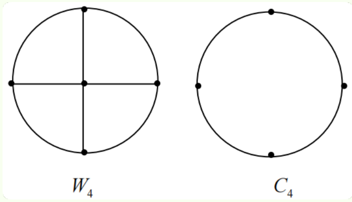
Homework 6 图论模型

题目 12.

考虑图上的**警察与小偷游戏** (cop and robber game). 给定连通无向图 $G = (V, E)$. 游戏开始前, 每位警察先占据图中一个顶点, 小偷再选择图中一个顶点. 随后警察和小偷轮流行动, 在每一轮中, 所有警察先行动, 小偷后行动. 每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点, 也可原地不动. 警察和小偷位于同一顶点, 则称警察抓获小偷. 对某个图 G, 不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动, 警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图 G 的警察数 (cop-number), 记为 $c(G)$.



(1) 分别求轮 W_4 和圈 C_4 的警察数;

(2) 证明: 若 $c(G) = 1$, 必存在顶点 u, w, 使得 $N(u) \cup \{u\} \subseteq N(w) \cup \{w\}$, 这里 $N(v)$ 是图中与 v 有边相连的顶点集;

(3) 设在 G 中没有长度为 3 或 4 的圈, G 的最小度 $\delta(G) = d$. 证明:

- (i) 若警察数不超过 $d-1$, 则不论警察选择哪些顶点, 小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷;
- (ii) 若警察数不超过 $d-1$, 小偷至第 $t-1$ 轮警察行动后仍未被抓获, 则他总可以采取某种行动, 使得在第 t 轮仍未被抓获;
- (iii) $c(G) \geq \delta(G)$.

解答.

(1) 对于轮 W_4, 显然 $c(W_4) = 1$. 因为不论警察的初始位置在哪, 他只要走到中心点上, 下一步一定可以抓住小偷.

对于圈 C_4, 一名警察是不够的, 因为小偷可以选择与警察相对的顶点, 并且无论警察如何走, 小偷总可以走到警察的对面. 因此 $c(C_4) \geq 2$. 而两名警察足够了, 因为他们将小偷夹在里头了, 故 $c(C_4) = 2$.

(2) 考虑证明其逆否命题: 若 $\forall u, w$, $N(u) \cup \{u\} \not\subseteq N(w) \cup \{w\}$, 则 $c(G) > 1$.

由条件知不存在一个 u 满足 $N(u) \cup \{u\} \equiv \{1, 2, ..., n\}$. 由初始位置的任意性, 小偷的初始位置为 u, 总存在一个警察的初始位置, 满足他第一步抓不到小偷.

现假设警察第一步走到了 w, 小偷初始位置为 u, 则由条件知存在一个顶点 $v \in N(u) \cup \{u\}$ 且 $v \notin N(w) \cup \{w\}$, 小偷走到 v.

那么下一步警察仍然抓不到小偷, 且警察在 w', 小偷在 v, 等价的情形. 因此一名警察不够, $c(G) > 1$.

由于原命题和逆否命题等价, 因此若 $c(G) = 1$, 必存在顶点 u, w, 使得 $N(u) \cup \{u\} \subseteq N(w) \cup \{w\}$.

(3i) 仍然考虑逆否命题. 若存在一种警察的初始位置选法, 使得第一轮行动必定能抓住小偷, 就说明警察所在的位置集合构成了图 G 的**支配集**, 记为 $\gamma(G)$.

由于 G 是连通图, 有 $\gamma(G) \leq n-1$, 因此必存在点 w 不在支配集中, 记 $N(w) = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$, 其中 $k \geq d$.

我们将 $N(w)$ 分为在支配集中的点集 $S = \{u_1, u_2, ..., u_t\}$ 和不在支配集中的点集 $T = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$, 那么:

- 显然 $t \geq 1$, 因为 w 自身不在支配集中, 必有邻接点在支配集中;
- 不存在 u_i 和 v_j 的连边, 否则会出现 (w, u_i, v_j) 三元环. 这就意味着对于每个 v_j, 需要有支配集 $\setminus S$ 中的点来支配它;
- 对于 $v_i, v_j (i \neq j)$, 它们不能被同一个点 u 支配, 否则会出现 (w, v_i, u, v_j) 四元环. 这就意味着对于每个 v_j, 支配它的点都不同.

由此可见 $\gamma(G) \geq t + p = k \geq d$.

由于原命题和逆否命题等价, 因此若警察数不超过 $d-1$, 则不论警察选择哪些顶点, 小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷.

(3ii) 设在第 $t-1$ 轮警察行动后小偷在位置 x, 记 $N(x) = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ $(t \geq d)$, 由 (3i) 知如果 $N(x)$ 的所有点都被支配, 那么支配集的大小至少得是 d. 然而只有不超过 $d-1$ 名警察, 因此必然存在 $x' \in N(x)$, 满足 x' 仍然不能被警察们一步逮住. 那么小偷往 x' 跑即可, 第 t 轮仍然无法被抓获.

(3iii) 由 (3i) 和 (3ii) 可知, 若警察数不超过 $d-1$, 则小偷总可以采取某种行动方案, 使得无论警察如何行动, 小偷都不会被抓获. 因此 $c(G) \geq \delta(G)$.

注记.

- (2) 其实也可以正面讨论, 考虑"最后一回合"小偷为什么会被抓, 他是绝对聪明的不可能自投罗网, 肯定是因为它能到达的所有点都被警察包围了, 也就是题目的结论.

题目 13.

中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题. 现有 n 件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸. 两件不同的物品之间可能存在排斥性, 即它们不能同时位于河的一侧, 除非此时船也在河的这一侧. 用图 $G = (V, E)$ 表示物品之间的排斥性. V 中每个顶点表示一件物品, 两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的. 所有物品和船的一种状态可用三元组 (V_L, V_R, b) 表示, 其中 V_L, V_R 分别表示位于河左岸和右岸的物品集, 且有 $V_L \cup V_R = V$, $V_L \cap V_R = \emptyset$, $b \in \{左, 右\}$ 表示船所在的位置. 船从左岸到达右岸, 或从右岸到达左岸的过程称为一次运输. 每次运输时船至多装载 k 件物品, k 称为船的容量. 现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案, 将所有物品从左岸运到右岸.

(1) 记 $\beta(G)$ 为 G 的最小顶点覆盖所包含顶点的数目, k^* 为 G 的 Alcuin 数, 即存在可行运输方案时船容量的最小值, 证明 $\beta(G) \leq k^* \leq \beta(G) + 1$.

(2) 设 X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 为 V 的子集, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $Y = V \setminus X$, 这些子集满足以下条件:

- (i) X_1, X_2, X_3 两两不交, X 为 G 的独立集;
- (ii) $|Y| \leq k$, Y_1, Y_2 为 Y 的非空子集;
- (iii) $X_1 \cup Y_1$ 和 $X_2 \cup Y_2$ 为 G 的独立集;
- (iv) $|Y_1| + |Y_2| \geq |X_3|$.

试设计一可行运输方案, 并证明其运输次数不超过 $2|V| + 1$.

解答.

(1) 设 V_c 是图 G 的最小顶点覆盖, 那么有 $|V_c| = \beta(G)$, 并且 $V \setminus V_c$ 是图的最大独立集.

先证 $k^* \leq \beta(G) + 1$: 假设 $k = \beta(G) + 1$, 那么我们可以将 V_c 中的点始终放在船上, 然后将 $V \setminus V_c$ 中的点逐一运到右岸. 最终将 V_c 置于右岸. 由于 $V \setminus V_c$ 是独立集, 因此在左岸的任何时刻, 这些点之间都没有边相连, 不会产生排斥. 因此该运输方案是可行的, 故 $k^* \leq \beta(G) + 1$.

再证 $k^* \geq \beta(G)$: 假设 $k < \beta(G)$, 由于 V_c 是**最小**顶点覆盖, 因此在第一个时刻, 至少有一个 V_c 中的点不在船上. 记该点为 v, 则 v 至少有一个邻接点 u 在左岸 (否则 V_c 就不是最小的顶点覆盖, 可以把 v 也剔除出去). 那么左岸就出现了排斥, 该运输方案不可行. 因此 $k^* \geq \beta(G)$.

(2) 我们先刻画一次可行运输过程:

- 左 $\to$ 右: $(V_L, V_R, \text{左}) \to (V_L', V_R', \text{右})$, 其中 $V_R \subseteq V_R'$, $|V_R'| - |V_R| \leq k$, 且 V_R 与 V_L' 均为独立集;
- 右 $\to$ 左: $(V_L, V_R, \text{右}) \to (V_L', V_R', \text{左})$, 其中 $V_L \subseteq V_L'$, $|V_L'| - |V_L| \leq k$, 且 V_L 与 V_R' 均为独立集.

由条件 (iv) 知存在 X_3 的划分 $X_3 = S \cup T$, 使得 $|S| \leq |Y_1|, |T| \leq |Y_2|$.

接下来我们分成以下五阶段运输:

- 阶段 1, 将 Y 置于船上, Y_1 留在右岸. 共运输 2 次.
  - $(V, \emptyset, \text{左}) \to (X, Y, \text{右}) \to (X \cup (Y \setminus Y_1), Y_1, \text{左})$
- 阶段 2, 将 $Y \setminus Y_1$ 置于船上, 并带着 X_1 的点逐个运至右岸. 共运输 $2|X_1|$ 次.
  - $(X \cup (Y \setminus Y_1), Y_1, \text{左}) \to ... \to (X \setminus X_1, X_1 \cup Y_1 \cup (Y \setminus Y_1), \text{右}) \to ((X \setminus X_1) \cup (Y \setminus Y_1), X_1 \cup Y_1, \text{左})$
  - 这里由于 Y_1 非空, 因此 $|Y \setminus Y_1| < k$, 故每次运输 X_1 的一个点是放得下的.
- 阶段 3, 将 X_3 分成 S 和 T 两部分运至右岸. 共运输 4 次.
  - $((X \setminus X_1) \cup (Y \setminus Y_1), X_1 \cup Y_1, \text{左}) \underset{(Y \setminus Y_1) \cup S}{\longrightarrow} (X \setminus X_1 \setminus S, X_1 \cup Y_1 \cup (Y \setminus Y_1) \cup S, \text{右}) \underset{Y}{\to} ((X \setminus X_1 \setminus S) \cup Y, X_1 \cup S, \text{左}) \underset{(Y \setminus Y_2) \cup T}{\longrightarrow} (X_2 \cup Y_2, X_1 \cup X_3 \cup (Y \setminus Y_2), \text{右}) \underset{Y \setminus Y_2}{\longrightarrow} (X_2 \cup Y, X_1 \cup X_3, \text{左})$
- 阶段 4, 将 $Y \setminus Y_2$ 置于船上, 并带着 X_2 的点逐个运至右岸. 共运输 $2|X_2|$ 次.
  - $(X_2 \cup Y, X_1 \cup X_3, \text{左}) \to ... \to (Y_2, X \cup (Y \setminus Y_2), \text{右}) \to (Y, X, \text{左})$
  - 这里由于 Y_2 非空, 因此 $|Y \setminus Y_2| < k$, 故每次运输 X_2 的一个点是放得下的.
- 阶段 5, 将 Y 运至右岸. 共运输 1 次.
  - $(Y, X, \text{左}) \to (\emptyset, V, \text{右})$.

综上, 共运输次数不超过 $2 + 2|X_1| + 4 + 2|X_2| + 1 = 2(|X_1| + |X_2|) + 7$ 次.

由于 $|Y| \geq |Y_1| \geq 1$, 因此 $|X| \leq |V| - 1$, 故上式 $= 2(|X| - |X_3|) + 7 \leq 2|V| + 5 - 2|X_3|$ 次.

我们对 $|X_3|$ 进行分类讨论:

- 若 $|X_3| \geq 2$, 显然已经满足 $\leq 2|V| + 1$ 次, 上述构造成立;
- 若 $|X_3| = 1$, 不妨 $S = \emptyset, T = X_3$ (对称的情况类似), 那么阶段 3 的前两次可以删去, 只需要将阶段 2 的最后一次运输修改为 $\underset{Y}{\longrightarrow} ((X \setminus X_1) \cup Y, X_1, \text{左})$, 因为这个状态其实就是 $((X \setminus X_1 \setminus S) \cup Y, X_1 \cup S, \text{左})$. 这样省去了 2 次操作, 刚好 $2|V| + 1$ 次;
- 若 $|X_3| = 0$, 相当于 $S = T = \emptyset$, 此时阶段 3 可以全部删去, 我们只需要将阶段 2 的最后一次运输修改为 $\underset{Y}{\longrightarrow} ((X \setminus X_1) \cup Y, X_1, \text{左})$ 即可, 因为这个状态其实就是 $(X_2 \cup Y, X_1 \cup X_3, \text{左})$. 这样省去了 4 次操作, 刚好 $2|V| + 1$ 次.

综上, 该方案的运输次数不超过 $2|V| + 1$.

注记.

- 浙江大学 2012-2013 学年春夏学期《数学建模 (H)》课程期末考试