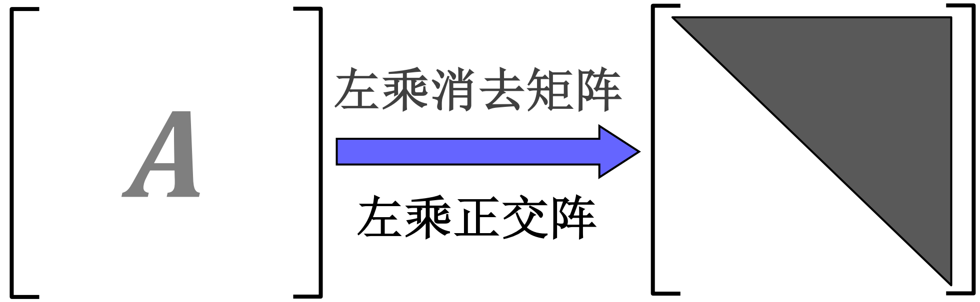
Householder变换

- 矩阵的正交三角化
  - 高斯消去过程
  - 可用正交阵来乘吗?
  - 是矩阵特征值计算、曲线拟合等解法的基础



- Householder矩阵

$\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$

  - 定义5.8 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$且$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} = 1$, 称$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$为Householder矩阵 (初等反射阵)
  - $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{H}(-\boldsymbol{w})$
  - H为对称阵、正交阵
  - $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$实现Householder变换

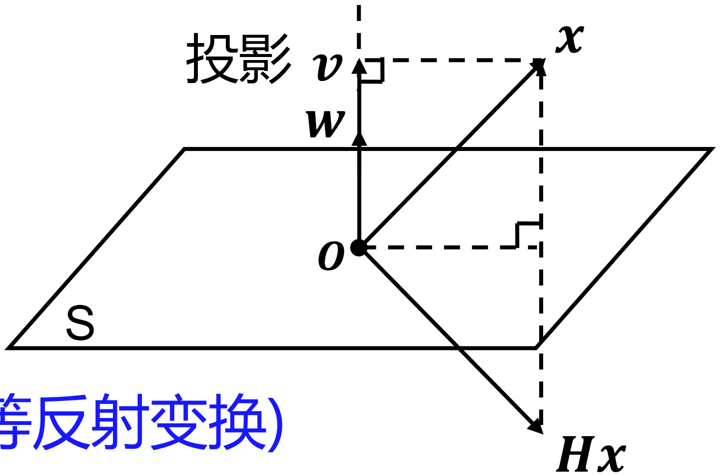
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \cdots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \cdots & -2w_2w_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \cdots & 1-2w_n^2 \end{bmatrix}$$

Householder变换

- Householder变换的几何意义
  - $\boldsymbol{Hx}$: 以$\boldsymbol{w}$为法向画出超平面S

$$\boldsymbol{Hx} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \Longrightarrow \boldsymbol{Hx} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{v}$$



  - $\boldsymbol{Hx}$为$\boldsymbol{x}$关于平面S的镜像 (初等反射变换)
  - $\boldsymbol{Hx}$与$\boldsymbol{x}$的2-范数相等, 属于正交变换
- Th5.18 设$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \|\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{y}\|_2$, 则存在Householder矩阵$\boldsymbol{H}$, 使$\boldsymbol{Hx} = \boldsymbol{y}$
- 几何的启示: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|_2$, 构造矩阵$\boldsymbol{H}$
- Th5.19 可将定理5.18中的$\boldsymbol{y}$设为 $\begin{bmatrix} \pm\|\boldsymbol{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 这样就用正交变换实现"消元"!

取$\boldsymbol{y} = -\sigma\boldsymbol{e}_1$, $\sigma = \mathrm{sign}(x_1)\|\boldsymbol{x}\|_2$较好

构造$\boldsymbol{H}$时, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{e}_1$

Householder变换

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\boldsymbol{H}} -\sigma \boldsymbol{e}_1 \qquad \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \mathrm{sign}(x_1)\|\boldsymbol{x}\|_2$$

- 正交变换实现消元
  - 对向量做Householder变换, 结果$-\sigma\boldsymbol{e}_1$中的负号是为了数值稳定
  - 例: 确定一个Householder变换, 对向量实现消元操作

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: $\sigma = \mathrm{sign}(a_1)\|\boldsymbol{a}\|_2 = 3$, 构造$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

取$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|_2$, 则实现变换的矩阵为$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$

验证: $\boldsymbol{H}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - 2(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{a})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} - 2\dfrac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \times \dfrac{15}{30} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

很重要! 用$\boldsymbol{v}$或$\boldsymbol{w}$表示矩阵$\boldsymbol{H}$, 计算$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$时只算向量内积