南京航空航天大學
NANJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

机器视觉测量与建模

Machine vision based surveying and modelling

李明磊
南京航空航天大学 电子信息工程学院
E-mail: minglei_li@nuaa.edu.cn

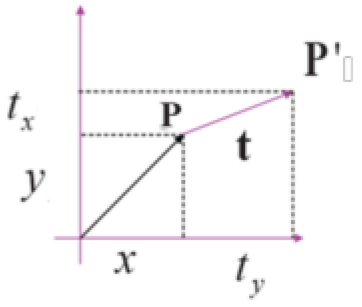
2. 图像处理的基础

- 2.1 图像的感知与获取
- 2.2 坐标转换基础
- 2.3 透视投影的相机模型
- 2.4 射影几何基础

2.2 坐标转换基础

2D 坐标变换

平移变换 Translation



$$\mathbf{P}=(x,y) \qquad \mathbf{P}'=\mathbf{P}+\mathbf{t}=(x+t_x,y+t_y)$$

$$\mathbf{t}=(t_x,t_y)$$

$$\mathbf{P}' \rightarrow \begin{bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

使用齐次坐标表达（Homogeneous Coordinates）

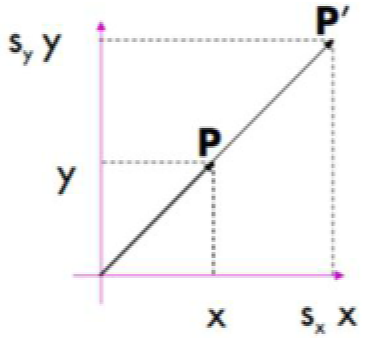
$$\mathbf{P}=(x,y) \rightarrow (x,y,1)$$

n 维射影空间中的点 $\boldsymbol{x}$ 的坐标用一个 $n+1$ 维的向量来表示 $\boldsymbol{x}=[x_1 \ \cdots \ x_{n+1}]^{\mathrm{T}}$，这些坐标中至少有一项是非零的，这样的坐标被称为齐次坐标。当点的坐标中的 $x_{n+1}=0$ 时，该点被认为是无穷远处的点。

2.2 坐标转换

2D 坐标变换

尺度变换 Scale



$$\mathrm{P}=(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{P}'=(\mathrm{s_x x},\mathrm{s_y y})$$

$$\mathbf{P}=(x,y) \rightarrow (x,y,1)$$

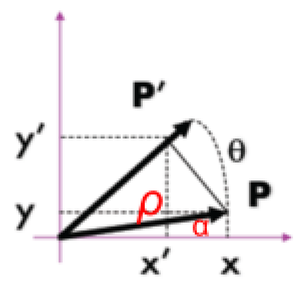
齐次坐标表达

$$\mathbf{P}' \rightarrow \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 坐标转换

2D 坐标变换

旋转变换 Rotation



$$x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y$$

$$y' = \cos\theta\, y + \sin\theta\, x$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R}\ \mathbf{P}$$

R是正交矩阵

正交矩阵

定义

$A^T A = A A^T = I$

- 换言之，当$A^T = A^{-1}$时，A被称为正交矩阵

性质

- $A^T = A^{-1}$

齐次坐标表达

$$\mathbf{P'} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

多少个自由度？ 1 DoF

2.2 坐标转换

2D 坐标变换

Scale + Rotation + Translation

$$\mathbf{P'} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{R}\,\mathbf{S} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

If $s_x = s_y$, this is a similarity transformation

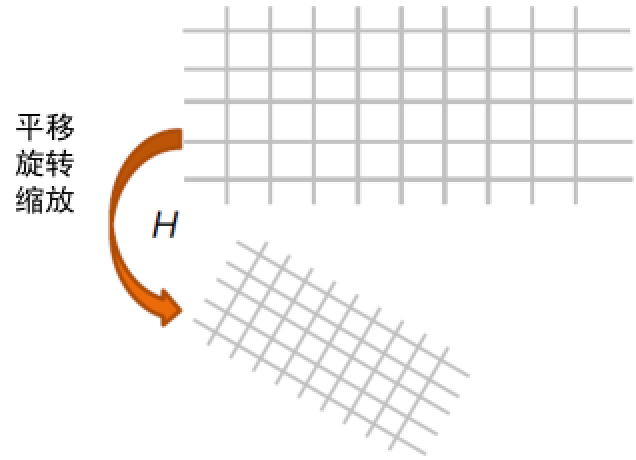
2.2 坐标转换

2D 欧氏变换

$$x' = xs\cos\alpha - ys\sin\alpha + a$$
$$y' = xs\sin\alpha + ys\cos\alpha + b$$

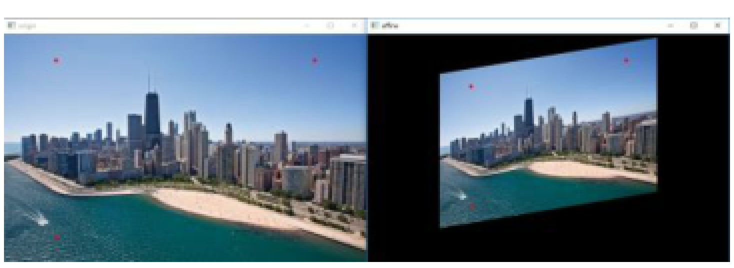
$$\mathbf{x}' \cong \underbrace{\begin{bmatrix} s\cos\alpha & -s\sin\alpha & a \\ s\sin\alpha & s\cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_E}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}' \cong H_E\mathbf{x}$$



2.2 坐标转换

2D 仿射变换

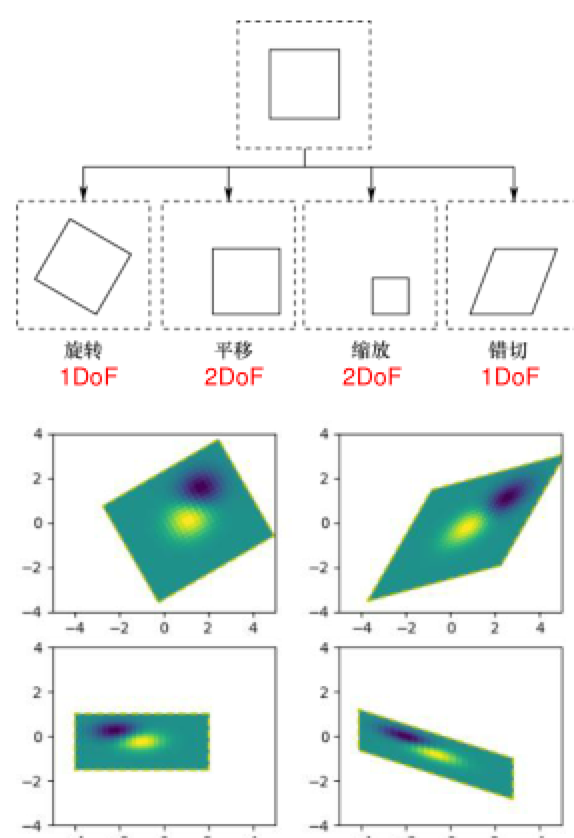


仿射变换的作用是保持图形的“平直性”和“平行性”，直线经仿射变换后依然为直线，且直线之间的相对位置关系保持不变，平行线经仿射变换后依然为平行线，且直线上点的位置顺序不会发生变化。

仿射变换平行不变性约束

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

6个自由度对应什么参数？



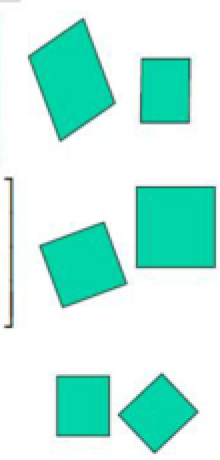
仿射变换的原子变换

2.2 坐标转换

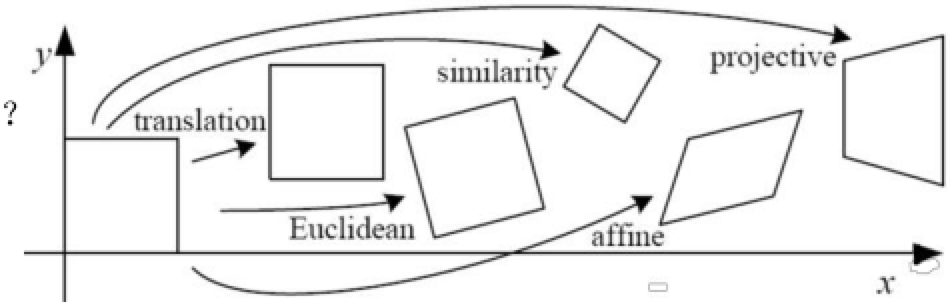
二维变换

相似性变换是仿射变换的一个特例

			transformed squares	invariants
仿射变换	Affine 6dof	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Parallellism, ratio of areas, ratio of lengths on parallel lines (e.g midpoints), linear combinations of vectors (centroids). **The line at infinity l_∞**
相似变换	Similarity 4dof	$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Ratios of lengths, angles. **The circular points I,J**
欧氏变换	Euclidean 3dof	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		lengths, areas.



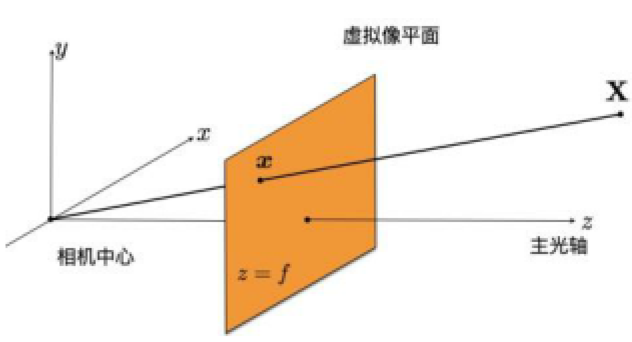
这是一个什么变换？

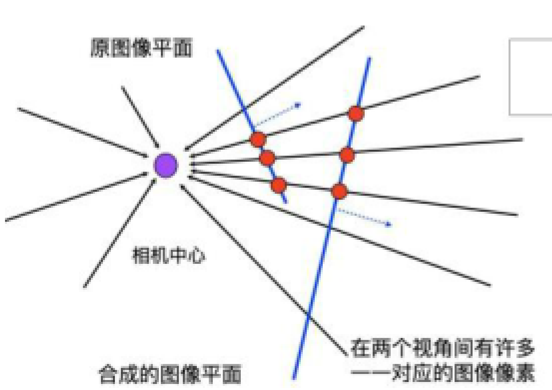


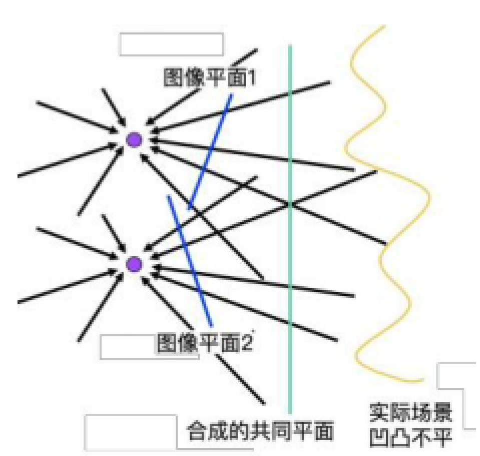
既不是欧氏变换、也不是仿射变换 透视变换(perspective transform)

2.2 坐标转换

透视变换(perspective transform)







只要新的视角和原始视角有共同的光学中心，并且和原视角有共同的视线范围，就可以将原始视觉的图像利用投影变换变换到新的视角下

2.2 坐标转换

透视变换(perspective transform)

投影变换矩阵，是一个3X3的矩阵，其中一共有8个自由度。一个图像上的点P变换到另外一个图像上的点P'的过程用下式来描述，其中H是2D投影变换矩阵，也称为单应矩阵。

$$P' = H \cdot P \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x'(h_7x + h_8y + h_9) = (h_1x + h_2y + h_3)$$
$$y'(h_7x + h_8y + h_9) = (h_4x + h_5y + h_6)$$

$$h_7xx' + h_8yx' + h_9x' - h_1x - h_2y - h_3 = 0$$
$$h_7xy' + h_8yy' + h_9y' - h_4x - h_5y - h_6 = 0$$

$$\mathbf{A}_i \boldsymbol{h} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -x & -y & -1 & 0 & 0 & 0 & xx' & yx' & x' \\ 0 & 0 & 0 & -x & -y & -1 & xy' & yy' & y' \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -x & -y & -1 & 0 & 0 & 0 & xx' & yx' & x' \\ 0 & 0 & 0 & -x & -y & -1 & xy' & yy' & y' \\ -x & -y & -1 & 0 & 0 & 0 & xx' & yx' & x' \\ 0 & 0 & 0 & -x & -y & -1 & xy' & yy' & y' \\ & & & & \vdots & & & & \\ -x & -y & -1 & 0 & 0 & 0 & xx' & yx' & x' \\ 0 & 0 & 0 & -x & -y & -1 & xy' & yy' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里的A可以是正定的（未知数==方程个数），也可以是超定的（未知数<方程个数)。可以简单的利用SVD分解来求解上述方程得到H，从而进行图像的变换。

手动选点匹配或者自动特征提取匹配，获得不同图像视角对应点坐标

2.2 坐标转换

应用：图像拼接

输入图像1　输入图像2

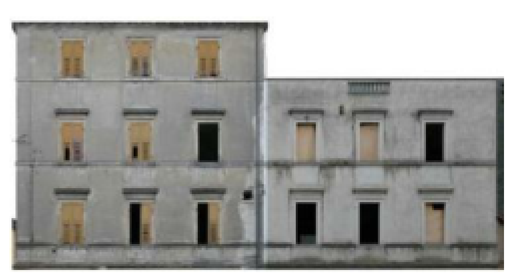
特征提取与匹配

计算坐标变换矩阵

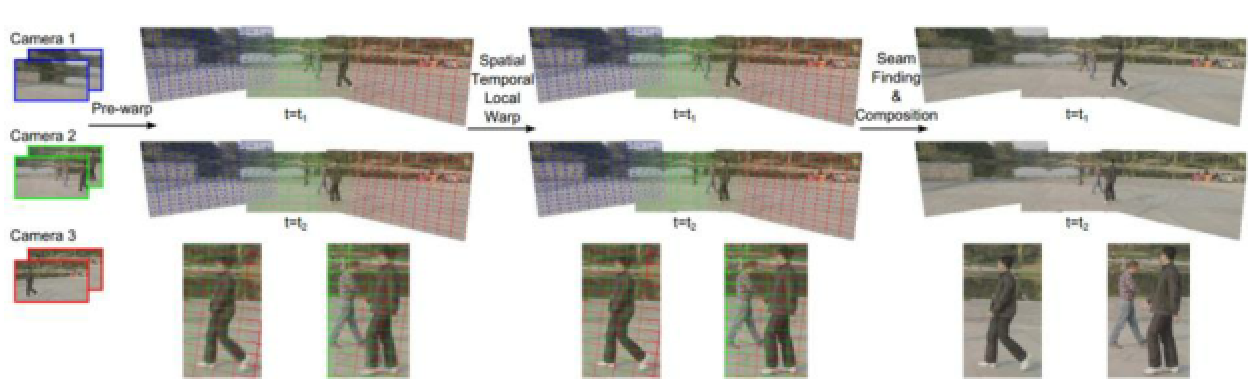
像素重采样

图像拼接融合

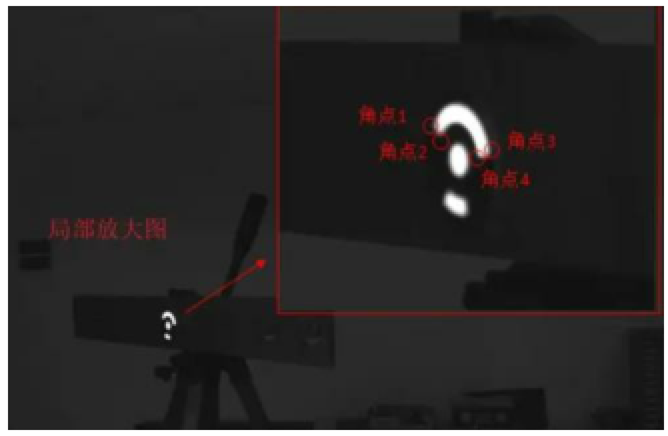
输入2幅原始图像



校正后进行拼接



应用：中心点定位



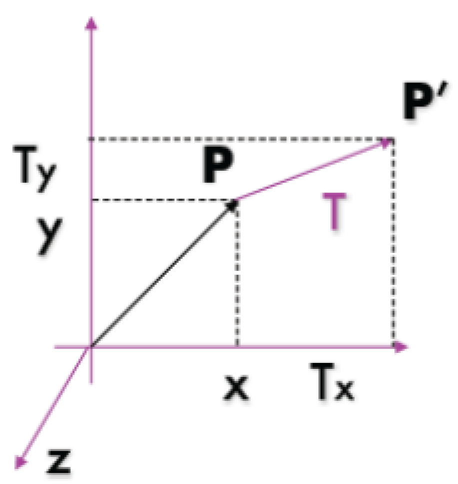
2.2 坐标转换

3D 坐标变换

2.2 坐标转换

3D 坐标变换

平移 Translation



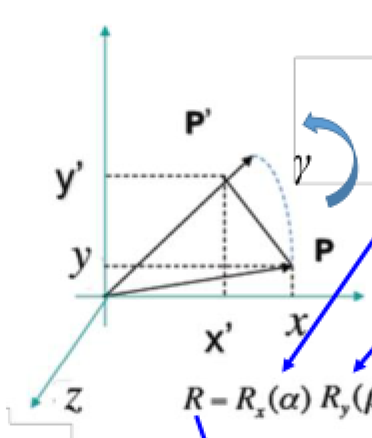
$$T=\begin{bmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{bmatrix}$$

$$P'\rightarrow\begin{bmatrix}I & T\\0 & 1\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

2.2 坐标转换

3D 坐标变换

旋转 Rotation



$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\0 & 1 & 0\\-\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$

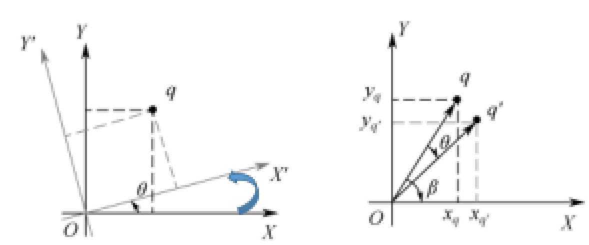
$$R_z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=R_x(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_z(\gamma)$$

$$P'\rightarrow\begin{bmatrix}R & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

3 DoF

以绕z轴旋转举例推导



$$x_q=\overrightarrow{Oq}\cdot\cos\beta \qquad \cos\beta=x_q/\overrightarrow{Oq}$$
$$y_q=\overrightarrow{Oq}\cdot\sin\beta \rightarrow \sin\beta=y_q/\overrightarrow{Oq}$$

$$x'_q=\overrightarrow{Oq}\cdot\cos(\beta-\theta)=\overrightarrow{Oq}(\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\sin\theta)$$
$$y'_q=\overrightarrow{Oq}\cdot\sin(\beta-\theta)=\overrightarrow{Oq}(\sin\beta\cos\theta-\cos\beta\sin\theta)$$

例子里γ和θ方向正负不同

$$x'_q=x_q\cos\theta+y_q\sin\theta$$
$$y'_q=-x_q\sin\theta+y_q\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix}x'_q\\y'_q\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_q\\y_q\\1\end{bmatrix}$$

2.2 坐标转换

3D 坐标变换

3D Translation and Rotation

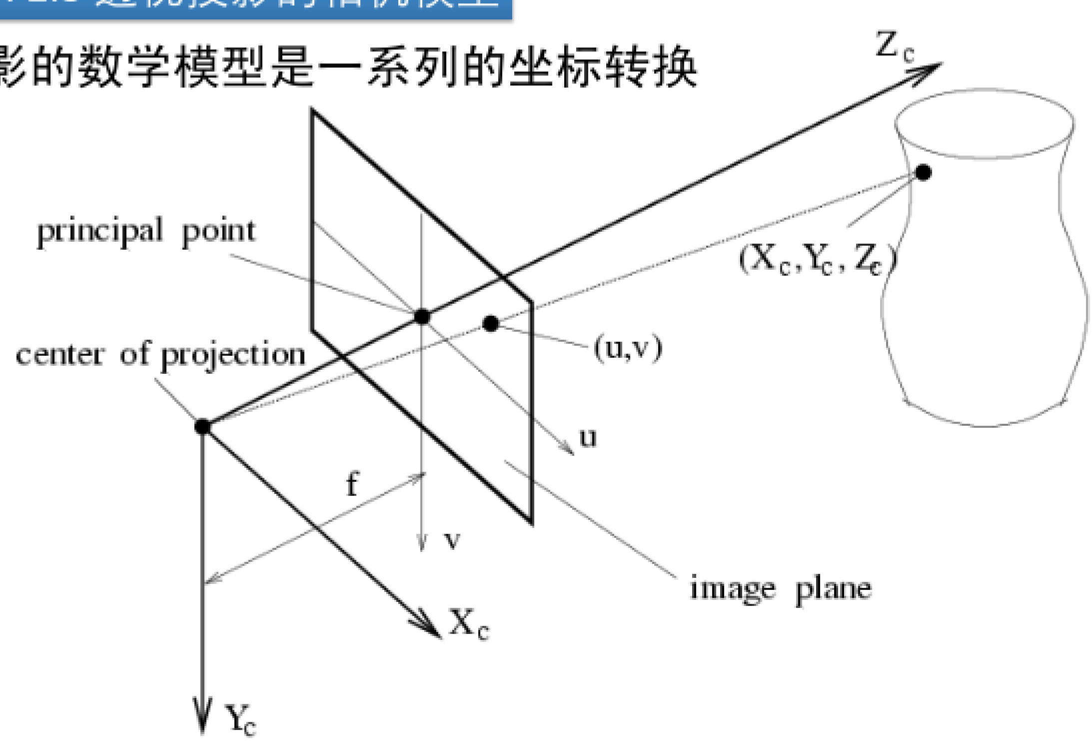
$$R = R_x(\alpha)\ R_y(\beta)\ R_z(\gamma) \qquad T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

$$P' \rightarrow \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 坐标转换

预习: 2.3 透视投影的相机模型

透视投影的数学模型是一系列的坐标转换



Perspective projection