2025.11.8 HW6 习题三.

A36. 当 $z \le 0$, $F_Z(z)=0$. 当 $z>4$, $F_Z(z)=1$.

当 $0<z\le 4$, $F_Z(z)=\dfrac{4-\frac{1}{2}\frac{(4-z)^2}{2}}{4}=\dfrac{2z-\frac{1}{4}z^2}{4}=\frac{1}{2}z-\frac{1}{16}z^2$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \text{ 或 } z\ge 4.\\ \frac{1}{2}-\frac{z}{8}, & 0<z<4.\end{cases}$$

A38. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y^2, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

$\therefore F_M(m)=\begin{cases}0, & m\le 0\\ m^3, & 0<m<1\\ 1, & m\ge 1\end{cases}$ $f_M(m)=\begin{cases}0, & m\le 0 或 m\ge 1\\ 3m^2, & 0<m<1.\end{cases}$

$F_N(n)=\begin{cases}0, & n\le 0\\ n+n^2-n^3, & 0<n<1\\ 1, & n\ge 1.\end{cases}$ $f_N(n)=\begin{cases}0, & n\le 0 或 n\ge 1\\ 1+2n-3n^2, & 0<n<1.\end{cases}$

B10.

$f_Z(t)=\begin{cases}0, & t\le 0 或 t\ge 3.\\ \frac{t(3-t)}{3}, & 0<t\le 1\\ \frac{3-t}{3}, & 1<t\le 2\\ \frac{(3-t)^2}{3}, & 2<t\le 3.\end{cases}$

$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

B12. (1) $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i\ge 2\}=1-(e^{-\lambda})^{10}-C_{10}^{1}(e^{-\lambda})^9(e^{-\lambda}\lambda)$

$=1-e^{-10\lambda}-10\lambda e^{-10\lambda}$

(2) $P\{\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2\}=1-(e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\lambda)^{10}$

(3) $P\{\max_{1\le i\le 10}X_i\ge 2\mid \min_{1\le i\le 10}X_i=0\}=1-\frac{(e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\lambda)^{10}-e^{-10\lambda}\lambda^{10}}{1-(1-e^{-\lambda})^{10}}$

习题四.

A3. $E(X)=\int_0^2 f(x)x\,dx=\frac{8}{3}a+2b=\frac{11}{9}$

$\int_0^2 f(x)dx=2a+2b=1$

$\Rightarrow a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}$

B5. $E_3=0.$

$E_2=\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_3+1\Rightarrow E_2=2$

$E_1=2$

$E_0=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2+1\Rightarrow E_0=2+1=3.$

∴平均次数为3.

B6. (1) $f_X(x)=\int_0^x \frac{2}{x}e^{-2x}dy=2e^{-2x}.$

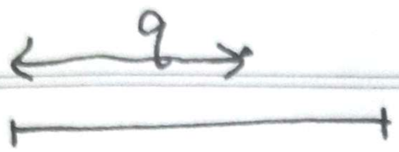
$E(X)=\int_0^{+\infty} f_X(x)x\,dx=\frac{1}{2}$

(2) $E(3X-1)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

(3) $E(XY)=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x dy\cdot\frac{2}{x}e^{-2x}\cdot(xy)$

$=\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx$

$=\frac{1}{4}$

B7. 

记 X 为包含点 Q 的那一根棍子长度.

(1) $E(X)=\int_0^q (1-x)\,dx+\int_q^1 x\,dx$

$$=q-\frac{q^2}{2}+\frac{1-q^2}{2}=\frac{1}{2}+q-q^2$$

(2) $E(X)=-(q-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

∴当 $q=\frac{1}{2}$，即 Q 位于棍子正中央时，$E(X)_{max}=\frac{3}{4}$.