23-2024秋冬数值分析回忆卷

> by 无日或忘

一、(16pt)

1. $f(x)=x^2$，给定$x_0=4$，利用牛顿迭代法求解x_1,x_2,x_3；
2. 证明牛顿迭代法关于上述函数线性收敛；
3. 将该结论推至一般情况。证明：对一般的函数$f(x)$，若$f(x)$有$m(m\geq 2)$重根，则牛顿迭代法线性收敛（提示：$f(x)=(x-x^*)^m h(x)$）。

二、(9pt) $x=\{1,2,3\},y=\{256,201,159\}$：

1. 给出$p(x)=p_0+p_1x$，使得Discrete Least Squares最小；
2. $$\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2=\|Q^TA\mathbf{x}-Q^T\mathbf{b}\|_2^2=\|R_1\mathbf{x}-\mathbf{c}\|_2^2+\|\mathbf{r}\|_2^2,$$

计算$||r||_2$。

三、$e^x,x\in[0,1]$，已知$e^0=1,e^1=\cdots$：

1. 利用$Lagrange$多项式线性插值，计算$e^{0.5}$；
2. 在只有e^0,e^1数据的前提下，三次拟合计算$e^{0.5}$（提示：Hermite插值）；
3. 令$x_i=x_0+ih,i=0,1,\cdots,n,h=\frac{1}{n}$，并且已知$e^{x_i}$，计算最小的n，使得$error\leq 10^{-4}$。

四、

$$\begin{cases}x=cos2\pi t,t\in[0,1]\\ y=sin2\pi t,t\in[0,1]\end{cases}$$

1. 利用参数t，构造$\mathbb{S}_1^0$周期样条，求$x_{[0,0.25]}(t)$与$y_{[0,0.25]}(t)$；
2. 根据以下引理，构造$\mathbb{S}_3^2$周期样条，并记$m_i=x'_{[t_i,t_{i+1}]}(t_i)$，求$m_i,i=1,\cdots,5$；

Lemma 3.3. Denote $m_i=s'(f;x_i)$ for $s\in\mathbb{S}_3^2$. Then, for each $i=2,3,\ldots,N-1$, we have

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=3\mu_i f[x_i,x_{i+1}]+3\lambda_i f[x_{i-1},x_i], \tag{3.3}$$

where

$$\mu_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}},\qquad \lambda_i=\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}. \tag{3.4}$$

五、有一FPN系统为$(\beta,p,L,U)=(2,4,2,-2)$

1. 求最大和最小的正的正规数；
2. 求最大和最小的正的非正规数；
3. $x=\frac{1}{3}$，求$x=m\times\beta^E$的形式，并求x_L与x_R。

六、给定区间$[-1,1]$，并已知Legendre的递推式

1. 给出x^3的一次、二次、三次最佳逼近；
2. 见第四楼。

七、给定区间$[-1,1]$，$\rho=1$：

1. 证明$I_m(f)=2f(0)$是1点Gauss积分公式；
2. 类似于1.，给出两点Gauss积分公式。

八、

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 sin(\pi x) sin(\pi y) \\ \quad\quad u|_{\partial\Omega} = sin(\pi x) sin(\pi y) \end{cases}$$

1. $\Omega=[0,1]\times[0.5,1.5]$，$h=\frac{1}{3}$，画出区域与网格；
2. 利用五点差分格式求解上述问题，并给出局部截断误差；
3. 编号如下：$U_1:(1/3,5/6),U_2(2/3,7/6),U_3(2/3,5/6),U_4(1/3,7/6)$，写出$AU=b$中$A$与$b$的精确形式。