2025.11.22 HW8 习题五.

B2. 记X为500户人家中隔代发病的比例.

Y_i为第i户…

则 $Y_i \sim B(1, 10\%)$.

$$X = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{500}}{500}$$

故 $E(X) = 10\%$, $Var(X) = \frac{10\% \times (1-10\%)}{500} = \frac{9}{50000}$.

由切比雪夫不等式. $P(|X - 10\%| \leq 5\%)$

$$\geq 1 - \frac{9}{50000 \times (5\%)^2}$$

$$= \frac{116}{125} = 92.8\%$$

B4. 令 $Y_n = a - X_n$, 则 $Y_{(1)} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} Y_i$ 有 $X_{(n)} + Y_{(1)} = a$.

而 $Y_n \sim U(0, a)$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 有 (不妨 $0 < \varepsilon < a$).

$$P(|Y_{(1)}| \geq \varepsilon) = (a - \varepsilon)^n \cdot \frac{1}{a^n} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)^n \to 0, \ n \to +\infty.$$

故 $Y_{(1)} \xrightarrow{P} 0$, $n \to +\infty$, 即

$X_{(n)} \xrightarrow{P} a$, $n \to +\infty$.

$\{X_i^2\}$独立,同分布.

B6. (1) $E(X_i^2)=D(X_i)+E^2(X)=\mu^2+\sigma^2$.

∴由辛钦大数定律知依概率收敛.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \xrightarrow{P} \mu^2+\sigma^2,\ n\to+\infty.$$

(2) $E((X_i-\mu)^2)=E(X_i^2)-2\mu E(X_i)+\mu^2=\sigma^2$.

同理依概率收敛. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \longrightarrow \sigma^2,\ n\to+\infty$.

(3) 即 $Y_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, $Z_n=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}$.

∵$\{X_i\}$独立同分布,由中心极限定理

∴$Y_n\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

同理 $Z_n\sim N(\mu^2+\sigma^2,\frac{D(X_i^2)}{n})$

∴$E(Y_n)=\mu$, $E(Z_n)=\mu^2+\sigma^2$,

即 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu,\ n\to+\infty$.

$\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} \xrightarrow{P} \mu^2+\sigma^2$. 依概率收敛.

∴$\frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1^2+\cdots+X_n^2} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\mu^2+\sigma^2},\ n\to+\infty$.

(4) 同理,记 $T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$,则有 $E(T_n)=\sigma^2$.

有 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$，$n\to+\infty$.

$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n} \xrightarrow{P} \sigma^2$，$n\to+\infty$.

故 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\sigma}$，$n\to+\infty$. 依概率收敛