机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling

李明磊

南京航空航天大学 电子信息工程学院

E-mail: minglei_li@nuaa.edu.cn

3．相机的几何标定

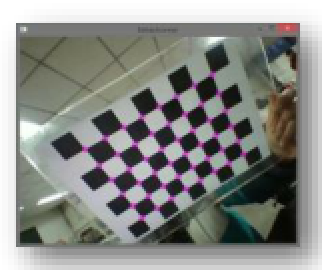
3.1 相机标定的基本概念

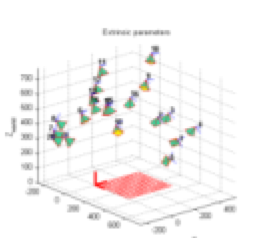
3.2 直接线性变换法标定

3.3 棋盘格标定方法

-- 非线性标定方法

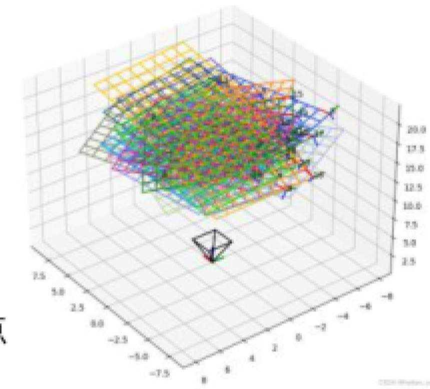
3.4 其它标定算法





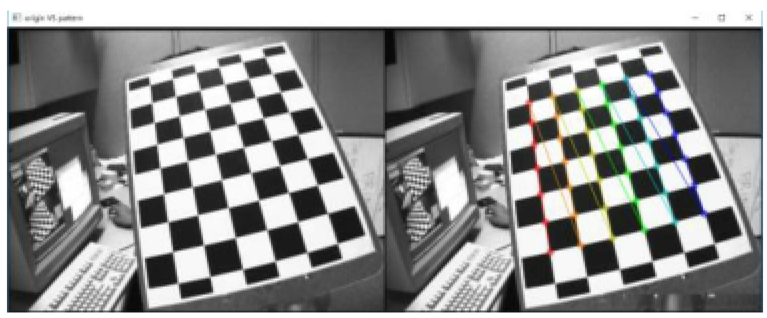
3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法（张正友）



- 一种利用平面棋盘格进行相机标定的实用办法
- 介于摄影标定法和自标定法之间
- 既克服了摄影标定法需要的高精度三维标定物的缺点
- 又解决了自标定法鲁棒性差的难题。

Z. Zhang. A flexible new technique for camera calibration. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(11): 1330-1334, 2000.
Z. Zhang. Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations. International Conference on Computer Vision (ICCV'99), Corfu, Greece, pages 666-673, September 1999.
http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/



http://research.microsoft.com/~zhang/calib/

回顾射影几何:
绝对圆锥曲线

- 计算出矩形到图片上的映射
- 算出图片上circular points的位置
- 用6个circular points算出一个椭圆
- 用椭圆解出内参

3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法

对于平面标定装置，存在世界坐标系，使得其上的所有点都满足 $Z=0$ 。

在齐次归一化坐标系中用下式描述影像形成

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{K}[\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_2|\mathbf{t}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} \sim \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$$

$$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$$

其中，矢量$\mathbf{r}_i$表示旋转矩阵$\mathbf{R}$的第i列向量。

在$Z=0$的标定板上的空间点归一化齐次坐标

$$\mathbf{M} = [X \quad Y \quad 1]^\top$$

在没有镜头畸变的情况下，可以通过应用单应性矩阵$\mathbf{H}$，从相应的场景点$\mathbf{M}$获得影像点$\mathbf{m}$。

$$\mathbf{m} \sim \mathbf{H}\mathbf{M}$$

3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法

$\mathbf{H} \sim \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$

$[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3] = \lambda \mathbf{K}[\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{t}]$

$\mathbf{r}_1 = (1/\lambda)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1, \mathbf{r}_2 = (1/\lambda)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2$

$\mathbf{r}_1$和$\mathbf{r}_2$满足正交性，存在

$\mathbf{r}_1^\top \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_1^\top \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^\top \cdot \mathbf{r}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{h}_1^\top \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^\top \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^\top \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2 \end{array}}$$

通过求解该式，获得内参数

为方便计算，定义对称矩阵$\mathbf{B}$：

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}$$

使用6维向量，包含$\mathbf{B}$里的矩阵元素

$$\mathbf{b} = [B_{11}\ B_{12}\ B_{22}\ B_{13}\ B_{23}\ B_{33}]^\top$$

单应性矩阵$\mathbf{H}$的列向量表示为

$$\mathbf{h}_i = [h_{i1} \ \ h_{i2} \ \ h_{i3}]^\top$$

代入$\mathbf{b}$和$\mathbf{h}_i$

$$\mathbf{h}_i^\top \mathbf{B}\mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}{}^\top \mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{v}_{ij} = [h_{i1}h_{j1} \quad h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1} \quad h_{i2}h_{j2} \quad h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3} \quad h_{i3}h_{j3}]^\top$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^\top \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^\top \end{bmatrix} \mathbf{b} = 0$$

标定板的n幅影像产生$2n$个等式

$\mathbf{V}\mathbf{b} = 0$ $\qquad$ $\mathbf{V}$为$2n \times 6$的系数矩阵

理想情况下，3幅影像能够求出内参数矩阵（解析解）

一幅图像，提取棋盘格角点的像素坐标，就能计算出单应矩阵H的元素。（回顾单应矩阵那一节）
有了H里的列向量 hi，就能获得$\mathbf{Vb} = \mathbf{0}$方程的具体表达。

3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法

（课后作业）
为什么SVD分解可以计算方程的解

$\mathbf{V}\mathbf{b} = 0$ $\quad$ n幅影像, n >3

第一种求解，矩阵$\mathbf{V}\mathbf{V}^\top$的最小特征值对应的特征向量即为方程解。
第二种求解，矩阵$\mathbf{V}$的奇异值分解$\mathbf{V} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$的最后一列即为方程的解。

计算得到$\mathbf{b}$，因为：$\mathbf{b} = [B_{11}\ B_{12}\ B_{22}\ B_{13}\ B_{23}\ B_{33}]^\top$

可以重构出对称矩阵$\mathbf{B}$

又因为：$\mathbf{B} = \lambda\, \mathbf{K}^{-\top}\mathbf{K}^{-1}$

可以计算出内参数矩阵$\mathbf{K}$种的各个元素值

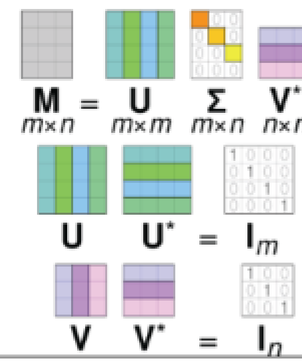
然后，外参数的计算

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \lambda \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \lambda \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{t} &= \lambda \mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_3 \end{aligned}$$

- 计算的矩阵$\mathbf{R}$不一定满足正交性约束
- 根据Frobenius范数确定最接近给定3×3矩阵的正交旋转矩阵。

SVD

- **S**ingular **V**alue **D**ecomposition
  - Generalization of the eigen-decomposition of a square matrix to any m by n matrix



$$A = U\,\Sigma\,V^{-1} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \sigma_N \end{bmatrix}$$

U, V = orthogonal matrix

U 和 V 都是酉矩阵，即满足

$$U^T U = I$$
$$V^T V = I$$

酉矩阵是正交矩阵往复数域上的推广
若酉矩阵的元素都是实数，其即为正交矩阵。

酉矩阵（幺正矩阵）

定义

$AA^H = A^H A = I$

- 其中，A^H 表示共轭转置
- 换言之，当 $A^H = A^{-1}$ 时，A被称为酉矩阵

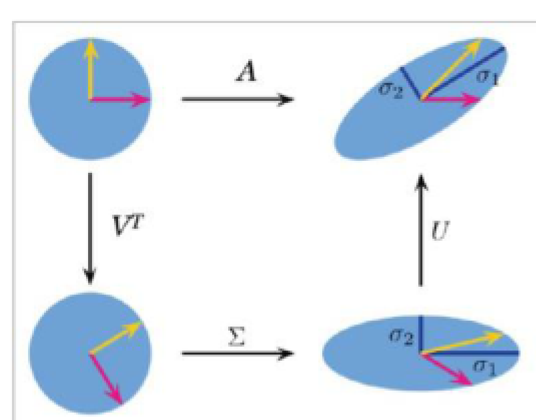
性质

- $A^H = A^{-1}$
- 酉矩阵的特征值都是模为1的复数，即分布在复平面的单位圆上，所以 $|\det(A)| = 1$
- A的列向量构成内积空间C上的一组标准正交基
- A的行向量构成内积空间C上的一组标准正交基
- 酉矩阵是正规矩阵

SVD Singular Value Decomposition

Geometric meaning

$$A = U \Sigma V^T$$



Example (square matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ \text{Transformation}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -.40 & .916 \\ .916 & .40 \end{bmatrix}}_{\substack{U \\ \text{Rotation}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5.39 & 0 \\ 0 & 3.154 \end{bmatrix}}_{\substack{\Sigma \\ \text{Scaling}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -.05 & .999 \\ .999 & .05 \end{bmatrix}}_{\substack{V^T \\ \text{Rotation}}}$$

SVD　Singular Value Decomposition

求解一个齐次线性系统 a homogeneous linear system　$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$

$\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 是一个无意义的解

如果存在解 $\mathbf{X}\neq\mathbf{0}$，那么 $k\mathbf{X}$ 都是有效的解。

为了求解，添加一个限制条件 $\|\mathbf{X}\|=1$。
问题转化为求解：

$$\min\|\mathbf{AX}\| \text{ subject to } \|\mathbf{X}\|=1$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{UU}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$$

U只起一个旋转作用，最小化$\|\mathbf{AX}\|$等价于

$$\min\|\mathbf{AX}\|=\min\|\mathbf{\Sigma V}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\|$$

V也只起一个旋转作用

令　$\mathbf{Y}=\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$

问题转化为求解：$\min\|\mathbf{\Sigma Y}\|$ subject to $\|\mathbf{Y}\|=1$

$\mathbf{Y}=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ 时最小，因为 $\mathbf{X}=\mathbf{VY}$ 所以　$\mathbf{X}=\mathbf{V}_n$

即，$\mathbf{X}$ 等于矩阵 $\mathbf{V}$ 的最后一列时，获得最小值

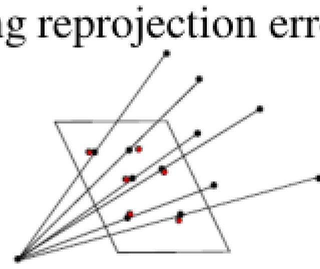
3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法

- Zhang1999标定法初始获得的内、外参数和DLT标定方法一样。它们是通过最小化代数误差度量来计算的，物理上是没有意义的
- 可以将这些内、外参数作为最小化光束法平差计算的初始值

光束法平差Bundle Adjustment

最小化**重投影误差**
Minimizing reprojection error



$$\sum_i d(\mathbf{x}_i,\hat{\mathbf{x}}_i)^2$$

$$\min_{\mathrm{P}}\sum_i d(\mathbf{x}_i,\mathrm{P}\mathbf{X}_i)^2$$

3.3 棋盘格标定方法

非线性标定方法

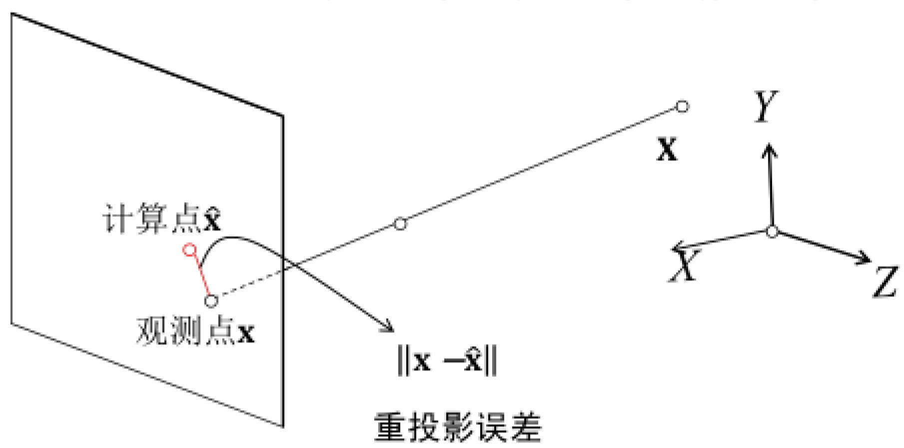
最小化重投影误差

最小化二维图像点和重投影点之间的"误差和"

用于优化**P**矩阵

- 假定所有的三维点都已知
- 噪声只来源于图片像点的测量误差

$$x' = u - u_0 = -f_u \frac{r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)}$$
$$y' = v - v_0 = -f_v \frac{r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)}$$



重投影误差

3.3 棋盘格标定方法

非线性标定方法

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_i = \frac{m_{00}X_i + m_{01}Y_i + m_{02}Z_i + m_{03}}{m_{20}X_i + m_{21}Y_i + m_{22}Z_i + m_{23}}$$

$$\hat{v}_i = \frac{m_{10}X_i + m_{11}Y_i + m_{12}Z_i + m_{13}}{m_{20}X_i + m_{21}Y_i + m_{22}Z_i + m_{23}}$$

$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ 重投影误差

$$\sum_i d^2(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i) = \sum_i \left| u_i - \frac{m_{00}X_i + m_{01}Y_i + m_{02}Z_i + m_{03}}{m_{20}X_i + m_{21}Y_i + m_{22}Z_i + m_{23}} \right|^2 + \left| v_i - \frac{m_{10}X_i + m_{11}Y_i + m_{12}Z_i + m_{13}}{m_{20}X_i + m_{21}Y_i + m_{22}Z_i + m_{23}} \right|^2$$

$$\mathbf{P} = \arg\min \sum_i d^2(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)$$

应用最小二乘法估算实际存在径向畸变下的畸变系数。极大似然法，优化估计，提升估计精度。

另一种写法：$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left\| \mathbf{x}_{ij} - \mathbf{A}(\mathbf{R}_i \mathbf{X}_j + \mathbf{t}) \right\|^2$

3.3 棋盘格标定方法

Zhang1999标定法

下面对整个Zhang式标定的流程做一个总结：

1. 准备平面标定板。
2. 通过移动相机或移动标定板在不同的位姿拍摄多张标定板图像（图像数>=3）。
3. 在所有图像上检测特征点(角点或者圆心点)，经过角点的像素坐标提取，可得所有角点的世界坐标系和像素坐标系的对应关系
4. 通过线性方程组的最小二乘解法，求解当前位姿下的单应性变换矩阵 $\mathbf{H}$ ，可得公式$\mathbf{Vb}=0$的具体表达式。
5. 求解所有内参数和外参数。
6. 通过线性方程组求解近似的畸变系数（或者直接赋值为0）。
7. 通过非线性优化（BA）计算精确的内外参数和畸变系数。

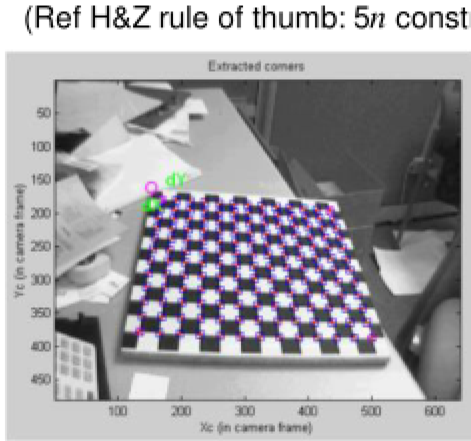
Zhang Z . A Flexible New Technique for Camera Calibration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11):1330-1334.

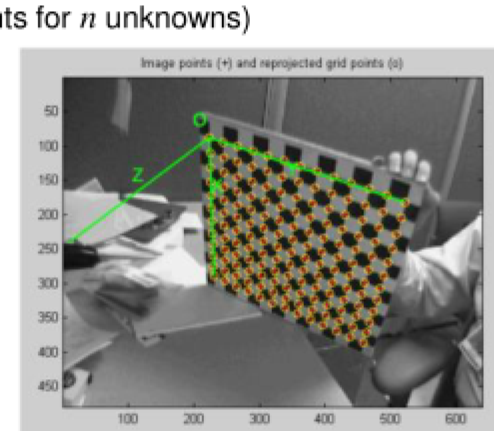
3.3 棋盘格标定方法

在所有标定板图像上检测角点

(i) Canny edge detection
(ii) Straight line fitting to the detected edges
(iii) Intersecting the lines to obtain the images corners

typically precision <1/10
(Ref H&Z rule of thumb: 5n constraints for n unknowns)





	f_y	f_x/f_y	skew	x_0	y_0	residual
linear	1673.3	1.0063	1.39	379.96	305.78	0.365
iterative	1675.5	1.0063	1.43	379.79	305.25	0.364