



南京航空航天大学

NANJING UNIVERSITY OF
AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling



李明磊

南京航空航天大学 电子信息工程学院

E-mail: minglei_li@nuaa.edu.cn

1



5. 由运动恢复结构SfM

5.1 对极几何

基础矩阵与本质矩阵

5.2 二视图重建

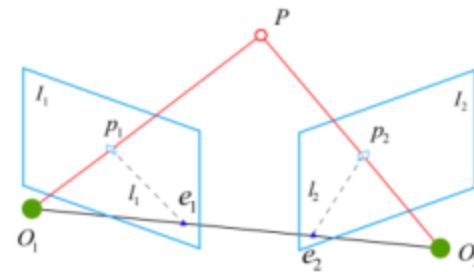
5.3 光束法平差

5.2 二视图重建

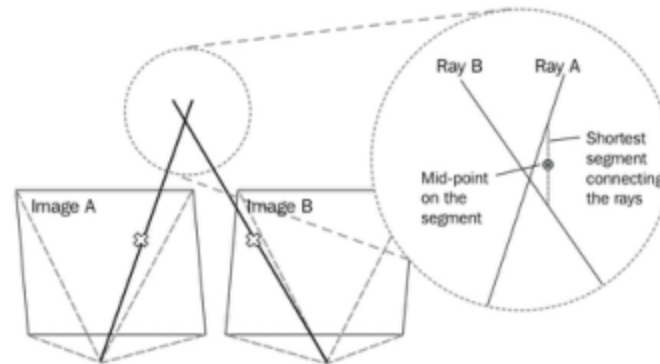
Two-view geometry

对极几何 (Epipolar Geometry) 描述的是**两幅**视图之间的**内在射影几何关系**, 与外部场景无关

对极约束
(epipolar constraint)



由运动恢复结构
(Structure from motion, SfM)

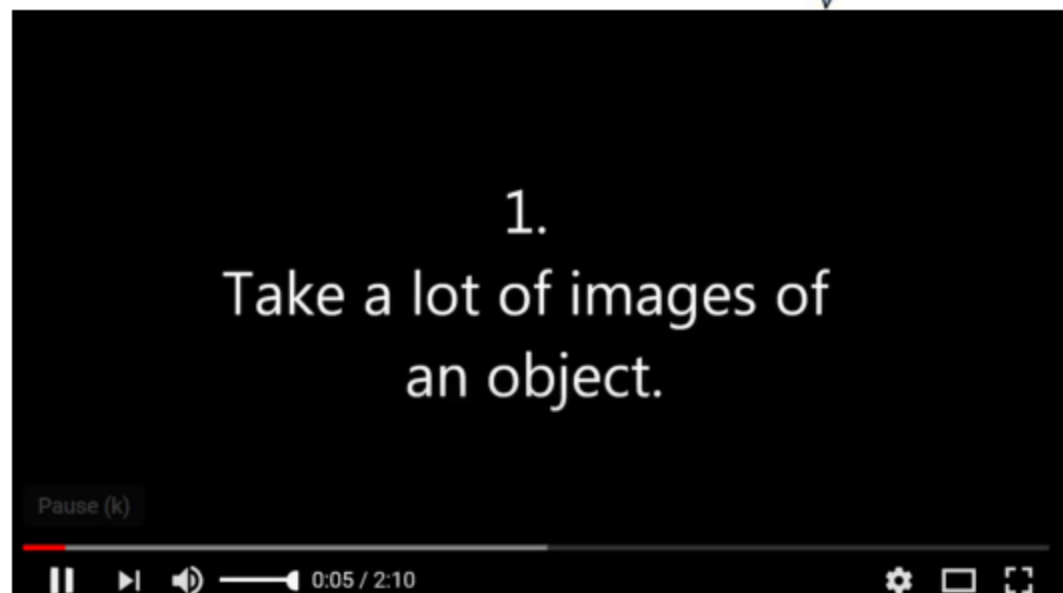
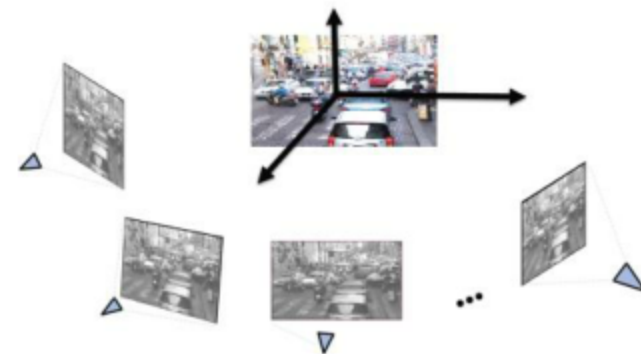


李明磊@nuaa

3

5.2 二视图重建

由运动恢复结构SfM简介
(structure from motion)



李明磊@nuaa

4

5.2 二视图重建

1、初始化影像位姿和场景结构

第一步是选择两个适合初始化结构和位姿的视图。

- 1) 这一对视图之间要有足够的匹配特征；
- 2) 视图之间不应太靠近，避免退化（光心重叠、主距共线）

使用基于特征点的变换映射点和观测点的距离做判别准则，对特征匹配做几何校验。如果变换在图片间映射了充足数量特征，则被认为通过几何校验。例如用单应变换进行检校：

$$\text{median}\{D(\mathbf{H}\mathbf{m}_i, \mathbf{m}'_i)\}$$

当在稀疏视图之间匹配特征时，可以选择连续帧作为初始重建视图对。然而，当在视频序列上跟踪特征时，视频序列具有很高的冗余度，选择序列中前后间隔一定时间的视图就很必要（即选择关键帧）。

5.2 二视图重建

图像点 \mathbf{m} 反向投影的空间点所在的射线为下式：

$$\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{P}_1^+ \mathbf{m} + \lambda \mathbf{C}_1$$

其中 \mathbf{P}_1^+ 代表摄像机矩阵的伪逆

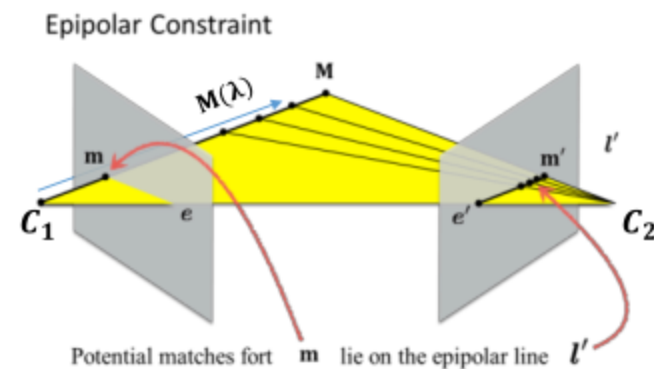
$$\mathbf{l}' = (\mathbf{P}_2 \mathbf{C}_1) \times (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^+ \mathbf{m})$$

因为 $\mathbf{P}_2 \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{e}'$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^+ \mathbf{m}) = [\mathbf{e}']_{\times} (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^+ \mathbf{m}) = ([\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^+) \mathbf{m}$$

$$\rightarrow \mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^+$$

需要 $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{C}_2$ 否则 $\mathbf{P}_2 \mathbf{C}_1 = 0$



5.2 二视图重建

1、初始化影像位姿和场景结构

review

点 \mathbf{m} 在线 \mathbf{l} 上可以表示为 $\mathbf{l}^T \mathbf{m} = 0$

线 \mathbf{l}' 穿过点 \mathbf{m}' 和极点 $\mathbf{e}' \Rightarrow \mathbf{l}' \sim [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{m}'$
回顾二维射影变换 $\mathbf{m}' \sim \mathbf{H} \mathbf{m}$

$$\mathbf{l}' \sim [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H} \mathbf{m} \quad \mathbf{m}'^T \mathbf{F} \mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{l}' \sim \mathbf{F} \mathbf{m}$$

已知一对摄像机矩阵 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 ，能够唯一确定基础矩阵 \mathbf{F}_{12} ，但反过来不成立。
由基础矩阵来确定摄像机矩阵最好的情况也要相差一个右乘3D射影矩阵。

在相差一个射影变换的意义下，摄像机矩阵可以由基础矩阵确定。

通常，让世界坐标系与第一幅影像的像空间坐标系相同。

选择第二个摄像机是为了得到极线校正的对应关系 \mathbf{F}_{12} 。

一个规范形式 (canonical form)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= [\mathbf{I}_{3 \times 3} \mid \mathbf{0}_3] \Rightarrow \mathbf{F}_{12} = [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{A} \\ \mathbf{P}_2 &= [\mathbf{A} \mid \mathbf{a}] \end{aligned}$$

推导省略

Ref : R. Hartley & A. Zisserman, sec. 9.5

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/56700255>

对应于基础矩阵 \mathbf{F}_{12} ，一对规范形式 (Canonical form) 的摄像机矩阵如下给出。
第一幅和第二幅影像在世界坐标系下的旋转矩阵和位置矩阵组成的姿态为：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= [\mathbf{I}_{3 \times 3} \mid \mathbf{0}_3] \\ \mathbf{P}_2 &= [[\mathbf{e}_{12}]_{\times} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{e}_{12} \mathbf{a}^T \mid \lambda \mathbf{e}_{12}] \end{aligned}$$

李明磊@nuaa

7

5.2 二视图重建

2、由本质矩阵提取摄像机矩阵

上一节推导出了 $\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$ 一个 3×3 的矩阵 \mathbf{E} 是本质矩阵的充要条件是它的奇异值中有两个相等而第三个是0

\mathbf{E} 分解为一个反对称矩阵 \mathbf{S} (等同 $[\mathbf{t}]_{\times}$) 和一个旋转矩阵 \mathbf{R} 的乘积， $\mathbf{E} = \mathbf{S} \mathbf{R}$

结论1: 如果 \mathbf{S} 是实的反对称矩阵，那么 $\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^T$ ，
其中 \mathbf{B} 为形如 $\text{diag}(a_1 \mathbf{Z}, a_2 \mathbf{Z}, \dots, a_m \mathbf{Z}, 0, \dots, 0)$ 的分块对角矩阵

$$\text{其中 } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

反对称矩阵的特征矢量都是纯虚数，并且奇数阶的反对称矩阵必是奇异的

可以将 \mathbf{S} 矩阵写成 $\mathbf{S} = k \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T$ ，其中 $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
其中 \mathbf{U} 为正交矩阵

\mathbf{Z} 可以改写为 $\mathbf{Z} = \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{W}$ ，其中 $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此 \mathbf{E} 可以分解为

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{E} = \mathbf{S} \mathbf{R} = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) (\mathbf{W} \mathbf{U}^T \mathbf{R})$$

这也证明了 \mathbf{E} 具有两个相等的奇异值。

相反，具有两个相等奇异值的矩阵可以这样分解为 $\mathbf{S} \mathbf{R}$ 的形式。

因为 \mathbf{E} 的两个奇异值是相等的，奇异值分解不是唯一的。事实上有一个单参数的奇异值分解族。

分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵

引入两个临时的矩阵：

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

李明磊@nuaa

8

5.2 二视图重建

2、由本质矩阵提取摄像机矩阵

一旦本质矩阵 \mathbf{E} 已知，就可以从 \mathbf{E} 中提取出摄像机矩阵。

从本质矩阵 \mathbf{E} 中检索到的摄像机矩阵具有尺度不定和4个可能的解。

一个非零矩阵 \mathbf{E} 如果是本质矩阵，肯定满足

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

其中 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ 且 $\sigma_3 = 0$, $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in SO(3)$ 。

可以分解 $\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R}$

在相差一个常数因子的情况下, $\mathbf{S} = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{U}^T$

假设旋转矩阵 \mathbf{R} 可以分解为 $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^T$, 则有:

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{V}^T = \mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R} = (\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^T)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R} = \mathbf{U}(\mathbf{Z}\mathbf{X})\mathbf{V}^T$$

则有: $\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(1, 1, 0)$

有 $\mathbf{X} = \mathbf{W}$ 或 $\mathbf{X} = \mathbf{W}^T$ 的形式。

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结论2: 如果 \mathbf{E} 的SVD分解为 $\mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{V}^T$, $\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R}$ 有两种分解:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{t}]_{\times} = \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \text{ 或 } \mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{U}(0, 0, 1)^T = \mathbf{U}_3$$

5.2 二视图重建

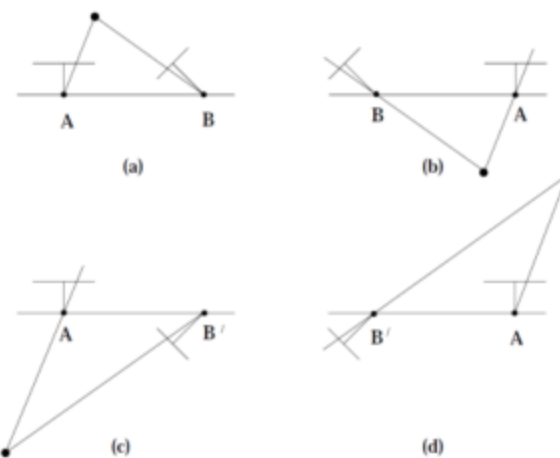
2、由本质矩阵提取摄像机矩阵

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \mid +\mathbf{u}_3]$$

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \mid -\mathbf{u}_3]$$

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T \mid +\mathbf{u}_3]$$

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{U}\mathbf{W}^T\mathbf{V}^T \mid -\mathbf{u}_3]$$

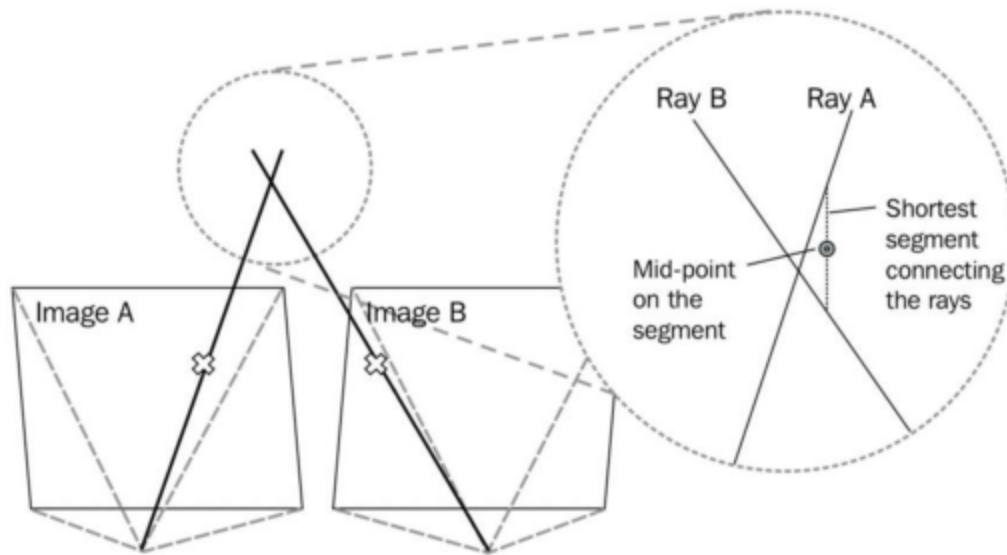


第1、2种解之间的区别仅仅是从第一幅影像到第二幅影像的平移向量的方向相反。第3个解和第1个解的区域是，围绕连接两个摄影中心的基线旋转 180° ，这两种解的关系是一种扭曲的相关。

只有一个可靠解。因此，实践中只需要用一个点来测试确定它是否在两个摄像机前面，足以确定摄像机矩阵 \mathbf{P} 是4个不同解中的哪一个

5.2 二视图重建

当两个投影矩阵完全确定后，就可以通过三角测量方法，即前方交会，对匹配点进行三维空间点的坐标计算，获得场景结构的初始化。



李明磊@nuaa

11

5.2 二视图重建

从两个视图计算场景结构的重建的步骤如下：

- (1) 在两幅影像上分别提取特征点并进行匹配，得到匹配对应的点对集合；
- (2) 计算基础矩阵 \mathbf{F} ，并由它计算出初始化的两幅影像的摄像机矩阵 \mathbf{P} ；
- (3) 对两幅影像之间的每一组点对应，使用三角测量方法重建出它们对应的三维空间点的三维坐标。

实践中上述步骤会有一些变化。例如，如果摄像机已经被离线标定获得内参数矩阵 \mathbf{K} ，那么就会使用本质矩阵 \mathbf{E} 而不是基础矩阵 \mathbf{F} 提取摄像机投影矩阵 \mathbf{P} 。

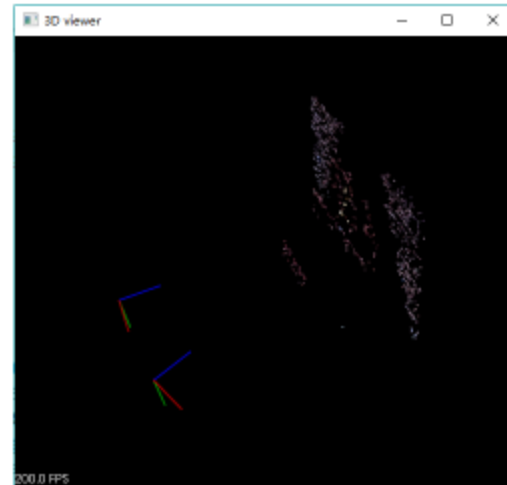
此外，可以使用关于摄像机的运动、场景约束或部分摄像机标定参数的信息来获得重构的优化。

由于噪声的影像，两幅影像上从光心发出，连接影像点的视线，并不能保证准确的相交与三维空间中的一点。在没有做标定的情况下，应该在影像中进行最小化误差来优化参数，而不是在投影三维空间中进行最小化误差优化。因此，三维点 \mathbf{M} 的重投影点与影像点之间的距离最小化目标函数为：

$$D(\mathbf{m}_1, \mathbf{P}_1 \mathbf{M})^2 + D(\mathbf{m}_2, \mathbf{P}_2 \mathbf{M})^2$$

李明磊@nuaa

12



李明磊@nuaa

13



5. 由运动恢复结构SfM

5.1 对极几何

基础矩阵与本质矩阵

5.2 二视图重建

5.3 光束法平差

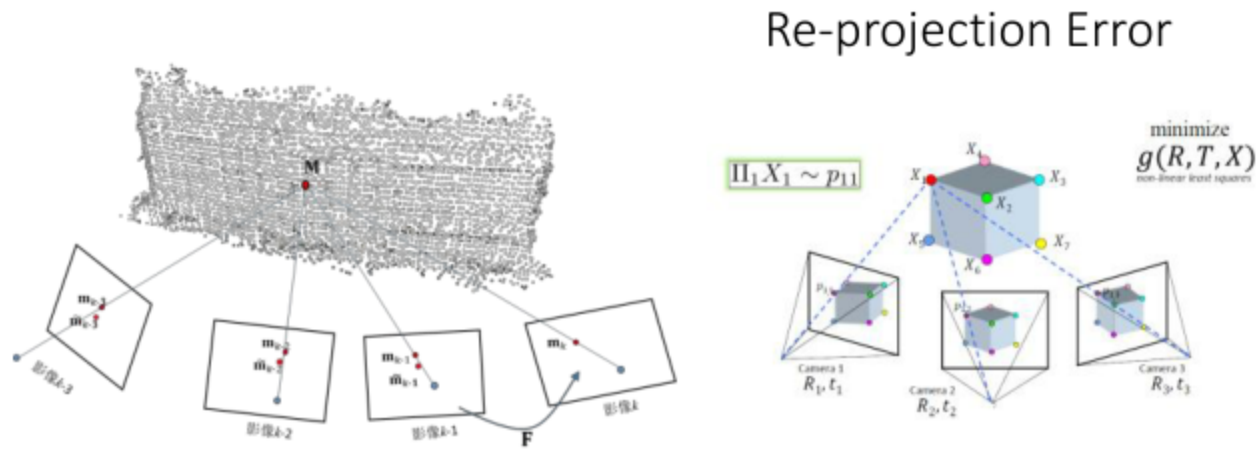
光束法平差（Bundle adjustment, BA）算法

李明磊@nuaa

14

5.3 光束法平差

Bundle的意思就是的光束，其意指三维空间点、成像光心和像点构成三点共线的光束，所以把三维点、影像位姿和像点整体优化的方法称为光束法。



李明磊@nuaa

15

5.3 光束法平差

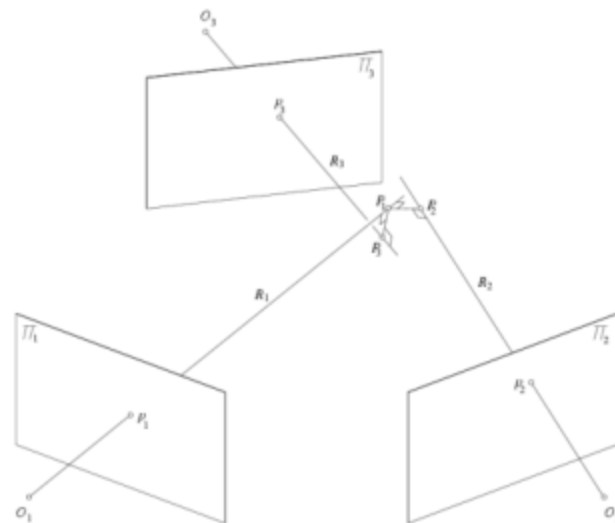
输入：图像之间相关点的坐标 $p_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})$

输出：每个 p_i 的对应点 X_i 的三维点坐标

相机各位置之间外参数 R_j, t_j

优化函数：最小化重投影误差

- 对相邻图像两两计算匹配特征点；一般先计算两张图片之间的匹配点，再不断的添加图像
- 使用计算好的匹配特征点计算 Fundamental Matrix 或 Essential Matrix
- 使用 F 矩阵或 E 矩阵得出两个视角之间的运动 R, t
- 使用光学三角法计算三维点坐标



李明磊@nuaa

16

5.3 光束法平差

- 影像匹配重建的三维空间点在反向投影时会出现偏差。
- 在测量过程中由于测量仪器精度不准以及人为因素等外在条件的影响，总是存在测量偏差。
- 观测值个数通常多于确定未知量的必要观测个数，存在多余观测。
- 多余观测间有差异，测量平差的目的就是消除这些偏差从而得出最可靠的结果并对测量的成果进行精度评价。

在二维像平面上的一个像点观测量 \mathbf{m}_{ij} 表示在第 j 幅影像上的第 i 个观测点，它关联第 j 幅影像的摄像机矩阵 \mathbf{P}_j ， $\mathbf{P}_j = \mathbf{K}[\mathbf{R}_j|\mathbf{t}_j]$ 。最终，光束法平差的目标函数是最小化同名点的重投影误差和，即：

目标方程：

$$\min_{\mathbf{P}_j, \mathbf{M}_i} \sum_i^n \sum_j^m \|\mathbf{m}_{ij} - f(\mathbf{P}_j, \mathbf{M}_i)\|$$

李明磊@nuaa

17

5.3 光束法平差

高斯-牛顿算法

在非线性最小二乘解法中，高斯牛顿（Gauss-Newton，GN）算法具有收敛速度快的特点

$$\hat{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}; \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^N \quad \text{参数向量为 } \mathbf{P} \in \mathbb{R}^M, \text{ 观测量表示为 } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

估计量的残差 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ ，初始参数估计值为 \mathbf{P}_0

解的最终目标是找到最小化 $\min E_{LS} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}$ 的参数估计 $\hat{\mathbf{P}}$

$$f(\mathbf{P}_0 + \boldsymbol{\delta}_P) \approx f(\mathbf{P}_0) + \mathbf{J} \boldsymbol{\delta}_P \quad \mathbf{J} = \partial f / \partial \mathbf{x} \text{ 表示 Jacobian 方程}$$

$$\|\mathbf{y} - f(\mathbf{P}_1)\| \approx \|\mathbf{y} - f(\mathbf{P}_0) - \mathbf{J} \boldsymbol{\delta}_P\| = \|\boldsymbol{\eta}_0 - \mathbf{J} \boldsymbol{\delta}_P\|$$

按照线性最小二乘（Linear least squares，LLS）求解方法，

法方程：

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\delta}_P = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\delta}_P = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta}$$

解出 $\boldsymbol{\delta}_P$ 作为下一次迭代的初始值
 $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} + \boldsymbol{\delta}_P$

- GN算法模型的解严重依赖于待求参数的初始值
- 初值位置不理想，将会出局部收敛或无法收敛

李明磊@nuaa

18

5.3 光束法平差

列文伯格-马奎特算法 Levenberg-Marguardt, LM

LM算法是一种带有阻尼项的改进GN法

向求导后得到的方程加入一个系数:

法方程: $\mathbf{J}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{p} + \lambda \delta \mathbf{p} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \delta \mathbf{p} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta}$

λ 为阻尼系数

- 当 λ 取较小时, LM步骤近似为GN解, $\delta \mathbf{p}^{LM} \approx \delta \mathbf{p}^{GN}$;
- 当 λ 取较大时, LM解近似为 $\delta \mathbf{p}^{LM} \approx (1/\lambda) \mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta}$, 由于 $\mathbf{J}^T \boldsymbol{\eta}$ 是向量 $\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}$ 的梯度函数, $\delta \mathbf{p}$ 的步进变化等价与梯度下降法。

如果可以获得观测量的不确定性的协方差矩阵 Σ

法方程: $(\mathbf{J}^T \Sigma^{-1} \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \delta \mathbf{p} = \mathbf{J}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\eta}$

李明磊@nuaa

20

5.3 光束法平差

稀疏光束法平差

像点的估计值 $\hat{\mathbf{m}}_{ij}$ 只依赖于第 i 幅影像的参数, 对于 $\forall i \neq k, \partial \mathbf{m}_{ij} / \partial \mathbf{a}_k = 0$;

$\hat{\mathbf{m}}_{ij}$ 对于除第 j 个点外的三维点不相关性, 因此 $\forall j \neq k$, 有 $\partial \mathbf{m}_{ij} / \partial \mathbf{b}_k = 0$

(\mathbf{a}_k 和 \mathbf{b}_k 分别是影像外参数和空间点坐标分开的独立表示)

定义 $A_{ij} = \partial \mathbf{m}_{ij} / \partial \mathbf{a}_k$, $B_{ij} = \partial \mathbf{m}_{ij} / \partial \mathbf{b}_k$ 。

LM算法中的待估计参数项的改正数可以分别表示为 $(\delta \mathbf{a}^T, \delta \mathbf{b}^T)^T$ 。

以 $m = 3$ 个像片, $n = 4$ 个空间点 举例

雅克比矩阵 \mathbf{J} 具有分块稀疏

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{12} & 0 \\ A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & B_{21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & B_{32} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 & B_{33} \\ 0 & 0 & 0 & A_{41} & B_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{42} & 0 & B_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & B_{43} \end{bmatrix}$$

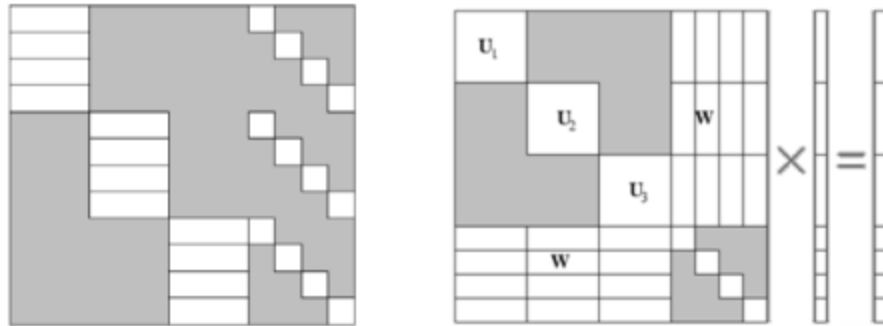
根据 \mathbf{J} 得来的法方程系数因此也存在分块稀疏特点

李明磊@nuaa

21

5.3 光束法平差

稀疏光束法平差



雅克比矩阵（左）和法方程（右）的稀疏矩阵图形式表示

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(a) \\ \xi(b) \end{bmatrix}$$

在每一次迭代中可以首先独立更新像片参数改正数 δ_a ，用Cholesky分解有效地求解这样的对称正定矩阵。然后，在每次迭代中将像片参数的更新结果作为固定值，回代计算空间点参数的更新改正值 δ_b 。

李明磊@nuaa

22

示例



古罗马斗兽场重建示例, 由2106张照片重建819242个三维点。（Ceci和Brandon）

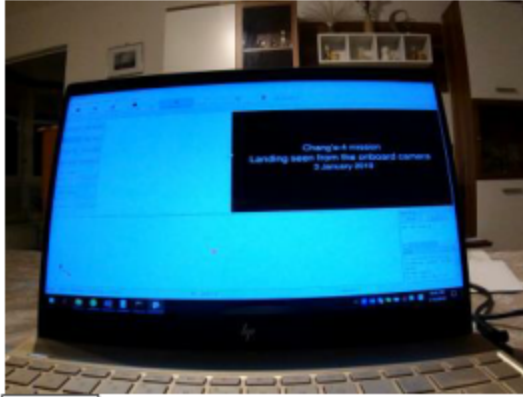


由无人机拍摄的南航电子信息工程学院办公楼影像重建效果

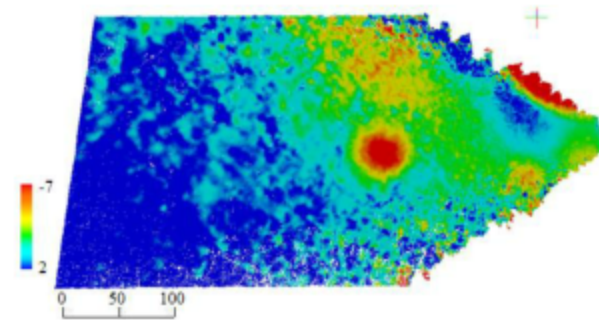
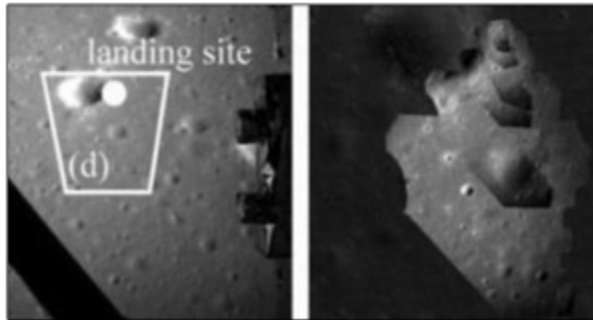
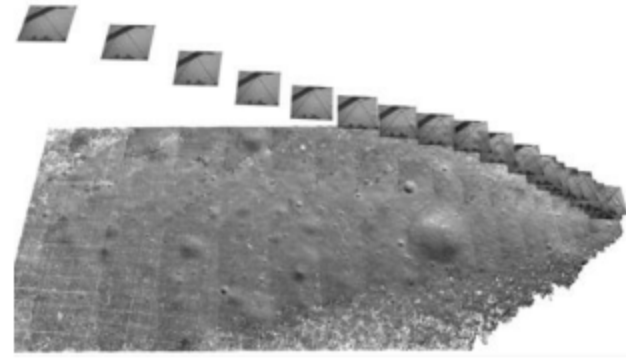
李明磊@nuaa

23

示例



播放



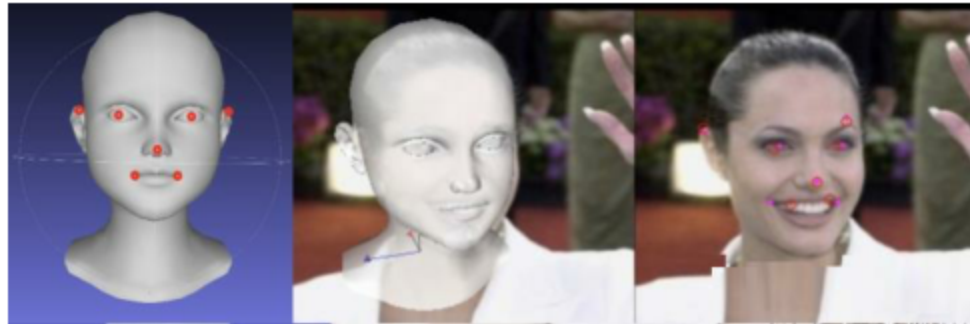
探月任务中基于降落影像的降落轨迹恢复与着陆区三维地形重建

李明磊@nuaa

24

补充

3D-2D: PnP问题 (已知三维点和对应二维点求解相机内外参数)



$$s \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = K[R, t] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{pmatrix} X$$

$$u = \frac{T_{11}X + T_{12}Y + T_{13}Z + T_{14}}{T_{31}X + T_{32}Y + T_{33}Z + T_{34}} = \frac{X^T r_1}{X^T r_3}$$

$$v = \frac{T_{21}X + T_{22}Y + T_{23}Z + T_{24}}{T_{31}X + T_{32}Y + T_{33}Z + T_{34}} = \frac{X^T r_2}{X^T r_3}$$

$$X^T r_1 - X^T r_3 u = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_1^T & 0 & -uX_1^T \\ 0 & X_1^T & -vX_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_N^T & 0 & -uX_N^T \\ 0 & X_N^T & -vX_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{求解得到 } r_1, r_2, r_3 \rightarrow T = K[R, t] = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix}$$

共需要至少6对3D-2D对应点

$T = [KR, Kt]$ 矩阵QR分解获取K,R,t

已知 $T([1, 1, 1]) = KR, T([1, 1, 1]) = Kt$
 其中, K 为内参矩阵, 是上三角矩阵;
 R 为旋转矩阵, 是正交矩阵

Step1: 求取 K 和 R
 令 $T_{ex} = T([1, 1, 1]) = KR$,
 则 $T_{ex}^{-1} = R^{-1}K^{-1}$,
 其中 R^{-1} 也是正交矩阵, K^{-1} 也是上三角矩阵。
 因此, 直接通过对 T_{ex}^{-1} 进行 QR 分解得到 R^{-1} 和 K^{-1} 。

Step2: 求取 t
 $t = R^{-1}T([1, 1, 1])$

李明磊@nuaa

25