高等数学公式

一、重要的函数极限。

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．　**2.**　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$．

3．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$．

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\xlongequal{\text{设}e^x-1=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=1$．

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a(a>0,a\neq 1\text{为常数})$．

6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^b-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{b\ln(1+x)}-1}{b\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot b=b(b\text{为常数},b\neq 0)$．

7．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\xlongequal{\text{设}\arcsin x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$．

8．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\xlongequal{\text{设}\arctan x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t=1\times 1=1$．

9．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0(k>0\text{ 常数})$．

10．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0(a>1\text{ 常数},k\text{为常数})$．

11．若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0,\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b(a,b\text{均为常数})$,则

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{V(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{V(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}V(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}V(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\ln u(x)}=e^{b\ln a}=e^{\ln a^b}=a^b$$

即　$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$。

注：不仅要记住这些公式的标准形式，更要明白一般形式。即上面公式中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_o$ 时，$f(x)\to 0$，结论依然成立。

利用上述重要极限，我们可以得到下列对应的重要的等价无穷小量，在解题中经常要利用他们

当 $x\to 0$ **时**，$\sin x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1,\text{常数})$．

$(1+x)^b-1\sim bx(b\neq 0,常数),\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

注：上式中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$.结论依然成立。

例如　$\sin f(x)\sim f(x)(若x\to x_0时,f(x)\to 0)$。

此外，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(常数)\neq 0,f(x)\sim A(x\to x_0)$.

二、重要的数列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ (k>0 常数)　2. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ （|q|<1 常数）

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (a>0 常数)　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　5. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}=0(k>0常数)$ **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1,a,k为常数)$

三、导数公式

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x \qquad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(a^x)'=a^x\ln a$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

注：由三解函数的导数有时是“+”号，有时是“-”号，用下面的方法记，带有“正”字的三角函数或反三角函数导数前面取“+”号，带有“余”字的三角函数与反三角函数导数前面取“-”号。

四、导数的四则运算　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处可导，则 $u\pm v$ ，$u\,v,\frac{u}{v}(v\neq 0)$在点 x 处可导，且

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$（3）$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$,　特别地$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}\quad(v\neq 0)$

五、反函数求导法则

设 $y=f(x)$为函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域内连续，严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$在点 $x_0(x_0=\varphi(y_0))$可导，且 $f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$或$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}\big|y=y_0}$。

推论 设 $y=f(x)$为函数 $x=\varphi(y)$的反函数，若 $\varphi(y)$严格单调且 $\varphi'(y)\neq 0$,则 $f'(x)$存在且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

。

六、复合函数求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，y=f(u) 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在$x=x_0$处可导且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0}\cdot\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0}\text{或}\left.[f(\varphi(x))]'\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'[\varphi(x_0)\cdot\varphi'(x_0)]$$

推论：若 $u=\varphi(x)$可导，y=f(u)可导，则 $y=f(\varphi(x))$可导且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\text{或}[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

七、高阶导数的运算法则　若 u(x),v(x)在 x 处 n 阶导数存在，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};\qquad (cu)^{(n)}=cu^{(n)}(c\text{为常数})\text{；}$$

$$(u\cdot v)^{(n)}=c_n^0u^{(n)}v^{(0)}+c_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+c_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+c_n^nu^{(0)}v^{(n)}.$$

其中 $u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v.$

八、部分基本初等函数的高阶导数公式

（**1**）$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$　　（**2**）$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$

（**3**）$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^{(n)}(a>0,a\neq 1\text{常数}),$　　（**4**）$(e^x)^{(n)}=e^x,$

（**5**）

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}(\alpha\text{为常数}),(x^n)^{(n)}=n!,\quad (x^n)^{(m)}=0(m>n),$$

（**6**）

$$(\ln x)^{(n)}=[(\ln x)']^{(n-1)}=(x^{-1})^{(n-1)}\underline{\underline{\text{用公式(5)}}}-1(-1-1)\cdots[-1-(n-1)+1]x^{-1-(n-1)}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}.$$

类似我们还可得到 $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\frac{\pi}{2}),[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}(n-1)!(1+x)^{-n},$

$$[(1+x)^\alpha]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

九、中值定理

费马（Femat）定理（取到极值的必要条件）

设 f(x)在点 x_0 处取到极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0.$

反之不真，例如 $f(x)=x^3$， $f'(x)=3x^2$， $f'(0)=0,$ 但 f(0)不是极值。

费马定理常用于证明 f(x)=0 有一个根，找一个 F(x)，使 $F'(x)=f(x).$ 证明 F（x）在某点 x_0 处取到极值且 $F'(x_0)$ 存在，由费马定理知 $F'(x)=0,$ 即 $f(x_0)=0.$

罗尔（Rolle）定理　设 f(x)在闭区间[a,b]上满足下列三个条件：

（1）$f(x)$在闭区间[a,b]上连续；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导；（3） $f(a)=f(b),$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b),$ 使 $f'(\xi)=0.$

推论　在罗尔定理中，若 f(a)=f(b)=0，则在（a,b）内必有一点 ξ，使 $f'(\xi)=0,$ 即方程 f(x)=0 的两个不同实根之间，必存在方程 f'(x)=0 的一个根。

罗尔定理的应用：1 证明 $f(x)$=0 有一个根，找到一个 F（x）,使 $F'(x)=f(x)$，验证 F（x）在某闭区间[a,b]上满足罗尔定理条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b),使F'(\xi)=0,即f(\xi)=0$。2 证明适合某种条件 ξ 的存在性：把待证含有 ξ 的等式，通过分析转化为 $F'(\xi)=0$ 形式，对 F(x)应用罗尔定理即可。

拉格朗日（Lanrange）定理　若 f(x)在闭区间[a,b]上满足下列二个条件：

（1）f(x)在闭区间[a,b]上连续；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b),$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$

拉格朗日定理的结论常写成下列形式：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b.$

上式中当 a>b 时公式仍然成立，即不论 a,b 之间关系如何，ξ 总介于 a,b 之间，由

$0<\dfrac{\xi-a}{b-a}=\theta<1,得\xi=a+\theta(b-a),0<\theta<1,$ 所以

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),0<\theta<1.$$

拉格朗日定理是连结函数值与导函数值之间的一座桥梁，特别适合给出导数条件，要证明函数值关系的有关结论，就需要用到拉格朗日定理，拉格朗日定理主要应用是证明不等式.

单调性定理　设 f(x)在区间 X(X 可以是开区间，可以是闭区间，也可以是半闭半开区间，也可以无穷区间)上连续，在 X 内部可导（不需要在端点可导），

（1）若 $x\in \mathrm{X}$ 内部，$f'(x)\geq 0,$ 则 f(x)在区间 X 上递增。

（2）若 $x\in \mathrm{X}$ 内部，$f'(x)\leq 0,$ 则 f(x)在区间 X 上递减。

（3）若 $x \in \mathrm{X}$ 内部，$f'(x) \equiv 0,$ 则 f(x)在区间 X 上是常值函数。

若（1）中 $f'(x) \geq 0$改成$f'(x) > 0$，则 f(x)在区间 X 上严格递增，

若（2）中 $f'(x) \leq 0$改成$f'(x) < 0$，则 f(x)在区间 X 上严格递减。

推论　若 f(x)在区间 X 上连续，在区间 X 内部可导，当 $x \in \mathrm{X}$ 内部，$f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ 且 f(x)在 X 的任何于区间上，$f'(x) \neq 0,$ 则 f(x)在区间 X 上严格递增（减）。

证　由 $f'(x) \geq 0$，知 f(x)在区间 X 上递增，假设 f(x)在 X 上不是严格递增，即存在 $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$且$x_1 < x_2$,有$f(x_1) = f(x_2)$,由$f(x)$在$[x_1, x_2]$上递增，所以任给 $x \in [x_1, x_2]$，有

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1), \qquad 从而 \quad f(x) \equiv f(x_1), x \in [x_1, x_2]$$

所以 $f'(x) \equiv 0, x \in [x_1, x_2]$ 与条件矛盾，故 f(x)在区间 X 上严格递增，对于 $f'(x) \leq 0$，同理可证 f(x)在 X 上严格递减。

单调性定理及推论是证明函数在某区间上（严格）单调或是常值函数和求函数（严格）单调区间的重要方法。

柯西（Cau chy）定理　设 f(x),g(x)在闭区间[a,b]上满足下列条件：

（1）f(x),g(x)在[a,b]上连续　（2）f(x),g(x)在(a,b)内可导　（3）$g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$，

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

泰勒（Tay lor）定理　设 f(x)在区间 X 上存在 n+1 阶导数，对每一个 $x_0 \in \mathrm{X}$, 任给 $x \in \mathrm{X}$, 且$x \neq x_0$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

其中ξ是介于 x_0 及 x 之间

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项, 当 $x_0=0$ 时，称为麦克劳林公式，即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 称为麦克劳林余项。

佩亚诺（Peano）定理　若 f(x)在点 x_0 处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ((x-x_0)^n)(x\to x_0)$$

称 $R_n(x)=\circ((x-x_0)^n)$ 为泰勒公式的佩亚诺余项.

相应的麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\circ(x^n)(x\to 0).$$

读者要记住 5 个常用函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\circ(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\circ(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\circ(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n).$$

带有拉格朗日余项的泰勒公式可用以证明方程根的存在性、适合某种条件 ξ 的存在性及各种不等式。带有佩亚诺余项的泰勒公式仅适用于求函数极限。

十、渐近线的方法

1．求斜渐近线的方法

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ (常数),　$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$ (常数),

则 $y=ax+b$ 是 y= $f(x)$ 当 $x\to\infty$ (包括 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$)时的斜渐进线。

如果 $x\to\infty$时,　$\dfrac{f(x)}{x}$ 的极限不存在,并不能表明 $f(x)$ 没有斜渐近线,还应当分别考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情况,比如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ (常数),　$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ (常数),

则 $y=ax+b$ 是 y= $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线, $x\to-\infty$ 也是如此.除非 $x\to+\infty$ 或

$x \to -\infty$时,$\dfrac{f(x)}{x}$的极限都不存在,则 y=$f(x)$没有斜渐近线.

特别地$a=0$时,$y=b$称为$y=f(x)$当$x\to\infty$时的水平渐近线.

2.求铅垂渐近线方法

先找x_0,使$\lim\limits_{x\to x} f(x)=\infty$,(或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$),因此 ,若$f(x)$是初等函数，且$f(x)$在$x_0$处没定义且$x_0$的一侧或两侧有定义，则$x_0$是怀凝点，再看$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否为$\infty$，若$f(x)$是分段函数，则分界点$x_0$是怀凝点，再看$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$是否为$\infty$，然后断定$x=x_0$是否为铅垂渐近线。

十一、曲率公式

若曲线

Γ:$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，且$x''(t),y''(t)$存在,在参数$t$对应的曲线上点$M(x,y)$处的曲率

$$k=\frac{\left|y''x'-x''y'\right|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

若曲线$y=f(x)$,在曲线上点$M(x,y)$处的曲率公式为$k=\dfrac{\left|y''\right|}{(1+y^{12})^{\frac{3}{2}}}$。

十二、基本积分表

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

十三、为了熟练运用凑微分，记住下列微分关系是必要的（其实就是求原函数）.

1. $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)(a \neq 0)$

2. $xdx = -\frac{1}{2} d(a^2 - x^2)$

3. $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}$

4. $\sin xdx = -d\cos x$

5. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d\arcsin x$

6. $xdx = \frac{1}{2} d(x^2 \pm a^2)$

7. $\frac{1}{x} dx = d\ln|x|$

8. $e^x dx = de^x$

9. $\cos xdx = d\sin x$

10. $\frac{1}{1+x^2} dx = d\arctan x$

十四、三角函数的有理式积分公式

$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$， $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$， $u=\tan\frac{x}{2}$， $dx=\frac{2du}{1+u^2}$

十五、某些无理函数的不定积分

1.形如$\int R$（$x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}})dx$的积分

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,$有$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$，经整理得

$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=\varphi(t),$于是$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt,$

这样，就化成了以t为变量的有理函数积分。

2. 形如$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$的积分，把$\sqrt{ax^2+bx+c}$化成如下三种形式之一：

$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-\varphi^2(x)},$其中$\varphi$（$x$）是$x$的一次多项式，k 为常数，再用三角变换即可化三角函数有理式的不定积分。

十六、定积分计算的方法

1.牛顿一莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)dx\overset{F'(x)=f(x)}{=\!=\!=}F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2.凑微分 $\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

$=\int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x)\overset{F'(u)=f(u)}{=\!=\!=}F(\varphi(x))\Big|_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a)).$

3.变量替换 $\int_a^b f(x)dx\underset{a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)}{\overset{令x=\varphi(t)}{=\!=\!=}}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)$

$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\overset{F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)}{=\!=\!=}F(t)\Big|_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha).$

4. 分部积分 设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上导数连续，则

$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$

具体的用法是$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)v'(x)dx=\int_a^b u(x)dv(x)$

$$=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

如果能够计算出$\int_a^b v(x)u'(x)dx,$就可以计算出$\int_a^b f(x)dx.$

定积分的凑微分、变量替换、分部积分与不定积分中三种方法适合的被积函数相同，即不定积分用三种的哪一种方法，定积分也用三种方法的哪一种。

5.设 f(x)在$[a,b]$上连续，则$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}0, & 若f(x)为奇函数,\\ 2\int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为偶函数.\end{cases}$

事实上，$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

而$\int_{-a}^0 f(x)\overset{令x=-t}{=\!=\!=}-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx=\begin{cases}-\int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为奇数,\\ \int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为偶函数.\end{cases}$

故得证

推论$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx.$

6.设 f(x)为周期函数且连续，周期为 T，则$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

7.设 f(x)在[0,1]上连续，则$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$

9.$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & 当n为偶数,\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & 当n为奇数.\end{cases}$

十七、立体的体积

1.设Ω为一空间立体，它夹在垂直于 *Ox* 轴的两平面 *x*=*a* 与 *x*=*b* 之间（*a*<*b*），在区间[*a,b*]上任意一点 *x* 处，作垂直于 *Ox* 轴的平面，它截得立体Ω的截面面积，显然是 *x* 的函数，记为 *A*（*x*）连续，$x\in[a,b]$，则立体的体积 *V* 为$V=\int_a^b A(x)dx$

2.曲线$y=f(x)$（连续），*Ox* 轴及直线 *x*=*a*, *x*=*b* 所围成的曲边梯形绕 *Ox* 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x 为$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$

十八、旋转体的侧面积

求由连续曲线$y=f(x),Ox$轴及直线$x=a,x=b$所围平面图形绕 *x* 轴旋转所形成的旋转体的侧面面积S_x为

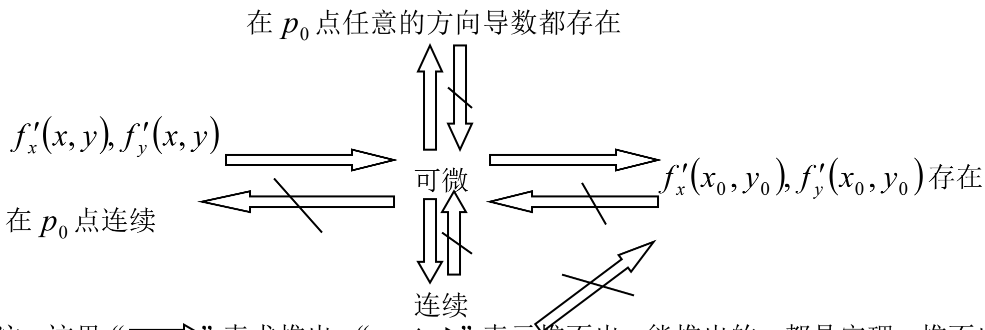
$$S_x=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

十九、多元函数微分学网络图

多学函数微分学

- 基本概念
  - 函数
  - 极限：$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$（常数）
  - 连续：$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=f(p_0)$
- 基本定理
  - 全增量定理：$\Delta z=f_x'(x_0y_0)\Delta x+f_y'(x_0y_0)\Delta y+o(\Delta x)+o(\Delta y)$
  - 复合函数求偏导定理
  - 混合偏导数相等定理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$（两者都连续）
  - 泰勒定理
- 偏导数
  - 显函数的偏导数
  - 复合函数的偏导数
  - 隐函数的偏导数
- 方向导数与梯度
  - 方向导数
    - 定义
    - 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{p_0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{p_0}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{p_0}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{p_0}\cos\gamma$
  - 梯度
    - 定义 $gradu=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$
    - 计算
    - 与方向导数关系 $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{p_0}=gradu(p_0)\cdot\tau^0.$
- 全微分
  - 定义
  - 运算法则
  - 一阶全微不变性 $dz(u,v)=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$
- 极值
  - 必要条件：$F'x(x_0,y_0)=0,F'y(x_0,y_0)=0.$
  - 充分条件
  - 拉格朗日乘数法
  - 最大与最小值问题
- 几何应用
  - 空间曲线
    - 切线 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$
    - 法平面 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$
  - 空间曲面
    - 切平面 $F_x'(p_0)(x-x_0)+F_y'(p_0)(y-y_0)+F_z'(p_0)(z-z_0)$
    - 法线 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(p_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(p_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(p_0)}$

二十、我们可得到多元函数在一点连续，偏导数存在，可微，方向导数存在，偏导函数在该点连续，这些概念有下面的关系，我们以 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处为例。



注：这里“$\Rightarrow$”表求推出，“$\nRightarrow$”表示推不出，能推出的，都是定理，推不出的，都有反例。

二十一、多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组:$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \qquad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

二十二、多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \qquad\qquad\qquad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \qquad\qquad\qquad \text{不确定} \end{cases}$$

二十三、求带有条件限制的最大（小）值问题，统称为条件极值，可用拉格朗日乘数法去解决。

求$u=f(x_1,x_2,...,x_n)$在约束条件$\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)=0(k=1,2,...,m)$限制下的最大值或最小值方法是

（1）作拉格朗日函数$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)$,其中$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$称为拉格朗日乘数。

（2）若$(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$是函数$f(x_1,x_2,...,x_n)$的最大（小）值点，则一定存在m个常数$(\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)$，使$(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$是函数 L 的稳定点，因此函数$f$的最大（小）值点一定包含在拉格朗日函数 L 的稳定点前几个坐标所构成的点之中，在具体应用时，往往可借助于物理意义或实际经验判断所得点是否为所求的最大（小）值点。

二十四、在直角坐标系中计算

若任意一条垂直x轴的直线$x=x_0$至多与区域D的边界交于两点(垂直x的边界除处)，则称D为x一型区域，且x一型区域D一定可表示为平面点集，$D=\{(x,y):\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}$.即曲线$y=\varphi_1(x)$（下曲线），$y=\varphi_2(x)$（上曲线）及直线$x=a,x=b$所围成的区域，如图所求（特殊情况下，直线$x=a,x=b$可能为一点），此时$\iint f(x,y)dxdy=\int^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$

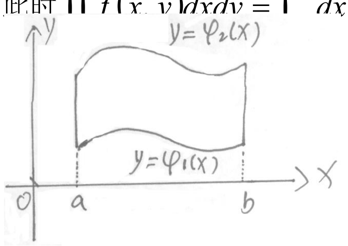


图 1

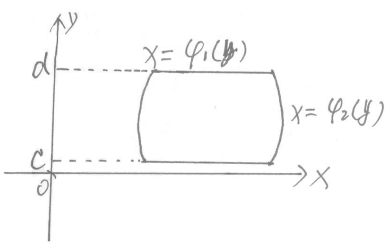


图 2

若任意一条垂直y轴的直线$y=y_0$至多与区域的边界交于两点（垂直于y轴的边界除

处），则称 D 为 y 一型区域，且 y 型区域一定可表示为平面点集，$D=\{(x,y):\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}$.即由线 $x=\psi_1(y)$（左曲线），$x=\psi_2(y)$（右曲线）及直线 $y=c,y=d$ 所围成，如图所求（特殊情况下，直线 $y=c,y=d$ 可能为一点），此时 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx.$

许多常见的区域都可分割成有限个无公共内点的 x 一型区域或 y 型区域，利用二重积分的可加性知，即 $D=D_1+D_2+D_3$，且 D_1,D_2,D_3 或者为 x 一型区域或者为 y 型区域，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_3}f(x,y)dxdy.$

二十五、在极坐标系下的计算

设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$. 则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$. 当积分区域是圆域或圆域一部分时，可用极坐标变换，若被积函数中含有 x^2+y^2，更要用极坐标变换。

1．若任意射线 $\theta=\theta_0$ 与区域 D 的边界至多交于两点（边界是射线段除外），则称 D 为 θ 一型区域，且 θ 一型区域 D 可表示为平面点集 $\{(r,\theta):r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}$，即由曲线 $r=r_1(\theta)$（下曲线），$r=r_2(\theta)$（上曲线），及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$，围成的区域如图 9-3 所示。（特殊情况下，$\theta=\alpha,\theta=\beta$ 可能为一点）。此时

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

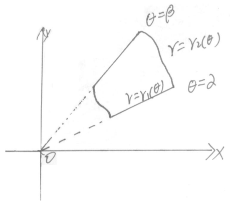


图 3

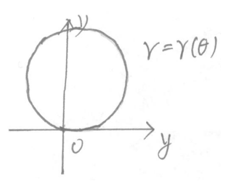


图 4

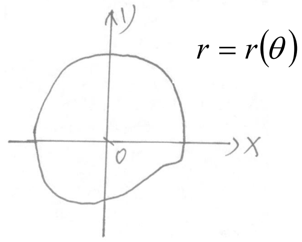


图 5

（1）若极点 O 在区域外部，此时区域 D 可表求为 $r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$，如图 9-3 所示，则有 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

（2）若极点 O 在区域 D 边界上，且边界曲线 $r=r(\theta)$ 向外凸，(此时区域 D 可表求为 $D:0\le r\le r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$，其中 $[\alpha,\beta]$ 为边界曲线 $r=r(\theta)$ 的定义域，如图 4 所示，则

有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

（3）若极点 O 在区域 D 的内部，此时区域 D 可表示为 $D: 0 \le r \le r(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi.$ 如图 9-5 所示，则有 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

注：在区域 θ 的变化区间 $[\alpha, \beta]$ 内，过极点作射线，此射线穿过区域 D，穿入点所在的曲线 $r = r_1(\theta)$ 为下限（下曲线），穿出点所在的曲线 $r = r_2(\theta)$ 为上限（上曲线）。

2．有时也可以把 D 表示 r 一型区域：$\theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r), r_1 \le r \le r_2$，即由曲线 $\theta = \theta_1(r), \theta = \theta_2(r)$ 与圆 $r = r_1, r = r_2$ 所围成的区域。在 r 的变化区间 $[r_1, r_2]$，以 O 为心，以 r 为半径作圆，曲线按逆时针方向穿过区域 D（图 9-21），穿入点的极角 $\theta = \theta_1(r)$ 为下限（称为小角曲线），穿出点的极角 $\theta = \theta_2(r)$ 为上限（称为大角曲线），有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta.$$

特别地，若区域 D 为：$\alpha \le \theta \le \beta, r_1 \le r \le r_2$，其中 α, β, r_1, r_2 均为常数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta.$$

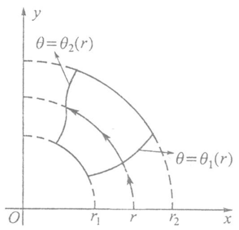


图 6

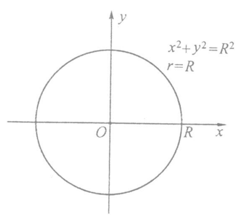


图 7

3.（1）若 D 是由曲线 $x^2 + y^2 = R^2$ 所围成的区域（图 7）。经极坐标变换，方程为：$r = R$，属于 1（3）的情形，有 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

（2）若 D 是曲线 $x^2 + y^2 = 2xR$ 所围成的区域（图 8）。经极坐标变换，方程为：

$r = 2R\cos\theta$，属于 1（2）情形，由 $D: 0 \le r \le 2R\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，知

$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

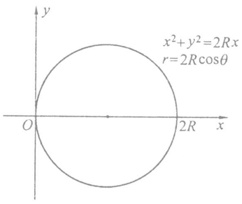


图 8

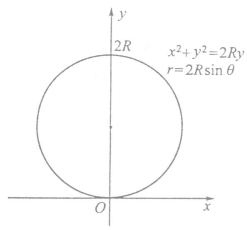


图 9

（3）若 D 是曲线 $x^2 + y^2 = 2Ry$ 所围成的区域（图 9-9）。经极坐标变换，曲线方程为：$r = 2R\sin\theta$，属于 1（2）情形，由 $D: 0 \le r \le 2R\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi$，知

$$\iint_{D} f(x,y)d\sigma = \int_{0}^{\pi} d\theta \int_{0}^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

二十六、两个重要的级数

1．P 一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$（P 为常数），当 P>1 时，该级数收敛（但和不能用一个具体的式子表示出来），当 $P \le 1$ 时，该级数发散。

2．几何级数（等比级数）$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$（q 为常数），当 $|q| < 1$ 时，该级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$，当 $|q| \ge 1$ 时，该级数发散。

二十七、级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$，则 $\begin{cases} \rho < 1 \text{时，级数收敛} \\ \rho > 1 \text{时，级数发散} \\ \rho = 1 \text{时，不确定} \end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则 $\begin{cases} \rho < 1 \text{时，级数收敛} \\ \rho > 1 \text{时，级数发散} \\ \rho = 1 \text{时，不确定} \end{cases}$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$(或$-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$，那么级数收敛且其和$s \leq u_1$，其余项$r_n$的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$。

二十八、绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数：$\sum \frac{1}{n}$发散，而$\sum \frac{(-1)^n}{n}$收敛；级数：$\sum \frac{1}{n^2}$收敛；

二十九、幂级数：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad \begin{cases} |x| < 1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1\text{时，发散} \end{cases}$$

对于级数(3)$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases} |x| < R\text{时收敛} \\ |x| > R\text{时发散} \\ |x| = R\text{时不定} \end{cases}$，其中$R$称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases} \rho \neq 0\text{时，}R = \dfrac{1}{\rho} \\ \rho = 0\text{时，}R = +\infty \\ \rho = +\infty\text{时，}R = 0 \end{cases}$

三十、函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x) = f(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$

余项：$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$时即为麦克劳林公式：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

三十一、一些函数展开成幂级数

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$;

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$;

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty);$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, x \in (-1, 1];$

5. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots x \in (-1, 1);$

6. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1);$

7. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, x \in (-1, 1),$

三十二、欧拉公式

由 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$**,把它推广到纯虚数情形，定义** e^{ix} **的意义如下（其中 x 为实数）：**

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots)$$

$= \cos x + i\sin x$，**x 用-x 代换，有** $e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$

从而 $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$**.以上这四个公式统称为欧拉公式.**

三十三、微分方程的相关概念

一阶微分方程：$y' = f(x, y)$ 或 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy = f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得：$G(y) = F(x) + C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi(x, y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，解法：

设$u = \frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，$u + \frac{du}{dx} = \varphi(u), \therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，

即得齐次方程通解。

三十四、一阶线性微分方程

1.一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases} \text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程，}y=Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当}Q(x)\neq 0\text{时，为非齐次方程，}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

2.伯努利（Bernoulli）方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq 0,1,n\text{为实数})$ 的方程称为伯努利（Bernoulli）方程。

Bernoulli 方程的求解方法为

由 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$

当 $y\neq 0$ 时，得 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，化为 $\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$.

令 $u=y^{1-n}$，有 $\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x)$，即 $\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$

这是一阶线性微方程，从而可利用公式求出通解。 $y=0$ 显然是原方程的解.

三十五、二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases} f(x)\equiv 0\text{时为齐次} \\ f(x)\neq 0\text{时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法

$y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程:$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中r^2，r的系数及常数项恰好是(*)式中y'',y',y的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1,r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

$r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	

同理可得到 $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ 对应的特征方程 $a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$ 的根与微分方程的通解中对应项的关系如下表：

特征根	通解中的对应项
单实根 r	ce^{rx}
一对单复根 $\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$
k 重实根 r	$e^{rx}\left(c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1}\right)$
k 对复根 $\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x]$

三十六、二阶常系数非齐次线性微分方程

1． $y''+py'+qy=f(x)$

（1）$f(x)=p_n(x)e^{\lambda x}$，λ 是常数；$p_n(x)$ 是 x 的已知 n 次多项式

设方程的特解 $\widetilde{y}=Q(x)e^{\lambda x}$,其中 $Q(x)$是待求多项式, 其中 $Q(x)=x^kQ_n(x)$

$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，$b_0,b_1,\cdots,b_n$ 为待求常数。

$$k=\begin{cases}0, & \lambda\text{不是特征方程根},\\ 1, & \lambda\text{是特征方程单根},\\ 2. & \lambda\text{是特征方程重根}.\end{cases}$$

（2） $f(x)=e^{\alpha x}\left[p_l(x)\cos\beta x+p_n(x)\sin\beta x\right]\qquad(\beta\neq0)$

同样可讨论得 $\widetilde{y}=x^ke^{\alpha x}\left[Q_m(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right]$，其中 $Q_m(x),R_m(x)$ 是待求的 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$.

$$k=\begin{cases}0, & \lambda=\alpha+\beta i\text{不是特征方程根}\\ 1. & \lambda=\alpha+\beta i\text{是特征方程根(此时,只能是单根)}.\end{cases}$$

把 $\widetilde{y},\widetilde{y}',\widetilde{y}''$ 代入方程，消去 $e^{\alpha x}$，得到等式两边 $\cos\beta x$ 的系数相同，$\sin\beta x$ 的系数相同，

从而可求出$Q_m(x)$与$R_m(x)$，因此求出特解$\widetilde{y}$.

设$p(x),q(x),f(x)$是已知的关于x的函数，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

称为二阶线性微分方程.

若$f(x)\equiv 0$，此时方程为$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ （2）

称为二阶线性齐次微分方程.

若$f(x)\neq 0$，称方程（1）为二阶线性非齐次微分方程，且函数$f(x)$称为方程的自由项。

关于二阶线性微分方程解的结构有以下定理

定理1　设$y_1(x),y_2(x)$是方程（2）的两个解，则$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$也是方程（2）的解。

定理2　若y_1,y_2是方程（3）的两个线性无关的特解，则$y=c_1y_1+c_2y_2$是方程（2）的通解，其中c_1,c_2是两个任意常数。

定理1、2告诉我们求方程（2）通解的方法

（1）设法求出方程（2）的两个特解y_1,y_2；

（2）验证y_1,y_2线性无关；

（3）则$y=c_1y_1+c_2y_2$是方程（3）的通解.

定理3　设$\widetilde{y}$是方程（2）的一个特解，而$Y=c_1y_1+c_2y_2$是对应齐次方程（2）的通解，则$y=Y+\widetilde{y}=c_1y_1+c_2y_2+\widetilde{y}$是方程（2）的通解，其中$c_1,c_2$是两个任意常数。

总结：定理3告诉我们求方程（1）通解的方法

（1）先求出方程（1）对应齐次方程（2）的通解Y（用定理1、2的方法）。

（2）设法求方程（1）的一个特解$\widetilde{y}$。

（3）$y=Y+\widetilde{y}=c_1y_1+c_2y_2+\widetilde{y}$是方程（2）的通解。

定理4　设函数y_1与y_2分别是线性非齐次方程

$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_1(x)$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则

y_1+y_2是方程$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解。

定理 4 告诉我们求非齐次方程特解的一种技巧。

三十七、可降阶的高阶微分方程

1．形如 $y^{(n)}=f(x)$的微分方程，可通过逐次积分求解。

即$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+c_1, y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+c_1x+c_2,\cdots.$

2．形如 $F\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$的微分方程，特点是不显含$y$，如果把$\frac{dy}{dx}$解出用$x$表示，则$y$就可解出，因此令 $y'=\frac{dy}{dx}=p(x)$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$, 于是方程转化为

$F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$，

这里x是自变量，P是因变量的一阶微方程，利用（一）的方法，可得$\psi(x,p,c_1)=0\Leftrightarrow\psi\left(x,\frac{dy}{dx}c_1\right)=0$再解之即得。

3．形如 $F\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$的微分方程。特点是不显含$x$，如果把$\frac{dy}{dx}$解出用$y$表示，则可求出$y=y(x)$.因此

令$y'=\frac{dy}{dx}=p(y), y=y(x)$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$, 于是方程转化为$F\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)=0$，这里$y$是自变量，$p$是因变量的一阶微分方程，利用（一）的方法，可解得$\psi(y,p,c_1)=0\Leftrightarrow\psi\left(y,\frac{dy}{dx},c_1\right)=0$，再解之即得。