概率论和数理统计

2025-2026 秋冬

黄炜
(hwmath2003@zju.edu.cn)

浙江大学数学科学学院

Chapter 3 Multivariate Random Variables and Their Distributions

关键词 (Keywords):

- 二维随机变量 (Bivariate Random Variables)
- 联合分布函数 (Joint Distribution Function)
- 边际分布函数 (Marginal Distribution Function)
- 条件分布函数 (Conditional Distribution Function)
- 随机变量的独立性 (Independence of Random Variables)
- 随机变量函数的分布 (Functions of Random Variables)

§3.1 二维随机变量 (Bivariate Random Variables)

问题的提出:

Example 1

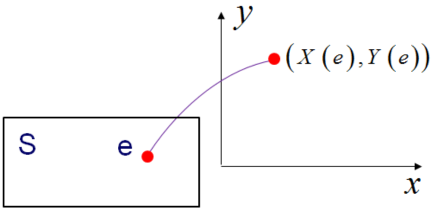
- 研究某一地区学龄儿童的发育情况. 一般仅研究身高 H 的分布或仅研究体重 W 的分布是不够的, 通常需要同时考察每个儿童的身高和体重值, 这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量. 在分析时, 往往除了研究两个指标各自的特点之外, 还常常会分析身高和体重两者之间的关系,
- 研究市场供给模型时, 需同时考察商品供给量、消费者收入和市场价格等多个因素, 它们构成了定义在同一样本空间的三个 (或多个) 随机变量.

Suppose that X and Y are random variables. Their distribution functions, F_X and F_Y, contain information about their associated probabilities. But how may we encapsulate information about their properties relative to each other? The key is to think of X and Y as being the components of a "random vector" (X, Y) taking values in $\mathbb{R}^2$, rather than being unrelated random variables each taking values in $\mathbb{R}$.

二维 (元) 随机变量 (向量)

Definition 1 (二维随机变量)

设一随机试验 E 的样本空间为 S, 定义 S 上的随机变量 $X = X(e)$, $Y = Y(e)$, 称它们构成的向量 (X, Y) 为二维 (元) 随机向量或二维 (元) 随机变量 (bivariate random variable/vector).



Definition 2 (二维离散型随机变量)

若二维随机变量 (X, Y) 的全部可能取值为有限对或可列无限对 (即至多可列对), 则称 (X, Y) 是二维 (元) 离散型随机变量.

离散型随机变量的联合 (joint) 概率分布律

Definition 3 (联合概率分布律)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的可能取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \ldots,$ 与一维离散型随机变量相似，称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

为 (X, Y) 的*联合概率分布律 (joint probability mass function)*，简称*联合分布律*.

Definition 3 (离散型随机变量的联合概率分布律, Cont.)

联合概率分布律也可以用列表方式表示:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合概率分布律具有以下性质: (1) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$; (2) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Example 2

设随机变量 X 在 1, 2, 3, 4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 1~ X 中等可能地取一整数值，试求 (X, Y) 的联合概率分布律.

Solution

(X, Y) 的可能取值为 (i, j), $i = 1, 2, 3, 4$; j 取不大于 i 的正整数.

且 (X, Y) 的联合概率分布律为

$$\mathsf{P}(X = i, Y = j) = \mathsf{P}(X = i)\mathsf{P}(Y = j | X = i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{i},$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4; 1 \leq j \leq i, j$ 为整数.

Solution (Cont.)

也可写为:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$1/4$	0	0	0
2	$1/8$	$1/8$	0	0
3	$1/12$	$1/12$	$1/12$	0
4	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$

Example 3

某足球队在任何长度为 t 的时间区间内得黄牌 (或红牌) 的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Poisson 分布，其中 $t>0$. 记 X_i 为比赛进行 t_i 分钟时的得牌数，$i=1,2$ 且 $t_2>t_1>0$. 试写出 (X_1,X_2) 的联合分布律.

Solution

由题意 $\mathrm{P}(N(t)=k)=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$，且 (X_1,X_2) 的联合分布律为

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_1=i,X_2=j) &= \mathrm{P}(X_1=i)\mathrm{P}(X_2=j|X_1=i)\\
&= \mathrm{P}(N(t_1)=i)\mathrm{P}(N(t_2-t_1)=j-i)\\
&= \frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}(\lambda(t_2-t_1))^{j-i}}{(j-i)!},\quad i=0,1,\ldots;j=i,i+1,\ldots.
\end{aligned}$$

离散型随机变量的边际 (边缘)(marginal) 分布律

Definition 4 (边际 (边缘) 分布律)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\ldots,$ 则

$$P(X=x_i)=P\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i, Y=y_j\}\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=\!=}p_{i\cdot}, \quad i=1,2,\ldots; \quad (1)$$

$$P(Y=y_j)=P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{X=x_i, Y=y_j\}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记为}}{=\!=}p_{\cdot j}, \quad j=1,2,\ldots \quad (2)$$

易知 (1) 和 (2) 满足概率分布律的性质，它们分别是随机变量 X 与 Y 的概率分布律，分别称为 X 和 Y 的边际分布律 或边缘分布律.

Definition 4 (边际 (边缘) 分布律, Cont.)

将边际分布加入表格中，可进一步用列表方式表示:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$\mathrm{P}(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathrm{P}(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

注意: 记号 $p_{i\cdot}$ 表示由 p_{ij} 关于 j 求和后得到; $p_{\cdot j}$ 表示由 p_{ij} 关于 i 求和后得到.

Example 4

在某一群体中，已知有 80% 的人不吸烟，15% 的人少量吸烟，5% 的人吸烟较多，且已知近期他们患呼吸道疾病的概率分别为 5%, 25%, 70%. 记

$$X = \begin{cases} 0, & \text{不吸烟}, \\ 1, & \text{少量吸烟}, \\ 2, & \text{吸烟较多}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, & \text{不患病}, \\ 1, & \text{患病}. \end{cases}$$

1. 求 (X, Y) 的联合分布律和边际分布律;
2. 求患病的人中吸烟的概率.

Solution

1. 由题意可知

X	0	1	2
P	0.80	0.15	0.05

且已知 $\mathrm{P}\{Y=1|X=0\}=0.05$, $\mathrm{P}\{Y=1|X=1\}=0.25$, $\mathrm{P}\{Y=1|X=2\}=0.7$.
结合乘法公式可得 (X,Y) 的联合分布律与边际分布律如下表所示:

$X \backslash Y$	0	1	$\mathrm{P}(X=i)$
0	0.76	0.04	0.80
1	0.1125	0.0375	0.15
2	0.015	0.035	0.05
$\mathrm{P}(Y=j)$	0.8875	0.1125	1

2. $\mathrm{P}(\text{患病的人中吸烟})=\mathrm{P}(X=1\text{ 或 }2|Y=1)=\dfrac{0.0375+0.035}{0.1125}=0.6444.$

事实上, 还可得

$$\mathsf{P}\{\text{患病的人中不吸烟}\} = \mathsf{P}\{X=0|Y=1\} = \frac{0.04}{0.1125};$$

$$\mathsf{P}\{\text{患病的人中少量吸烟}\} = \mathsf{P}\{X=1|Y=1\} = \frac{0.0375}{0.1125};$$

$$\mathsf{P}\{\text{患病的人中吸烟较多}\} = \mathsf{P}\{X=2|Y=1\} = \frac{0.035}{0.1125}.$$

上述概率之和为 1.

条件分布 (conditional distribution)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots.$$

当 $\mathrm{P}(Y = y_j) = p_{\cdot j} \neq 0$ 时, 考虑条件概率

$$\mathrm{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathrm{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \tag{3}$$

满足:

$$\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = 1.$$

故当 x_i 取遍 X 的所有可能取值时, 就得到了在 $\{Y = y_j\}$ 下, X 的条件分布律.

Definition 5 (条件分布)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots.$$

对于某固定的 y_j ($P(Y = y_j) = p_{\cdot j} \neq 0$), 则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

为给定 $\{Y = y_j\}$ 的条件下 X 的条件分布律.

Definition 5 (条件分布) (Cont.)

同理, 对于某固定的 x_i ($\mathsf{P}(X=x_i)=p_{i\cdot}\neq 0$), 则称

$$\mathsf{P}(Y=y_j|X=x_i)=\frac{\mathsf{P}(X=x_i,Y=y_j)}{\mathsf{P}(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\ldots. \tag{5}$$

为给定 $\{X=x_i\}$ 的条件下 Y 的条件分布律.

注: 条件分布律也是分布律, 也包含两部分内容, 一是可能取值, 二是每个可能取值取到的概率 (此处为条件概率); 即也需满足概率分布律的两条本质性质.

Example 5

设 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

已知 $\mathrm{P}(Y \le 0 | X < 2) = 0.5$. 求:

1. a, b 的值;
2. $\{X = 2\}$ 条件下 Y 的条件分布律;
3. $\{X + Y = 2\}$ 条件下 X 的条件分布律.

Back to Slide 37

Solution

1. 由题意知

$$0.5 = \mathsf{P}(Y \le 0 | X < 2) = \frac{\mathsf{P}(X < 2, Y \le 0)}{\mathsf{P}(X < 2)} = \frac{a + 0.2}{a + 0.4},$$

解得 $a = 0$，并由分布律性质知 $a + b + 0.6 = 1$，即 $a + b = 0.4$，从而可得 $b = 0.4$.

2. $\mathsf{P}(X = 2) = 0.6$，由条件概率公式 $\mathsf{P}(Y = j | X = 2) = \dfrac{\mathsf{P}(X = 2, Y = j)}{\mathsf{P}(X = 2)}$ 可得

$$\mathsf{P}(Y = j | X = 2) = \begin{cases} 1/6, & j = -1, \\ 1/6, & j = 0, \\ 2/3, & j = 1. \end{cases}$$

Solution (Cont.)

或写为

Y	-1	0	1
$\mathsf{P}(Y=j\|X=2)$	$1/6$	$1/6$	$2/3$

3 $\mathsf{P}(X+Y=2)=\mathsf{P}(X=1,Y=1)+\mathsf{P}(X=2,Y=0)=0.2+0.1=0.3$, 进而

$$\mathsf{P}(X=i|X+Y=2)=\frac{\mathsf{P}(X=i,Y=2-i)}{\mathsf{P}(X+Y=2)}=\begin{cases}2/3, & i=1,\\ 1/3 & i=2.\end{cases}$$

或写为

X	1	2
$\mathsf{P}(X=i\|X+Y=2)$	$2/3$	$1/3$

Example 6

盒子里装有 3 个黑球, 2 只红球, 1 只白球, 在其中不放回任取 2 球, 以 X 表示取到黑球的数目, Y 表示取到红球的数目. 求:

1. X, Y 的联合分布律;
2. $\{X=1\}$ 时, Y 的条件分布律;
3. $\{Y=0\}$ 时, X 的条件分布律.

Solution

采用不放回抽样，联合分布律及条件分布律结果如下:

X \ Y	0	1	2	$\mathrm{P}(X=i)$
0	0	2/15	1/15	1/5
1	3/15	6/15	0	3/5
2	3/15	0	0	1/5
$\mathrm{P}(Y=j)$	6/15	8/15	1/15	1

Y	0	1
$\mathrm{P}(Y=j\|X=1)$	1/3	2/3

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=i\|Y=0)$	0	1/2	1/2

Example 6

盒子里装有 3 个黑球, 2 只红球, 1 只白球, 在其中不放回任取 2 球, 以 X 表示取到黑球的数目, Y 表示取到红球的数目. 求:

1. X, Y 的联合分布律;
2. $\{X=1\}$ 时, Y 的条件分布律;
3. $\{Y=0\}$ 时, X 的条件分布律.

若采用放回抽样呢?

Solution (Cont.)

采用放回抽样，联合分布律及条件分布律结果如下:

$X \backslash Y$	0	1	2	$\mathrm{P}(X=i)$
0	1/36	4/36	4/36	1/4
1	6/36	12/36	0	1/2
2	9/36	0	0	1/4
$\mathrm{P}(Y=j)$	4/9	4/9	1/9	1

Y	0	1
$\mathrm{P}(Y=j \mid X=1)$	1/3	2/3

X	0	1	2
$\mathrm{P}(X=i \mid Y=0)$	1/16	6/16	9/16

Example 7

一射手进行射击，已知其击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$，射击直至击中目标两次为止. 设 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律和条件分布律 (假设每次的射击是独立的).

Solution

由题意知，(X, Y) 的联合分布律为

$$\mathrm{P}(X = m, Y = n) = p^2(1-p)^{n-2}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1; n = 2, 3, \ldots.$$

Solution (Cont.)

因此, X 和 Y 的边际分布律分别为

$$\mathrm{P}(X=m)=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2}=p(1-p)^{m-1}, \quad m=1,2,\ldots;$$

$$\mathrm{P}(Y=n)=\sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \quad n=2,3,\ldots.$$

事实上, X 服从参数为 p 的几何分布, Y 服从参数为 $(2,p)$ 的巴斯卡分布.

Solution (Cont.)

于是, 对每一 $n(n=2,3,\dots)$, $\mathrm{P}(Y=n)>0$, 在 $\{Y=n\}$ 条件下, X 的条件分布律为

$$\mathrm{P}(X=m|Y=n)=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\dots,n-1.$$

如: 在 $\{Y=10\}$ 条件下, X 的条件分布律为 $\mathrm{P}(X=m|Y=10)=1/9, m=1,2,\dots,9$.
对每一 $m(m=1,2,\dots)$, $\mathrm{P}(X=m)>0$, 在 $\{X=m\}$ 条件下, Y 的条件分布律为

$$\mathrm{P}(Y=n|X=m)=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1},\quad n=m+1,m+2,\dots.$$

分析: 1. 当总射击次数给定时, 首次击中目标的射击是服从离散的均匀分布;
2. 当首次击中目标时的射击次数给定时, 第二次击中目标相当于遗忘了第一次击中, 重新开始进行射击, 直至再一次击中时停止.

§3.2 Distribution Functions of Bivariate Random Variables

二维随机变量的联合分布函数 (joint distribution function)

Definition 6 (二维随机变量的联合分布函数)

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y, 称二元函数

$$F(x, y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \xlongequal{\text{记为}} P(X \le x, Y \le y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

为二维随机变量 (X, Y) 的联合 (joint) 分布函数, 即

$$F(x, y) = P\{(X, Y) \in (\infty, x] \times (\infty, y]\}.$$

联合分布函数 $F(x, y)$ 的性质

易见 $0 \le F(x, y) \le 1$，此外还具有:

1. $F(x, y)$ 关于 x, y 均单调不减，即

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y); \quad y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

2. $F(+\infty, +\infty) = 1$，且对任意 x, y,

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. $F(x, y)$ 关于 x, y 右连续，即

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x + \varepsilon, y) = F(x, y); \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x, y + \varepsilon) = F(x, y).$$

4. 若 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，则

$$\mathsf{P}(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0.$$

要求：对于二维离散型随机变量，联合分布律和联合分布函数会相互推导

二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots,$$

则 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y) = \sum\limits_{x_i \le x, y_j \le y} p_{ij}.$

Example 8

设 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	3
1	1/2	1/3
2	1/12	1/12

Example 9

设 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 1; \\ 0.1, & 0 \le x < 1 \text{ 且 } 1 \le y < 2; \\ 0.3, & 0 \le x < 1 \text{ 且 } y \ge 2; \\ 0.4, & x \ge 1 \text{ 且 } 1 \le y < 2; \\ 1, & x \ge 1 \text{ 且 } y \ge 2. \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布律.

边际 (边缘)(marginal) 分布函数

Definition 7 (边际分布函数)

对二维随机变量而言，诸单个随机变量的分布函数称为边际概率分布函数或边缘概率分布函数，简称边际分布函数 (marginal distribution function) 或边缘分布函数. 记二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$，X，Y 的边际分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty), \\
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y),
\end{aligned}
$$

即二维随机变量中某一个分量的边际分布函数是其联合分布函数当另一个变量趋向于 $+\infty$ 时的极限函数.

结合例子: Example 8, Example 9

条件分布函数 (conditional distribution function)

Definition 8 (条件分布函数)

若 $P(Y=y)>0$, 则在 $\{Y=y\}$ 条件下, X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \le x | Y=y) = \frac{P(X \le x, Y=y)}{P(Y=y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note:

- 条件分布函数为一元函数, 如 Definition 8定义的条件分布函数自变量为 x.
- 以 Definition 8 为例, 若 $\mathsf{P}(Y=y)=0$, 但对任给的 $\varepsilon>0$, $\mathsf{P}(y<Y\le y+\varepsilon)>0$, 则在 $\{Y=y\}$ 条件下, X 的条件分布函数定义为

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathsf{P}(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\mathsf{P}(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{\mathsf{P}(y<Y\le y+\varepsilon)} \\
&\xlongequal{\text{仍记为}} \mathsf{P}(X\le x|Y=y), \quad x\in\mathbb{R}. \quad \text{(特别注意记号)}
\end{aligned}
$$

要求: 条件分布律和条件分布函数间的相互转化, Example 5

§3.3 二维连续型随机变量 (Continuous Bivariate Random Variables)

联合概率密度函数 (Joint Probability Density Function)

Definition 9 (联合概率密度函数)

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，如果存在非负函数 $f(x, y)$，使对于任意实数 x, y，有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合 (joint) 概率密度函数.

二维联合概率密度函数的性质

1. $f(x, y) \geq 0$;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$;
3. 若 G 是 xoy 平面上的某个区域, 则点 (X, Y) 落在 G 中的概率为
$$\mathrm{P}((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall G \subset \mathbb{R}^2;$$
4. 在 $f(x, y)$ 的连续点 (x, y), 有 $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

注:

性质 2 表明介于空间曲面 $z = f(x, y)$ 和 xOy 平面的空间区域体积为 1;
性质 3 表明 $\mathrm{P}((X, Y) \in G)$ 等于以 G 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶面的柱体体积, 所以 (X, Y) 落在面积为零的区域的概率为零.