

机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling



李明磊

南京航空航天大学 电子信息工程学院

E-mail: minglei_li@nuaa.edu.cn

1

5. 由运动恢复结构SfM

5.1 对极几何

基础矩阵与本质矩阵

5.2 二视图重建

5.3 光束法平差

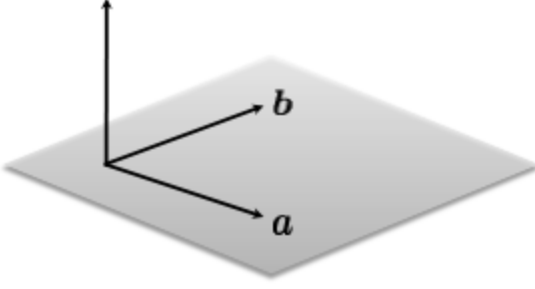


复习线性代数的“叉积”

Vector (cross) product

takes two vectors and returns a vector perpendicular to both

$c = a \times b$



$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

cross product of two vectors in the same direction is zero vector

$c \cdot a = 0$ $c \cdot b = 0$

$a \times a = 0$
remember this!!!

Dot product of two orthogonal vectors is (scalar) zero



复习线性代数的“叉积”

cross product $a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

Can also be written as a matrix multiplication

$$a \times b = [a]_{\times} b = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Skew symmetric
反对称矩阵

主对角线上的元素全为零，而位于主对角线两侧对称的元素反号。 $A^T = -A$

- 奇数阶反对称矩阵的行列式必为0。
- 实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数。

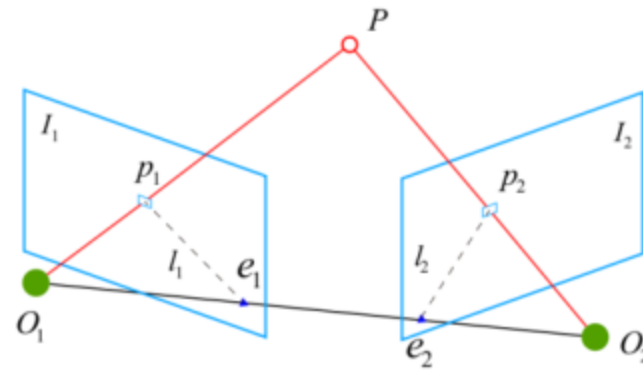
5.1 对极几何

对极几何 (Epipolar Geometry)

描述的是**两幅**视图之间的**内在射影几何关系**，与外部场景无关，只依赖于摄像机内参数和这两幅视图之间的相对姿态



Two-view geometry



要寻找两幅图像之间的对应关系，最直接的方法就是逐点匹配，如果增加匹配搜索的**约束条件**，搜索的范围可以减小。

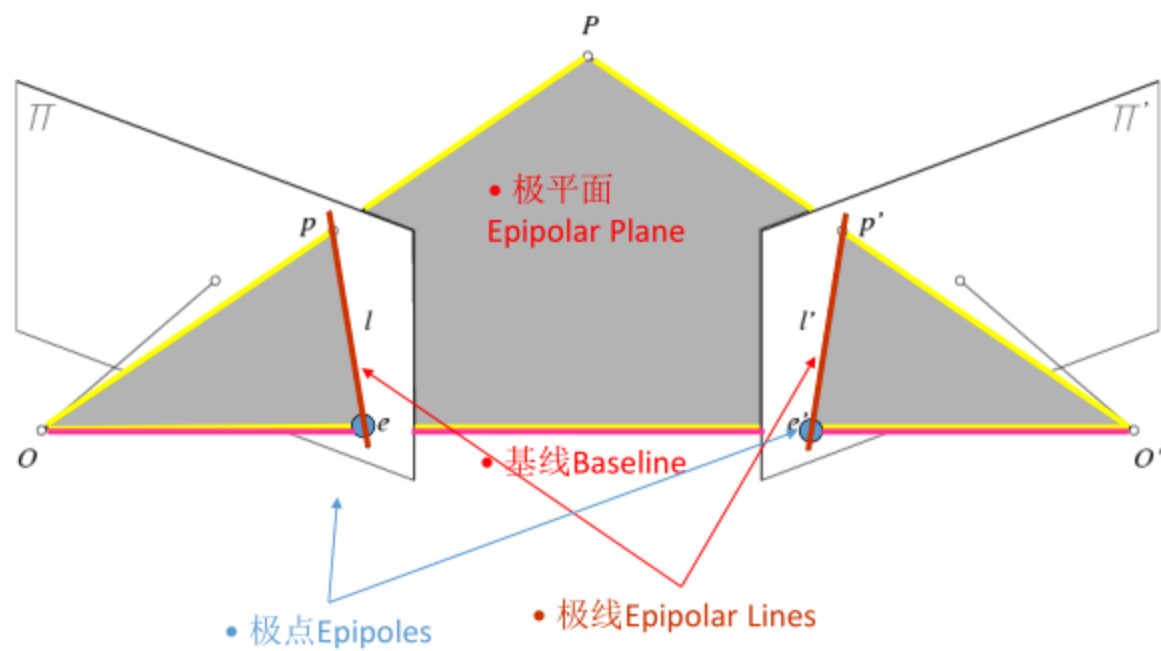
对极约束(Epipolar constraint)

李明磊@nuaa

5

5.1 对极几何

对极几何 (Epipolar Geometry)

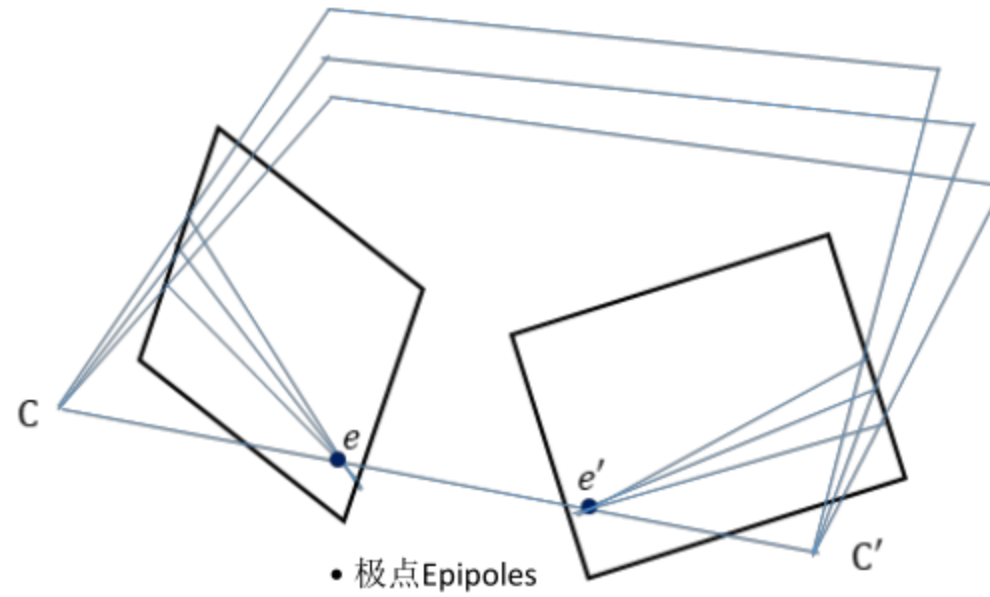


李明磊@nuaa

6

5.1 对极几何

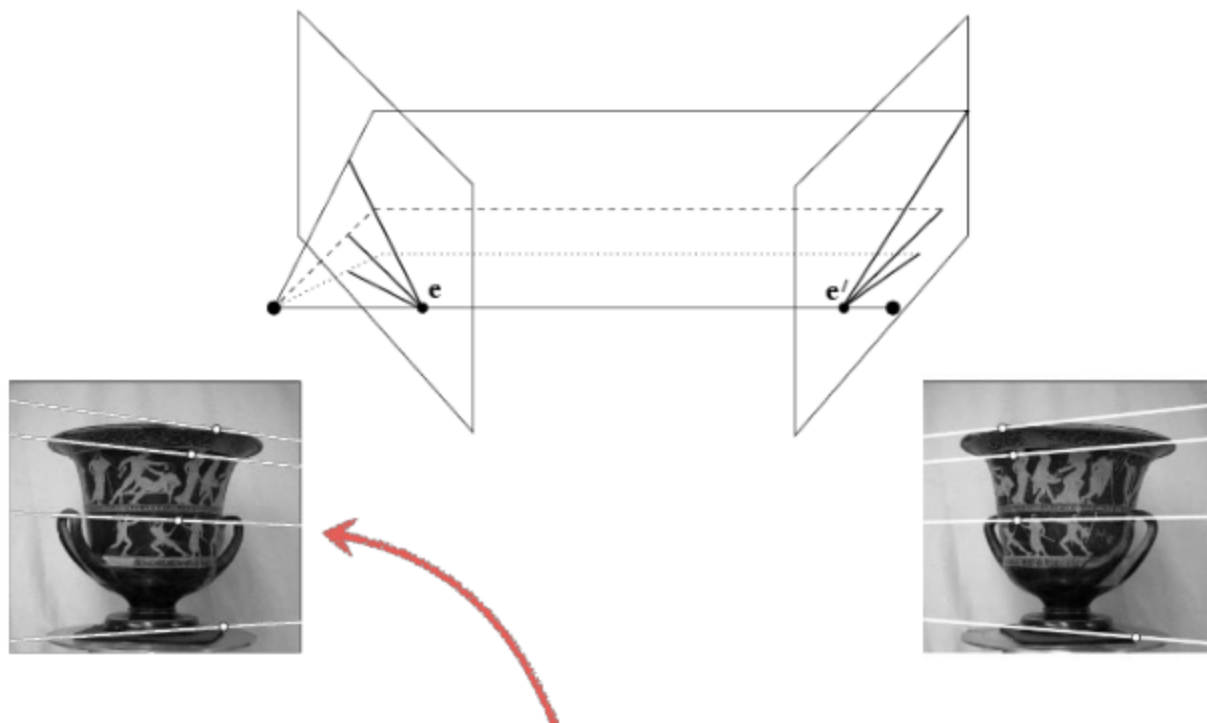
对极几何 (Epipolar Geometry)



李明磊@nuaa

7

5.1 对极几何

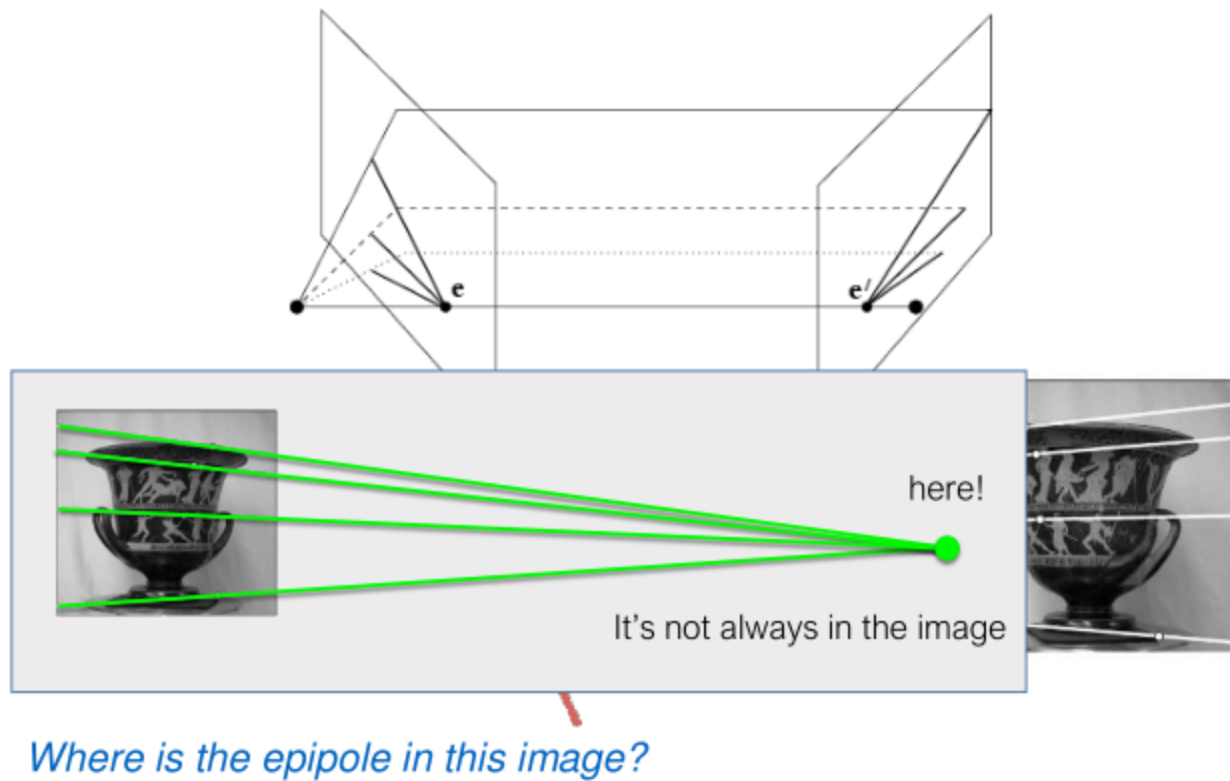


Where is the epipole in this image?

李明磊@nuaa

8

5.1 对极几何

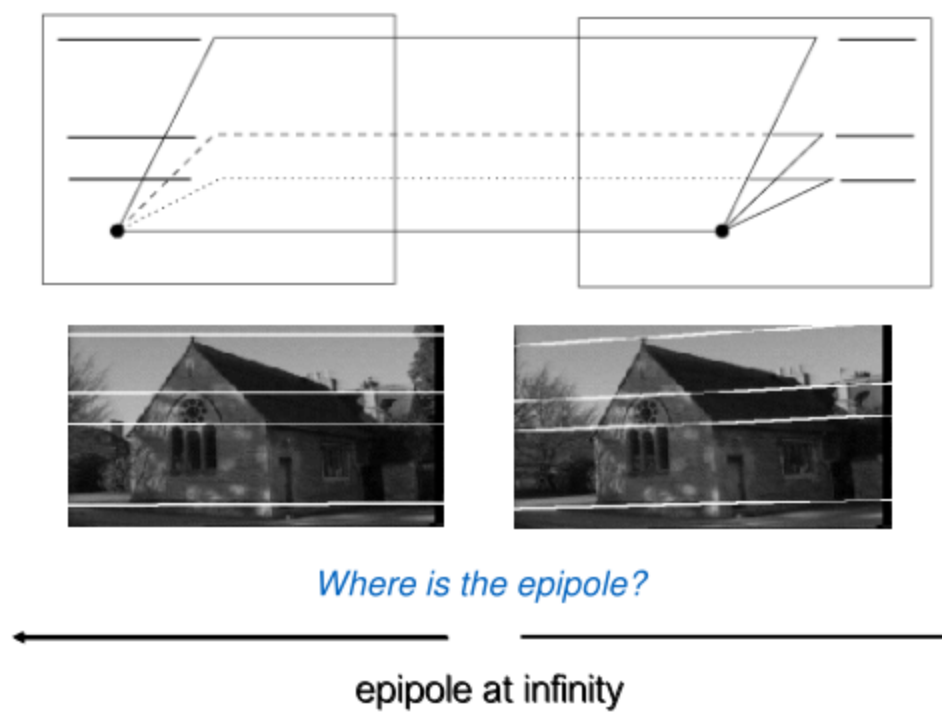


李明磊@nuaa

9

5.1 对极几何

Parallel cameras

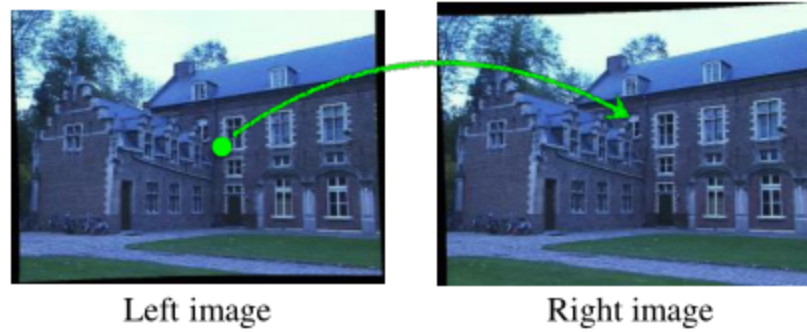


李明磊@nuaa

10

5.1 对极几何

Task: Match point in left image to point in right image



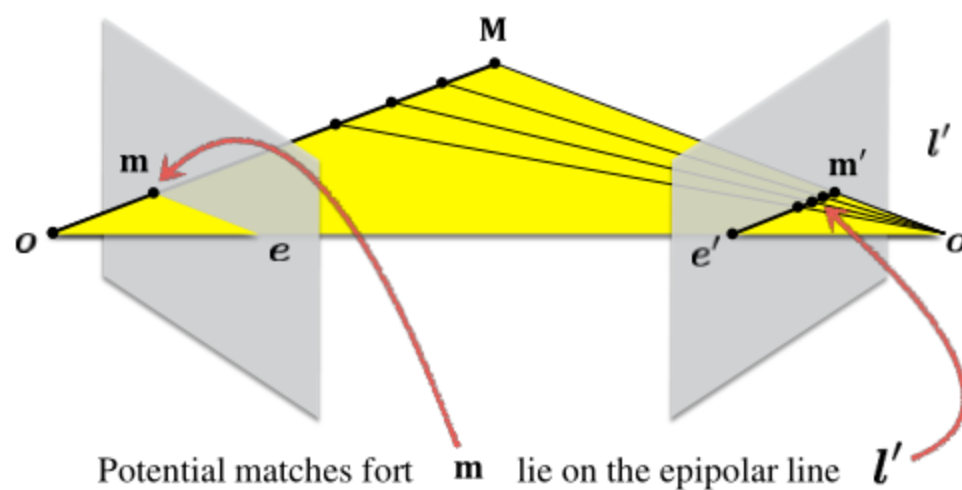
How would you do it?

对极约束(Epipolar constraint)

The **epipolar constraint** is an important concept for stereo vision

5.1 对极几何

Epipolar Constraint

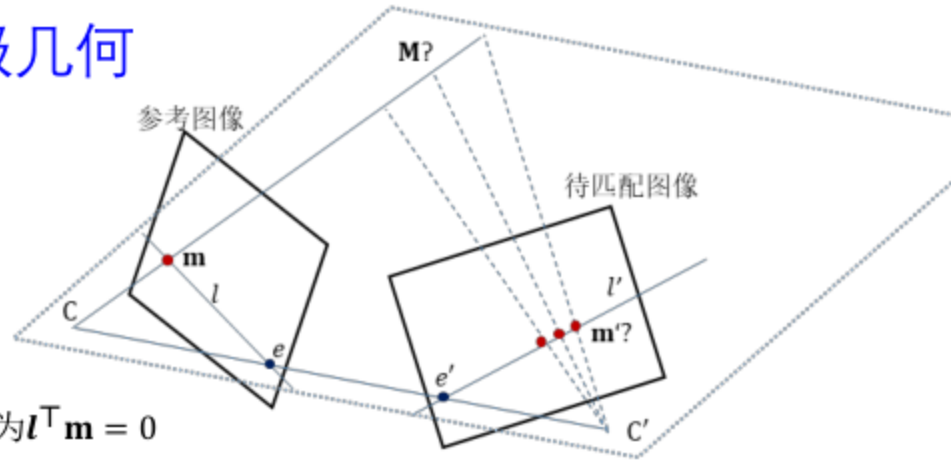


It is a projective mapping from point \mathbf{m} to line l' , which is represented by a **matrix F** , the **fundamental matrix**.

5.1 对极几何

1, 基础矩阵 Fundamental matrix

(Faugeras and Luong, 1992)



点 \mathbf{m} 在线 \mathbf{l} 上可以表示为 $\mathbf{l}^T \mathbf{m} = 0$

线 \mathbf{l}' 穿过点 \mathbf{m}' 和极点 $\mathbf{e}' \Rightarrow \mathbf{l}' \sim [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{m}'$

回顾二维射影变换 $\mathbf{m}' \sim \mathbf{H} \mathbf{m}$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}' &\sim [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H} \mathbf{m} & \mathbf{m}'^T \mathbf{l}' &= 0 \\ \mathbf{l}' &\sim \mathbf{F} \mathbf{m} & \Rightarrow & \mathbf{m}'^T \mathbf{F} \mathbf{m} = 0 \end{aligned}$$

\mathbf{F} 叫做基础矩阵

3×3

\mathbf{F} 自由度?

7 DoF

- 无尺度度量约束
- 行列式为零约束

5.1 对极几何

1, 基础矩阵 Fundamental matrix

基础矩阵 \mathbf{F} 有一些重要的特性:

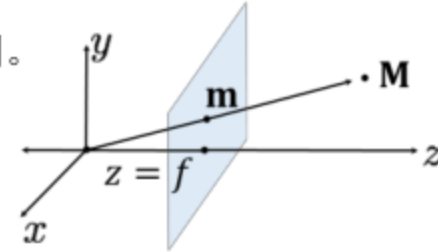
- 如果 \mathbf{F} 是一对摄像机矩阵 $(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ 的基础矩阵, 则 \mathbf{F}^T 是按相反顺序对 $(\mathbf{P}', \mathbf{P})$ 的基础矩阵。
- 左图任意点 \mathbf{m} , 对应右图上的极线为 $\mathbf{l}' = \mathbf{F} \mathbf{m}$ 。类似地, $\mathbf{l} = \mathbf{F}^T \mathbf{m}'$ 表示与右影像中的 \mathbf{m}' 对应于左图的极线。
- 对于任何点 \mathbf{m} (\mathbf{e} 除外), 极线 $\mathbf{l}' = \mathbf{F} \mathbf{m}$ 包含第二幅影像中的极点 \mathbf{e}' 。因此, 对于所有点 \mathbf{m}_i , $\mathbf{e}'^T (\mathbf{F} \mathbf{m}_i) = 0$, 总有 $(\mathbf{e}'^T \mathbf{F}) \mathbf{m}_i = 0$, 因此 $\mathbf{e}'^T \mathbf{F} = 0$, 即 \mathbf{e}' 是 \mathbf{F} 的左零向量。类似地, $\mathbf{F} \mathbf{e} = 0$, 即 \mathbf{e} 是 \mathbf{F} 的右零向量。
- \mathbf{F} 是不可逆矩阵。

5.1 对极几何

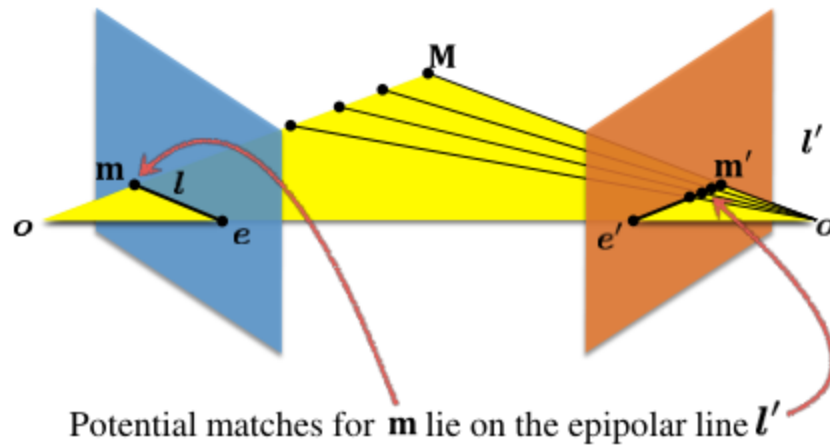
2, 本质矩阵 (Essential Matrix)

本质矩阵 \mathbf{E} (Essential matrix) 是由摄像机的外方位元素参数确定的, 与摄像机内参数无关。

\mathbf{E} 就是在归一化影像空间坐标条件下的 \mathbf{F} 的特例。



Recall: Epipolar constraint

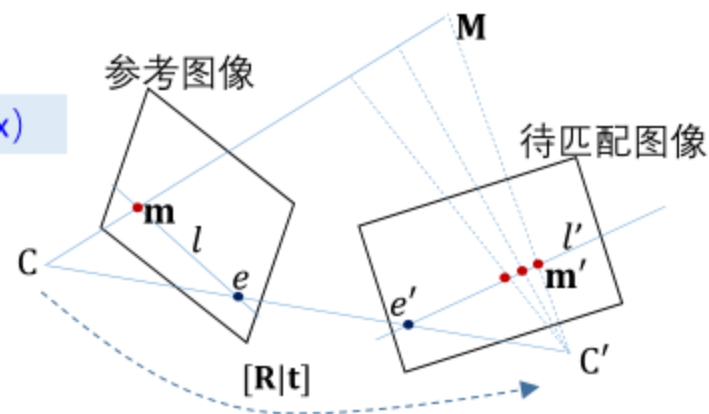


李明磊@nuua

15

5.1 对极几何

2, 本质矩阵 (Essential Matrix)



设三维点 \mathbf{M} 在左像空间坐标系中的单位深度归一化的向量表示为 \mathbf{M}^0 , 在右像空间坐标系中的归一化向量表示为 \mathbf{M}^1 。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \lambda_0 \mathbf{M}^0 \\ \overrightarrow{C'M} &= \lambda_1 \mathbf{M}^1 \\ \lambda \mathbf{M}^1 &= \mathbf{R} \mathbf{M}^0 + \mathbf{t}\end{aligned}\quad \begin{array}{l} \text{不考虑尺度度量} \\ \mathbf{M}^1 \sim \mathbf{R} \mathbf{M}^0 + \mathbf{t} \end{array}$$

在等式两边分别先左乘一个 \mathbf{t} 的叉积, 再左乘一个 \mathbf{M}^1 的点积, 可以得到

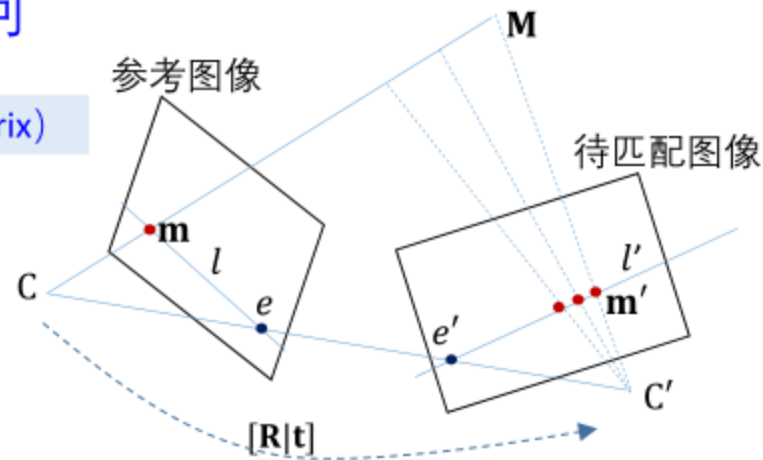
$$\begin{aligned}\lambda (\mathbf{M}^1)^\top (\mathbf{t} \times \mathbf{M}^1) &= (\mathbf{M}^1)^\top \mathbf{t} \times (\mathbf{R} \mathbf{M}^0 + \mathbf{t}) \\ 0 &= (\mathbf{M}^1)^\top \mathbf{t} \times \mathbf{R} \mathbf{M}^0\end{aligned}$$

李明磊@nuua

16

5.1 对极几何

2, 本质矩阵 (Essential Matrix)



$$(\mathbf{M}^1)^T (\mathbf{t} \times \mathbf{M}^1) = (\mathbf{M}^1)^T \mathbf{t} \times (\mathbf{R} \mathbf{M}^0 + \mathbf{t})$$

$$0 = (\mathbf{M}^1)^T \mathbf{t} \times \mathbf{R} \mathbf{M}^0$$

这里的 \mathbf{M}^0 和 \mathbf{M}^1 不是像点的像素坐标，而是单位长度的像空间坐标系下的坐标表示。

$$(\mathbf{M}^1)^T [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{M}^0 = 0$$

$$(\mathbf{M}^1)^T \mathbf{E} \mathbf{M}^0 = 0$$

本质矩阵 $\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$

$$[\mathbf{t}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$ 表示本质矩阵，本质矩阵包含了两幅影像的相对位置姿态转换关系，它是 3×3 的矩阵，具有旋转和平移信息。

李明磊@nuaa

17

5.1 对极几何

2, 本质矩阵 (Essential Matrix)

$$(\mathbf{M}^1)^T \mathbf{E} \mathbf{M}^0 = 0$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R}$$

3×3

本质矩阵 \mathbf{E} 有一些重要的特性：

- \mathbf{E} Matrix encodes epipolar geometry
- $\mathbf{E} \mathbf{M}^0$ is the epipolar line associated with \mathbf{M}^0
- $\mathbf{E}^T \mathbf{M}^1$ is the epipolar line associated with \mathbf{M}^1
- $\mathbf{E} \mathbf{e}' = 0$ and $\mathbf{E}^T \mathbf{e} = 0$.
- \mathbf{E} is singular.
- \mathbf{E} has two equal non-zero singular values (Huang and Faugeras, 1989).

\mathbf{E} 自由度？



\mathbf{R} dof=3

\mathbf{t} dof =3

尺度等价性约束

李明磊@nuaa

18

5.1 对极几何

F vs E

本质矩阵 \mathbf{E} 是面向像空间坐标系（摄像机坐标系），不包括摄像机的内参信息。但是研究像素点在另一个视图上的对极线，需要用摄像机的内参信息将摄像机坐标系和像平面坐标系联系起来。

设 \mathbf{K}_0 和 \mathbf{K}_1 分别为两个摄像机内参数矩阵，归一化的摄像机像空间坐标到像平面像素坐标表示可以通过 $\mathbf{m}_0 = \mathbf{K}_0 \mathbf{M}^0$ 计算。

基础矩阵 \mathbf{F} 中编码了两幅影像的对极几何关系，可以推导 \mathbf{E} 和基础矩阵 \mathbf{F} 的关联

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}_1 \mathbf{M}^1)^\top \mathbf{F} (\mathbf{K}_0 \mathbf{M}^0) &= (\mathbf{M}^1)^\top \mathbf{E} \mathbf{M}^0 = 0 \\(\mathbf{K}_1 \mathbf{M}^1)^\top \mathbf{F} \mathbf{K}_0 &= (\mathbf{M}^1)^\top \mathbf{E} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}_1^{-\top} \mathbf{E} \mathbf{K}_0^{-1} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{K}_1^\top \mathbf{F} \mathbf{K}_0\end{aligned}$$

本质矩阵 \mathbf{E} 作用在成像坐标上
基础矩阵 \mathbf{F} 作用在像素坐标上

Breaking down the fundamental matrix

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{K}_1^{-\top} \mathbf{E} \mathbf{K}_0^{-1} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}_1^{-\top} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{K}_0^{-1}\end{aligned}$$

包含了内、外参数

5.1 对极几何

How to solve \mathbf{F} ?

$$\mathbf{m}'^\top \mathbf{F} \mathbf{m} = 0$$

$$(u, v, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

5.1 对极几何

8点法求基础矩阵F

The Eight-Point Algorithm
(Longuet-Higgins. 1981)

$$(u, v, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (uu', uv', u, vv', vv', v, u', v', 1) \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1u'_1 & u_1v'_1 & u_1 & v_1u'_1 & v_1v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 \\ u_2u'_2 & u_2v'_2 & u_2 & v_2u'_2 & v_2v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 \\ u_3u'_3 & u_3v'_3 & u_3 & v_3u'_3 & v_3v'_3 & v_3 & u'_3 & v'_3 \\ u_4u'_4 & u_4v'_4 & u_4 & v_4u'_4 & v_4v'_4 & v_4 & u'_4 & v'_4 \\ u_5u'_5 & u_5v'_5 & u_5 & v_5u'_5 & v_5v'_5 & v_5 & u'_5 & v'_5 \\ u_6u'_6 & u_6v'_6 & u_6 & v_6u'_6 & v_6v'_6 & v_6 & u'_6 & v'_6 \\ u_7u'_7 & u_7v'_7 & u_7 & v_7u'_7 & v_7v'_7 & v_7 & u'_7 & v'_7 \\ u_8u'_8 & u_8v'_8 & u_8 & v_8u'_8 & v_8v'_8 & v_8 & u'_8 & v'_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{0} \\ \|\mathbf{X}\| = 1 \end{cases}$$

We need at least 8 points

李明磊@nuua

21

SVD Singular Value Decomposition

求解一个齐次线性系统 a homogeneous linear system $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$

$\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 是一个无意义的解

如果存在解 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ ，那么 $k\mathbf{X}$ 都是有效的解。

为了求解，添加一个限制条件 $\|\mathbf{X}\| = 1$ 。

问题转化为求解：

$$\min \|\mathbf{AX}\| \text{ subject to } \|\mathbf{X}\| = 1$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$$

\mathbf{U} 只起一个旋转作用，最小化 $\|\mathbf{AX}\|$ 等价于

$$\min \|\mathbf{AX}\| = \min \|\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T\mathbf{X}\|$$

$$\text{令 } \mathbf{Y} = \mathbf{V}^T\mathbf{X}$$

\mathbf{V} 也只起一个旋转作用

问题转化为求解： $\min \|\mathbf{\Sigma}\mathbf{Y}\| \text{ subject to } \|\mathbf{Y}\| = 1$

$\mathbf{Y} = (0, 0, \dots, 1)^T$ 时最小，因为 $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{Y}$ 所以 $\mathbf{X} = \mathbf{V}_n$

即， \mathbf{X} 等于矩阵 \mathbf{V} 的最后一列时，获得最小值

李明磊@nuua

23

5.1 对极几何

8点法求基础矩阵F

如果系数矩阵 \mathbf{A} 的秩是8，则 \mathbf{f} 存在确定（非零）解，
 $\mathbf{Af} = 0$ 可以直接用线性算法计算。

很明显，当有更多的匹配点对可用时，可以使用冗余观测来最小化噪声的影响。八点算法的线性方程组可以很容易地扩展到更多的点。在这种情况下，每一对匹配点能建立一行方程，系数矩阵 \mathbf{A} 的行数将大得多。

此时，系数矩阵 \mathbf{A} 的秩可能是9，因为系数矩阵 \mathbf{A} 是 $n \times 9$ 的矩阵。在这种情况下，最后一个奇异值不会完全等于零。

多点方程组能够容易用奇异值分解 \mathbf{A} （SVD）求解 \mathbf{f} 。

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$$

\mathbf{V} 的最后一列是 \mathbf{f} 的解。

当要求 σ_9 被约束等于零时， \mathbf{V} 的最后一列是正确的解（需要保证8个方程是线性无关的，这相当于保证其它的奇异值都是非零的）。

5.1 对极几何

8点法求基础矩阵F

$$\mathbf{Af} = 0$$

使用SVD分解方法解得基本矩阵后，要增加一个奇异性约束。

最简便的方法就是修正上述算法中求得的矩阵 \mathbf{F} 。

设最终的解为 \mathbf{F}' ，在 $\det \mathbf{F}' = 0$ 条件下，最终的解为求得Frobenius范数（二范数） $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}'\|$ 最小的 \mathbf{F}' 。

其求解过程还是使用了SVD分解：若 $\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ ，此时的对角矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}(r, s, t)$ ，满足 $r \geq s \geq t$ ，用0代替 t ，则 $\mathbf{F}' = \mathbf{U}\text{diag}(r, s, 0)\mathbf{V}^T$ 是最小化范数 $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}'\|$ 的解，即最终的解。

所以八点算法求解二视图的基础矩阵由两个步骤组成：

- （1）建立线性方程 $\mathbf{Af} = 0$ ，由系数矩阵 \mathbf{A} 的最小奇异值对应的奇异向量 \mathbf{f} 求出初始线性解 \mathbf{F} 。
- （2）根据奇异性约束，使Frobenius范数 $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}'\|$ 取得最小值的 \mathbf{F}' 作为是最终的解。

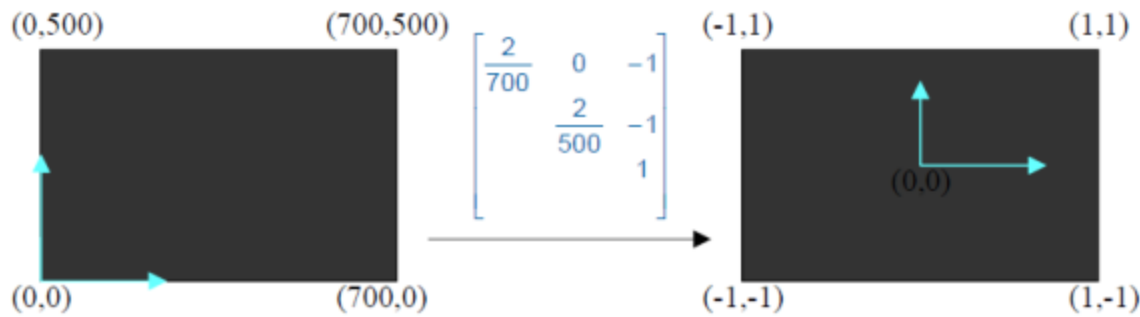
5.1 对极几何

原8点法的问题： $Af = 0$ 中的系数矩阵Highly un-balanced，SVD 会有问题。

The Normalized 8-Point Algorithm (Hartley, 1995)

调整坐标中心到图像中心，使每个点到坐标原点的均方根距离等于 $\sqrt{2}$ 。
归一化八点算法使用了各向同性，使矩阵A的所有元素具有相同的数量级。

- 具体实现过程为：
- 1. 求取所有特征点的像素坐标的平均值（中心点）；
 - 2. 所有点的坐标值减去平均值；
 - 3. 求各点到所有点的平均值的平均欧氏距离；
 - 4. 缩放使各点到中心点的平均距离为 $\sqrt{2}$ 。



5.1 对极几何

基础矩阵中有 9 个元素，由于尺度是任意的，所以只需要 8 个方程。
因为算法中需要 8 个对应点来计算矩阵 F，所以该算法叫做八点法。

同理，也存在着对于本质矩阵的八点法。
然而，考虑到F有7个自由度，E有5个自由度，
只用7个点来计算F，用5个点来计算E，分别称为七点法和五点法。

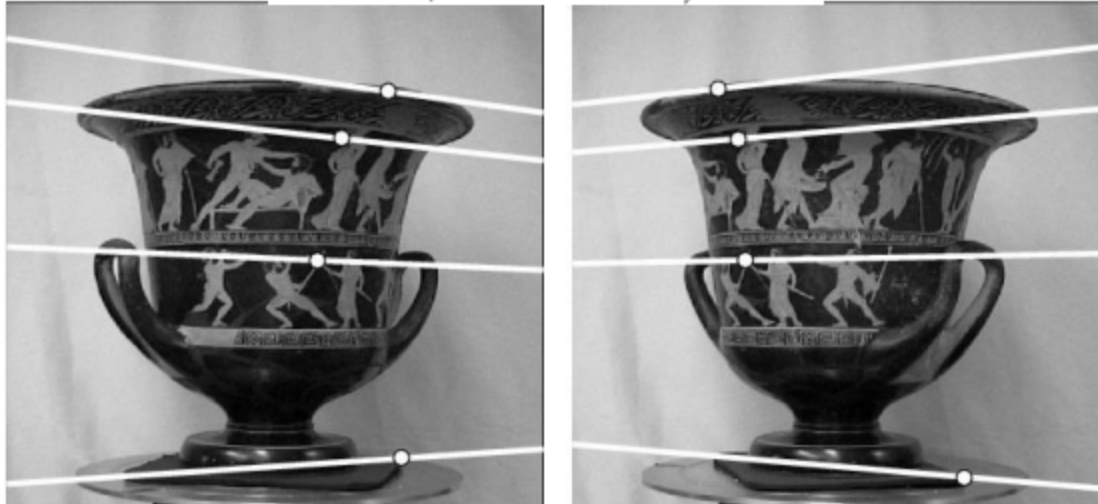
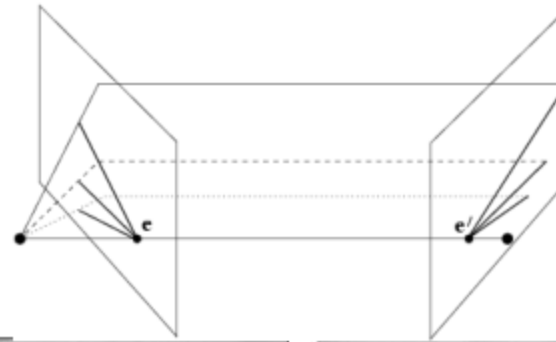
随机抽样一致算法（RANDOM SAmple Consensus,RANSAC），采用迭代的方式从一组包含离群的被观测数据中估算出数学模型的参数，是有别于最小二乘法的另一种拟合算法。

该算法最早由 Fischler和 Bolles 于 1981 年提出。
RANSAC 算法假设数据中包含正确数据和异常数据（或称为噪声）。
正确数据记为内点（inliers），异常数据记为外点（outliers）。
同时 RANSAC 也假设，给定一组正确的数据，存在可以计算出符合这些数据的模型参数的方法。

RANSAC算法核心思想就是随机性和假设性，随机性是根据正确数据出现概率去随机选取抽样数据，根据大数定律，随机性模拟可以近似得到正确结果。假设性是假设选取出的抽样数据都是正确数据，然后用这些正确数据通过问题满足的模型，去计算其他点，然后对这次结果进行一个评分。



Example: converging cameras



courtesy of Andrew Zisserman

28



Example



restrict search range to neighborhood of epipolar line
(e.g. ± 1.5 pixels)
relax disparity restriction (along epipolar line)

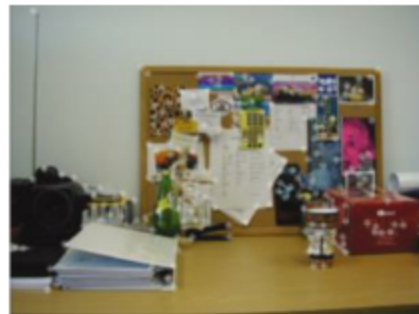
29

Example

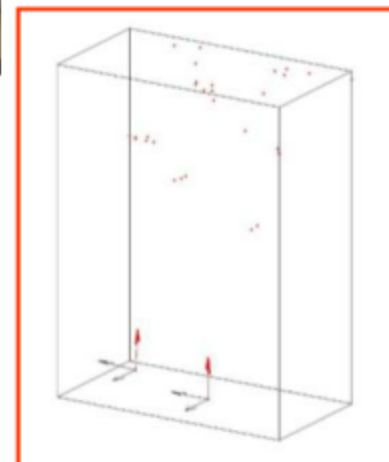
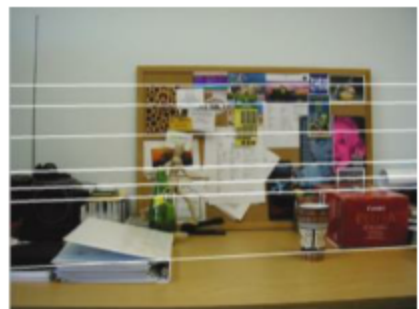


30

Example



Point Feature Matching



Camera Pose & Sparse Structure Recovery

31