\right)$;

(C) $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{n+1}{2}x\right)$; (D) $\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{n+1}{2}x\right)$.

【方法一】: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin kx\sin\frac{x}{2}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x\right)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}x\right).$$

类似的，$T_n=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x\right)$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right).$$

由此可得 $|S_n|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$; $|T_n|\le\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$.

【方法二】: $\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{ix}\left(1-e^{inx}\right)}{1-e^{ix}}=\frac{\left(\cos x-\cos(n+1)x\right)+i\left(\sin x-\sin(n+1)x\right)}{(1-\cos x)-i\sin x}$

$$=\frac{\left((\cos x-1)+\cos nx-\cos(n+1)x\right)+i\left(\sin nx-\sin(n+1)x\right)}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\right]+i\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

所以 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}$.

10. 设 M 为 $(3+\sqrt{5})^{2024}$ 的整数部分，则: M 的个位数是　　　【　　】

(A) 7;　　　(B) 1;　　　(C) 6;　　　(D) 5.

记　$A=(3+\sqrt{5})^{2024}+(3-\sqrt{5})^{2024}=\sum_{k=0}^{2024}\left[1+(-1)^k\right]C_{2024}^{k}3^{2024-k}(\sqrt{5})^k$

$=2\sum_{k=0}^{1012}C_{2024}^{k}3^{2024-2k}\times 5^k=2\times 3^{2024}+2\sum_{k=1}^{1012}C_{2024}^{k}3^{2024-2k}\times 5^k.$

由此可得, A 为正整数，且其个位数与 2×3^{2024} 相同.

而 $2\times 3^{2024}=2\times 9^{1012}$，其个位数为 2, 又 $0<(3-\sqrt{5})^{2024}<1$,

因此, M 的个位数为1.