



# 机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling



李明磊

南京航空航天大学 电子信息工程学院

E-mail: minglei\_li@nuaa.edu.cn

1



## 3. 相机的几何标定

### 3.1 相机标定的基本概念

### 3.2 直接线性变换法标定

### 3.3 棋盘格标定方法

### 3.4 其它标定算法

2



## 3.1 相机标定的基本概念



Camera calibration

李明磊@nuaa

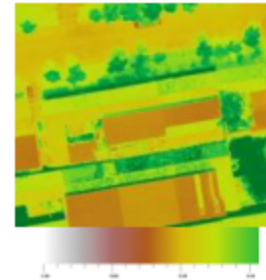
3



## 3.1 相机标定的基本概念

许多不同的标定概念 (calibration)

- 辐射定标Radiometric calibration
- 颜色校准Color calibration
- 几何标定Geometric calibration
- 噪声校准Noise calibration



李明磊@nuaa

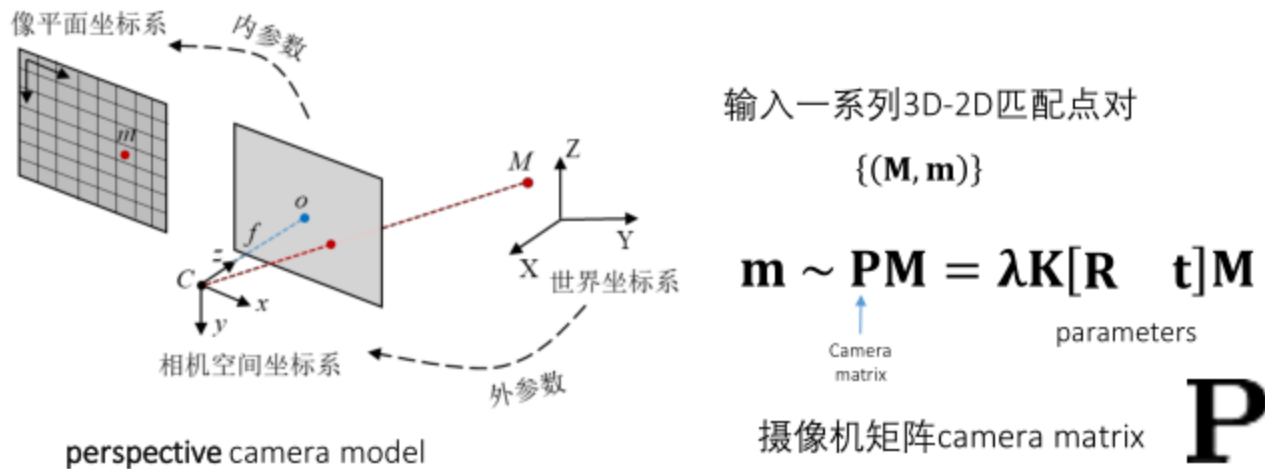
4

### 3.1 相机标定的基本概念

#### • 几何标定Geometric calibration

在图像测量过程中，为了确定空间物体表面某一点的三维几何位置与图像中对应点的相互关系，要建立相机成像的几何模型。

求解这些几何模型的参数的过程就称之为**相机的几何标定**。



李明磊@nuaa

5

### 3.1 相机标定的基本概念

**射影摄像机**是与现实生活中摄像机硬件设备对应的最普遍的相机模型，可以用射影几何的工具研究相机模型的构造。

摄像机矩阵camera matrix  
几何模型的参数包含**内参数**和**外参数**。

- **内参数**是摄像机固有的参数，从出厂时刻就伴随而来。如果不发生硬件系统的改变，内参数标定获得之后，可以长期使用。
- **外参数**是反映摄像机在物理世界坐标系中的位置和姿态参数，是一个和观测任务和观测场景相关的参数。

$$P = K[R \ t]$$

intrinsic camera parameters

extrinsic camera parameters

李明磊@nuaa

6

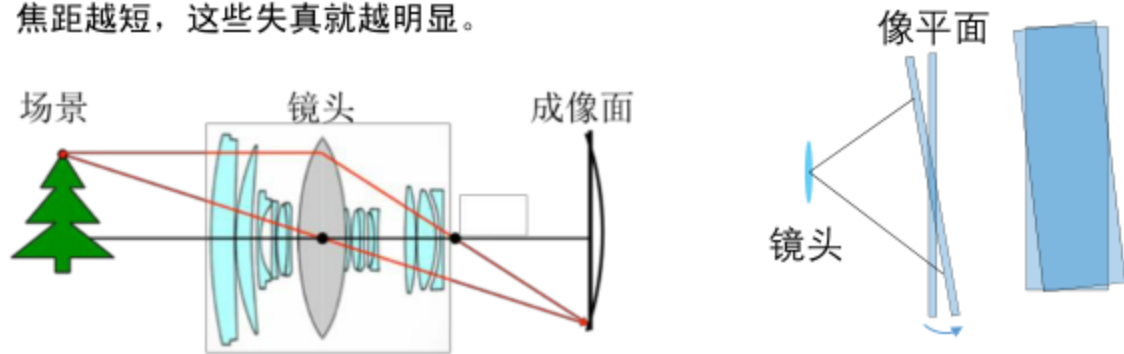
### 3.1 相机标定的基本概念

内参数是摄像机固有的参数

在透视投影成像的过程中，常见相机使用镜头增加进入成像平面的光亮度，因此减少了光线传输所需的能量。

实际，镜头是要使用多个透镜组成，因此透镜的成像效果不会像小孔成像那样完全符合线性模型的特点。光线传输穿过透镜会在感光器件平面上产生非线性的失真，将其称为图像的失真畸变。

焦距越短，这些失真就越明显。

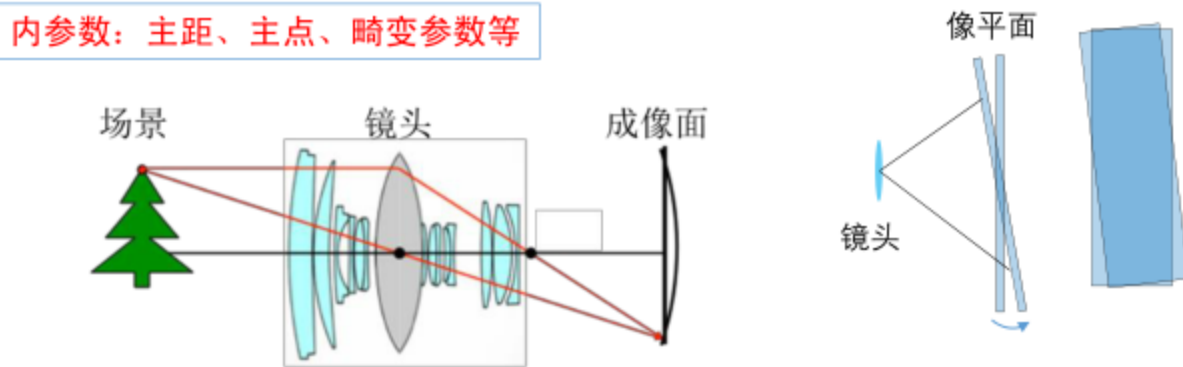


李明磊@nuaa

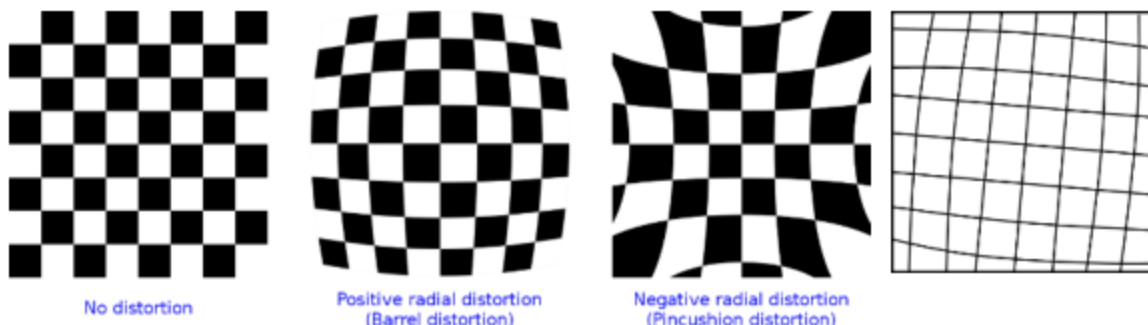
7

### 3.1 相机标定的基本概念

内参数：主距、主点、畸变参数等



畸变参数



No distortion

Positive radial distortion  
(Barrel distortion)

Negative radial distortion  
(Pincushion distortion)

径向：Radial direction

无畸变图像

正径向畸变-桶型

负径向畸变-枕型

切向畸变

李明磊@nuaa

8

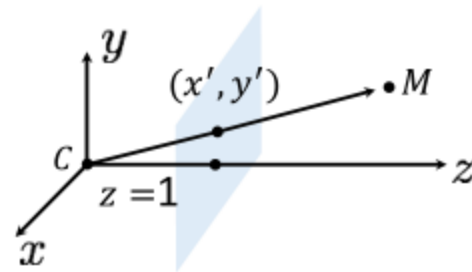
### 3.1 相机标定的基本概念

透视成像

$$\begin{bmatrix} x_M^C \\ y_M^C \\ z_M^C \end{bmatrix} = [R] - RC \begin{bmatrix} X_M^W \\ Y_M^W \\ Z_M^W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_o \\ 0 & f_y & v_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $(x', y')$  为是三维点按中心投影方式投影到  $z = 1$  的图像平面的坐标

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M/z_M \\ y_M/z_M \\ 1 \end{bmatrix}$$



单位距离的虚拟像平面

李明磊@nuaa

9

### 3.1 相机标定的基本概念

#### 镜头畸变的解析模型

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M/z_M \\ y_M/z_M \\ 1 \end{bmatrix}$$

Brown (1966) 提出了一种基于级数展开的镜头畸变的解析模型。

$$\begin{aligned} x'' &= x' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + 2p_1 x' y' + p_2 (r^2 + 2x'^2) \\ y'' &= y' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + p_1 (r^2 + 2y'^2) + 2p_2 x' y' \end{aligned}$$

- $(x', y')$  为是三维点按中心投影方式投影到  $z = 1$  的图像平面的坐标
- $r^2 = x'^2 + y'^2$  表示径向距离
- $k_1 \dots k_6$  和  $p_1, p_2$  分别表示**径向畸变参数**和**切向畸变参数**  
 $k_1$  用来校正变化小的中心位置,  $k_2$  用来校正变化较大的边缘位置,  $k_3$  用来校正鱼眼镜头, 一般的镜头只需要用到  $k_1, k_2$ 。

畸变后, 像点观测位置的坐标:

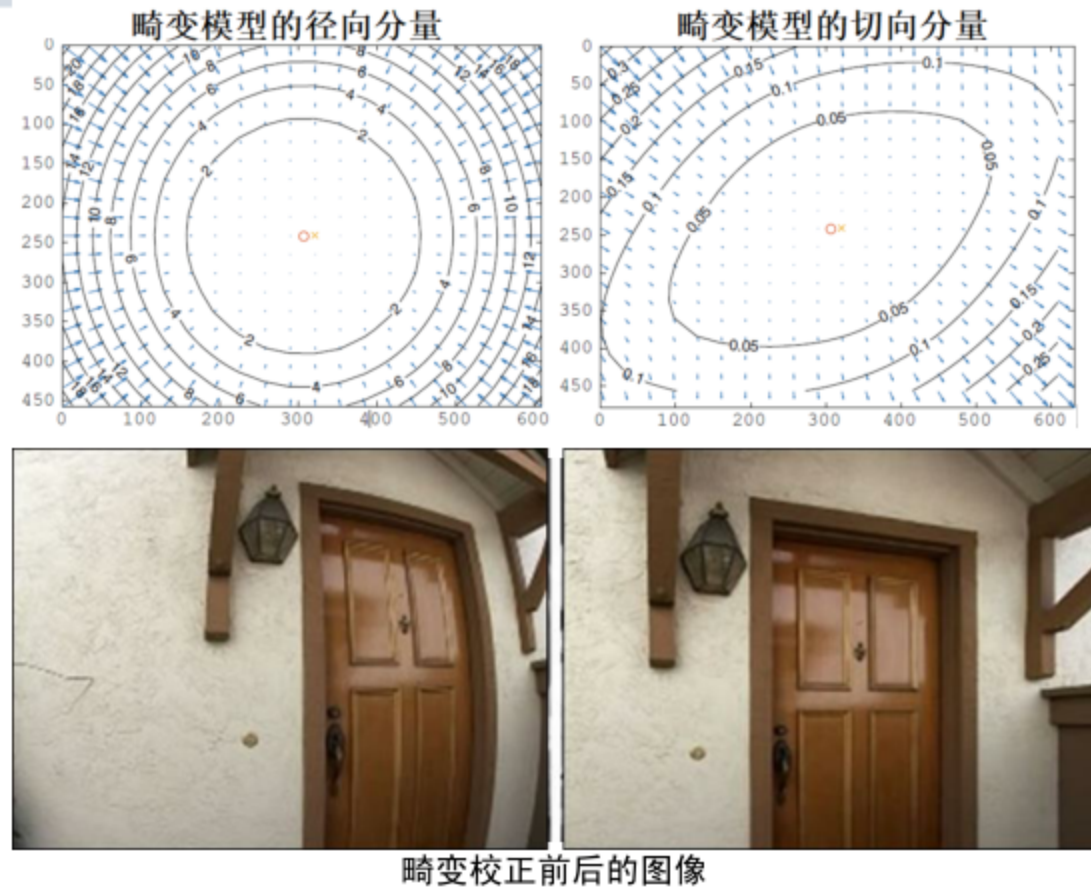
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_o \\ 0 & f_y & v_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

李明磊@nuaa

10



### 3.1 相机标定的基本概念



李明磊@nuaa

11

### 3.1 相机标定的基本概念

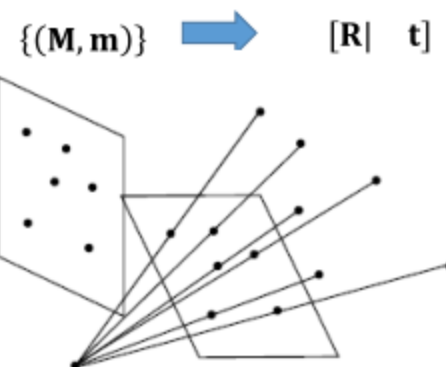
外参数:  $[R | t]$

$$m = PM = K[R \ t]M$$

估计方法:

-涉及到SfM、后方交会Resection、PnP等。

主要在第五章中介绍



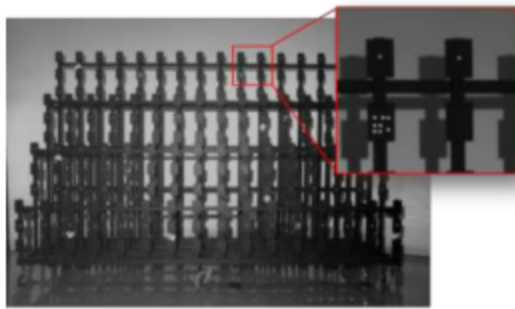
李明磊@nuaa

12

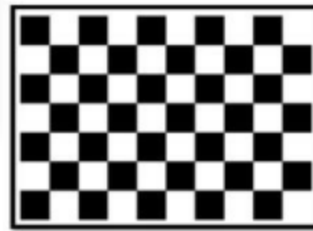
### 3.1 相机标定的基本概念

#### 标定设备：摄像机标定的参照物

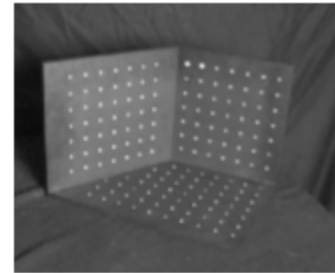
- 在场景中放置一个已知的物体
  - 确定图像和场景之间的联系
  - 计算出图像与场景之间的映射
- 要知道三维点的精确几何位置
- 要知道3D->2D的对应关系



三维标定场



平面标定板



## 3. 相机的几何标定

### 3.1 相机标定的基本概念

### 3.2 直接线性变换法标定

DLT direct linear transform

### 3.3 棋盘格标定方法

### 3.4 其它标定算法

## 3.2 直接线性变换法标定

透视成像  
(共线方程)

$$\begin{aligned} x' &= u - u_0 = -f_u \frac{r_{11}(X - X_C) + r_{12}(Y - Y_C) + r_{13}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \\ y' &= v - v_0 = -f_v \frac{r_{21}(X - X_C) + r_{22}(Y - Y_C) + r_{23}(Z - Z_C)}{r_{31}(X - X_C) + r_{32}(Y - Y_C) + r_{33}(Z - Z_C)} \end{aligned}$$

调整形式，使等号左边只保留像点坐标 $[u \ v]^T$

$$\begin{aligned} u &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ v &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \end{aligned}$$

非线性

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{r_{31}u_0 - r_{11}f_u}{D} \\ L_2 &= \frac{r_{32}u_0 - r_{12}f_u}{D} \\ L_3 &= \frac{r_{33}u_0 - r_{13}f_u}{D} \\ L_4 &= \frac{(r_{11}f_u - r_{31}u_0)X_C + (r_{12}f_u - r_{32}u_0)Y_C + (r_{13}f_u - r_{33}u_0)Z_C}{D} \\ L_5 &= \frac{r_{31}v_0 - r_{21}f_v}{D} \\ L_6 &= \frac{r_{32}v_0 - r_{22}f_v}{D} \\ L_7 &= \frac{r_{33}v_0 - r_{23}f_v}{D} \\ L_8 &= \frac{(r_{21}f_v - r_{31}v_0)X_C + (r_{22}f_v - r_{32}v_0)Y_C + (r_{23}f_v - r_{33}v_0)Z_C}{D} \\ L_9 &= \frac{r_{31}}{D} \\ L_{10} &= \frac{r_{32}}{D} \\ L_{11} &= \frac{r_{33}}{D} \end{aligned}$$

像点坐标 $[u \ v]^T$ 仅依赖于控制点世界坐标 $[X \ Y \ Z]^T$ 和11个常量参数

令 $D = -(r_{31}X_C + r_{32}Y_C + r_{33}Z_C)$

Ref: Abdel-Aziz和Karara (1971)

15

## 3.2 直接线性变换法标定

顾及畸变模型

$$\begin{aligned} x'' &= x' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + 2p_1 x' y' + p_2 (r^2 + 2x'^2) \\ y'' &= y' \frac{1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6}{1 + k_4 r^2 + k_5 r^4 + k_6 r^6} + p_1 (r^2 + 2y'^2) + 2p_2 x' y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= (u - u_0)(L_{12}r^2 + L_{13}r^4 + L_{14}r^6) + L_{15}(r^2 + 2(u - u_0)^2) + L_{16}(v - v_0)(u - u_0) \\ \Delta v &= (v - v_0)(L_{12}r^2 + L_{13}r^4 + L_{14}r^6) + L_{15}(v - v_0)(u - u_0) + L_{16}(r^2 + 2(v - v_0)^2) \end{aligned}$$

$L_{12}, L_{13}, L_{14}$ 是引入的和镜像畸变相关的参数，  
 $L_{15}, L_{16}$ 是切向畸变的参数

像点坐标 $[u \ v]^T$ 由 $[u + \Delta u \ v + \Delta v]^T$ 来代替

包含参数 $L_1 \dots L_{16}$ 的综合表达式。设第 $i$ 个控制点的坐标为 $[X_i \ Y_i \ Z_i]^T$ ,

令 $Q_i = L_9 X_i + L_{10} Y_i + L_{11} Z_i + 1$ ,  $\xi_i = u_i - u_0$ ,  $\eta_i = v_i - v_0$ ,

一个控制点可以形成一个表达式

(先用经验值给 $u_0$ 、 $v_0$ 、 $L_9 \dots L_{11}$ 赋初始值)

线性

$$\begin{bmatrix} \frac{X_i}{Q_i} & \frac{Z_i}{Q_i} & \frac{Y_i}{Q_i} & \frac{1}{Q_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_i X_i}{Q_i} & \frac{-u_i Y_i}{Q_i} & \frac{-u_i Z_i}{Q_i} & \xi_i r_i^2 & \xi_i r_i^4 & \xi_i r_i^6 & r_i^2 + 2\xi_i^2 & \eta_i \xi_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X_i}{Q_i} & \frac{Z_i}{Q_i} & \frac{Y_i}{Q_i} & \frac{1}{Q_i} & \frac{-v_i X_i}{Q_i} & \frac{-v_i Y_i}{Q_i} & \frac{-v_i Z_i}{Q_i} & \eta_i r_i^2 & \eta_i r_i^4 & \eta_i r_i^6 & r_i^2 + 2\eta_i^2 & \xi_i \eta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \\ L_{12} \\ L_{13} \\ L_{14} \\ L_{15} \\ L_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i/Q_i \\ v_i/Q_i \end{bmatrix}$$

Ref: Abdel-Aziz和Karara (1971)

16



## 3.2 直接线性变换法标定

$$\begin{bmatrix} \frac{X_i}{Q_i} & \frac{Z_i}{Q_i} & \frac{Y_i}{Q_i} & \frac{1}{Q_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-u_i X_i}{Q_i} & \frac{-u_i Y_i}{Q_i} & \frac{-u_i Z_i}{Q_i} & \xi_i r_i^2 & \xi_i r_i^4 & \xi_i r_i^6 & r_i^2 + 2\xi_i^2 & \eta_i \xi_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X_i}{Q_i} & \frac{Z_i}{Q_i} & \frac{Y_i}{Q_i} & \frac{1}{Q_i} & \frac{-v_i X_i}{Q_i} & \frac{-v_i Y_i}{Q_i} & \frac{-v_i Z_i}{Q_i} & \eta_i r_i^2 & \eta_i r_i^4 & \eta_i r_i^6 & \eta_i \xi_i & r_i^2 + 2\eta_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i/Q_i \\ v_i/Q_i \end{bmatrix}$$

当观测到控制点个数为 $N$ 时，共 $2N$ 个方程，这些方程写出矩阵的形式

$$\text{线性} \quad \mathbf{ML} = \mathbf{B}$$

$\mathbf{L}$ 是16维的待求参数向量。求解16个未知参数的最小观测点个数需求是8个。如果不考虑镜头畸变参数的影响，只有11个未知参数，需要的最小观测点个数是6个。由于像点观测误差的存在，需要多余的观测量来组成超定方程，利用最小二乘的方法求解位置参数：

$$\mathbf{L} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{B}$$

$(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ 称为矩阵 $\mathbf{M}$ 的伪逆

$\mathbf{L}$  计算出一组值，再迭代回 $\mathbf{ML}=\mathbf{B}$ 中的 $\mathbf{M}$ 矩阵元素。迭代计算直至收敛。

## 3.2 直接线性变换法标定

DLT的优点：

- 实现简单.
- 解析解 Analytical solution.

缺点：

- DLT求解的矩阵 $\mathbf{R}$ 不能保证满足正交性，而实际的 $\mathbf{R}$ 应当是一个正交矩阵
- DLT求解的并不是完全等价于光束法平差。
- DLT标定方法的目标函数是最小化比例缩放了的像点坐标  $[u_i/Q_i \quad v_i/Q_i]^T$ ，这样的目标函数并不能保证任意情况的误差测量都是合理的。（光束法平差的目标函数是使像点的重投影误差最小）

For these reasons, *nonlinear methods are preferred*

- Define error function  $E$  between projected 3D points and image positions
  - $E$  is nonlinear function of intrinsics, extrinsics, radial distortion
- Minimize  $E$  using nonlinear optimization techniques

DLT的解，常用作非线性BA的初始值。