Homework 4 招聘问题

题目 8.

学校希望从 n 名学生中录取一名, 学生以随机顺序逐个前来面试. 通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序, 某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定, 在作出不录取决定后方能面试下一名学生. 考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校, 学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大.

(1) 分别记 f_k 和 g_k 为在前 k 名面试的学生中综合素质居于第一名 / 第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率. 求 f_k 和 g_k;

(2) 记 v_k 为不录取前 k 名学生后, 采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值. 试写出 v_k 满足的递推关系.

(3) 求 v_k, 并给出相应的最优策略.

解答.

(1) 只需要考虑所有学生中第一名, 第二名的位置. 显然 $f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$, $g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

(2) 在不录取前 k 名学生的条件下, 第 $k+1$ 名学生在前 $k+1$ 个人中排名为 $t(1 \le t \le k+1)$ 的概率显然均为 $\frac{1}{k+1}$. 下面我们分类讨论:

- 若 $t \ge 3$, 不可能是总排的第二名, 最优策略是转移到 v_{k+1};
- 若 $t = 2$, 最优策略从 v_{k+1} 和 g_{k+1} 中挑大的值;
- 若 $t = 1$, 最优策略从 v_{k+1} 和 f_{k+1} 中挑大的值.

因此 $v_k = \frac{1}{k+1}\max(v_{k+1}, f_{k+1}) + \frac{1}{k+1}\max(v_{k+1}, g_{k+1}) + \frac{k-1}{k+1}v_{k+1}$, 其中 $1 \le k < n$. 边界处, 显然 $v_n = 0$.

而对于 v_0, t 一定为 1, 因此 $v_0 = \max(v_1, f_1)$.

(3) 由 (2) 可得 $v_k = \frac{k-1}{k+1}v_{k+1} + \frac{1}{k+1}\max\Big(v_{k+1}, \frac{(k+1)(n-k-1)}{n(n-1)}\Big) + \frac{1}{k+1}\max\Big(v_{k+1}, \frac{(k+1)k}{n(n-1)}\Big)$.

容易发现 $v_k \ge \frac{k-1}{k+1}v_{k+1} + \frac{2}{k+1}v_{k+1} = v_{k+1}$, 因此 $\{v_k\}$ 单调递减, $\{f_k\}$ 先递增后递减, $\{g_k\}$ 单调递增.

而 $v_n = 0, v_{n-1} = \frac{n-1}{n(n-1)}, v_{n-2} = \frac{2n-4}{n(n-1)}, v_{n-3} = \frac{3n-9}{n(n-1)}$, 可以发现它们均满足 $v_k = f_k$.

容易归纳证明, 当 $k \ge \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时, 第一个 max 处两者相等, 第二个 max 处后者更大, 均有 $v_k = f_k$.

而在 $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 处, 此时 $\{f_k\}, \{g_k\}$ 均单调递增, 同样可以归纳得到 $v_k = v_{k+1}$.

因此当 $k_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时, v_{k_0} 取到最大值, 并且 $v_k = \begin{cases} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} & k_0 \le k \le n \\ \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)} & 0 \le k < k_0 \end{cases}$.

据此, 最优策略为: 不录取前 $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$ 名学生, 而在之后的学生中, 如果碰到相对成绩第一名或者第二名的学生时, 直接就录取他, 结束面试.

题目 9.

n 名求职者应聘某一职位. 他们能力各不相同, 以某一顺序接受面试, 该顺序以完全随机的方式确定. 招聘方能准确比较已面试求职者的能力大小. 在面试完一位求职者后, 招聘方需立即决定是否有录用意向. 若有意向, 求职者以 p 的概率接受而被录用, 每位求职者是否接受意向相互独立. 若招聘方没有意向, 或招聘方虽有意向但求职者拒绝接受, 招聘方均面试下一位求职者. 招聘方希望录用到能力最强的求职者, 因此只会对能力大于已面试过的其他求职者提出意向.

(1) 试求出招聘方对第 r 名接受面试的求职者提出意向并被接受, 而该求职者恰为能力最强的求职者的概率;

(2) 记 v_r 为从招聘方面试第 r 名求职者起, 采用最优策略以录用到能力最强的求职者的概率的最大值. 试写出 v_r 满足的递推关系;

(3) 求 v_r 的表达式与 $\lim_{n\to\infty} v_1$, 并给出招聘方最优策略的具体描述.

解答.

题面玩了个文字游戏: 只有能力大于已面试过的求职者, 招聘方才可能会提出意向 (但不是一定提出).

(1) 记事件 A_r: 招聘方对第 r 名求职者提出意向并被接受, 且该求职者能力最强.

按照题意, 招聘方并没有对前 $r-1$ 名求职者提出意向, 因此 $P(A_r) = \frac{p}{n}$.

(2) 边界 $v_{n+1} = 0$.

在前 $r-1$ 名求职者均没录用的条件下, 第 r 名求职者是前 r 人中最强的概率为 $\frac{1}{r}$.

- 若它不是前 r 人中最强的, 招聘方不会提出意向, 状态转移到 v_{r+1}.
- 若它是前 r 人中最强的, 招聘方可选择是否提出意向:
  - 不提出意向, 状态转移到 v_{r+1}.
  - 提出意向:
    - 求职者接受录用, 它是最强求职者的概率为 $\frac{r}{n}$;
    - 求职者拒绝录用, 状态转移到 v_{r+1}.

因此 $v_r = \left(1-\frac{1}{r}\right)v_{r+1} + \frac{1}{r}\max\left(v_{r+1}, p\frac{r}{n} + (1-p)v_{r+1}\right)$, 其中 $1 \le r \le n$.

(3) 上面的递推公式即 $v_r = \frac{r-p}{r}v_{r+1} + \frac{p}{r}\max\left(v_{r+1}, \frac{r}{n}\right)$.

容易发现 $v_r \ge \frac{r-p}{r}v_{r+1} + \frac{p}{r}v_{r+1} = v_{r+1}$, 因此 $\{v_r\}$ 单调递减. 记 $a_r = \frac{r}{n}$, 而 $\{a_r\}$ 单调递增,

因此存在最大的 $t \in [0,n]$ 满足 $v_{t+1} \ge \frac{t}{n}$, 则当 $r \le t$ 时, 有 $v_r = v_{r+1}$; 当 $r > t$ 时, 有 $v_r = \frac{r-p}{r}v_{r+1} + \frac{p}{n}$.

因此当 $r > t$ 时, 可以得到 $v_r = \frac{p}{n}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(r-p)^{\overline{k}}}{r^{\overline{k}}}$, 其中 $x^{\overline{k}} = x(x+1)...(x+k-1)$; 当 $r \le t$ 时, $v_r = v_{t+1}$.

关于该展开式, 应该没有封闭的表达式, 所以 t 只能通过递推得到. 而招聘方的最优策略就是, 跳过前 t 名求职者 (不提出意向). 从第 $t+1$ 名开始, 向每一个“当前能力最强”的求职者提出意向, 直到录用成功或面试结束.

接下来分析 $\lim_{n\to\infty} v_1$.

- 当 $p=0$ 时, $\lim_{n\to\infty} v_1 = 0$, 此时根本无法录用求职者.
- 当 $p=1$ 时, 代入 $v_t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-t}\frac{t-1}{t+k-1} \to \frac{t-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{t-1}\right)$, 临界点 $v_t \to \frac{t-1}{n}$, 故 $t \to \frac{n}{e}$.

此时 $\lim_{n\to\infty} v_1 = \frac{1}{e}$, 复现了经典的“秘书问题”的结果.

- 当 $0<p<1$ 时, 在 n 充分大时, 可将 r 归一化为 $x = \frac{r}{n} \in (0,1]$, 令 $v_r \approx y(x)$, 其中 $y(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导.

代入可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{p}{x}y = -p$, 且 $y(1)=0$ (相当于 $v_{n+1}=0$). 解该微分方程得 $y(x) = \frac{p}{1-p}(x^p - x)$.

临界点 $y(x) = x$ 解得 $x = p^{\frac{1}{1-p}}$. 因此 $\lim_{n\to\infty} v_1 = p^{\frac{1}{1-p}}$.