Homework 5 随机模型 (II)

题目 10.

n 支球队通过淘汰赛决出冠军. 赛程分为 r 轮, 第 l $(l = 1, 2, ..., r)$ 轮共有 m_l 场比赛, r 和 $m_1, m_2, ..., m_r$ 的值由赛制规定. 每场比赛在两支球队间进行, 比赛结果为一支球队获胜, 一支球队落败, 落败的球队被淘汰. 同一轮中的各场比赛同时进行, 一支球队不能参加同一轮的两场比赛, 不同轮的比赛先后进行. 每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前, 从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出. 只有一支球队未被淘汰时赛程结束, 该球队即为冠军.

记队 i $(i = 1, 2, ..., n)$ 的水平值为 v_i, 设队 i 与队 j 比赛时, 队 i 获胜的概率为 $\frac{v_i}{v_i+v_j}$, 队 j 获胜的概率为 $\frac{v_j}{v_i+v_j}$. 记 $n = 2^s + k$, 其中 s, k 为正整数, $0 \le k < 2^s$. 设 $v_1 > v = v_2 = ... = v_n > 0$.

(1) 试给出为保证赛制可行 $m_1, m_2, ..., m_r$ 应满足的条件;

(2) 问 $n = 4$ 时共有多少种不同的赛制. 采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最大, 采用哪种赛制可使队 1 获得冠军的概率最小;

(3) 若 $m_1 = k$, 求队 1 在第一轮结束后未被淘汰的概率 f_1; 若 $m_1 = j < k, m_2 = k - j$, 求队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率 f_2, 并证明 $f_1 - f_2 > 0$;

(4) 证明: $r = s + 1$ 且 $m_1 = k, m_l = 2^{s-l+1}$, $l = 2, 3, ..., s + 1$ 的赛制对队 1 最为有利.

解答.

(1) 首先, $m_1, m_2, ..., m_r$ 均为正整数;

其次, 由于每打一场比赛会淘汰一支球队, 因此需满足 $\sum_{l=1}^{r} m_l = n - 1$;

最后, 每一轮需要至少有 $2m_l$ 支球队, 即对于任意 $i \in [1, r]$, 均有 $n - \sum_{l=1}^{i-1} m_l \ge 2m_i$.

(2) 共有 2 种: 第一种是 $r = 2, m_1 = 2, m_2 = 1$; 第二种是 $r = 3, m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$.

对于第一种赛制, 队 1 获胜的概率为 $P_1 = \frac{v_1}{v_1+v} \times \frac{v_1}{v_1+v} = \frac{v_1^2}{(v_1+v)^2}$.

对于第二种赛制, 队 1 获胜的概率为 $P_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{v_1}{v_1+v}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{v_1+v}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{v_1}{v_1+v}\right)$.

记 $\alpha = \frac{v_1}{v_1+v} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 则 $P_1 = \alpha^2, P_2 = \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha$.

而 $P_2 - P_1 = \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha = \frac{\alpha}{6}(\alpha - 1)(2\alpha - 1) < 0$, 因此第一种赛制使队 1 获得冠军的概率最大, 第二种赛制使队 1 获得冠军的概率最小.

(3) 若 $m_1 = k$, 则队 1 在第一轮结束后未被淘汰的概率为 $f_1 = \frac{2k}{n} \cdot \frac{v_1}{v_1+v} + 1 - \frac{2k}{n}$.

若 $m_1 = j, m_2 = k - j$, 则队 1 在第二轮结束后未被淘汰的概率为 $f_2 = \left(\frac{2j}{n}\frac{v_1}{v_1+v} + 1 - \frac{2j}{n}\right)\left(\frac{2(k-j)}{n-j}\frac{v_1}{v_1+v} + 1 - \frac{2(k-j)}{n-j}\right)$.

同样引入 $\alpha = \frac{v_1}{v_1+v}$, 则 $f_1 = \frac{2k}{n}(\alpha - 1) + 1$, $f_2 = \left(\frac{2j}{n}(\alpha - 1) + 1\right)\left(\frac{2(k-j)}{n-j}(\alpha - 1) + 1\right)$.

注意到 $f_1 - f_2$ 是一个关于 α 的二次函数 (开口向下), 且在 $\alpha = 1$ 处取值为 0. 考察其在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 处的取值, $f_1 - f_2 = -\frac{k}{n} + 1 - \left(1 - \frac{j}{n}\right)\left(1 - \frac{k-j}{n-j}\right) = 0$. 故 $f_1 - f_2$ 在 $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 > 0, 即 $f_1 > f_2$.

(4) 考虑数学归纳法. 当 $n = 1, 2, 3$ 时, 赛制唯一, 显然正确.

假设对于所有 $n < 2^s + k$ (其中 s, k 为正整数, $0 \le k < 2^s$), 采用题述赛制对队 1 最为有利. 现考虑 $n = 2^s + k$ 的情形:

- 若 $m_1 < k$, 第一轮结束剩 $n' = n - m_1$ 支球队, 由假设知取 $m_2 = k - m_1$ 最有利, 但由 (3) 知直接取 $m_1 = k$ 会更加有利;

- 若 $m_1 > k$, 第一轮结束剩 $n' = n - m_1$ 支球队, 显然 $n' < 2^s$ 且 $n' \ge \frac{n}{2} \ge 2^{s-1}$, 由假设知取 $m_2 = n' - 2^{s-1} = n - m_1 - 2^{s-1}$ 最有利, 第二轮结束剩 $n'' = 2^{s-1}$ 支球队.

  将其与 $m_1 = k = n - 2^s$,$m_2 = 2^{s-1}$ 作比较 (两者在进行完前两轮后的球队数相同, 也即状态相同, 故只需要比较前两轮结束后队 1 未被淘汰的概率):
  - 前者 $P_1 = \left(\frac{2m_1}{n}(\alpha-1)+1\right)\left(\frac{2(n-m_1-2^{s-1})}{n-m_1}(\alpha-1)+1\right)$;
  - 后者 $P_2 = \left(\frac{2(n-2^s)}{n}(\alpha-1)+1\right)\left(\frac{2(2^{s-1})}{2^s}(\alpha-1)+1\right) = \alpha\left(\frac{2(n-2^s)}{n}(\alpha-1)+1\right)$.

  注意到 $P_2 - P_1$ 是一个关于 α 的二次函数, 且:

  二次项系数 $\frac{2(n-2^s)}{n} - \frac{2m_1}{n}\frac{2(n-m_1-2^{s-1})}{n-m_1} = \frac{4}{n} \cdot \frac{(m_1-k)(m_1-\frac{n}{2})}{(n-m_1)} \le 0$.

  同样, 在 $\alpha = 1$ 时 $P_2 - P_1 = 0$; 在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 代入同样得 $P_2 - P_1 = 0$, 因此在 $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时 $P_2 > P_1$.

综上, 取 $m_1 = k$ (即题述赛制) 对队 1 最为有利. 由数学归纳法知结论成立.

题目 11.

一赛季有 $r+1$ 名选手 $A_1, A_2, ..., A_{r+1}$ 参加. 赛季中的每场比赛在两名选手间进行. 一场比赛的参赛者只有胜, 负两种结果, 两名选手获胜的概率相等. 所有选手按编号顺序排为**一队列**. 首先由队列中的前两位选手进行比赛, 胜者与队列中下一位选手进行比赛, 负者重新排在队列的末尾. 上述过程持续进行下去, 直至有一人**连续**战胜所有其他选手, 整个赛季结束.

(1) 假设选手共 3 人, 即 $r = 2$. 在第一场比赛 A_2 战胜 A_1 的情况下, 试给出整个赛季包含 n 场比赛时, 获胜的选手及其获胜的概率;

(2) 求 $r = 2$ 时, 每位选手获胜的概率;

(3) 一由 n 个数字 0 或 1 组成的序列, 最后 $r-1$ 位均为数字 1, 但在前 $n-1$ 位中不包含连续 $r-1$ 位数字 1 的子序列, 其中 r 为一给定整数. 记所有这样的序列的总数为 a_n. 试写出 a_n 满足的递推关系;

(4) 记 b_n 为整个赛季包含 n 场比赛的概率. 试写出 b_n 满足的递推关系.

解答.

(1) 在 $r = 2$ 且 n 确定时, 若有选手获胜, 那么该选手是固定的. 具体而言, 若 $n \equiv 2 \pmod 3$, 则 A_2 获胜; 若 $n \equiv 0 \pmod 3$, 则 A_3 获胜; 若 $n \equiv 1 \pmod 3$, 则 A_1 获胜.

获胜的概率显然为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2) 在 $r = 2$ 时, 记事件 X_i: 选手 A_i 获胜, 则有:

- $P(X_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$.
- $P(X_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.
- $P(X_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$.

(3) 记 f_n 表示有多少个长为 n 的 01 序列, 满足不包含连续 $r-1$ 个 1.

- 当 $n < r-1$ 时, $f_n = 2^n$;
- 当 $n \ge r-1$ 时, 枚举最后一个 0 的位置, 可得 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + ... + f_{n-r+1}$.

而 a_n 相当于最后 $r-1$ 位为 1, 且倒数第 r 位为 0, 因此:

- 当 $n < r-1$ 时, $a_n = 0$;
- 当 $n = r-1$ 时, $a_n = 1$;
- 当 $r \le n < 2r-1$ 时, $a_n = f_{n-r} = 2^{n-r}$;
- 当 $n \ge 2r-1$ 时, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_{n-r+1}$.

(4) 考虑从第 2 场比赛开始, 定义指示量 Y_i 表示第 i 场比赛的胜者是否为第 $i-1$ 场比赛的胜者, 则有:

- 找到最小的 k 使得 $Y_k = Y_{k-1} = ... = Y_{k-r+1} = 1$, $Y_{k-r} = 0$, 那么就说明整个赛季包含 k 场比赛.

因此可以得出 $b_n = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}$, 那么其递推公式为:

- 当 $n < r$ 时, $b_n = 0$;
- 当 $n = r$ 时, $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$;
- 当 $r+1 \le n \le 2r-1$ 时, $b_n = \frac{1}{2^r}$;
- 当 $n \ge 2r$ 时, $b_n = \frac{b_{n-1}}{2} + \frac{b_{n-2}}{2^2} + ... + \frac{b_{n-r+1}}{2^{r-1}}$.