2009 年第一届初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

【参考答案】 令 $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\frac{y}{x}=v$，解得 $x=\frac{1-u^2}{v}, y=\frac{\left(1-u^2\right)\left(v-1\right)}{v}$

$$D_{uv}=\left\{\left(u,v\right)\mid 0<u\le 1, 1\le v<+\infty\right\}$$

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{2u}{v} & -\frac{1-u^2}{v^2}\\ -\frac{2u(v-1)}{v} & \frac{1-u^2}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{2u\left(u^2-1\right)}{v^2}$$

$$\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|=\frac{2u\left(1-u^2\right)}{v^2}, \quad \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}=\frac{(1-u^2)\ln v}{u},$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式，原积分也就等于

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{uv}}(1-u^2)^2\cdot\frac{\ln v}{v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^1(1-u^2)^2\mathrm{d}u\int_1^{+\infty}\frac{\ln v}{v^2}\mathrm{d}v=2\cdot\frac{8}{15}\cdot 1=\frac{16}{15}.$$

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$______.

【参考答案】 令 $A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，$f(x)=3x^2-2-A$

$$\int_0^2\left(3x^2-2-A\right)\mathrm{d}x=\left[x^3-2x-Ax\right]_0^2=8-4-2A=4-2A$$

所以 $A=4-2A\Rightarrow A=\frac{4}{3}$，代入所设函数表达式，得

$$f(x)=3x^2-2-A=3x^2-2-\frac{4}{3}=3x^2-\frac{10}{3}.$$

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________.

【参考答案】 曲面在任意点 $\left(x,y,z\right)$ 处的法向量可以取为 $\vec{n}_S=\left(f_x',f_y',-1\right)=\left(x,2y,-1\right)$。平面 $\boldsymbol{\pi}: 2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\vec{n}_\pi=\left(2,2,-1\right)$。于切平面的法向量与平面 π 的法向量平行，

也就有

$$\vec{n}_S // \vec{n}_\pi = \left(x, 2y, -1\right) // \left(2, 2, -1\right)$$

所以$\dfrac{x}{2} = \dfrac{2y}{2} = \dfrac{-1}{-1}$，即$\dfrac{x}{2} = y = 1$，得$x = 2, y = 1$，

$$z\left(2,1\right) = \left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 2\right)\Bigg|_{(2,1)} = 2 + 1 - 2 = 1$$

因此，所求的平面即为经过点$\left(2,1,1\right)$，法向量为$\vec{n}_S = \left(2,2,-1\right)$的平面，于是有平面的点法式方程，有$2\left(x-2\right) + 2\left(y-1\right) - \left(z-1\right) = 0$，展开化简后有$2x + 2y - z - 5 = 0$.

(4) 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ =__________.

【参考答案】对等式两端分别关于x求导数，$e^{f(y)} + xe^{f(y)} f'\left(y\right) y'\left(x\right) = e^y \cdot y'\left(x\right) \ln 29$。因为$xe^{f(y)} = e^y \ln 29$，所以

$$y'\left(x\right) = \frac{e^{f(y)}}{\left[1 - f'\left(y\right)\right] e^y \ln 29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \left[y'\left(x\right)\right]' = \left[\frac{e^{f(y)}}{e^y\left[1 - f'\left(y\right)\right] \ln 29}\right]'_x$$

$$= \frac{\left(e^{f(y)}\right)' \cdot e^y\left[1 - f'\left(y\right)\right] - e^{f(y)} \cdot \left\{e^y\left[1 - f'\left(y\right)\right]\right\}'_x}{e^{2y}\left[1 - f'\left(y\right)\right]^2 \ln 29}$$

$$= \Big\{e^{f(y)} \cdot f'\left(y\right) \cdot y'\left(x\right) \cdot e^y\left[1 - f'\left(y\right)\right]$$

$$- e^{f(y)} \cdot e^y y'\left(x\right)\left[1 - f'\left(y\right) - f''\left(y\right)\right]\Big\} / \{e^{2y}\left[1 - f'\left(y\right)\right]^2 \ln 29\}$$

$$= \frac{e^{f(y)} y'\left(x\right) \cdot \left\{2f'\left(y\right) - f'^2\left(y\right) - 1 + f''\left(y\right)\right\}}{e^y\left[1 - f'\left(y\right)\right]^2 \ln 29}$$

代入一阶导数表达式$y'\left(x\right) = \dfrac{e^{f(y)}}{\left[1 - f'\left(y\right)\right] e^y \ln 29}$，有

$$y'' = \frac{e^{2f(y)}\left\{2f'\left(y\right) - f'^2\left(y\right) - 1 + f''\left(y\right)\right\}}{e^{2y}\left[1 - f'\left(y\right)\right]^3 \ln^2 29}$$

由原等式$xe^{f(y)}=e^y\ln 29$可以推得$\dfrac{e^{2f(y)}}{e^{2y}\ln^2 29}=\left(\dfrac{e^{f(y)}}{e^y\ln 29}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$，所以

$$y''=\frac{2f'(y)-f'^2(y)-1+f''(y)}{x^2\left[1-f'(y)\right]^3}=\frac{-[1-f'(y)]^2+f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

第二题：(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

【参考答案】原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}$

由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\left[\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\frac{n+1}{2}e$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}e}$.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

【参考答案】由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$. 令$u=xt$，得$g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}(x\neq 0)$，

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}(x\neq 0)$$

由导数定义有$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$. 由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$处连续.

第四题：(15 分)已知平面区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi,0\le y\le \pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：

(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{5}{2}\pi^2$.

【参考证法一】由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

左边$=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}\,\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x$，

右边$=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy - \int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x$，

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

由于$e^{\sin x}+e^{-\sin x} \geq 2+\sin^2 x$ ，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}x \geq \frac{5}{2}\pi^2$$

【参考证法二】(1) 根据格林公式，有

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma$$

因为 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,\mathrm{d}\sigma \text{ ，}$$

故 $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

(2) 由 $e^t+e^{-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2+t^2$，

.$\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta \geq \frac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知$y_1 = xe^x+e^{2x}$ ，$y_2 = xe^x+e^{-x}$ ，$y_3 = xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

【参考解法】根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x}与 e^{-x}是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法。

【解法一】: 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$。将$y=xe^x$ 代入上式，得

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x = 2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x = e^x-2xe^x$$

因此所求方程为$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

【解法二】故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}，\ y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 2e^x + xe^x$$

消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

第六题：(10 分)设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

【参考答案】因抛物线过原点，故 $c = 1$，由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}.\text{即}\ b = \frac{2}{3}(1-a)\ ,$$

而 $V = \pi\displaystyle\int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2]$

$$= \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2].$$

令 $\dfrac{dv}{da} = \pi[\dfrac{2}{5}a + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}a - \dfrac{8}{27}(1-a)] = 0$，得 $a = -\dfrac{5}{4}$ ，代入 b 的表达式 得 $b = \dfrac{3}{2}$. 所以 $y \ge 0$。

又因 $\dfrac{d^2v}{da^2}\Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi[\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{27}] = \dfrac{4}{135}\pi > 0$ 及实际情况，当 $a = -\dfrac{5}{4}$，$b = \dfrac{3}{2}$，$c = 1$ 时，体积最小.

第七题：(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $u_n(1) = \dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

【参考答案】先解一阶常系数微分方程 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}\,dx + c\right) = e^x\left(\frac{x^n}{n} + c\right)$$

由条件 $u_n(1) = \dfrac{e}{n}$，得 $c = 0$，故 $u_n(x) = \dfrac{x^ne^x}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n} = e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.\ s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x \in (-1,\ 1)$ 时，有 $s'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ，故

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)。$$

当 $x = -1$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1}\ln 2$. 于是，当 $-1 \le x < 1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x).$$

第八题：(10 分)求$x \to 1-$ 时，与$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

【参考答案】$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \le \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \le 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt$，

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设$x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【参考答案】 $x_n=\dfrac{1}{(1-a)}(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^2\right)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{(1-a)}\left(1-a^4\right)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于$|a|<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

【参考答案】 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{-1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【注】 $\exp(x)=e^x$.

(3) 设$s>0$，求$I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$.

【参考答案】因为$s>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n d\left(e^{-sx}\right)=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}d\left(x^n\right)\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得$I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\dfrac{n!}{s^{n-1}}I_1$.

$$I_1=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{s^2}$$

$$I_n=\frac{n!}{s^{n-1}}I_1=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(4) 设 $f\left(t\right)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【参考答案】 因为 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性，可得

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2y^2-x^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

【参考答案】 直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l}_1=\left(1,1,0\right),\vec{l}_2=\left(4,-2,-1\right)$，两直线上两定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，并记

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\left(2,1,3\right),\ \vec{l}_1\times\vec{l}_2=\left(-1,1,-6\right);$$

于是两点间的距离为 $d=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right)\right|}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}=\dfrac{|-2+1-18|}{\sqrt{38}}=\sqrt{\dfrac{19}{2}}.$

第二题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

【参考证法】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$. $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 对应的图形为凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f'(a)\left(x-a\right)(x>a)$. 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(+\infty)+f'(a)\left(x-a\right)\to+\infty.$$

故存在 $b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)\left(b-a\right)>0$.

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，必有一个充分大的 $c<x_0$，使得 $f'(c)>0$. $f''(x)>0$ 可知 $y=f(x)$ 为凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)\left(x-c\right)\quad(x<c)$. 当 $x\to-\infty$ 时，

$$f(-\infty)+f'(c)\left(x-c\right)\to+\infty.$$

故存在 $d<c$，使得 $f(d)>f(c)+f'(c)\left(d-c\right)>0$.

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists x_1\in\left(x_0,b\right),x_2\in\left(d,x_0\right)$ 使得 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$.

下面证明方程 $y=f(x)$ 只有两个实根.

用反证法。假设 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$。对

$f(x)$在区间$\left[x_1,x_2\right],\left[x_2,x_3\right]$上分别用罗尔定理，则各至少存在一点$\xi_1\in\left(x_1,x_2\right),\xi_2\in\left(x_2,x_3\right)$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。再将$f'(x)$在$\left[\xi_1,\xi_2\right]$上应用罗尔定理，则至少存在一点$\eta\in\left(\xi_1,\xi_2\right)$，使得$f''(\eta)=0$，与已知条件$f''(x)>0$矛盾，所以方程不能多于两个实根。

第三题: (15 分)设$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$所确定. 且$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2e}$在$t=1$处相切. 求函数$\psi(t)$.

【参考答案】因为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2+2t}\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{\left(2+2t\right)^3}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4\left(1+t\right)^3}$$

由题设$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，故

$$\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4\left(1+t\right)^3}=\frac{3}{4(1+t)},$$

从而有$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3\left(1+t\right)^2$，即

$$\psi''(t)-\frac{1}{(1+t)}\psi'(t)=3\left(1+t\right)$$

设$u=\psi'(t)$，故有$u'-\dfrac{1}{(1+t)}u=3\left(1+t\right)$，由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式，有

$$u=e^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\left[\int 3(1+t)e^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+C_1\right]$$

$$=\left(1+t\right)\left[\int 3(1+t)\left(1+t\right)^{-1}\mathrm{d}t+C_1\right]=\left(1+t\right)\left(3t+C_1\right)$$

由曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2e}$在$t=1$处相切知$\psi\left(1\right)=\dfrac{3}{2e},\psi'\left(1\right)=\dfrac{2}{e}$.所以有

$$u\,|_{t=1}=\psi'\left(1\right)=\frac{2}{e}\Rightarrow C_1=\frac{1}{e}-3.$$

于是有

$$\psi(t)=\int\left(1+t\right)\left(3t+C_1\right)\mathrm{d}t=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$$

由$\psi\left(1\right)=\dfrac{3}{2e}\Rightarrow C_2=2$，于是有$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+\left(\dfrac{1}{e}-3\right)t+2\ (t>-1).$

第四题：(15 分)设 $a_n > 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，证明：(1) 当$\alpha > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛；(2) 当$\alpha \le 1$，且$S_n \to \infty (n \to \infty)$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

【参考答案】令$f(x) = x^{1-\alpha}, x \in [S_{n-1}, S_n]$，将$f(x)$在$[S_{n-1}, S_n]$上用拉格朗日中值定理，存在$\xi \in (S_{n-1}, S_n)$，使得$f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$，即

$$S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha} a_n。$$

(1) 当$\alpha > 1$时，$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^\alpha} \ge (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^\alpha}$，显然$\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前$n$项和有界，从而收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛。

(2) 当$\alpha = 1$时，因为$a_n > 0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n \to +\infty$对任意的n，当$p \in N, \frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$，从而$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{2}$. 所以级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。

(3) 当$\alpha < 1$时，$\frac{a_n}{S_n^\alpha} \ge \frac{a_n}{S_n}$，由$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散。

第五题：(15 分)设l 是过原点、方向为(α, β, γ)（其中$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$）的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$（其中$0 < c < b < a$ ，密度为 1）绕l旋转.

(1) 求其转动惯量；　(2) 求其转动惯量关于方向(α, β, γ)的最大值和最小值.

【参考答案】(1)设旋转轴l的方向向量为$\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$，椭球内任意点$P(x, y, z)$的径向量为$\vec{r}$，则点$P$到旋转轴$l$的距离的平方为

$$d^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{s}) = (1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 + (1-\gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz)\,\mathrm{d}V = 0,$$

其中$\Omega = \left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$而

$$\iiint_\Omega x^2 dV = \int_{-a}^{a} x^2\,\mathrm{d}x \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 - \frac{x^2}{a^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} x^2 \cdot \pi ab\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4a^3 bc\pi}{15}.$$

或者使用换元法，有

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta \cdot abcr^2 \sin\varphi dr = \frac{4a^3 bc\pi}{15}.$$

所以可得

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2 \, \mathrm{d}V = \frac{4ab^3 c\pi}{15}, \iiint\limits_{\Omega} y^2 \, \mathrm{d}V = \frac{4abc^3 \pi}{15}.$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l = \iiint\limits_{\Omega} d^2 \, \mathrm{d}V = \frac{4abc\pi}{15}\left[\left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2\right].$$

(2) 考虑函数$V\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2$在约束条件$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$的约束条件下的条件极值。

$$L\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right) = \left(1-\alpha^2\right)a^2 + \left(1-\beta^2\right)b^2 + \left(1-\gamma^2\right)c^2 + \lambda\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\right)$$

令$L'_\alpha\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0, L'_\beta\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0,\ \ L'_\gamma\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0, L'_\lambda\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=0,$ 解得极值点为

$$Q_1\left(\pm1,0,0,a^2\right), Q_2\left(0,\pm1,0,b^2\right), Q_1\left(0,0,\pm1,c^2\right),$$

比较可知，绕z轴（短轴）的转动惯量最大，并且有$I_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$. 绕$x$轴（长轴）的转动惯量最小，并且有$I_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$.

第六题：(15 分)设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2) 求函数$\varphi(x)$；(3) 设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

【参考答案】设$\oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$，将曲线$L$分割成两段$L=L_1+L_2$。设$L_0$不经过原点的光滑曲线，使得$L_0\cup L_1^-$和$L_0\cup L_2$分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线. 由已知条件可知$L_0\cup L_1^-$和$L_0\cup L_2$上曲线积分相等，有

$$\oint\limits_{L_0\cup L_1^-} \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = \oint\limits_{L_0\cup L_2} \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$\Rightarrow \int_{L_2} + \int_{L_0} = \int_{L_0} + \int_{L_1^-} \Rightarrow \int_{L_2} - \int_{L_1^-} = 0 \Rightarrow \int_{L_2+L_1} = 0 \Rightarrow \oint\limits_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2} = 0.$$

(2) 设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$. 令 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}=\frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2}.$$

解得 $\varphi(x)=-x^2$.

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4+y^2=1$ 所围的闭区域，则

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}\,x+\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}$$

利用格林公式，有

$$\oint_{C_a}\frac{2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xy\,\mathrm{d}\,x-x^2\,\mathrm{d}\,y=\iint_D\left(-4x\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=0.$$

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}$.

【参考解答】: 因为 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}=0.$

【注】可以考虑洛必达法则、带皮亚诺余项的麦克劳林公式，具体参见视频解析！

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

【参考解答】: 若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $0<\left|\dfrac{\theta}{2^n}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

从而有，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

(3) 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,dxdy$，其中

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}.$$

【参考解答】: 设 $D_1=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le 2\right\}$,

$$D_2=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le \frac{1}{x}\right\},\ D_3=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\right\},$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+2\ln 2,\quad \iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3-2\ln 2,$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

【注】 由积分的几何意义，积分等于 2 倍 D_3 矩形的面积减去矩形的面积. 具体分析参见解析视频!

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

【参考解答】:令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$,定义区间为 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. $\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$,则

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

所以有 $S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

【注】 一般思路参见解析视频!

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设 $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证:

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2. 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

【参考证明】: 1. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$ 使得 $|a_n|\le M$，且 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $\exists N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1\left(M+|a|\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\left(n-N_1\right)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$, 令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\left\{a_{n+p}-a_n\right\}$ 的子列。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda,$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in N,\exists n,p,i\in N,\left(0\le i\le p-1\right)$，使得 $m=np+i$，且当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$，

所以有 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$.

【注】探索思路过程参见解析视频

第三题：(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f\left(-1\right)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，求证：在开区间 $\left(-1,1\right)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

【参考证明】：由麦克劳林公式，得 $f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 和 x 之间，$x\in\left[-1,1\right]$.分别取 $x=1,x=-1$，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),0<\eta_1<1.$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),-1<\eta_2<0.$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $\left[-1,1\right]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $\left[\eta_2,\eta_1\right]$ 上有最大值 M 和最小值 m，从而有 $m\le\dfrac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}\le M$.

再由闭区间上连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in\left[\eta_2,\eta_1\right]\subset\left(-1,1\right)$，使得

$$f'''(x_0)=\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=3.$$

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，线密度为ρ。在点$(0,h)$处（其中$h>0$）有一质量为m的质点。求射线对该质点的引力。

【参考解答】：在x轴的x处取一小段dx，其质量为ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是$dF=\dfrac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中$G$为引力常数），则有

$$F_x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\,\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$=-Gm\rho\left(h^2+x^2\right)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

类似有

$$F_y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho h\,\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2t\,\mathrm{d}t}{h^3\sec^3t}$$

$$=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为$\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)$.

第五题：(15 分)设$z=z(x,y)$是由方程$F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1\text{和}x^3\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+2=0.$$

【参考解答】：对方程两边分别关于x,y求导，

$$\frac{\partial z}{\partial x}F_u'-\frac{1}{x^2}F_u'+\frac{\partial z}{\partial x}F_v'=0,\quad F_u'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{\partial z}{\partial y}+F_v'\frac{1}{y^2}=0$$

由此可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_u'}{x^2\left(F_u'+F_v'\right)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-F_v'}{y^2\left(F_u'+F_v'\right)}$，所以$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$. 对该式再关于$x,y$求导，有

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=0,x^2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$$

第一个等式乘以x，第二个等式乘以y，相加借助于第一个等式的结论可得

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\left(x-y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题：(15 分)设函数$f(x)$连续，a,b,c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}\,S$.求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}\,u.$

【参考证明】：由Σ的面积为4π。当a,b,c都为零时，等式显然成立。当它们不全为 0 时，可知原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{\left|d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

设平面$P_u:u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，从而$-1\le u\le 1$。两平面$P_u$和$P_{u+du}$截单位球$\Sigma$的截下的部分上，被积函数取值为$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$。这部分摊开可以看成是一个细长条，这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是$\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积为$2\pi du$，故得证。

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1． 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

【**参考答案**】：因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$，而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

2． 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

【**参考答案**】：过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$，

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+2\lambda+3\mu=0.$

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为 $3x+4y-z+1=0$.

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则 $3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0$.解得 $\lambda=-3\mu$，

从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

3． 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

【**参考答案**】：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若是上式等于 0，只有 $(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，由此可得 $a=b=1$.

4． 设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L(x+2y)u\,dx+(x+u^3)u\,dy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

【**参考答案**】：由 $\frac{\partial\left[(x+2y)u\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[u(x+u^3)\right]}{\partial x}$，得

$$\left(x+4u^3\right)u'=u\text{，即}\frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=4u^2\text{，}$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，所以 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$．

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

【**参考答案**】：因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\left(x\to+\infty\right)$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0.$

第二题：(10 分)计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

【**参考答案**】：由于

$$\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

所以有 $\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}=\frac{1}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$

当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，$\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx\le\int_0^{x}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx\le\int_0^{(n+1)\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$

当 $n\to\infty$，由两边夹法则，得 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$.

【注】如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

需要先说明 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$ 收敛。

第三题：(10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ **的近似解，精确到** 0.001.

【**参考解答**】：由泰勒公式 $\sin t=t-\dfrac{\sin\left(\theta t\right)}{2}t^2\left(0<\theta<1\right)$。令 $t=\dfrac{1}{x}$ 得

$$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\dfrac{\theta}{x}\right)}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程，得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501\text{即}x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)。$$

由此知 $x>500, 0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$，所以有 $|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$，即当 $x=501$ 即为满足题设条件的解。

第四题：(12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$．求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

【参考答案】: $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$。令 $Y=0$，$X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$，由此得 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}\right]=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+o(1)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

第五题：(12 分) 求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\le C.$$

【参考答案】: 由于 $\int_0^1\left|f\left(\sqrt{x}\right)\right|dx=\int_0^1|f(t)|2tdt\le 2\int_0^1|f(t)|dt=2$，取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则有

$$\int_0^1|f_n(x)|dx=\int_0^1 f_n(x)dx=1$$

而 $\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)dx=2\int_0^1 tf_n(t)dt=2\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2(n\to\infty)$。因此最小的实数为 $C=2$。

第六题：(12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$. Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，

求$F'(t)$.

【**解法一**】：即 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则$\Omega$在$xOy$面上的投影为$x^2+y^2\le g$。在曲线$S:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$上任取一点$(x,y,z)$，则圆雖到点的射线和 z 轴的夹角为

$$\theta_t=\arccos\frac{z}{t}=\arccos\frac{g}{t}。$$

取$\Delta t>0$，则$\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$。对于固定的$t>0$，考虑积分差$F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为$\Delta t$的球壳上的积分。原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴的夹角在$\theta_t,\theta_{t+\Delta t}$之间。用球坐标计算积分，由积分的连续性可知，存在$\alpha=\alpha\left(\Delta t\right)$，$\theta_{t+\Delta t}\le\alpha\le\theta_t$使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}d\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta dr$$

即$F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi\left(1-\cos\alpha\right)\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr$. 当$\Delta t\to0^+$,

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr\to t^2f(t^2).$$

故$F(t)$的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2f(t^2)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

当$\Delta t<0$，考虑$F(t+\Delta t)-F(t)$可得到同样的左导数，因此

$$F'(t)=\pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)tf(t^2).$$

【**解法二**】：令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$，则区域$\Omega$表示为

$$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le r\le a,r^2\le z\le\sqrt{t^2-r^2}\ ,$$

其中a满足$a^2+a^4=t^2,a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)dz=2\pi\int_0^a\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)dz\right]rdr$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left[a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt}+\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right]$$

注意到$\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第一个积分为 0，所以有

$$F'(t)=2\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}dr=-\pi tf\left(t^2\right)\int_0^a\frac{d\left(t^2-r^2\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

所以$F'(t)=\pi tf(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$.

第七题：(14 分)设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$为正项级数，

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【**参考证明**】: **(1)**设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geq N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，对于任意的 $n\geq N$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$，有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)．

1．求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$．

【参考解答】：因为 $\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$．

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=e^{\frac{\pi}{4}}.$$

2．证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的。

【参考证明】：$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$．只要证明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散.

因为 $a_n\geq\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$．

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散．由正项级数的比较判别法可知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，即 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不绝对收敛.

3．设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

【参考解答】：方程两边对 x 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$

令 $y'(x)=0\Rightarrow x=0,x=-2y$。将 $x=0,x=-2y$ 代入所给方程，得

$$x=0,y=-1;\quad x=-2,y=1.$$

又有 $y''=\dfrac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$，从而有

$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,\ y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

所以，$y(0)=-1$ 为极大值，$y(-2)=1$ 为极小值。

4．过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\geq0)$ 上的点 A 作切线，使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$。求点 A 的坐标。

【参考解答】：设切点 A 的坐标为 $\left(t,\sqrt[3]{t}\right)$，曲线过 A 点的切线为 $y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\left(x-t\right)$。

令 $y=0$，可得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=-2t$. 因此平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面积-曲边梯形 OtA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1。$$

所以 A 的坐标为 $\left(1,1\right)$。

第二题：(12 分)计算定积分 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x.$

【参考解答】：$I=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^x\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan\left(\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}.$$

(其中 $\arctan e^{-x}+\arctan e^x=\dfrac{\pi}{2}$，另外

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\left(\pi-u\right)\sin u}{1+\cos^2 u}du=-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

这样可以得到第二个 $\dfrac{\pi}{2}$)

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

【参考证明】：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 则

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\ f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

应用洛必达法则，则有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2\left(x-0\right)}=\dfrac{1}{2}f''(0)$. 所以

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}f''(0)$. 由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

第四题：(10 分)设 $\left|f(x)\right|\le\pi, f'(x)\ge m>0\left(a\le x\le b\right)$，证明：

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \le \frac{2}{m}.$$

【参考证明】: 因为$f'(x) \ge m > 0\left(a \le x \le b\right)$，所以$f(x)$在$\left[a,b\right]$上严格单调增加，从而有反函数。设$A = f(a), B = f(b), \varphi$是$f$的反函数，则

$$0 < \varphi'\left(y\right) = \frac{1}{f'(x)} \le \frac{1}{m},$$

又$\left|f(x)\right| \le \pi$，则$-\pi \le A < B \le \pi$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x) dx\right| \underline{\underline{x = \varphi(y)}} \left|\int_A^B \varphi'(y) \sin y dy\right| \le \int_0^\pi \frac{\sin y}{m} dy = \frac{2}{m}.$$

第五题：(14 分)设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_\Sigma \left(x^3 - x\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + \left(2y^3 - y\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + \left(3z^3 - z\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值。

【参考解答】: 设Σ围成的立体的体积为V，则由高斯公式，有

$$I = \iiint_V \left(3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3\right) dV = 3\iiint_V \left(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1\right) dV$$

为了使得I达到最小，就是要求V使得$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \le 0$的最大空间区域，即

$$V = \left\{\left(x, y, z\right) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1\right\}$$

所以V是一个椭球，Σ是椭球V的表面时，积分I最小。

为了求该最小值，做变换$x = u, y = v / \sqrt{2}, z = w / \sqrt{3}$，$\dfrac{\partial\left(x, y, z\right)}{\partial\left(u, v, w\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 1} \left(u^2 + v^2 + w^2 - 1\right) dV \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \left(r^2 - 1\right) r^2 \sin\theta\, dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \end{aligned}$$

第六题：(14 分)设$I_a(r) = \displaystyle\int_C \frac{y\,\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y}{\left(x^2 + y^2\right)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2 + xy + y^2 = r^2$，取正向。求极限$\displaystyle\lim_{r \to +\infty} I_a(r)$.

【参考解答】: 作变换$x = \dfrac{u - v}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{u + v}{\sqrt{2}}$. 曲线$C$变为$uOv$平面上的$\Gamma: \dfrac{3}{2}u^2 + \dfrac{1}{2}v^2 = r^2$,也是取正向且有$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$，$ydx - xdy = vdu - udv$,

$$I_a(r) = \int_\Gamma \frac{vdu - udv}{\left(u^2 + v^2\right)^a}.$$

作变换$u=\sqrt{\frac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta$,则有$vdu-udv=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2r^2}{\sqrt{3}}J_a$$

其中$J_a=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta\right)^a}, 0<J_a<+\infty.$

因此当$a>1$和$a<1$，所求极限分别为 0 和$-\infty$。当$a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta}=\sqrt{3}\pi.$$

所求极限为 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, a>1,\\ -\infty, a<1,\\ -2\pi, a=1.\end{cases}$

第七题：(14 分)判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和。

【参考解答】：(1) 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$， $n=1,2,\cdots$。

因为n充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$$

所以$u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

(2) $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\left(k=1,2,\cdots\right)$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}\left(a_2-a_1\right)+\frac{1}{4}\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\frac{1}{n+1}\left(a_n-a_{n-1}\right)-\frac{1}{n+1}a_n$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n.$$

因为$0<a_n<1+\ln n$，所以$0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$. 于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1.$

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是____________________.

【参考解答】: 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r=1$, 故所求微分方程为

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=0.$$

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi: 2x + 2y + z = 0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是____________________.

【参考解答】: 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点，则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$。由于该切平面与已知平面 L 平行，则 $(-2x_0,-4y_0,1)$ 平行于 $(2,2,1)$，故存在常数 $k \neq 0$，使得 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$，故得 $x_0=-1, y_0=-\dfrac{1}{2}, z_0=\dfrac{3}{2}$,所以切平面方程就为 $2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0.$

(3) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}\, t$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}\right|_{x=0} =$________.

【参考解答】: 易知 $y(0)=1$, 两边对变量 x 求导，则

$$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1) \Rightarrow y'=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1$$

把 $x=0$ 代入可得 $y'=3.$

(4) 设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$______________.

【参考解答】: $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]$, $1-\dfrac{1}{(n+1)!}\to 1.$

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} =$_______.

【参考解答】: 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3.$

于是 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha, \alpha\to 0(x\to 0)$，即有 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\alpha x}{x}-1=2.$$

第二题：(12 分)设 n 为正整数，计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}\, x.$

【参考解答】：$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln x)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}dx$

令 $\ln x=u$，则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin(u)\right|du=\int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt=4n\int_{0}^{\pi/2}\left|\sin t\right|dt=4n.$

第三题：（14 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，证明：对于任意 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

【参考证明】：由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\xi\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\eta\in(x,1)$$

上面两式相减，得到 $f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件 $|f(x)|\le A,|f''(x)|\le B$，得到 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}\left[(1-x)^2+x^2\right]$

由于 $(1-x)^2+x^2$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，所以有 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$

第四题：（14 分）(1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【参考证明】(1)：设球缺所在球表面方程为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。

记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega}dV=\int_{R-h}^{R}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记 $J=\iint_{P_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$. 由高斯公式，有 $I+J=\iiint_{\Omega}3dV=3V(\Omega)$，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故 $J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1)$,

其中 $\sigma(P_1)$ 为 P_1 的面积。故 $I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$.

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度为

$h=|QD|=\sqrt{3}$.再由(1)所证并代入$h=\sqrt{3}$和$R=2\sqrt{3}$得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi.$$

第五题：(15 分)设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}x,\ \text{求}\ \lim_{n\to\infty}x_n.$$

【参考解答】：考虑特殊情形：$a=0,b=1$。下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

首先，$x_n\in[0,1]$，即$x_n\le 1$，只要证明$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N,\forall n>N$时，$1-\varepsilon<x_n$。由$f$在$[0,1]$上严格单增，就是要证明$f^n(1-\varepsilon)<\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\int_0^1[f(x)]^n dx.$

由于$\forall c\in(0,1)$，有$\int_c^1[f(x)]^n dx>f^n(c)(1-c)$. 取$c=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$,则$f(1-\varepsilon)<f(c)$，即$\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0$, 所以$\exists N,\forall n>N$时有$\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\dfrac{\varepsilon}{2}=1-c$. 即

$$f^n(1-\varepsilon)<[f(c)]^n(1-c)\le\int_c^1[f(x)]^n dx\le\int_0^1[f(x)]^n dx=f^n\left(x_n\right).$$

从而$1-\varepsilon<x_n$，由ε的任意性得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

再考虑一般情形。令$F(t)=f(a+t(b-a))$，由f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，知F在$[0,1]$上非负连续，严格单增。从而$\exists t_n\in[0,1]$，使得$F^n\left(t_n\right)=\int_0^1F^n(t)dt$,且$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$. 即

$$f^n\left(a+t_n(b-a)\right)=\int_0^1f^n(a+t(b-a))dt.$$

记$x_n=a+t_n(b-a)$,则有$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b$.

第六题：(15 分)设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$.

【参考解答】：令$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因$A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{1+i^2/n^2}$, 所以有$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$.

记$x_i=\dfrac{i}{n}$,则$A_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f\left(x_i\right)dx$, 故$J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(x_i\right)\right]dx$.

由拉格朗日中值，存在$\zeta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$使得$J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx$.

记m_i,M_i分别是$f'(x)$在$\left[x_{i-1},x_i\right]$上的最大值和最小值，则$m_i\le f'\left(\zeta_i\right)\le M_i$，故积分$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx$介于$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx,M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx$

之间，所以存在$\eta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$使得$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(\zeta_i\right)\left(x-x_i\right)dx=-f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2/2$.

于是，有$J_n=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2=-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1f'(x)dx=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{4}.$$

2015年第七届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

试卷及参考答案

一、填空题（共5小题，每小题6分，共30分）

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$.

【参考解答】: 由于 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则，可得原极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\ne 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

【参考解答】: 对等式两端关于 x,y 分别求偏导数，有

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left(zF_v-x^2F_u\right)}{xF_u+yF_v},$$

类似可得 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\left(zF_u-y^2F_v\right)}{xF_u+yF_v}$, 于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy\left(xF_u+yF_v\right)+z\left(xF_u+yF_v\right)}{xF_u+yF_v}=z-xy.$$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为_______.

【参考解答】: 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 切平面:

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\text{即 } z=2x-2y-1.$$

联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=2x-2y-1.\end{cases}$ 所围区域在 xOy 面上的投影 D 为:

$$D=\left\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\right\},$$

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]d\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]d\sigma$$

令 $x-1=r\cos t,y+1=r\sin t$，则原积分为

$$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值______.

【参考解答】: 由狄利克雷收敛定理，容易得到 $s\left(0\right)=\frac{3}{2}$.

(5) 设区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $u\left(x\right)$ 定义为 $u\left(x\right)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $u\left(x\right)$ 的初等函数表达式为________.

【参考解答】: 由于 $u^2\left(x\right)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint\limits_{s\ge0,t\ge0}e^{-x(t^2+s^2)}dsdt$

所以 $u^2\left(x\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho\left(x\rho^2\right)=-\frac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\frac{\pi}{4x}$.

所以有 $u\left(x\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

第二题：(12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

【参考解答】: 显然 $O\left(0,0,0\right)$ 为 M 的顶点，

$A\left(1,0,0\right),B\left(0,1,0\right)$，$C\left(0,0,1\right)$ 在 M 上。由三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 是 M 的准线。

设 $P\left(x,y,z\right)$ 是 M 上的点，$\left(u,v,w\right)$ 是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t},\text{即}u=xt,v=yt,z=zt.$$

代入准线方程，得 $\begin{cases}\left(x+y+z\right)t=1,\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)t^2=1\end{cases}$ 消去 t，得圆锥面 M 的方程为 $xy+yz+zx=0$.

第三题：(12 分)设 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in\left(a,b\right)$，有 $f'\left(x\right)=\alpha f\left(x\right)+\beta f''\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内无穷次可导.

【参考证明】: 1. 若 $\beta=0$。对于 $\forall x\in\left(a,b\right)$，有

$$f'\left(x\right)=\alpha f\left(x\right),f''\left(x\right)=\alpha f'\left(x\right)=\alpha^2f\left(x\right),\cdots,f^{(n)}\left(x\right)=\alpha^nf\left(x\right).$$

从而 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内无穷次可导。

2. 若 $\beta\ne0$。对于 $\forall x\in\left(a,b\right)$，有

$$f'\left(x\right)=\frac{f'\left(x\right)-\alpha f\left(x\right)}{\beta}=A_1f'\left(x\right)+B_1f\left(x\right),\qquad(1)$$

其中 $A_1=\frac{1}{\beta},B_1=\frac{\alpha}{\beta}$.

因为(1)右端可导，从而有

$$f'''\left(x\right)=A_1f''\left(x\right)+B_1f'\left(x\right).$$

设 $f^{(n)}\left(x\right)=A_1f^{(n-1)}\left(x\right)+B_1f^{(n-2)}\left(x\right),n>1$，则 $f^{(n+1)}\left(x\right)=A_1f^{(n)}\left(x\right)+B_1f^{(n-1)}\left(x\right)$.

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内无穷次可导。

第四题：(14 分)求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

【参考解答】：因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$. 所以收敛半径为 $R=+\infty$，即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\geq 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用 $S_1(x),S_2(x),S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和，依据 e^x 的幂级数展开式可得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2e^{x-1},\ S_2(x)=e^{x-1},$$

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=e^{x-1}-1,$$

当 $x\neq 1$ 时，有 $S_3(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$. 又由于 $S_3(1)=1$.

综合以上讨论，最终幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

第五题：(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 试证:

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

【参考证明】：(1) 若 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\leq 4$，则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\leq\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\leq 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1.$$

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$. 而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$，故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$. 所以对于任意的 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|=4$，由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。这与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。所以 $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$.

(2) 先证 $\exists x_2\in[0,1]$ 使得 $|f(x_2)|<4$. 若不然，对于 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\geq 4$ 成立，则 $f(x)\geq 4$ 或 $f(x)\leq -4$ 恒成立，与 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

再由 $f(x)$ 的连续性及(1)的结果，利用介值定理，可得 $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leq M$.

若$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

【参考证明】：在点$(0,0)$展开$f(x,y)$得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$$

其中$\theta\in(0,1)$。

记$(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 f(\theta x,\theta y)$，则$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(ux^2+2vxy+wy^2\right)$.

由于$\|(u,\sqrt{2}u,w)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\le\sqrt{M}$以及$\|(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\|=x^2+y^2$，于是有

$$\left|(u,\sqrt{2}u,w)\cdot(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\right|\le\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right),$$

即$|f(x,y)|\le\frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2+y^2\right)$. 从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dxdy\right|\le\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$______.

【参考解答】: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}$，由已知条件：$f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq0$，由带皮亚诺余项的泰勒公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$$

可得 $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+o(x)$，将其代入极限式，则有

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)x+o(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right)\right]^{\frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)}}\right\}^{\frac{1}{x}\left[\frac{f'(a)}{f(a)}x+o(x)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f'(a)}{f(a)}\left[1+\frac{o(x)}{x}\right]}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

2．若 $f(1)=0, f'(1)$ 存在，则极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)\tan3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$__________.

【参考解答】: $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)\cdot3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

3．设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$．记 $z=f\left(e^xy^2\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为________________.

【参考解答】: 由题设，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(e^xy^2\right)e^xy^2=f\left(e^xy^2\right)$．令 $u=e^xy^2$，得到当 $u>0$，有 $f'(u)u=f(u)$，即

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\Rightarrow\left(\ln f(u)\right)'=\left(\ln u\right)'.$$

所以有$\ln f(u)=\ln u+C_1, f(u)=Cu$. 再由初值条件$f(1)=2$，可得$C=2$，即$f(u)=2u$. 所以当$x>0$时，有$f(x)=2x.$

4．设$f(x)=e^{x}\sin 2x$，则$f^{(4)}(0)=$________________.

【参考解答】：由带皮亚诺余项余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]\cdot\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right]$$

所以$f(x)$展开式的 4 次项为$-\frac{1}{3!}(2x^3)\cdot x+\frac{2}{3!}x^4=-x^4$，即有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-1，故 f^{(4)}(0)=-24.$$

5．曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为________________.

【参考解答】： 移项，曲面的一般式方程为$F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2-z=0$，有

$$\vec{n}(x,y,z)=\left(F_x',F_y',F_z'\right)=(x,2y,-1).$$

$$\vec{n}(x,y,z)//\vec{n}_1\Rightarrow(x,2y,-1)//(2,2,-1),$$

可得$\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{-1}{-1}$.由此可得$x=2,y=1$，将它代入到曲面方程，可得$z=3$，即曲面上点$(2,1,3)$处切平面与已知平面平行，所以由平面的点法式方程可得切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0，即 2x+2y-z=3.$$

第二题： (14 分)设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，且当$x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$. 试证：当$a\in(0,1)$时，有$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$

【参考解答】：不等式的证明转换为证明不等式$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2-\int_0^a f^3(x)dx>0$. 于是对函数求导，$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right)$

已知条件$f(0)=0$，可得$F'(0)=0$，并且由$0<f'(x)<1$，所以函数$f(x)$在$(0,1)$内单调增加，即$f(x)>0$，所以只要证明$g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$.

又$g(0)=0$，所以只要证明$g'(x)>0$，于是有

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0$$

所以$g(x)$单调增加，所以$g(x)>0,x>0$. 所以也就有$g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)>0$，即$F'(x)>0$，可得$F(x)>0$，因此$F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$单调增加，所以$F(a)>F(0)=0$，即有

$$F(a)=\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2-\int_0^a f^3(t)dt>0\Rightarrow\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2>\int_0^a f^3(t)dt.$$

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

【参考解答】: 令$u=x-\frac{1}{2},v=y-\frac{1}{2},w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$，即

$$x=u+\frac{1}{2},y=v+\frac{1}{2},z=\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2},$$

则椭球面转换为变量为u,v,w的单位球域，即$\Omega_{uvw}:u^2+v^2+w^2\le 1$. 则由三重积分的换元法公式，即

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

$$F(u,v,w)=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2=u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以原积分就等于

$$M=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+u+v^2+v+\frac{w^2}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dudvdw$$

由于单元圆域$\Omega_{uvw}:u^2+v^2+w^2\le 1$关于三个坐标面都对称，所以积分也就等于

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw+\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}dudvdw$$

其中$\frac{3}{4\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}dudvdw=\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

由于积分区域具有轮换对称性，所以有

$$\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}v^2dudvdw=\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}w^2dudvdw$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{2}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}u^2dudvdw=\frac{5}{6}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)dudvdw=\frac{5}{6\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}\left(u^2+v^2+w^2\right)dudvdw$$

$$=\frac{5}{6\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{5}{6\sqrt{2}}\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{5\pi}{3\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

所以最终的结果就为 $M=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}=\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$.

第四题：(14 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

【参考解答】：将区间 $[0,1]$ n 等份，分点 $x_k=\frac{k}{n}$，则 $\Delta x_k=\frac{1}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]dx\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right),\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right]\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. 证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2，使得 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$.

【参考解答】：设 $F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0, F(1)=1$. 由介值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}$. 在两个子区间 $(0,\xi),(\xi,1)$ 上分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi},x_1\in(0,\xi),$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi},x_2\in(\xi,1),$$

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2.$$

第六题：(14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$，用傅里叶(Fourier)级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

【参考解答】：由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知，f 是以 $2,\sqrt{3}$ 为周期的函数，所以它的傅里叶系数为

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x dx, b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$，所以

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{1}f\left(x+\sqrt{3}\right)\cos n\pi x dx$$
$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi\left(t-\sqrt{3}\right)dt$$
$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]dt$$
$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t dt$$
$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t dt+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t dt$$
所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$；同理可得
$$b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi .$$
联立，有
$$\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi\end{cases}$$
得 $a_n=b_n=0\left(n=1,2,\cdots\right)$. 而 f 可导，其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$，所以有
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{a_0}{2},$$
其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 为常数.

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1. 已知可导函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)\cos x+2\int_0^x f\left(t\right)\sin t\,\mathrm{d}\,t=x+1$，则 $f\left(x\right)=$________________。

【参考解答】：首先令 $x=0$，则由等式可得 $f\left(0\right)=1$；对等式两端求导数，则有

$$f'\left(x\right)\cos x-f\left(x\right)\sin x+2f\left(x\right)\sin x=1$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)+f\left(x\right)\tan x=\sec x$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，由计算公式可得

$$f(x)=e^{-\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x+C\right)$$

$$=e^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\tan x+C\right)=\sin x+C\cos x$$

代入初值 $f\left(0\right)=1$，得 $C=1$，所以 $f\left(x\right)=\cos x+\sin x$．只要求出满足条件的 $f\left(x\right)$ 即可，并没有求出所有满足条件的函数。只要满足条件的 $f\left(x\right)$ 都为所求的函数。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$________________。

【参考解答】：与第五届第一题差不多，基本思路应该一致，并且由于有平方，所以直接由正弦函数公式

$$\sin\left(n\pi+x\right)=\pm\sin x\Rightarrow\sin^2\left(n\pi+x\right)=\sin^2 x,$$

$$\Rightarrow\sin^2\left(x-n\pi\right)=\sin^2 x,n\in Z$$

.于是有

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$$

$$=\sin^2\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

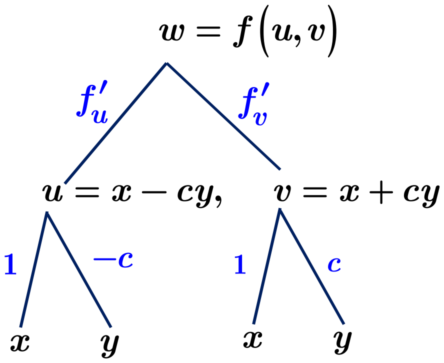
所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

3．设 $w=f\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy,v=x+cy$，其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$____________。

【参考解答】：这样类型的问题在各阶试题中都有，并且在最后发布第三届解题试题时特别强调，多元复合函数求导的重要性；而且这里的复合结构是已知的，所以直接有变量关系图。



由复合函数求导数，有变量关系图。于是有 $w_x=f'_u+f'_v,w_y=-cf'_u+cf'_v$；由于连个偏导数仍然具有与原函数函数相同的复合结构，所以对上面的导函数继续求导，则有

$$w_{xx}=\left(f'_u\right)'_x+\left(f'_v\right)'_x=f''_{uu}+f''_{uv}+f''_{vu}+f''_{vv}=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv},$$

$$\begin{aligned}w_{yy}&=-c\left(f'_u\right)'_y+c\left(f'_v\right)_y\\&=-c\left[-cf''_{uu}+cf''_{uv}\right]+c\left[-cf''_{vu}+cf''_{vv}\right]\\&=c^2\left[f''_{uu}-f''_{uv}-f''_{vu}+f''_{vv}\right]=c^2\left[f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}-\frac{1}{c^2}\left[c^2\left(f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}\right)\right]\\&=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}-\left(f''_{uu}-2f''_{uv}+f''_{vv}\right)=4f''_{uv}.\end{aligned}$$

4．设 $f\left(x\right)$ 具有二阶连续导数，且 $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=0,f''\left(0\right)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$____________。

【参考解答】【解法一】在有泰勒公式应用于解题的竞赛题解析中，特别强调了泰勒公式的两种类型适用的问题类型。这里是求极限，并且是求自变量趋于 0 的极限；毫无疑问，就是用带皮亚诺余项的泰勒公式，并且由于函数由二阶连续导数，所以可以在 0 点可以展开为二阶带皮亚诺余项的泰勒公式，即有

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)\\&=3x^2+o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

由此可得 $f\left(\sin^2 x\right)=3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)$，所以将其代入可得极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x+o\left(\sin^4 x\right)}{x^4}=3.$$

【解法二】洛必达法则。

5．不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=$________。

【参考解答】：$I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{e^{-\sin x}2\sin x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}\sin x$ 令 $\sin x=t$，则有

$I=2\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$。

$$\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{e^{-t}\left(1-t\right)-e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\mathrm{d}t+\int\frac{e^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$-\int\frac{e^{-t}}{1-t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{1-t}\mathrm{d}e^{-t}=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int e^{-t}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

$$=\frac{e^{-t}}{1-t}-\int\frac{e^{-t}}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

代入上式可得 $\int\frac{te^{-t}}{\left(1-t\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{e^{-t}}{1-t}+C$，由于 $\sin x=t$，所以

$$I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\left(1-\sin x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$$

6．记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________。

【参考解答一】由两个方程，可得边界线方程为 $x^2+y^2=2$，这个题目由被积函数的结构，只包含一个变量 z，而且用平行于 xOy 的平面取截取立体区域，截面都为圆，所以考虑先二后一的截面法计算要简单。以 $z=\sqrt{2}$ 作为分割面，将区域分割成上下两部分，则有

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega_{上}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega_{下}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中上下积分区域可以描述为

$$\Omega_{\text{上}}: \sqrt{2} \le z \le 2, x^2 + y^2 \le 4 - z^2;$$

$$\Omega_{\text{下}}: 0 \le z \le \sqrt{2}, x^2 + y^2 \le z^2;$$

所以有

$$\iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2}}^{2} z \, \mathrm{d}z \iint_{D(x)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} z\left(\pi\left(4 - z^2\right)\right) \mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(4\pi z - \pi z^3\right) \mathrm{d}z$$

$$= \left[2\pi z^2 - \frac{\pi z^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \pi$$

$$\iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{0}^{\sqrt{2}} z \, \mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}} \pi z^3 \, \mathrm{d}z = \left[\frac{\pi z^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = \pi$$

所以 $\iiint_{V} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 2\pi.$

【参考解答二】使用球面坐标

$$I = \iiint_{V} z dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 2\pi$$

二、（本题 14 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$，若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d} g_\alpha(0)}{\mathrm{d} t} = 0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d} t^2} > 0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

【参考解答】根据基于二元函数极值判定极小值的充分条件，如果函数在 $(0,0)$ 点取到极小值，第一步，判定梯度向量为零向量，即 $\nabla f(0,0) = \left(f'_x(0,0), f'_y(0,0)\right) = \vec{0}$；

第二步：判定黑塞矩阵为正定矩阵，对于存在二阶连续偏导数的函数，即由三个偏导数构成的矩阵 $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)}$ 为正定矩阵。

如果符合这样两个前提条件，则可以判定函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 取到极小值，即 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

下面，就依据已知条件我们来验证这样两个条件是满足的。两个步骤中需要二元函数的一阶、二阶偏导数，而已知条件是计算函数$g_\alpha(t)$关于t的导数，下面就来计算一下，是否会出现需要的描述形式。

根据已知条件，对函数$g_\alpha(t)$关于t求导数，其实又是一个复合函数求导数，令$x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$，绘制变量关系图，可得

$$g_\alpha'(t)=f_x'(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\cos\alpha+f_y'(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow g_\alpha'(0)=f_x'(0,0)\cdot\cos\alpha+f_y'(0,0)\cdot\sin\alpha=\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)$$

$$=\left\|\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\right\|\cos\theta,\theta=\left(\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right],(\cos\alpha,\sin\alpha)\right)=0$$

要求对于任意的任何α都有$\dfrac{\mathrm{d}\,g_\alpha(0)}{\mathrm{d}\,t}=0$，则必定有

$$\left\|\left[f_x'(0,0),f_y'(0,0)\right]\right\|=0\Rightarrow f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0$$

因此$(0,0)$是二元函数$f(x,y)$的驻点。

根据已知条件，继续求二阶导数，则有

$$g_\alpha''(t)=\left(f_x'\right)_x'\cdot\cos\alpha+\left(f_y'\right)_x'\cdot\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha\left[f_{xx}''\cdot\cos\alpha+f_{xy}''\cdot\sin\alpha\right]+\sin\alpha\left[f_{yx}''\cdot\cos\alpha+f_{yy}''\cdot\sin\alpha\right]$$

$$=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}''\cdot\cos\alpha+f_{xy}''\cdot\sin\alpha\\ f_{yx}''\cdot\cos\alpha+f_{yy}''\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{yx}'' & f_{yy}''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

则由$\dfrac{\mathrm{d}^2\,g_\alpha(0)}{\mathrm{d}\,t^2}>0$，有

$$(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0)\\ f_{xy}''(0,0) & f_{yy}''(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha,\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

由α的任意性，并且向量$(\cos\alpha,\sin\alpha)$为非零向量，由此可知这是一个正定二次型，并且矩阵为实对称矩阵，所以矩阵为正定矩阵。矩阵正定，所以驻点为极小值点。

三、(本题 14 分) 设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\ge0, y\ge0, z\ge0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段。求曲线积分$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}\,x+z\,\mathrm{d}\,y+x\,\mathrm{d}\,z.$

【参考解答一】 对于曲线积分，尤其是开放曲线的曲线积分，最开始应该考虑的积分计算的直接法，即写出曲线的参数方程来计算曲线积分。用连个方程消去z，即由$x+z=1, z=1-x$代入球面方程，则有

$$x^2+y^2+(1-x)^2=1\Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0$$

$$\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$$

$$\Rightarrow z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t, t:0\to\pi$$

将它代入积分表达式，则有

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{2}\sin t\right)\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 t+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2 t\right)+\left(\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right)\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=I=\int_0^{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right]\mathrm{d}\,t$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

【参考解答二】记Γ_1为从B到A的直线段，则

$$x=t, y=0, z=1-t, 0\le t\le 1,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 td(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则．由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{\Gamma_1}\right)ydx+zdy+xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

$$=-\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

右边三个积分都是Σ在各个坐标面上的投影面积，而Σ在zx面上投影面积为零．故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma} dydz+dxdy.$$

曲线Γ在xy面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1.$$

又该投影（半个椭圆）的面积得知$\iint_{\Sigma} dxdy=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$．同理，$\iint_{\Sigma} dydz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$．这样就有

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

四、（本题 15 分） 设函数$f\left(x\right)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left|t-x\right|} f\left(x\right) \mathrm{d}\,x \le 1$。证明：$\forall a,b$，$a<b$，有$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le \frac{b-a+2}{2}$.

【参考解答】：这个竞赛题是考研竞赛数学公众号每日一题栏目中发布的第 62 个题目，完全一模一样的。下面我们也来讨论一下，思路是怎样的。

根据题目的条件，函数$f\left(x\right)>0$，而且自然常数为底的函数也是大于 0 的，所以，可以知道已知积分中的被积函数$e^{-|t-x|}f\left(x\right)>0$，并且积分区间越大，积分值越大，所以由原积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le 1$，当然也就可以得到$\forall a,b\left(a<b\right)$，

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le 1.$$

右边要出现$b-a$的表达式，于是由积分的保序性，两边同时关于t变量在$\left[a,b\right]$积分，可得

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,t \le b-a.$$

左边就是一个先对x后对t积分的二重积分的累次积分表达式，对于它的操作，好像就积分而言不能执行什么有效的处理。但是，看到二重积分的累次积分表达式，可以尝试性的考虑交换积分次序，即先对 t 求积分，再对 x 积分，于是左边的累次积分也就等于

$$\int_a^b \left[\int_a^b e^{-|t-x|} f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_a^b \left[f\left(x\right)\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

里面对t积分，应该就是属于可以计算的了。只要考虑将绝对值去掉就可以了。由于在积分中对x在$\left[a,b\right]$区间上积分，所以x夹在 a，b 之间，因此以x作为区间的分割点，则有

$$\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}\,t + \int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \left[e^{t-x}\right]_a^x + \left[-e^{x-t}\right]_x^b = 1 - e^{a-x} - e^{x-b} + 1 = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}$$

所以上面的不等式等价于

$$\int_a^b \left[f\left(x\right)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x \le b-a.$$

将左边拆开，则有

$$\int_a^b \left[f\left(x\right)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\right]\mathrm{d}x = 2\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x - \int_a^b \left[f\left(x\right)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x - \int_a^b \left[f\left(x\right)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x \le b-a.$$

即$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b \left[f\left(x\right)e^{a-x}\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \left[f\left(x\right)e^{x-b}\right]\mathrm{d}x$

这样，再由已知条件，并且有t的任意性，可以将右边的两个积分改写成

$$\int_a^b e^{a-x} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x = \int_a^b e^{-|x-a|} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-a|} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le 1$$

因为x属于$\left(-\infty,+\infty\right)$都有积分小于等于 1，所以同理可得$\int_a^b e^{x-b} f\left(x\right)\mathrm{d}\,x \le 1.$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}+1.$$

这就是这个竞赛题的解题过程。

五、（本题 15 分）设$\left\{a_n\right\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$. 证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

【参考证明】对于$i=0,1,\ldots,p-1$，记

$$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}。$$

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_n\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda。$$

而$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$。由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整m，设$m=np+i$，其中0, 1, $\ldots,p-1$，从而可以把正整数依照i分为p个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$.

第十届全国大学生数学竞赛试卷

(非数学类，2018 年 10 月)

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设$\alpha\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$________.

【参考解析】:【思路一】因为 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}<1+\dfrac{1}{n}$，所以

$$0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]<n^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\to 0(n\to 0)$$

所以由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=0.$

【思路二】 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x^{\alpha}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{x^{\alpha}}=\alpha\lim_{x\to0^+}x^{1-\alpha}=0.$$

(2) 若曲线$y=y(x)$由$\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$确定，则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为___________.

【参考解析】: 当$t=0$时，$x=1$且$e^{y}=1$，即$y=0$，即求点$(1,0)$处曲线$y=y(x)$的切线方程. 在方程组两端对t求导，得

$$\begin{cases}x'(t)=1-\sin t\\ e^{y}\cdot y'(t)+y+ty'(t)+\cos t=0\end{cases}$$

将$t=0$，$y=0$代入方程，得$x'(0)=1,y'(0)=-1$，所以$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{y'(0)}{x'(0)}=-1$，所以切线方程为$y-0=(-1)(x-1)$，即$y=-x+1.$

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=$__________.

【参考解析】:【思路一】典型三角代换结构$\sqrt{1+x^{2}}$，令$x=\tan t,\mathrm{d}x=\sec^{2}t\,\mathrm{d}t$，所以

$$F(x)=\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(\sec t+\tan t)}{\sec t}\mathrm{d}t$$

$$= \int \ln\left(\sec t + \tan t\right) \mathrm{d}\left(\sin t\right) = \sin t \ln\left(\sec t + \tan t\right) - \int \frac{\sin t}{\cos t} \mathrm{d}\, t$$

$$= \sin t \ln\left(\sec t + \tan t\right) + \ln|\cos t| + C$$

由于 $\tan t = \dfrac{x}{1}$，所以 $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$， $\sec t = \sqrt{1+x^2}$，代入得原积分为

$$F\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\text{或} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$$

【思路二】 $F\left(x\right) = \displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \mathrm{d} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}\, x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$__________.

【参考解析】:**【思路一】** $A = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x+\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to0} \left[\frac{1-\sqrt{\left(\cos 2x-1\right)+1}}{x^2} + \frac{1-\sqrt[3]{\left(\cos 3x-1\right)+1}}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{2x^2} + \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.$$

【思路二】带皮亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2 + o\left(x^2\right)$$

$$\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

所以$\cos x\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - 3x^2 + o\left(x^2\right)$，代入得

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = 3.$$

二(本题满分8分)设函数$f\left(t\right)$在$t \neq 0$时一阶连续可导,且$f\left(1\right) = 0$,求函数$f\left(x^2 - y^2\right)$,使得曲线积分$\int_L y\left[2 - f\left(x^2 - y^2\right)\right]\mathrm{d}\,x + xf\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}\,y$与路径无关，其中$L$为任一不与直线$y = \pm x$相交的分段光滑曲线.

【参考解析】：令$P\left(x,y\right) = y\left[2 - f\left(x^2 - y^2\right)\right], Q\left(x,y\right) = xf\left(x^2 - y^2\right)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y} &= 2 - f\left(x^2 - y^2\right) + y\left[-f'\left(x^2 - y^2\right)\left(-2y\right)\right]\\ &= 2 - f\left(x^2 - y^2\right) + 2y^2 f'\left(x^2 - y^2\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x} = f\left(x^2 - y^2\right) + 2x^2 f'\left(x^2 - y^2\right)$$

由积分与路径无关的条件$\frac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y} = \frac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x}$，代入结果整理得

$$\left(x^2 - y^2\right)f'\left(x^2 - y^2\right) + f\left(x^2 - y^2\right) - 1 = 0$$

令$x^2 - y^2 = u$，即$uf'\left(u\right) + f\left(u\right) - 1 = 0$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}\,f\left(u\right)}{1 - f\left(u\right)} = \frac{1}{u}\mathrm{d}\,u$，由分离变量法，两端积分，得$\frac{1}{1 - f\left(u\right)} = C_1 u$，即$f\left(u\right) = 1 + \frac{C}{u}$，由$f\left(1\right) = 0$，得$C = -1$，即$f\left(x^2 - y^2\right) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}$.

【注】其中微分方程$uf'\left(u\right) + f\left(u\right) - 1 = 0$的通解可以通过改写微分方程为$\left[uf\left(u\right)\right]' = 1$，得到通解为$uf\left(u\right) = u + C$.

三（本题满分 14 分）设$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上连续，且$1 \leq f\left(x\right) \leq 3$. 证明：

$$1 \leq \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\,x\int_0^1 \frac{1}{f\left(x\right)}\mathrm{d}\,x \leq \frac{4}{3}.$$

【参考解析】：由柯西不等式，得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right]^2 = 1$$

又由于$\left[f(x)-1\right]\left[f(x)-3\right]\leq 0$，则$\dfrac{\left[f(x)-1\right]\left[f(x)-3\right]}{f(x)}\leq 0$，即

$f(x)+\dfrac{3}{f(x)}\leq 4$，所以$\displaystyle\int_0^1\left[f(x)+\frac{3}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\leq 4$. 由于

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq 4$$

所以$\displaystyle 1\leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leq \frac{4}{3}$.

四（本题满分 12 分） 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中$(V)$是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2\geq 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leq 9$$

及$z\geq 0$所围成的空间图形.

【参考解析】: 画图（关键），考虑区域的特殊性，采用容易计算的整体减去容易计算的部分来完成计算，从而分成三个部分来讨论:

第一部分：整个大球(V_1)的积分：采用球坐标换元，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=1+r\cos\varphi$$
$$0\leq r\leq 3, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

于是有

$$\iiint\limits_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{648\pi}{5}$$

第二部分：小球(V_2)的积分：采用球坐标换元，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=2+r\cos\varphi$$
$$0\leq r\leq 2, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

于是有

$$\iiint\limits_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{256\pi}{15}$$

第三部分：大球$z=0$下部分的积分(V_3)，采用柱坐标：

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leq z\leq 0$$
$$0\leq r\leq 2\sqrt{2}, 0\leq\theta\leq 2\pi$$

于是有$\displaystyle\iiint\limits_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2\,\mathrm{d}z=\frac{136\pi}{5}$

所以最终的积分为

$$\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{(V_1)}-\iiint\limits_{(V_2)}-\iiint\limits_{(V_3)}$$

$$=\frac{648}{5}\pi-\frac{256}{15}\pi-\frac{136}{5}\pi=\frac{256}{3}\pi.$$

五（本题满分 14 分） 设$f(x,y)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内. 证明：

$$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le M\,|AB|,$$

其中$|AB|$表示线段AB的长度.

【参考解析】：作辅助函数$\varphi(t)=f\left[x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\right]$，显然函数$\varphi(t)$在$[0,1]$上可导. 根据拉格朗日中值定理，存在$c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$$

所以$\left|\varphi(1)-\varphi(0)\right|=\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|$

$$=\left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right|$$

$$\le\sqrt{\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\le M\,|AB|.$$

六（本题满分 14 分） 证明：对于连续函数$f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【参考解析】：由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),x_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right].$$

由算术几何不等式$\left[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\right]^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$. 于是有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\le\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]$$

根据$\ln x$的连续性，两边取极限，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\le\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]$$

即$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$

七（本题满分 14 分） 已知$\{a_k\},\{b_k\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,k=1,2,\cdots$，$\delta$

为一常数. 证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{\left(a_1a_2\cdots a_k\right)\left(b_1b_2\cdots b_k\right)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

【参考解析】：令$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_ib_i, a_kb_k=S_k-S_{k-1}$,

$$S_0=0, a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2,\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\geq\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$收敛. 由不等式

$$\sqrt[k]{\left(a_1a_2\cdots a_k\right)\left(b_1b_2\cdots b_k\right)}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

可知$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{\left(a_1a_2\cdots a_k\right)\left(b_1b_2\cdots b_k\right)}}{b_{k+1}b_k}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$，故原不等式成立.

第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

参考解答及评分标准

一、填空题（每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\dfrac{1}{4}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}.$$

2. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\int\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{3y}{x}-2\ln|\dfrac{y}{x}|+C$.

解：令 $y=tx$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$， $y=\dfrac{1}{t(1-t)}$， $dx=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$，

这样，$\int\dfrac{dx}{y^2}=\int\dfrac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\dfrac{3y}{x}-2\ln|\dfrac{y}{x}|+C$.

3. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}de^x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\left.\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\left.\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

4. 已知 $du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$， 则 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

解：$du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{d(\dfrac{x}{y})}{3(\dfrac{x}{y})^2-\dfrac{2x}{y}+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}d\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})$.

所以，$u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

5. 设$a,b,c,\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

解：根据题意有：$yz=\frac{2x}{a^2}\lambda$, $xz=\frac{2y}{b^2}\lambda$，$xy=\frac{2z}{c^2}\lambda$，以及

$\mu=2\lambda\frac{x^2}{a^2}$，$\mu=2\lambda\frac{y^2}{b^2}$，$\mu=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$，从而得：$\mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}$，$3\mu=2\lambda$，

联立解得：$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、（14 分）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

解：采用“球面坐标”计算，并利用对称性，得

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$ --------5 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$ --------10 分

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{72}.$$ --------14 分

三、（14 分）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明：在$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

证明：设$x_0\in[0,\frac{1}{2A}]$，使得$|f(x_0)|=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in[0,\frac{1}{2A}]\right\}$， --------5 分

$$|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)x_0|\le A|f(x_0)|\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_0)|，只有|f(x_0)|=0.$$

故当 $x\in[0,\frac{1}{2A}]$时，$f(x)\equiv 0$. --------12 分

递推可得，对所有的$x\in[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}]$，$k=1,2,\cdots\cdots$，均有$f(x)\equiv 0$. --------14 分

四、（14 分）计算积分$I=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$

解：设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$, 由球面参数方程

$$x=\sin\theta\cos\phi，\quad y=\sin\theta\sin\phi，\quad z=\cos\theta$$

知$dS=\sin\theta d\theta d\phi$，所以，所求积分可化为第一型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} e^{x-y}dS$$ -------4 分

设平面P_t：$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=t,\ -1\le t\le 1$，其中$t$为平面$P_t$被球面截下部分中心到原点距离. 用平面$P_t$分割球面$\Sigma$，球面在平面$P_t,P_{t+dt}$之间的部分形如圆台外表面状，记为$\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y}=e^{\sqrt{2}t}$. --------8 分

由于$\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$半径为$r_t=\sqrt{1-\mathrm{t}^2}$，半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2}=\frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为h_t，则由微元法知 $dt^2+\left(d\sqrt{1-t^2}\right)^2=h_t^2$，得到 $h_t=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ，所以 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 的面积为 $dS=2\pi r_t h_t=2\pi dt,$ --------12 分

$$I=\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}t}\,2\pi\mathrm{dt}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}).$$ --------14 分

五、(14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数，满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$. 试证：$c_n>0$，$(n\ge 0)$，极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于 $f(x)$ 的最小根.

证明：由$f(x)$为仅有正实根的多项式，不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，这样，

$$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根a_i的重数 $(i=1,\cdots,k,r_k\ge 1)$. --------2 分

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1},$$

所以，$f'(x)$=$f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{r_k}{x-a_k}\right)$，从而， $-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}.$

--------6 分

若$|x|<a_1$，则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}\right)x^n.$$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，由幂级数的唯一性知

$$c_n=\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}>0,$$ ------9 分

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}}{\frac{r_1}{{a_1}^{n+2}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+2}}}=a_1\cdot\frac{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}r_k}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=a_1\cdot\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1>0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{a_1},$$ -----12 分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=ln\frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n}=e^{\frac{lnc_n}{n}}=e^{\frac{lnc_1}{n}+\frac{1}{n}\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)}\to e^{ln\frac{1}{a_1}}=\frac{1}{a_1}.$$

从而，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=a_1$, 即$f(x)$的最小正根. -----14 分

六、(14 分）设函数 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上具有连续导数，满足

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\le 1$. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有$|f(x)|\le M$.

证明：由于 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 是$[0, +\infty)$上的严格增函数，故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$（有限或为$+\infty$）. 下面证明 $L\ne+\infty$. -----2 分

记 $y=f(x)$，将所给等式分离变量并积分得 $\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$，即

$$\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y=\frac{2}{3}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+C,$$ ------6 分

其中 $C=\frac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0)$. ------8 分

若 $L=+\infty$，则对上式取极限 $x\to+\infty$，并利用$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得$C=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}$. -----10 分

另一方面，令 $g(u)=\frac{u}{1+u^2}+2\arctan u$，则 $g'(u)=\frac{3+u^2}{(1+u^2)^2}>0$，所以函数 $g(u)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 因此，当 $f(0)\le 1$ 时，$C=g(f(0))\le g(1)=\frac{1+\pi}{2}$，但 $C>\frac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\frac{1+\pi}{2}$，矛盾，这就证明了 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ 为有限数.

最后，取 $M=\max\{|f(0)|,|L|\}$，则 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in[0,+\infty)$. -----14 分

第十二届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题及参考解答

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x-\sin x\right)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$__________.

【答案】：$-\dfrac{1}{3}$

【参考解答】：由等价无穷小和洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

2、设函数 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}\left(-1\right)=$__________.

【答案】：$\dfrac{n!}{e}$

【参考解答】：**【思路一】**由莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(-1)&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[(x+1)^n\right]^{(k)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-k)}\Bigg|_{x=-1}\\&=C_n^n\left[(x+1)^n\right]^{(n)}\left(e^{-x^2}\right)^{(n-n)}\Bigg|_{x=-1}=n!e^{-1}\end{aligned}$$

【思路二】因为 $\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}+\alpha$，其中 $\alpha\to0(x\to-1)$，故

$$f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-1}(x+1)^n+o\left((x+1)^n\right)$$

于是由 $f\left(x\right)$ 泰勒公式中泰勒系数的计算公式，得

$$\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}=\mathrm{e}^{-1}\text{，即 }f^{(n)}(-1)=n!\mathrm{e}^{-1}.$$

3、设 $y=f\left(x\right)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f\left(1\right)=1$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为__________.

【答案】：$y=1$

【参考解答】：等式两端关于 x 求导，得 $\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$ 即 $(x+y)y'=y-x$，所以 $f'\left(1\right)=0$. 故曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程为 $y=1$.

4、已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

【答案】: $\frac{\pi^2}{8}$

【参考解答】: 令$u=x+y$，则

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\\
&=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

令$F(x)=\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则$F'(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$代入可得

$$
I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}
$$

5、设$f(x),g(x)$在$x=0$的某一邻域U内有定义，对任意$x\in U,f(x)\neq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=a>0$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$________.

【答案】: a^a

【参考解答】: 由极限的保号性，存在一个去心邻域$U_1(0)$，当$x\in U_1$时，$f(x)>0,g(x)>0$. 当$x\to0$时，$e^x-1\sim x,\ \ln(1+x)\sim x$，故

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\frac{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}\\
&=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right]}{f(x)-g(x)}\\
&=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{f(x)-g(x)}=a^a
\end{aligned}
$$

二、(10 分) 设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)},n\geq1$. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

【参考解答】: 由题设可知$a_n>0(n\geq1)$. 由于

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=(n+1)+(n+1)\frac{1}{a_n}$$
$$=(n+1)+(n+1)\left(n+n\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$
$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\frac{1}{a_{n-1}}$$

如此递推可得$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. 于是可得

$$\lim_{n\to\infty}n!a_n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}}=\frac{1}{e}$$

三、(12 分) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1) 存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在$\xi,\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【参考解答】: **(1)** 令$F(x)=f(x)-2+3x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-2$，$F(1)=2$. 于是由介值定理，存在$x_0\in(0,1)$，使得$F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=2-3x_0.$$

(2) 在区间$[0,x_0],[x_0,1]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\xi,\eta\in(0,1)$且$\xi\neq\eta$使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta)$$

整理即得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

四、(12 分) 已知$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，其中$f,\varphi$均为二阶可微函数.

(1) 求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；　　(2) 当$f=\varphi$，且$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$时，求$f(y)$.

【参考解答】: **(1)** 由复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+2y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}+2\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
$$=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)$$

(2) 由(1)得 $\dfrac{y}{a^2}f''\left(\dfrac{y}{a}\right)+\dfrac{2a}{y^2}f''\left(\dfrac{a}{y}\right)=by^2$. 令 $\dfrac{y}{a}=u$，得

$$\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^2bu^2$$

即 $u^3f''(u)+2f''\left(\dfrac{1}{u}\right)=a^3bu^4$. 令 $u=\dfrac{1}{u}$，得 $2f''\left(\dfrac{1}{u}\right)+4u^3f''(u)=2a^3b\dfrac{1}{u}$. 两式求解得 $f''(u)=\dfrac{a^3b}{3}\left(\dfrac{2}{u^4}-u\right)$. 两次积分得

$$f(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6}\right)+C_1u+C_2$$

由变量符号描述的无关性，即 $f(y)=\dfrac{a^3b}{3}\left(\dfrac{1}{3y^2}-\dfrac{y^3}{6}\right)+C_1y+C_2$

五、(12 分) 计算 $I=\oint_\Gamma\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

【参考解答】:**【思路一】**改写曲线方程可得参数方程为

$$\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=2\end{cases}$$

其中 $\theta:0\to2\pi$. 由于曲线上 $z=2$，积分定义在积分曲线上，故 $\mathrm{d}z=0$. 于是由曲线积分的直接参数方程计算方法，得

$$\begin{aligned}I&=\oint_\Gamma\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|\,2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

令 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$，根据周期函数的积分性质，得

$$\begin{aligned}I&=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t\\&=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|(\sin t-\sqrt{3}\cos t)\mathrm{d}t=8\sqrt{3}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t\left(u=t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\mathrm{d}u=0\end{aligned}$$

【思路二】 积分曲线方程可表示为$\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$. 由于曲线上$z=2$，积分定义在积分曲线上，故$\mathrm{d}z=0$. 于是

$$I=\oint_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x=\oint_{C}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x$$

其中C为xOy面上的圆$x^2+y^2=4$，方向取逆时针方向. C上(x,y)处的法向量为$\vec{n}=\{x,y\},\vec{t}=\{-y,x\}$，且$\vec{t}^0=\left\{-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right\}$. 于是由两类曲线积分之间的关系，得

$$I=\oint_{C}|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}s$$

由于积分曲线关于原点对称，且被积函数

$$f(x,y)=|\sqrt{3}y-x|\left(-\frac{y}{2}\right)$$

关于x,y变量为奇函数，即$f(-x,-y)=-f(x,y)$，故由对弧长的曲线积分偶倍奇零的计算性质，得$I=0$.

六、(12 分) 证明$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$等于$n$的所有因子（包 1 和$n$本身）之和，其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数，并计算$f(2021)$.

【参考解答】：由积分对区间的可加性，有

$$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}$$

如果m是n的因子，则$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=m$；否则，由三角恒等式，有

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

于是得

$$\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$$

由此得$f(2021)=1+43+47+2021=2112$.

七、(14 分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \quad (n \geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p \geq 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

【参考解答】: **(1)** 对任意 $\varepsilon > 0$，取 $0 < a < \frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，得

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n}$$

由于

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \leq \frac{1-a}{\left(1+a^4\right)^n} < \frac{1}{\left(1+a^4\right)^n} \to 0(n\to\infty)$$

所以存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} < \frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$0 \leq u_n < a + \int_a^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) 显然 $0 < u_{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^{n+1}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = u_n$，即 u_n 单调递减，又

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，故由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. 又当 $n \geq 2$ 时，有

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1}\left(1-2^{1-n}\right)$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ 发散，从而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

(3) 先求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和. 因为

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^n} = \left.\frac{t}{\left(1+t^4\right)^n}\right|_0^1 + n\int_0^1 \frac{4t^4}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{t^4}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{1+t^4-1}{\left(1+t^4\right)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^n} + 4n\left(u_n - u_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n - u_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} + 4u_1$$

由$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取$x = -\frac{1}{2}$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} = \ln 2$，又

$$u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}[\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})]$$

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n} = \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}[\pi + 2\ln(1+\sqrt{2})].$$

由于当$p \geq 1$时，有$\frac{u_n}{n^p} \leq \frac{u_n}{n}$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛.

第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题及参考解答

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$____.

【答案】: 0

【参考解答】: 原式$=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=0$

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【参考解答】: 将方程两边分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\\2\cos(x+2y-3z)\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

按 $\cos(x+2y-3z)=\dfrac{1}{2}$ 和 $\neq\dfrac{1}{2}$ 两种情形，都可解得:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}.$$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$_________.

【参考解答】: 令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. 于是由洛必达法则和积分中值定理，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1$$

其中ξ介于$0,x$之间.

4、过三条直线$L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$与$L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$的圆柱面方程为__________.

【答案】: $2x^2+y^2+z^2-2yz=4$

【参考解答】: 三条直线的对称式方程分别为

$$L_1:\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1},L_2:\frac{x}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1}$$
$$L_2:\frac{x-\sqrt{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

所以三条直线平行. 在L_1上取点$P_1(0,1,-1)$，过该点作与三直线都垂直的平面$y+z=0$，分别交L_2,L_3于点$P_2(0,-1,1),P_3(\sqrt{2},0,0)$. 易知经过这三点的圆的圆心为$O(0,0,0)$. 这样，所求圆柱面的中心轴线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

设圆柱面上任意点的坐标为$Q(x,y,z)$，因为点Q到轴线的距离均为$\sqrt{2}$，所以有

$$\frac{|(x,y,z)\times(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

化简即得所求圆柱面的方程为$2x^2+y^2+z^2-2yz=4$.

5、记$D=\left\{(x,y)|\, x^2+y^2\le\pi\right\}$，则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】: π

【参考解答】: 根据重积分的对称性，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}r\sin r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left(-\cos r^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\pi\end{aligned}$$

二、(14 分) 设$x_1=2021$，$x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\ge1)$. 证明数列$\left\{x_n\right\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【参考解答】: 记$a=1011,y_n=1+x_n$，函数$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{a}{x}(x>0)$，则$y_1=2a$且

$$y_{n+1}=f\left(y_n\right)(n\ge1).$$

易知，当$x>\sqrt{2a}$时，$x>f(x)>\sqrt{2a}$，所以$\left\{y_n\right\}$是单调减少且有下界的数列，

因而收敛. 由此可知$\{x_n\}$收敛.

令$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则$A>0$且$A=f(A)$，解得$A=\sqrt{2a}$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2022}-1.$$

三、(14 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上是有界连续函数, 证明: 方程$y''+14y'+13y=f(x)$的每一个解在$[0,+\infty)$上都是有界函数.

【参考解答】: 易得对应的齐次方程$y''+14y'+13y=0$的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}$$

又 由$y''+14y'+13y=f(x)$得

$$\left(y''+y'\right)+13\left(y'+y\right)=f(x).$$

令$y_1=y'+y$，则$y_1'+13y_1=f(x)$，解得

$$y_1=e^{-13x}\left(\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t+C_3\right).$$

同理，由$y''+14y'+13y=f(x)$，得

$$\left(y''+13y'\right)+\left(y'+13y\right)=f(x).$$

令$y_2=y'+13y$，则$y_2'+y_2=f(x)$，解得

$$y_2=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t+C_4\right).$$

取$C_3=C_4=0$，得$\begin{cases} y'+y=e^{-13x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t, \\ y'+13y=e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t. \end{cases}$ 由此解得原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t$$

因此，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}+\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t.$$

因为$f(x)$在$[0,+\infty)$上有界，所以，存在$M>0$，使得

$$|f(x)|\le M, 0\le x<+\infty$$

注意到当$x\in[0,+\infty)$时，$0<e^{-x}\le 1, 0<e^{-13x}\le 1$，所以

$$\begin{aligned}
|y| &\le \left|C_1e^{-x}\right|+\left|C_2e^{-13x}\right|+\frac{1}{12}e^{-x}\left|\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{12}e^{-13x}\left|\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t\right| \\
&\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}e^{-x}\int_0^x e^{t}\mathrm{d}t+\frac{M}{12}e^{-13x}\int_0^x e^{13t}\mathrm{d}t \\
&\le \left|C_1\right|+\left|C_2\right|+\frac{M}{12}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{M}{12\times 13}\left(1-e^{-13x}\right) \\
&\le |C_1|+|C_2\left|+\frac{M}{12}+\frac{M}{12\times 13}\right|=|C_1|+|C_2|+\frac{7M}{78}
\end{aligned}$$

对于方程的每一个确定的解，常数C_1, C_2是固定的，所以，原方程的每一个解都是有界的.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

【参考解答】: 因为 $f(x,y,z)$ 为 4 次齐次函数，所以对 $\forall t\in R$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z)$$

对上式两边关于 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z)$$

取 $t=1$，得

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=4f(x,y,z).$$

设曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos\alpha=x,\cos\beta=y,\cos\gamma=z$$

因此由高斯公式和轮换对称性，记 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，得

$$\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma}\left(xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)\right)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{4}\oiint\limits_{\Sigma}\left[\cos\alpha f_x'+\cos\beta f_y'+\cos\gamma f_z'\right]\mathrm{dS}=\frac{1}{4}\oiint\limits_{\Sigma}f_x'\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f_y'\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f_z'\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\iiint\limits_{\Omega}\left[f_{xx}''(x,y,z)+f_{yy}''(x,y,z)+f_{zz}''(x,y,z)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{3}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2\left(2a_1+a_4+a_6\right)+y^2\left(2a_2+a_4+a_5\right)+z^2\left(2a_3+a_5+a_6\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\sum_{i=1}^{6}a_i\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^{6}a_i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i$$

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]$$
$$=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

【参考解答】: 记 $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n},\xi_k=a+\dfrac{(2k-1)(b-a)}{2n},k=1,2,\cdots,n$. 将 $f(x)$ 在 $\left[x_{k-1},x_k\right]$ 上展开成泰勒公式，得

$$f(x)=f\left(\xi_k\right)+f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right)+\frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2$$

其中 $x\in\left[x_{k-1},x_k\right]$, η_k 介于 0 和 x 之间. 于是

$$\begin{aligned}
B_n &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-f\left(\xi_k\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right)+\frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''\left(\eta_k\right)\left(x-\xi_k\right)^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

设$f''(x)$在$\left[x_{k-1},x_k\right]$上的最大值和最小值分别为M_k,m_k，因为

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-\xi_k\right)^2\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12n^3}$$

因为$f''(x)$在$[a,b]$上连续，所以$f''(x)$在$[a,b]$上可积. 根据定积分$\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x$的定义及牛顿-莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M_k\frac{b-a}{n} \\
&= \int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(b)-f'(a)
\end{aligned}$$

再根据夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n = \dfrac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$.

六、(14 分) 设$\left\{a_n\right\}$与$\left\{b_n\right\}$均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$且

$$b_n = a_n b_{n-1}-2, n=2,3,\cdots.$$

又设$\left\{b_n\right\}$为有界数列，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$收敛，并求该级数的和.

【参考解答】：首先，注意到$a_1=b_1=1$，且

$$a_n = \left(1+\frac{2}{b_n}\right)\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

所以当$n\geq 2$时，有

$$a_1a_2\cdots a_n = \left(1+\frac{2}{b_2}\right)\left(1+\frac{2}{b_3}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)b_n.$$

由于$\left\{b_n\right\}$有界，故存在$M>0$，使得当$n\geq 1$时，恒有$0<b_n\leq M$. 因此

$$\begin{aligned}
0 < \frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n} &= \left(1+\frac{2}{b_2}\right)^{-1}\left(1+\frac{2}{b_3}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)^{-1} \\
&\leq \left(1+\frac{2}{M}\right)^{-n+1} \to 0, n\to\infty
\end{aligned}$$

根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$的部分和$S_n$，当$n\geq 2$时，有

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}\frac{a_kb_{k-1}-b_k}{2}\\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}-\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\right)=\frac{3}{2}-\frac{b_n}{2a_1a_2\cdots a_n}
\end{aligned}
$$

所以$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$，这就证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$收敛，且其和为$\frac{3}{2}$.