2024-2025 数值分析期末回忆卷

zsh

第一题　迭代法

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$$

(1) 使用 Newton 法，分别计算当 $x_0 = 3$ 和 $x_0 = 4$ 时 x_1 的值

(2) 当 $x_0 = 3$ 和 $x_0 = 4$ 时，迭代是否收敛

(3) 写出使得迭代收敛的初始值区间

(4) 证明在上一问给出的区间中，迭代收敛

第二题　多项式插值

$$\text{记} f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f'(x_0) = f'_0, f'(x_1) = f'_1$$

(1) 只用函数值计算 $f'(\frac{x_0+x_1}{2})$，并证明二阶收敛

(2) 计算 $f''(\frac{x_0+x_1}{2})$

(3) 计算 $f'''(\frac{x_0+x_1}{2})$ 并直接给出收敛阶

(4) 证明上一问给出的收敛阶

第三题　分段样条

取单位圆上的点 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$。$t_0 = 0, t_i = t_{i-1} + \frac{\pi}{2}, i = 1,2,3,4$。

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

(1) 计算 $x(t)$ 的 lagrange 插值四次多项式

(2) 写出 lagrange 插值的余项

(3) 用周期样条拟合 $y(t)$，记节点处的一阶导数值为 d_i，列出计算 d_i 的方程

(4*) 给出了 hausdorff 度量的定义，估计样条拟合的误差

第四题　最佳逼近

$$f(x)=\sin x \qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

(1) 计算 $f(x)$ 的一次最佳逼近

(2) 列出 $\{1,x,x^2\}$ 的正规方程

(3) 对 $\{1,x,x^2\}$ 使用 Gram-Schmidt 正交化

(4) 用上一问的结果计算二次最佳逼近

(5*) 证明：在积分区间 $[-a,a]$ 上，给定一个奇函数 $f(x)$，对于任何奇数 n，n 阶和 $n+1$ 阶逼近是一样的

第五题　数值积分

$$f(x)=\cos x \qquad x\in[0,\pi]$$

(1) 用梯形公式计算 $I(f)$

(2) 用 Simpson 公式计算 $I(f)$

(3) 给出了 Legendre 多项式的导数定义，推导 Gauss-Legendre 两点求积公式，并直接给出代数精度

第六题　初值问题

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-x, \qquad y(0)=1$$

(1) 取步长 $h=0.1$，计算 $y(0.1)$

(2) 计算局部截断误差

(3) 计算绝对稳定域

第七题　有限差分

$\Omega=\{(x,y)|0.5\le x,y\le 1.5\}$。

$$\begin{cases}-\Delta u=2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y) & (x,y)\in\Omega\\ u=\sin(\pi x)\sin(\pi y) & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

(1) 写出五点差分格式

(2) 计算截断误差

(3) 取 $h = 0.25$，画出网格并标号，列出方程

第八题　浮点数

$$\mathcal{F} = (2, 3, -1, 2)$$

(1) 最大的正数和最小的正数

(2) 包含正规数的数量，比 1.0 大的最小正规数是多少