

机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling



李明磊

南京航空航天大学电子信息工程学院

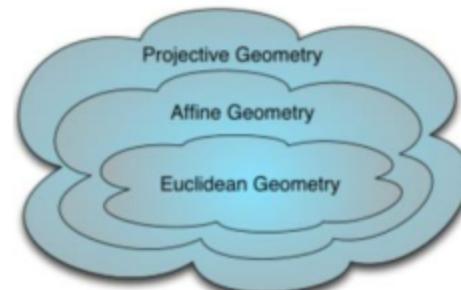
E-mail: minglei_li@nuaa.edu.cn

1



2. 图像处理的基础

- 2.1 图像的感知与获取
- 2.2 坐标转换基础
- 2.3 透视投影的相机模型
- 2.4 射影几何基础



李明磊@nuaa

2

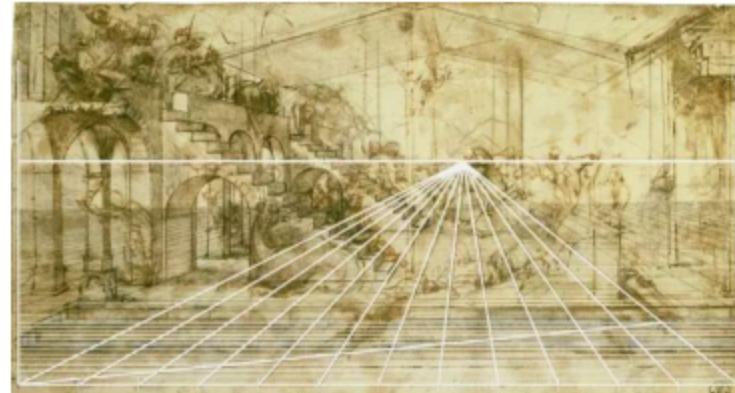


• 2.4 射影几何基础

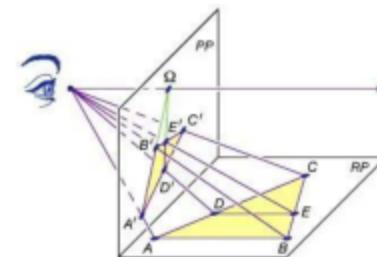
射影几何的最早起源是绘画。

射影几何的起源可以回溯到欧洲文艺复兴时期，伴随着透视绘画的兴起刺激，人们对数学透视法展开了探索研究。在十九世纪时，德国数学家施陶特的研究将射影几何学的概念脱离了长度度量，逐渐揭示了射影几何和欧氏几何的关联和区别。在逻辑上，射影几何要先于欧氏几何，射影几何是更为基本的一种概念。学者们利用综合法研究射影几何，取得了令人瞩目的丰硕成果，并促使得射影几何发展为一门独立的学科。

两条铁轨本来是互相平行的
通过透视，它们越到远处越是靠拢
最后在无穷远的地方相交于一点



15世纪，艺术理论家阿尔贝蒂用《论绘画》(1436)、《论建筑》(1450)和《论雕塑》(1464)三部著作奠定了文艺复兴美术理论的基础。在《论绘画》中，阿尔贝蒂提出了自己的透视建构方法，用以在二维平面上形象地体现三维物体，即单点线性透视。



李明磊@nuaa

3



2.4 射影几何基础

为什么要使用射影几何？

- 为表示点、线和平面等几何图元提供统一的框架
 - 对 n 维欧氏空间加入无穷远元素，并对有限元素和无穷远元素不加区分，则他们共同构成 n 维射影空间。
- 用一种简易的方式表示无限远的点、线和平面的运算
 - 生成许多几何操作的线性表示，如构造、交集和变换
 - 为估计转换参数提供了一个线性框架
 - 通常用于获取图像定向参数的近似值，特别是对于未标定的摄像机

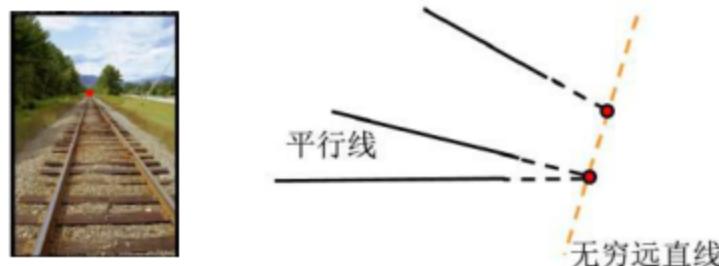
n 维射影空间中的点 x 的坐标表示为 $x = [x_1, \dots, x_{n+1}]^T$ ($n+1$ 维)
这些坐标中至少有一项是非零的，这些坐标被称为齐次坐标。
通常当点的坐标的 $x_{n+1} = 0$ 时，该点被认为是无穷远处的点。

李明磊@nuaa

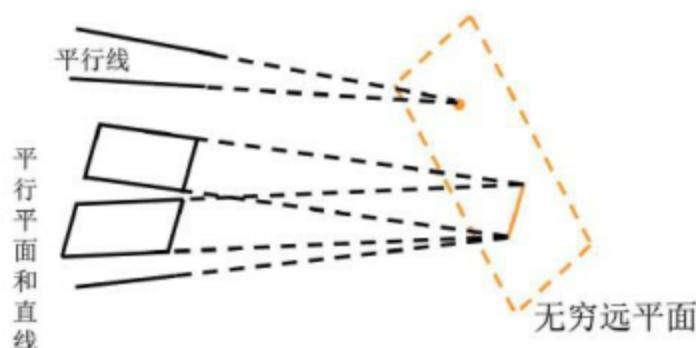
4

2.4 射影几何基础

二维射影空间：它是一个射影平面，由欧氏平面和它的无穷远直线构成



三维射影空间：由所在的三维空间和无穷远平面构成



https://blog.csdn.net/mounty_fsc/article/details/51496640

5

2.4 射影几何基础

射影变换是射影空间之间的映射关系，具有下列不变性：

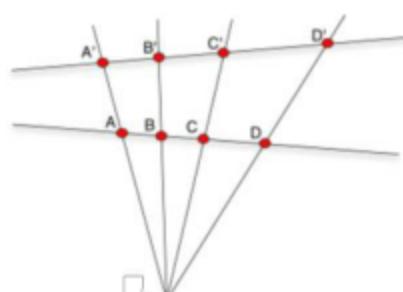
1. 共点不变性：两条直线经过同一个点，变换前后不变。
2. 共线不变性：两个点在同一条直线上，变换前后不变。
3. 交比（交叉比）不变性：在一个图形中，S为中心点，从S画出四条射线组成一个固定的线束。另一条直线与线束分别交于A、B、C、D。
 $AB/CD : AD/BC$ 或 $AB \cdot CD / BC \cdot AD$ 叫做这个线束上的交比。

交比的定义：



设ABCD是直线l上的四点。定义 $(A,C;B,D)$ 为点列ACBD的交比，值为：

$$(A,C;B,D) = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot CB}$$



A, B, C, D and A', B', C', D' are related by a projective transformation, hence their cross-ratios are equal.

李明磊@nuaa

6

2.4 射影几何基础

n 维射影空间中的点 \mathbf{x} 的坐标表示为 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{n+1}]^T$ ($n+1$ 维)

这些坐标中至少有一项是非零的，这些坐标被称为**齐次坐标**。

通常当点的坐标的 $x_{n+1} = 0$ 时，该点被认为是无穷远处的点。

射影变换是射影空间之间的映射关系，具有下列不变性：

1. 共点不变性：两条直线经过同一个点
2. 共线不变性：两个点在同一条直线上
3. 交比（交叉比）不变性：在一个图形中，S为中心点，从S画出四条射线组成一个固定的线束。另一条直线与线束分别交于A、B、C、D。AB/CD：AD/BC 或 AB·CD/BC·AD 叫做这个线束上的交比。

一个从 \mathbb{R}^m 空间到 \mathbb{R}^n 空间的射影变换在数学上可以用一个 $(n+1) \times (m+1)$ 的矩阵 \mathbf{H} 表示，点之间的变换都是线性变换： $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \sim \mathbf{H}\mathbf{x}$ 。

注意带有非零标量 λ 的 \mathbf{H} 和 $\lambda\mathbf{H}$ 是等价的射影变换。

李明磊@nuaa

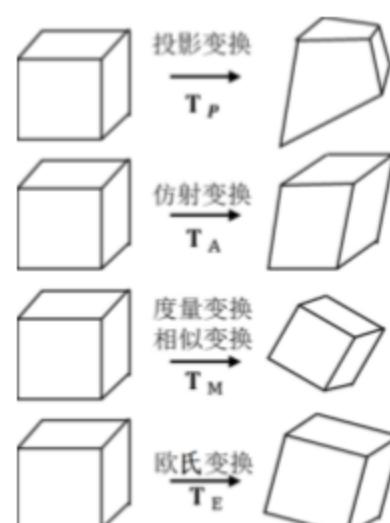
7

2.4 射影几何基础

射影几何（Projective geometry）是研究图形的射影性质，即它们经过射影变换后，依然保持不变的图形性质的几何学分支学科。也叫投影几何学，在经典几何学中，射影几何处于一个特殊的地位，通过它可以把其他一些几何学联系起来。

射影几何具有数学形式简单的特性，在许多光学成像系统的研究中被使用。

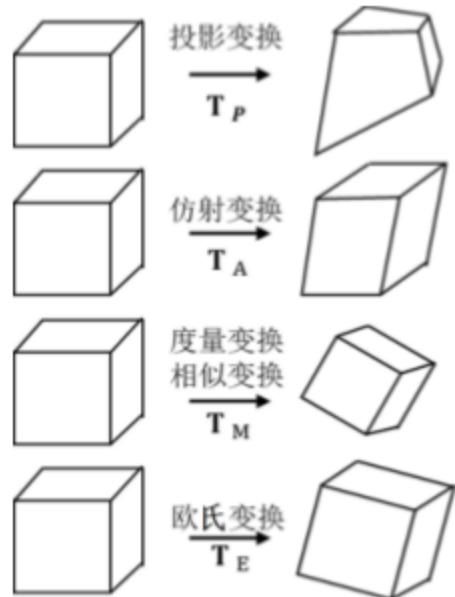
几何元素在**射影层**、**仿射层**、**度量层**、**欧几里德层**中的成层问题是学习视觉三维重建的一个重要的学习基础。



李明磊@nuaa

8

2.4 射影几何基础



- 射影变换保持直线-直线与点的接合性以及直线上点列的交比不变
- 仿射变换除具有以上不变性外，还保持直线与直线的平行性、直线上点列的简比不变
- 欧氏变换除具有仿射变换的不变性外，还保持两条相交直线的夹角不变，任意两点的距离不变

2.4 射影几何基础

二维射影空间

2.4 射影几何基础

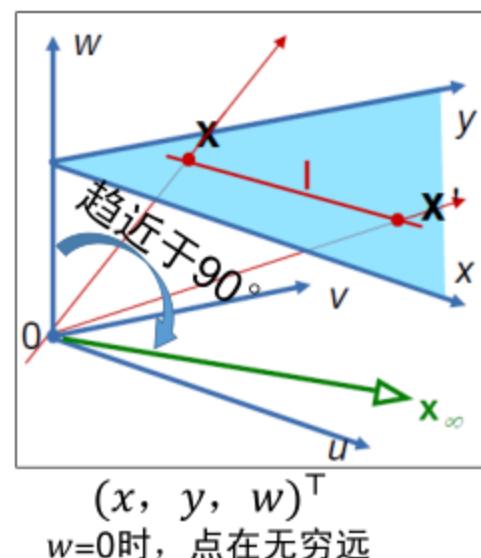
二维射影空间

二维点和线的齐次表示

$$ax + by + c = 0 \rightarrow [a \ b \ c][x \ y \ 1]^\top = 0$$

某点 m 在某线 l 上的充要条件:

$$l^\top m = 0 \quad m^\top l = 0$$



在射影空间中的线与点的作用可以互换, 这也就是射影几何中的对偶原理

注意: 尺度 (scale) 对于关联关系并不重要

$$(a, b, c)^\top \sim k(a, b, c)^\top, \forall k \neq 0 \quad (x, y, 1)^\top \sim k(x, y, 1)^\top, \forall k \neq 0$$

向量的等价类, 任何向量都是有代表性的

齐次坐标 (x_1, x_2, x_3) 的自由度是 2.

李明磊@nuaa

11

2.4 射影几何基础

- 两条直线的交点 $\mathbf{m} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$
- 连接两点的直线 $\mathbf{l} \sim [\mathbf{m}_1]_\times \mathbf{m}_2$

$$\begin{aligned} \text{两条平行直线} \quad \mathbf{l} &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^\top \\ \mathbf{l}' &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}')^\top \end{aligned}$$

试算平行线的交点

$$\mathbf{l} \times \mathbf{l}' = (b, -a, 0)^\top$$

所以, 无穷远点 $(x, y, 0)^\top$

试根据 $\mathbf{l} \sim [\mathbf{m}_1]_\times \mathbf{m}_2$ 推导无穷远直线...

所以, 无穷直线 $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^\top$

叉乘转换成矩阵乘法

$$[\mathbf{m}_1]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -w_1 & y_1 \\ w_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(b, -a)$ 是直线的切向向量
 (a, b) 是直线的法方向

$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \times (v_x, v_y, v_z) = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$ 转换为矩阵乘法(列向量表示形式): $\vec{u} \times \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \times (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$ 转换为矩阵乘法(行向量表示形式): $\vec{u} \times \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \times (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$
--

李明磊@nuaa

12

2.4 射影几何基础

一个从 \mathbb{R}^m 空间到 \mathbb{R}^n 空间的射影变换在数学上可以用一个 $(n+1) \times (m+1)$ 的 **H** 矩阵表示，点之间的变换都是线性变换： $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \sim \mathbf{Hx}$

二维射影变换

A Homography is a type of projective transformation.

图像平面上的单应变换可以表示为 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}'^2$

满足 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}'^2$ 的单应变换矩阵被称为单应矩阵，用 **H** 表示。

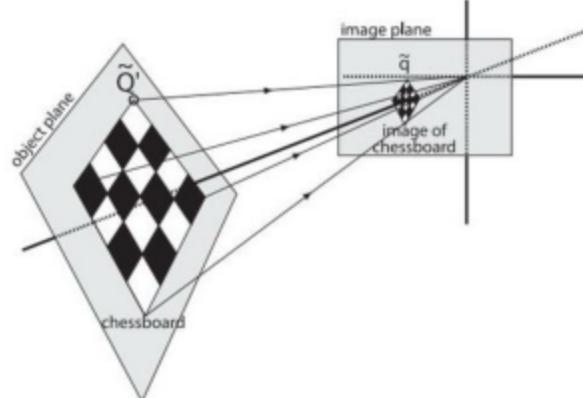
单应变换前后，几何元素的共点、共线、交比、相切都将保持不变。

射影平面中的点坐标的转换表达形式为： $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}' \sim \mathbf{Hm}$

单应矩阵 **H** 为 3×3 矩阵，它有 8 个自由度。8 DoF

在 λ 不为 0 时，**H** 和 $\lambda\mathbf{H}$ 代表的单应矩阵是等价类的。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}_{m'} = \lambda \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_m$$



李明磊@nuaa

13

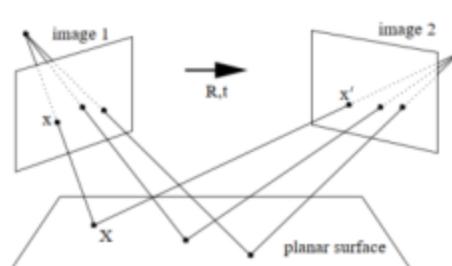


图像平面上的单应变换可以表示为 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}'^2$

满足 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}'^2$ 的单应变换矩阵被称为单应矩阵，用 **H** 表示。

单应矩阵 **H** 为 3×3 矩阵，它有 8 个自由度。

在 λ 不为 0 时，**H** 和 $\lambda\mathbf{H}$ 代表的单应矩阵是等价类的。



同时对平面成像的 2 幅影像，可以用单应变换直接计算点的转换

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_{x'} = \lambda \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_x$$

- $\begin{cases} u = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \\ v = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \end{cases}$, 进一步变换得:
- $\begin{cases} u(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{11}x + h_{12}y + h_{13}, \\ v(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \end{cases}$, 进一步得到:
- $\begin{cases} xh_{11} + yh_{12} + h_{13} - uxh_{31} - uyh_{32} - uh_{33} = 0, \\ xh_{21} + yh_{22} + h_{23} - vxh_{31} - vyh_{32} - vh_{33} = 0 \end{cases}$, 化成矩阵形式有:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -ux & -uy & -u \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -vx & -vy & -v \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = 0, \text{更进一步抽象:}$$

上式的线性方程组 8 自由度的 **H**

至少需要 4 组点对应 才能计算出单应矩阵 4

李明磊@nuaa

14

2.4 射影几何基础

三维射影空间

李明磊@nuaa

15

2.4 射影几何基础

三维射影空间 射影三维空间是一个 \mathbb{R}^3 的射影空间

三维射影空间点和平面的齐次表示

点的齐次坐标表示为4维向量: $\mathbf{M} = [X \ Y \ Z \ W]^T$

平面的齐次坐标, 即 $\Pi = [a \ b \ c \ d]^T$

M点位于**Pi**平面上的充要条件

$$aX + bY + cZ + dW = 0$$

$$\Pi^T \mathbf{M} = 0$$

提问:

$$\mathbf{M}^T \Pi = 0$$

射影几何中的对偶原理

已知共面的三个点 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$, 求解平面 Π 的线性方程形式 ?

$$[\mathbf{X}_1^T \ \mathbf{X}_2^T \ \mathbf{X}_3^T]^T \Pi = \mathbf{0}$$

已知相交的三个面 π_1, π_2, π_3 , 求解交点 \mathbf{x} 的方程?

李明磊@nuaa

16

2.4 射影几何基础

三维射影变换

在射影三维空间中，3D射影转换方程：

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}' \sim \mathbf{T}\mathbf{M}$$

$$\Pi \rightarrow \Pi' \sim \mathbf{T}^{-1}\Pi$$

其中， \mathbf{T} 是一个 4×4 转换矩阵。

三维空间中的直线

一条线可以表示成两个点的线性组合 $(1 - t)\mathbf{M}_1 + t\mathbf{M}_2$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 + t(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$$

也可表现为两个面的相交 $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 。

$$\begin{cases} \Pi_1^\top \mathbf{X} = 0 \\ \Pi_2^\top \mathbf{X} = 0 \end{cases}$$

李明磊@nuaa

17

2.4 射影几何基础

圆锥曲线 (二次曲线, conic)



在欧氏空间中，**二次曲线**有3种类型：**双曲线**、**椭圆**和**抛物线**。这3类曲线都是不同方向的平面与三维的圆锥相交产生的截线，所以也被称为**圆锥曲线**。如果平面只与圆锥顶点一点相交，则是一种退化的二次曲线。

在非齐次坐标系中，二次曲线的方程是 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 。

对应于一个二阶多项式，利用 $x \mapsto x_1/x_3$ 和 $y \mapsto x_2/x_3$ 进行齐次化表达，得到：

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

矩阵的形式为： $\mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$

其中，**二次曲线系数矩阵** \mathbf{C} 是一个对称矩阵，它的元素为：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

\mathbf{C} 是conic的齐次表示，5个DoF。conic在多视立体几何和摄像机标定的研究中是非常有用的。

过非退化的二次曲线 \mathbf{C} 上的点 \mathbf{x} 的切线 \mathbf{l} 的表示为： $\mathbf{l} = \mathbf{Cx}$

定义一个二次曲线需要**5个点**

李明磊@nuaa

18

2.4 射影几何基础

过 x 点与二次曲线 C 相切的切直线为 $l = Cx$

证明(3分钟同学们推一下):

对于二次曲线有: $x^T C x = 0$

直线: $l = Cx$ 必然过点 x 点。如果点 y 在线 l 上, $l^T y = 0 \rightarrow x^T C y = 0$

如果点 y 也过二次曲线 C , 则 $y^T C y = 0$

根据 $x^T C x = 0$ 、 $x^T C y = 0$ 、 $y^T C y = 0$, 可以推出 $(x + ky)^T C (x + ky) = 0$

这表明连接 x 和 y 的整条直线 l 上的点都在 C 上, 这样的话二次曲线是退化的。

所以, l 只会有一个点与 C 相交, 即 l 是切线

C 是一个对称矩阵

$$l = Cx$$

对偶圆锥曲线 C^*

前一页的二次曲线 C 确切的称为点的二次曲线,

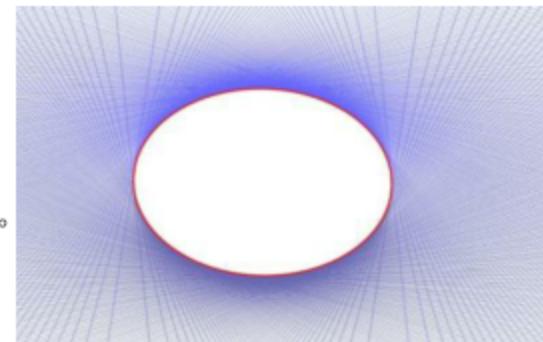
因为它的定义是关于点的方程。

根据射影几何的对偶原理, 就有关于线的二次曲线方程。

二次曲线 C 的切线 l 满足: $l^T C^* l = 0$

其中, C^* 表示 C 的伴随矩阵。

对于一个非歧义对称矩阵 C , 有 $C^* = C^{-1}$ (相差一个尺度因子)



$$l^T C^* l = 0 \quad \text{射影几何中的对偶原理}$$

2.4 射影几何基础



The absolute conic

绝对圆锥曲线 Ω_∞

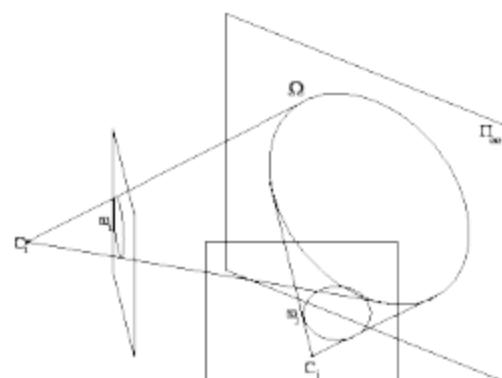
The absolute conic Ω_∞ is a (point) conic on π_∞ .

In a metric frame:

$$\left. \begin{array}{l} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ X_4 \end{array} \right\} = 0$$

or conic for directions: $(X_1, X_2, X_3) \Pi (X_1, X_2, X_3)^T$
(with no real points)

绝对圆锥曲线 (Absolute Conic, AC)



- ✓ 绝对圆锥曲线 Ω_∞ 在无穷远平面 Π_∞ 定义的一个二次曲线。无穷远平面 $\Pi_\infty = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$
- ✓ Ω_∞ 上的点 M 满足: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, $W = 0$ (M 是纯虚点)
- ✓ 空间任意平面中的圆, 在平面 Π_∞ 上的摄影投影都必经过2个点, 这两点被称为虚圆点 (circle points, 相当于一个圆锥, 被无穷远平面截出的圆锥曲线, 必然过2个点)
- ✓ 所有平面上的圆的circle points在 Π_∞ 上组成就组成了绝对圆锥曲线 Ω_∞

Ω_∞ 上的点 M 满足 $M^T M = 0$

由二次曲线与点的公式 $x^T C x = 0$, 可以发现AC对应的系数矩阵是单位阵 $C = I$ 。

Ω_∞ 上的点 M , 经过刚性变换后的点 M' , 仍满足 $M'^T M' = 0$,

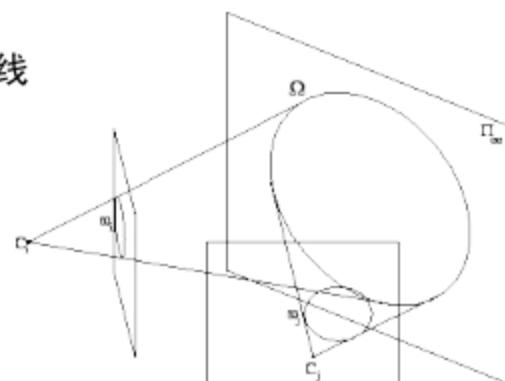
即 Ω_∞ 对刚体变换具有不变性 (物体只发生平移变换和旋转变换, 而形状不变, 这类变换称为刚体变换)

2.4 射影几何基础

射影变换 H 下，绝对圆锥曲线 Ω_{∞} 是一个不动的圆锥曲线的充要条件是： H 是相似变换

《Multi view geometry in computer vision》结论3.9 (证明见参考书)

Ω_{∞} 不具有实点，但具有所有任何二次曲线的性质。



- Ω_{∞} 在相似变换下是集合不动，而不是点不动
- 所有的圆交 Ω_{∞} 于2点。假定某圆的支撑面为 Π ，那么 Π 与 Π_{∞} 相交于一条直线，而该直线交 Ω_{∞} 于2个点，这2点是 Π 的虚圆点
- 所有的圆面交 Π_{∞} 于 Ω_{∞}

李明磊@nuaa

22

2.4 射影几何基础

绝对圆锥曲线 (Absolute Conic)

- Ω_{∞} 重要特性：对于刚体变换具有不变性

证明

坐标转换 $x' = [R|t]x$

令变换矩阵为 H : $H = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

定义 $x_{\infty} = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$

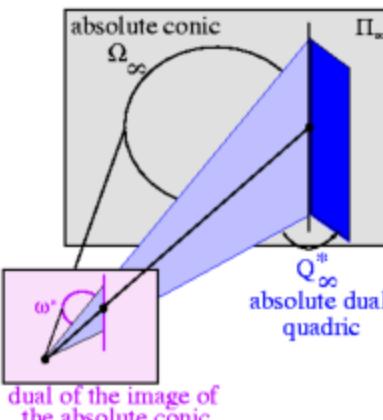
无穷远点处点 \tilde{x}_{∞} ，经过刚体变换，可以得到：

$$\tilde{x}'_{\infty} = H\tilde{x}_{\infty} = \begin{bmatrix} Rx_{\infty} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{x}'_{\infty}^T \cdot \tilde{x}'_{\infty} = 0 = \begin{bmatrix} Rx_{\infty} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Rx_{\infty} \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然，变换后的点 \tilde{x}'_{∞} 也在无穷远处。

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \\ W = 0$$

那么变换后的点是否在圆锥曲线 Ω_{∞} 上呢？



李明磊@nuaa

23

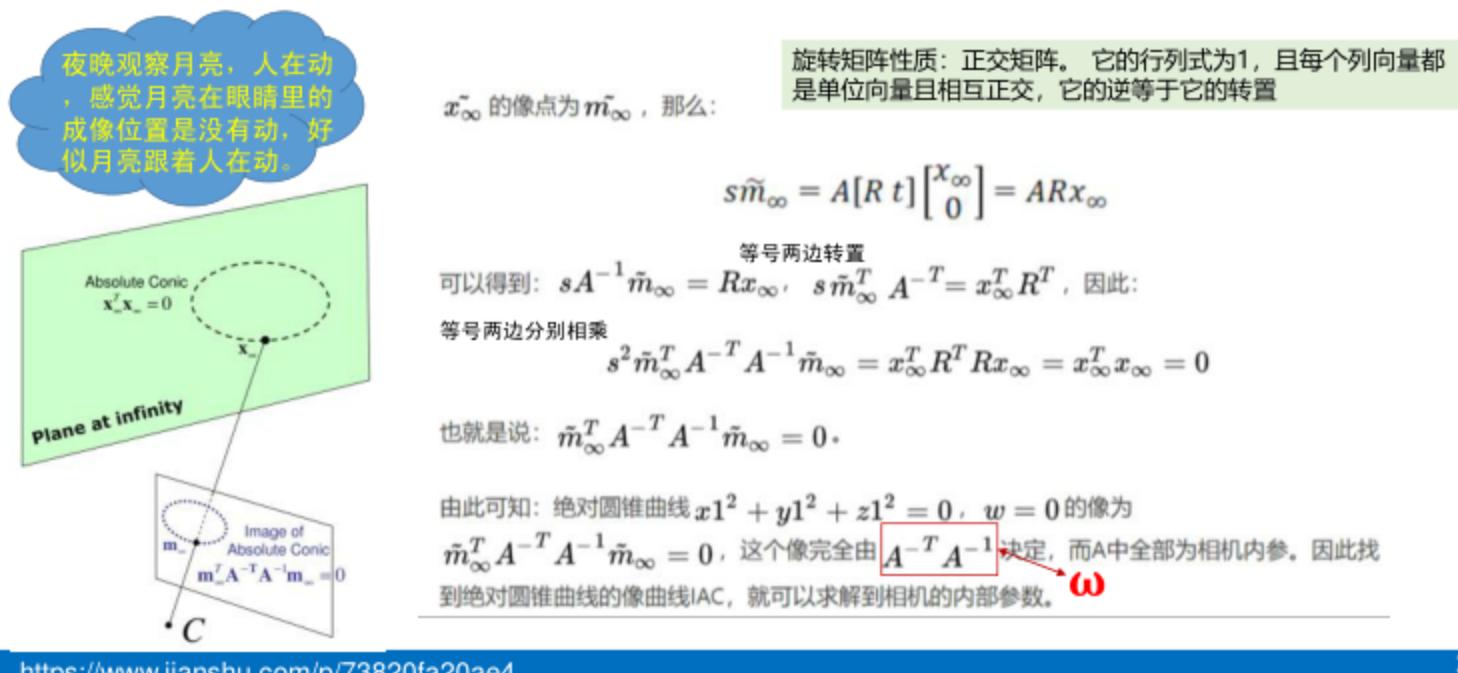
2.4 射影几何基础

绝对圆锥曲线 (Absolute Conic)

✓ Ω_∞ 在成像平面对应的影像被称为“绝对圆锥曲线影像”(Image of the absolute conic, IAC), 记为 ω

✓ “绝对圆锥曲线影像” ω 与摄像机的外参完全无关, 而仅仅由摄像机的内参决定。

因此, 如果找到了IAC像, 那就可以求解出摄像机的内参数

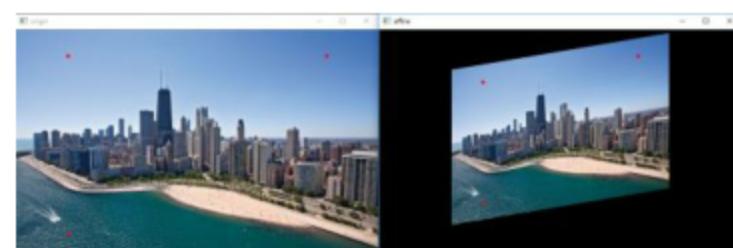


<https://www.jianshu.com/p/73820fa20ae4>

24

2.4 射影几何基础

仿射变换



2.4 射影几何基础

仿射变换

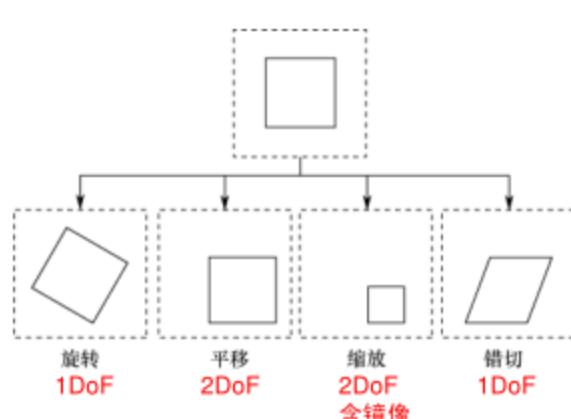
仿射变换是在射影变换的基础上增加了一条更严格的平行不变性约束
所有的射影变换性质都符合仿射变换性质。

(来自拉丁语, affine, “和...相关”)

因此, 无穷远处的平行线仍然是平行线, 不同于射影空间里相交。

仿射变换为射影变换特例, 此时假设中心投影射线平行。

仿射变换有6个自由度



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_A \mathbf{x}$$

因为 $\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = 0$, 且变换后点仍在直线上
 $\mathbf{l}'^\top \mathbf{H}_A \mathbf{x} = 0$
所以 $\mathbf{l}^\top = \mathbf{l}'^\top \mathbf{H}_A$, $\mathbf{l}' = \mathbf{H}_A^{-\top} \mathbf{l}$

李明磊@nuaa

26

2.4 射影几何基础

仿射变换

无穷远直线 $\mathbf{l}_\infty = (0,0,1)^\top$

因为 $\mathbf{l}' = \mathbf{H}_A^{-\top} \mathbf{l}$

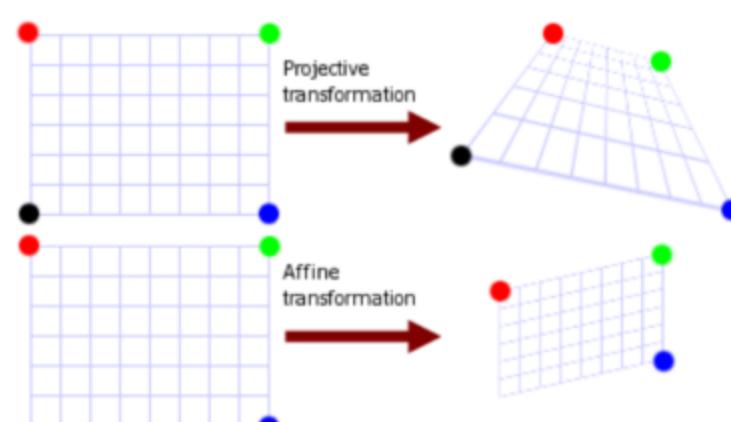
无穷远处的平行线
仍然是平行线

$$\mathbf{l}'_\infty = \mathbf{H}_A^{-\top} \mathbf{l}_\infty$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-\top} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{-\top} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{l}_\infty$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_A \mathbf{x}$$



李明磊@nuaa

27

2.4 射影几何基础

仿射变换

2D图像的仿射性质

H_{PA} 实现对 l 从射影空间
变换到仿射空间 (和原
图还差一个仿射变换)

假设已经求得射影变换下的无穷远直线的像为

$l = (l_1, l_2, l_3)^\top$,
那么一个能把无穷远线 $l_\infty = (0, 0, 1)^\top$ 映射到该像 l
的变换是

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = H_P l_\infty$$

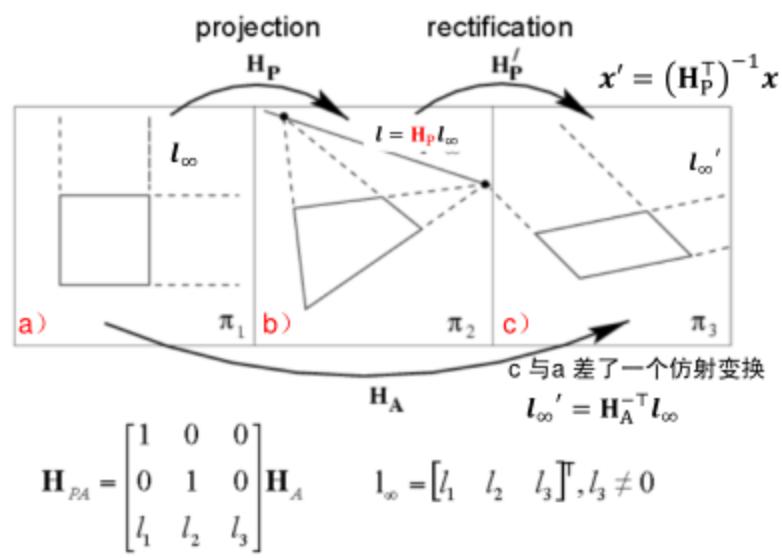
等式实现了把无穷远线从仿射空间变换到射影空间

H_P^{-1} 则实现了从射影空间变换到仿射空间, 记为 H_{PA}

为在二维图像上成像 (仿射到仿射) $l' = H_A^{-T} l$

需要满足 $l' = (H_P^{-1})^{-T} l$

$$l' = H_A^T l$$



这里的变换 H_P 并不是唯一的, 任何一个 $H_P^T H_A$ 都能恢复到
仿射变换 (H_A 是仍任意仿射变换)

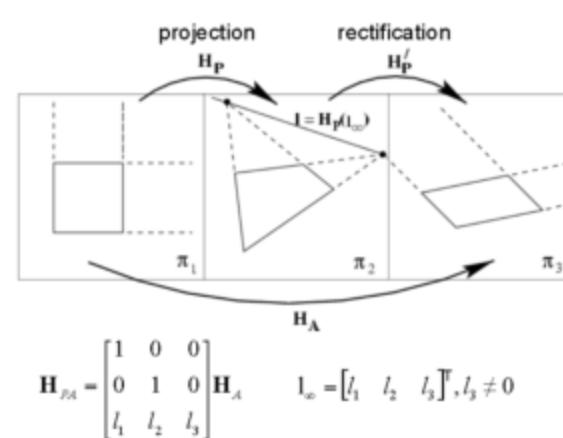
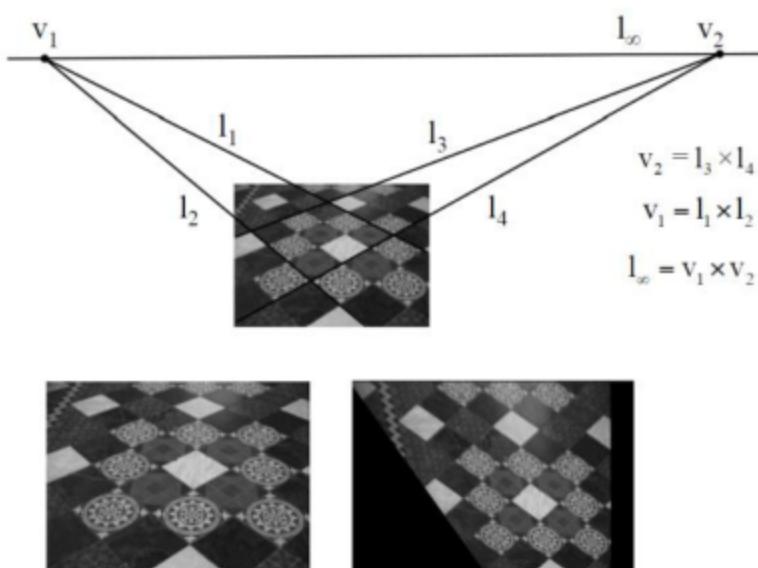
一旦辨认出了射影变换下的无穷远线 $l_\infty = (0, 0, 1)^\top$ 的位置, 将其变换回无穷远处, 即
可从射影关系恢复到仿射关系, 即仿射图像和最初的原图只相差一个仿射变换。

28

2.4 射影几何基础

应用举例

Affine rectification



对图像进行射影矫正 (只差一个仿射变换)



```


    img = cv2.imread("./pic/3_1.jpg")
    A = np.array([602, 830, 1])
    B = np.array([1105, 349, 1])
    C = np.array([590, 98, 1])
    D = np.array([75, 370, 1])
    points = [A,B,C,D]
    for p in points:
        cv2.circle(img, (int(p[0]), int(p[1])), 10, (0,0,255), -1)
    plt.figure(figsize=(10,10))
    plt.imshow(img[:, :, ::-1])

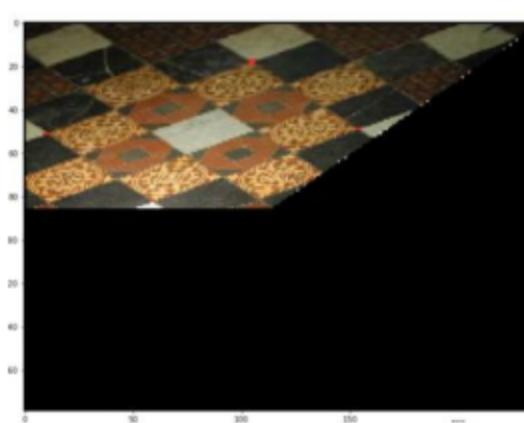
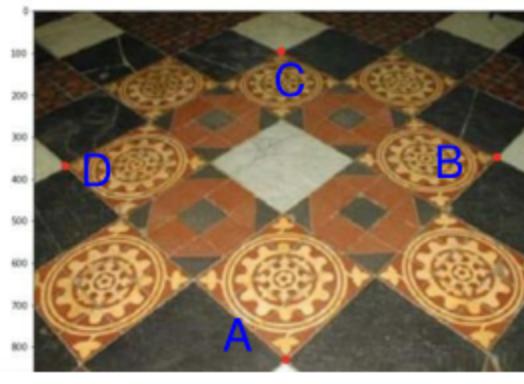
    # 求两个组平行线诱导的无穷远点
    l11 = np.cross(A, B)
    l12 = np.cross(C, D)
    vanish_point1 = np.cross(l11, l12)
    vanish_point1 = vanish_point1 / vanish_point1[2]
    l21 = np.cross(A, D)
    l22 = np.cross(C, B)
    vanish_point2 = np.cross(l21, l22)
    vanish_point2 = vanish_point2 / vanish_point2[2]
    #求无穷远线
    vanish_line = np.cross(vanish_point1, vanish_point2)
    vanish_line = vanish_line / vanish_line[2]

    #一个能使图像中的无穷远线映射回 (0, 0, 1) T的变换是
    H = np.array([[1, 0, 0],
                  [0, 1, 0],
                  [vanish_line[0], vanish_line[1], vanish_line[2]]])

    #进行图片加框
    scale = 5
    rectify_img = np.zeros([int(img.shape[0] / scale), int(img.shape[1] / scale), 3], np.uint8)
    w = img.shape[1]
    h = img.shape[0]
    for i in range(0, rectify_img.shape[0], 1):
        for j in range(0, rectify_img.shape[1], 1):
            p = np.array([j * scale, i * scale, 1])
            p_rectify = np.linalg.inv(H).dot(p)
            p_rectify = p_rectify / p_rectify[2]
            if int(p_rectify[1]) > 0 and \
                int(p_rectify[1]) < h and \
                int(p_rectify[0]) > 0 and \
                int(p_rectify[0]) < w:
                rectify_img[i][j] = img[int(p_rectify[1])][int(p_rectify[0])]

    plt.figure(figsize=(12,12))
    plt.imshow(rectify_img[:, :, ::-1])

```



3-变换的层次和应用 - 知乎 (zhihu.com)

30



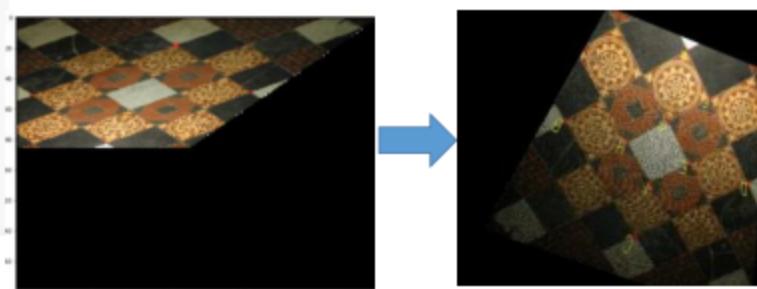
```


    from numpy.linalg import svd
    l1 = np.cross(A, D)
    l2 = np.cross(C, D)
    l3 = np.cross(C, B)
    l4 = np.cross(A, B)
    l5 = np.cross(E, D)
    l6 = np.cross(E, F)
    l7 = np.cross(E, G)
    l8 = np.cross(G, H)
    l9 = np.cross(H, I)
    l10 = np.cross(E, I)

    #一共5组垂直直线, (l1,l2),(l3,l4),(l5,l6),(l7,l8),(l9,l10)
    lines = [(l1,l2),(l3,l4),(l5,l6),(l7,l8),(l9,l10)]
    A_ = []
    for l in lines:
        constrain = [l[0][0]*l[1][0], \
                     (l[0][0]*l[1][1] + l[0][1]*l[1][0])/2, \
                     l[0][1]*l[1][1], \
                     (l[0][0]*l[1][2] + l[0][2]*l[1][0])/2, \
                     (l[0][1]*l[1][2] + l[0][2]*l[1][1])/2, \
                     l[0][2]*l[1][2]]
        A_.append(constrain)
    A_ = np.array(A_)
    u, s, vT = np.linalg.svd(A_)
    v = vT.T
    c = v[:, -1]
    #二次曲线在射影图像上的像
    C_matrix = np.array([[c[0], c[1]/2, c[3]/2, \
                          [c[1]/2,c[2], c[4]/2, \
                          [c[3]/2,c[4]/2, c[5]]]])
    U, S, VT = np.linalg.svd(C_matrix)

    #让S变为[1,1,0]的形式
    from tqdm import tqdm
    scale = np.array([[np.sqrt(1.0/S[0]), 0, 0], \
                     [0, np.sqrt(1.0/S[1]), 0], \
                     [0, 0, 1]])
    H_ = np.array(U).dot(scale)
    w = img.shape[1]
    h = img.shape[0]
    points = []
    origin = []
    print("计算点的变换...")
    for i in tqdm(range(0, img.shape[0], 1)):
        for j in range(0, img.shape[1], 1):
            p = np.array([j, i, 1])
            p_rectify = H_.T.dot(p)#注意二次曲线的变换要转换为点的变换
            p_rectify = p_rectify / p_rectify[2]
            points.append([p_rectify[0], p_rectify[1]])
            origin.append([i,j])
    points = np.array(points)
    min_x = np.min(points)
    max_x = np.max(points)
    rectify_img = np.zeros([int(max_x - min_x + 1), int(max_x - min_x + 1), 3], np.uint8)
    for i, p in enumerate(points):
        rectify_img[int(p[1]-min_x)][int(p[0]-min_x)] = img[origin[i][0]][origin[i][1]]
    plt.figure(figsize=(12,12))
    plt.imshow(rectify_img[:, :, ::-1])

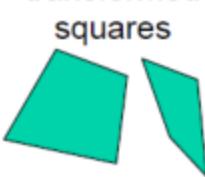
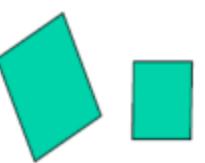
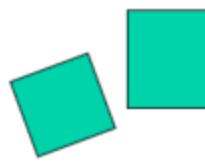
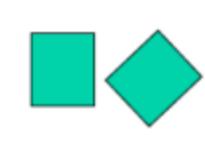
```



31

2.4 射影几何基础

二维变换

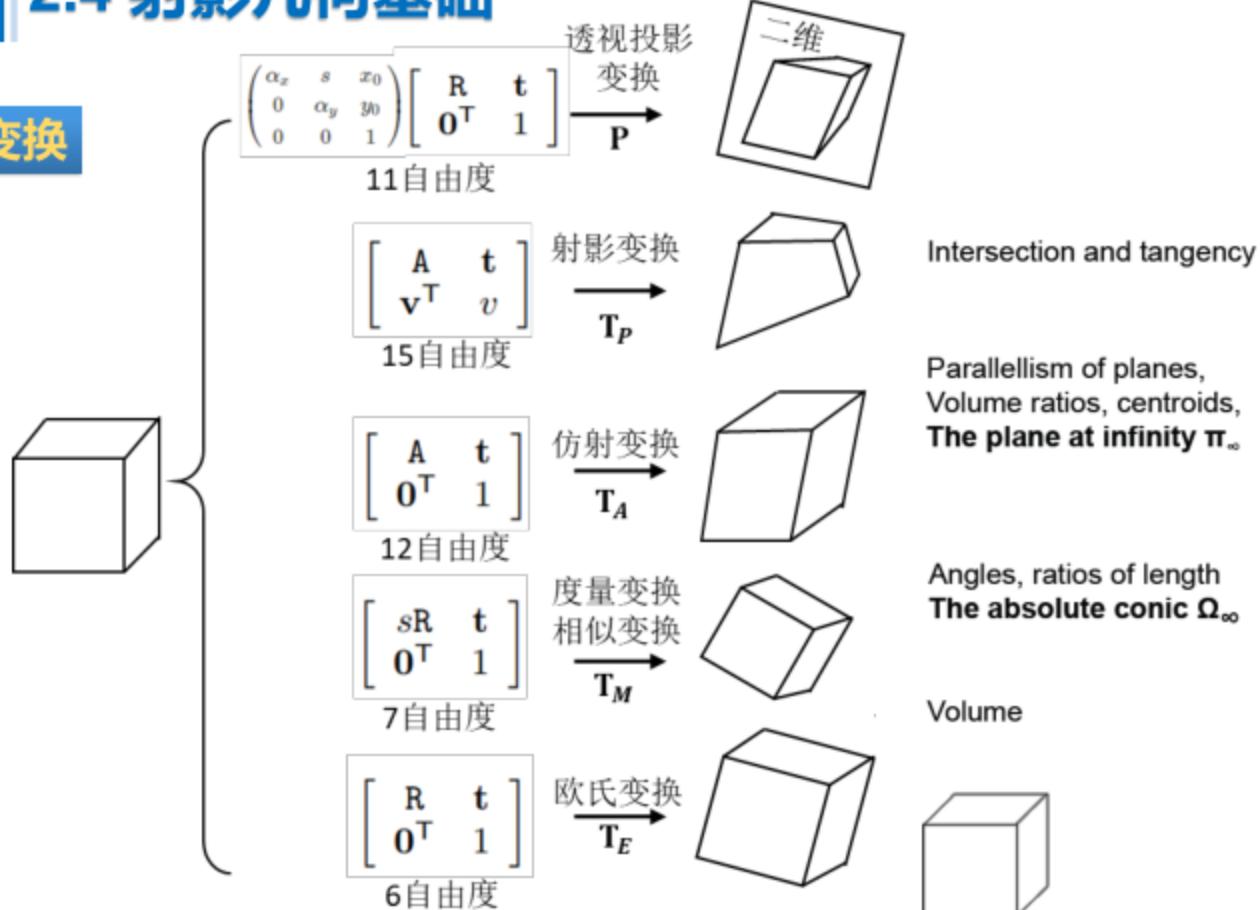
		transformed squares	invariants
Projective 8dof	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$		Concurrency, collinearity, order of contact (intersection, tangency, inflection, etc.), cross ratio
Affine 6dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Parallelism, ratio of areas, ratio of lengths on parallel lines (e.g midpoints), linear combinations of vectors (centroids). The line at infinity I_∞
Similarity 4dof	$\begin{bmatrix} SR_{11} & SR_{12} & t_x \\ SR_{21} & SR_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Ratios of lengths, angles. The circular points I,J
Euclidean 3dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		lengths, areas.

李明磊@nuaa

32

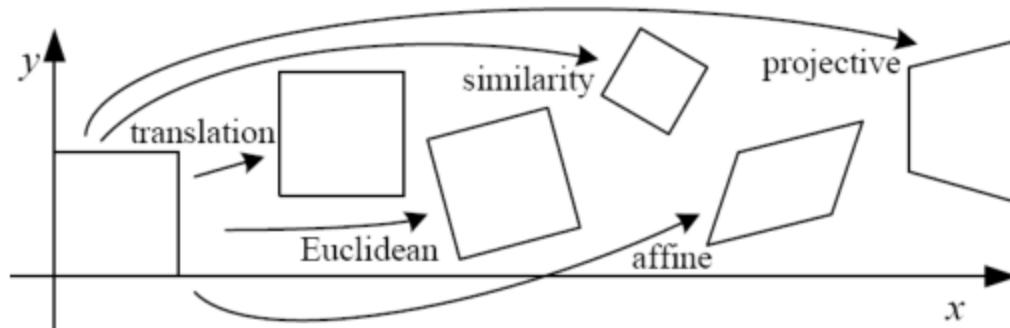
2.4 射影几何基础

三维变换



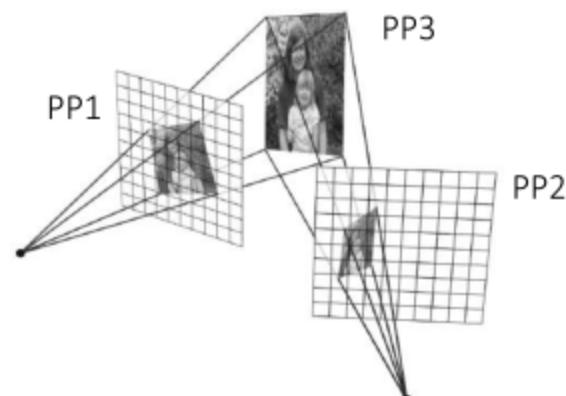
李明磊@nuaa

33



Which kind transformation is needed to warp projective plane 1 into projective plane 2?

- A projective transformation
(也称为 a Homography).



Example

