线性方程组的迭代解法

上机题2

问题中已经给出了线性方程组的形式，故直接实现Jacobi, Gauss-Seidel, SOR三种迭代方法来对方程组进行求解。

在代码中，实现了三个函数 `Jacobi, GaussSeidel, SOR` ，每个函数传入参数 A, b, x_0 即为方程两边的系数以及初始解，返回值为迭代后的解。

三个函数大体上近似，只是在迭代过程中的更新方式不同，Jacobi方法每次迭代都会使用上一次迭代的解，Gauss-Seidel方法每次迭代都会使用最新的解，SOR方法在Gauss-Seidel方法的基础上加入了松弛因子 ω。

在具体实现中，由于矩阵较大且稀疏，故使用了稀疏矩阵的存储方式，对于每一行储存了非零元素的列号以及对应的值。之后在迭代过程中，对于每一行的迭代都只需要遍历非零元素即可。

运行代码 `python P2.py` 后可以得到如下结果：

```
varepi = 1
Jacobi: 0.5694691180291492
GaussSeidel: 0.5731890230526754
SOR: 0.6086027928930572
varepi = 0.1
Jacobi: 0.3383802538727566
GaussSeidel: 0.4000610861031664
SOR: 0.5447308516791493
varepi = 0.01
Jacobi: 0.007043164826715032
GaussSeidel: 0.007158562503012563
SOR: 0.008848312719768114
varepi = 0.001
Jacobi: 0.017081262339118993
GaussSeidel: 0.017073126328304954
SOR: 0.01704908114512279

n = 10
Jacobi: 0.001295616040169771
GaussSeidel: 0.0012974195601939574
SOR: 0.0013155113491015136
n = 100
Jacobi: 0.009561146197276032
GaussSeidel: 0.009975597813750393
SOR: 0.012193323041406143
n = 1000
Jacobi: 0.5694691180291492
GaussSeidel: 0.5731890230526754
SOR: 0.6086027928930572
```

前半部分输出了每一个 $\varepsilon \in \{1, 0.1, 0.01, 0.001\}, a = \frac{1}{2}, n = 1000$ 下的三种方法迭代后与正确结果的相对误差（在 L_∞ 范数下）。

后半部分输出了每一个 $\varepsilon = 1, a = \frac{1}{2}, n \in \{10, 100, 1000\}$ 下的三种方法迭代后与正确结果的相对误差（在 L_∞ 范数下）。可以发现随着 n 的的变大，相对误差也在逐渐增大。