# Homework 3 随机模型 (I)

**题目 6.**

在传染病防控中, 通过大范围人群进行检测, 可有效控制传染源. 假设某区域内一种传染病的感染率为 $p$, 区域内每人是否感染相互独立. 对每人提取相关样本进行检测, 检测结果有阳性和阴性两种. 来自某个人的样本称为个体样本. 对任意份个体样本混合成的混合样本, 检测结果为阳性当且仅当其中至少有一份个体样本检测结果为阳性.

现需找出 $n$ 人中所有的感染者, 采用以下减半群试法 (halving scheme for pooled testing). 将 $n$ 份个体样本组成混合样本 $\Pi$ 进行检测.

- 若 $\Pi$ 的检测结果为阴性, 则 $n$ 人中无感染者.
- 若 $\Pi$ 的检测结果为阳性, 则将 $n$ 人随机分成人数分别为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 和 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的两组 $A$ 和 $B$. 对每一组, 取该组人的个体样本组成混合样本. 记两组的混合样本分别为 $\Pi_A$ 和 $\Pi_B$. 先对 $\Pi_A$ 进行检测,
  - 若 $\Pi_A$ 的检测结果为阴性, 则感染者必在组 $B$ 中.
  - 若 $\Pi_A$ 的检测结果为阳性, 再对 $\Pi_B$ 进行检测.
    - 若 $\Pi_B$ 的检测结果为阴性, 则感染者仅在组 $A$ 中.
    - 若 $\Pi_B$ 的检测结果为阳性, 则 $A$ 和 $B$ 两组中均有感染者.
- 对有感染者的组重复上述操作, 直至找出所有感染者为止.

记 $X_n$ 为对 $n$ 人按上述方式进行检测所需的检测次数, $Y_n$ 为对含有感染者的 $n$ 人按上述方式进行检测所需的检测次数.

(1) 试给出 $E(X_n)$ 和 $E(Y_n)$ 之间的关系;

(2) 试写出 $E(Y_n)$ 所满足的递推关系.

**解答.**

(1) 由于 $Y_n$ 已经确定有感染者, 所以不需要第一次检测, 而 $X_n$ 需要进行第一次检测, 因此:

$$
\begin{aligned}
E(X_n) &= 1 + \underbrace{(1-p)^n \times 0}_{\text{检测出阴性}} + \underbrace{(1-(1-p)^n)E(Y_n)}_{\text{检测出阳性}} \\
&= 1 + (1-(1-p)^n)E(Y_n)
\end{aligned}
$$

.

(2) 首先检测 $A$ 组,

- 如果 $A$ 组的混合检测结果为阴性, 则只需要对 $B$ 组进行分组检测, 此时后续检测次数为 $E\left(Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)$;
- 如果 $A$ 组的混合检测结果为阳性, 则需要对 $A$ 组进行分组检测, 接着对 $B$ 组进行混合检测; 此时后续检测次数为 $E\left(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) + E\left(X_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)$.

记事件 $T$: $A+B$ 组中有传染者; 事件 $Z$: $A$ 组混合检测结果为阳性. 那么:

$$
\begin{aligned}
E(Y_n) &= 1 + P(Z|T)\left(E\left(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right) + E\left(X_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)\right) + P\left(\overline{Z}|T\right)E\left(Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right) \\
&= 1 + \frac{1-(1-p)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1-(1-p)^n}\left(1 + E\left(Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)\right) + \frac{1-(1-p)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{1-(1-p)^n}E\left(Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $E(Y_1) = 0$.

**题目 7.**

在橄榄球比赛中, 每一回合进攻方有达阵 (touchdown) 得 6 分, 射门 (field-goal) 得 3 分和不得分三种结果 (不考虑防守方得分). 设 $A, B$ 两队作为进攻方时, 出现三种结果的概率均分别为 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta+\gamma=1$. 现设比赛进入加时赛. 在加时赛前, 通过抛掷硬币竞猜, 猜对一方可选择第一回合作为进攻方或防守方. 不妨设 $A$ 为第一回合进攻方.

(1) 若赛制采用突然死亡法, 即首先得分一方获得比赛胜利, 若当前回合进攻方未得分, 则下一回合由另一队作为进攻方. 试求 $A$ 获得比赛胜利的概率.

(2) 若对赛制作如下修改:

- (i) 若第一回合 $A$ 达阵, $A$ 获得比赛胜利;
- (ii) 若第一回合 $A$ 射门, 第二回合由 $B$ 作为进攻方. 若在第二回合中 $B$ 达阵, 则 $B$ 获得比赛胜利. 若 $B$ 不得分, $A$ 获得比赛胜利. 若 $B$ 射门, 第三回合由 $A$ 作为进攻方, 并开始实行突然死亡法.
- (iii) 若第一回合 $A$ 不得分, 第二回合由 $B$ 作为进攻方, 并开始实行突然死亡法.

记第一回合 $A$ 射门或不得分情况下, $A$ 获得比赛胜利的概率分别为 $a$ 和 $b$, 试写出 $A$ 获得比赛胜利的概率的表达式.

(3) 试求新赛制下, $A$ 获得比赛胜利的概率, 并从公平性角度比较两种赛制哪种更合理.

**解答.**

(1) 记事件 $X$: $A$ 在旧赛制下获得比赛胜利.

由 $P(X)=\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{开局得分}}+\underbrace{\gamma(1-P(X))}_{\text{开局不得分}}$, 得 $P(X)=\frac{1}{1+\gamma}$.

(2) 记事件 $Y$: $A$ 在新赛制下获得比赛胜利. 显然 $P(Y)=\alpha+\beta a+\gamma b$.

(3) 根据比赛的规则, 可知:

$$a=\gamma+\beta P(X)=\gamma+\frac{\beta}{1+\gamma}$$

$$b=1-P(X)=\frac{\gamma}{1+\gamma}$$

$$\begin{aligned}P(Y)&=\alpha+\beta\left(\gamma+\frac{\beta}{1+\gamma}\right)+\gamma\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\\&=\alpha+\beta\gamma+\frac{\gamma^2+\beta^2}{1+\gamma}\end{aligned}$$

现在考虑公平性, 即分析哪种概率更接近 $\frac{1}{2}$.

由 $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, 显然有 $P(X)>\frac{1}{2}$.

考虑主元法, 构造函数 $f(\beta)=P(Y)-\frac{1}{2}=\alpha+\beta\gamma+\frac{\gamma^2+\beta^2}{1+\gamma}-\frac{1}{2}$, 化简得:

$$f(\beta)=\frac{\beta^2+(\gamma^2-1)\beta+\frac{1-\gamma}{2}}{1+\gamma}$$

其中分子是关于 $\beta$ 的二次方程, $\Delta=\left(\gamma^2-1\right)^2-2(1-\gamma)=(\gamma-1)(\gamma^3+\gamma^2-\gamma+1)<0$.

因此 $f(\beta)>0$, 从而 $P(Y)>\frac{1}{2}$.

而 $P(X)-P(Y)=\frac{\beta(1-\beta-\gamma^2)}{1+\gamma}>\frac{\beta(1-\beta-\gamma)}{1+\gamma}=\frac{\alpha\beta}{1+\gamma}>0$, 因此 $\frac{1}{2}<P(Y)<P(X)<1$, 可见新赛制更加合理.