Conditional Probability and Bayes' Theorem

Reference

https://en.wikipedia.org/wiki/Joint_probability_distribution
https://www.mathsisfun.com/data/probability-events-conditional.html

Independent/Dependent Event

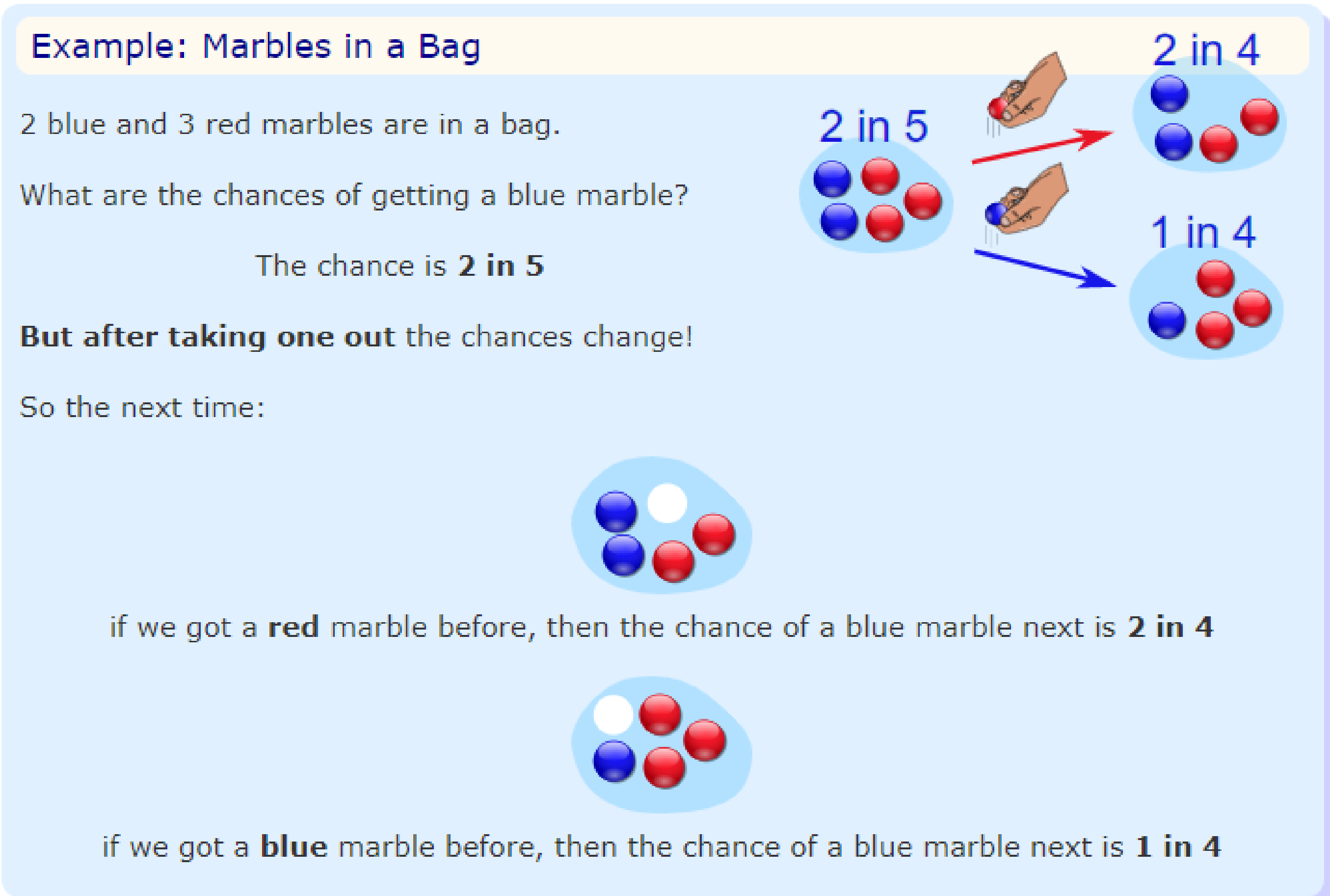
Indenpendent Event

Events can be "Independent", meaning each event is not affected by any other events.

Example: Tossing a coin.

Dependent Event

But events can also be "dependent", which means they can be affected by previous events.



This is because we are removing marbles from the bag.

So the next event depends on what happened in the previous event, and is called dependent.

Conditional Probability 条件概率

Definition

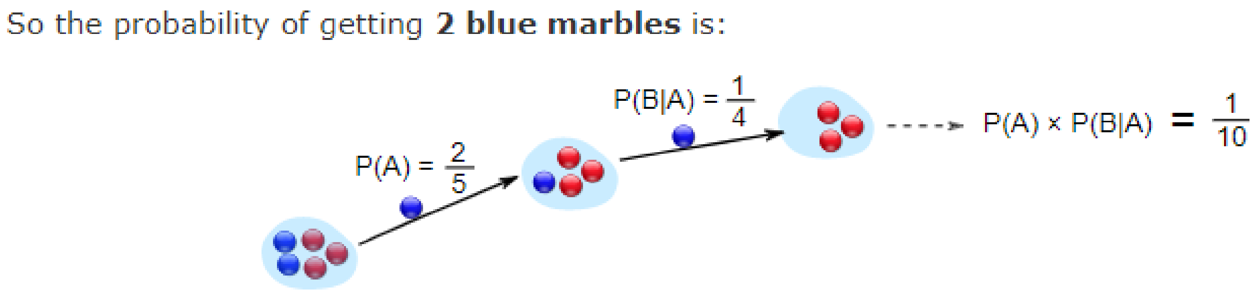
Conditional Probability of B given A.

$$P(B|A) = \frac{P(A\ and\ B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

How do we get this definition from scratch?

Event A is "get a Blue Marble first".
Event B is "get a Blue Marble second".



And we write it as

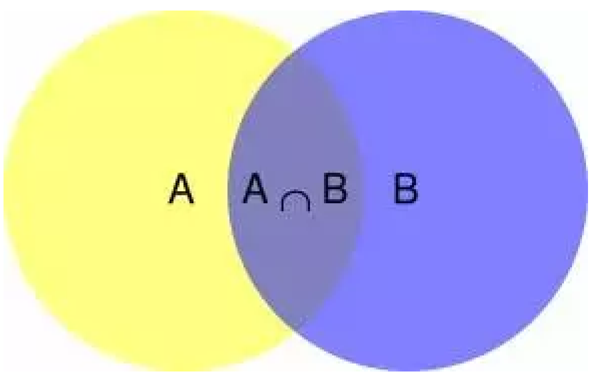
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

这条公式可以理解成一种链式反应。

如果从原来的公式理解，可以理解为事件A的发生，缩小了概率空间

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$$

再看一个例子：



可以很清楚地看到：在事件B发生的情况下，事件A发生的概率就是

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B事件的发生，对A事件发生的影响就是：缩小了分母。

互斥事件与独立事件

Probability Space 概率空间

Prior Probability 先验概率

The prior probability of a random event or an uncertain proposition is the **unconditional probability** that is assigned **before** any relevant evidence is taken into account.

事件的先验概率是指一个非条件概率（这个概率不考虑其他相关的证据）。

Posterior probability 后验概率

In Bayesian statistics, the posterior probability of a random event or an uncertain proposition is the **conditional probability** that is assigned **after** the relevant evidence or background is taken into account.

在贝叶斯统计中，一个随机事件或者一个不确定事件的后验概率是在考虑和给出相关证据或数据后所得到的条件概率。

Total Probability Theorem 全概率公式

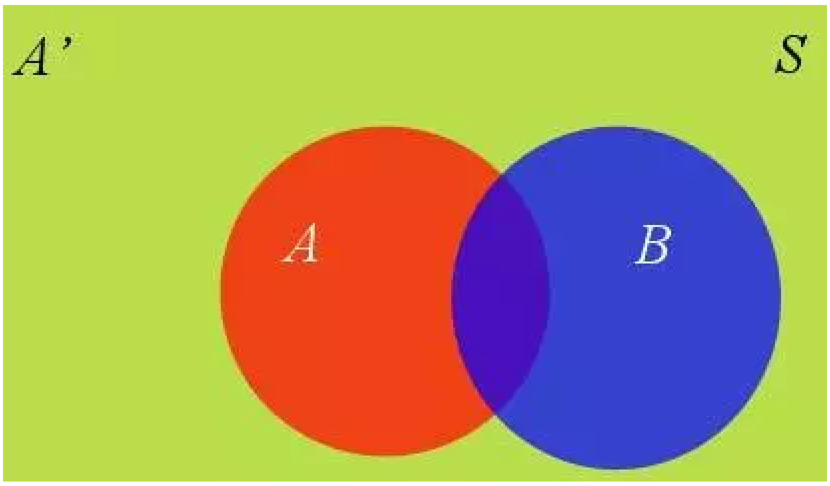
假设${B_n : n = 1, 2, 3, ... }$是一个概率空间的分割，即$B_n$为一完备事件组，对于任意事件$A$，有全概率公式：

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

全概率公式的推导与展开

我们看这张图，事件B发生的概率可以表达为：

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$



在前面我们推到过条件概率：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

变形一下：

$$P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

同理可得：

$$P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

代入得到**全概率公式：**

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

推广到多个事件对概率空间的分割：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

条件概率的另一种写法

原来的写法：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

右边分母用全概率公式代替：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)}$$

Bayes' Theorem 贝叶斯定理

是关于随机事件A和B的条件概率的一则定理。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

推广：假设${ A_j }$是事件集合里的部分集合，对于任意A_i,贝叶斯定理表示为：

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

从条件概率推导贝叶斯定理

已知：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

合并上式，消去$P(A \cap B)$，得到：

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

即：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

推导结束。

如何理解贝叶斯定理

$$P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}$$

我们求解的是，事件B发生的情况下，事件A发生的概率。

- $P(A)$称作先验概率，即不管事件B发布发生，我们对事件A发生的概率的判断。
- $P(A|B)$是后验概率，在事件B发生后,我们对事件A发生的概率进行重新评估。
- $\frac{P(B|A)}{P(B)}$是调整因子，可能性函数。
- 因此，我们可以把条件概率理解为：

$$\text{后验概率} = \text{先验概率} \times \text{调整因子}$$

- 如果调整因子$\frac{P(B|A)}{P(B)}$大于1，意味着先验概率被增强；
- 如果等于1，意味着事件B无助于判断事件A的可能性；
- 如果小于1，意味着先验概率被削弱。

例子：容器里的球

现在分别由A和B两个容器，A里面由7个红球和3个白球，B里面有1个红球和9个白球，已知从这两个容器里面任意抽出了一个球，在抽出的球是红球的情况下，这个红球来自容器A的概率是多少？

解：

定义事件R为抽到红球，事件A为抽到的球来自容器A.

$$P(A|R) = P(A)\frac{P(R|A)}{P(R)}$$

$$P(A) = \frac{7+3}{7+3+1+9} = \frac{1}{2}$$

$$P(R) = \frac{7+1}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$$

调整因子：

$$\frac{P(R|A)}{P(R)} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{4} > 1$$

事件A由于事件R的发生，事件A的发生的可能性增大。

$$P(A|R) = P(A)\frac{P(R|A)}{P(R)} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$$

例子：抛硬币

https://www.zhihu.com/people/xie-yi-ze-63/posts

有ABC三种硬币，它们投掷一次，正面朝上的概率分别为0.8, 0.5, 0.2. 已知某一枚硬币是硬币A的概率为0.2，是硬币B的概率为0.6，是硬币C的概率为0.2，现在投掷一次这枚硬币，结果是正面朝上，问这个硬币是硬币A的概率是多少？问如果再投掷一次这枚硬币，正面朝上的概率是多少？

解：

例子：酒馆

有一个酒鬼，每天有90%的可能性出门，如果出门，等概率地去ABC三家酒馆，现在有一天，警察在AB酒馆都没见到酒鬼，问在C酒馆找到酒鬼的概率。

解：

设酒鬼在酒馆A为事件A，P(A) = 0.3;

在酒馆B为事件B，P(B) = 0.3;

在酒馆C为事件C，P(C) = 0.3;

在家为事件H，P(H) = 0.1.

$$P(C|\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{P(C \cap \bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{0.3}{1 - 0.3 - 0.3} = \frac{3}{4}$$

例子：流感病毒检测

After your yearly checkup, the doctor has bad news and good news.

The bad news is that you tested positive for a flu virus, and that the test is 99% accurate (i.e., the probability of testing positive given that you have the virus is 0.99, as is the probability of testing negative given that you don't have the disease).

The good news is that this is a rare virus, striking only one in 10,000 people.

What are the chances that you actually have the disease? Show your calculations as well as giving the final result.

Hint: use Baye's Rule.

解： 定义事件D (Disease)为实际上是否患上流感,D=1为患上流感，D=0为没有患上流感。

$$p(D=1)=0.0001\ p(D=0)=0.9999$$

定义事件T (Test)为实验检测结果，T=1为实验结果为阳性，T=0为实验结果为阴性。根据题目，检测准确度为99%，那就是说，如果我患病了，那我真的患病的概率是99%，用条件概率的角度去思考，我们就得到了：

$$p(T=1|D=1)=0.99\ p(T=1|D=0)=0.01$$

$$p(T=1|D=0)=0.01\ p(T=0|D=1)=0.99$$

我们要计算的是，在实验检测结果为阳性的时候，真正患上流感的概率是多少？

$$p(D=1|T=1)=\frac{p(T=1,D=1)}{p(T=1)}=\frac{p(T=1|D=1)p(D=1)}{p(T=1)}$$

贝叶斯思想：\$p(D=1)\$是prior，\$p(T=1|D=1)\$是maximum likelihood. 全概率公式计算\$p(T=1)\$.

$$p(T=1)=p(T=1|D=1)p(D=1)+p(T=1|D=0)p(D=0)$$

$$=0.99\times0.0001+0.01\times0.9999=0.000099+0.009999=0.010098$$

$$p(D=1|T=1)=\frac{0.99\times0.0001}{0.010098}=0.0098$$

所以，在检测出来你患病的条件下，你真的患病的概率是0.0098，这个数远远小于0.99，这就得益于\$p(D=1)=0.0001\$这个prior的调整。

Joint Probability

在概率论中, 对两个随机变量\$X\$和\$Y\$，其联合分布是同时对于\$X\$和\$Y\$的概率分布。

离散随机变量的联合分布

联合分布**概率质量函数**为

$$Pr(X=x\ and\ Y=y)=P(Y=y|X=x)P(X=x)=P(X=x|Y=y)P(Y=y)$$

$$\sum_x\sum_y P(X=x\ and\ Y=y)=1$$

在概率论中，概率质量函数（probability mass function，简写为pmf）是离散随机变量在各特定取值上的概率。**概率质量函数和概率密度函数不同之处**在于：概率质量函数是对离散随机变量定义的，本身代表该值的概率；概率密度函数是对连续随机变量定义的，本身不是概率，只有对连续随机变量的概率密度函数在某区间内进行**积分后才是概率。**

连续随机变量的联合分布

联合分布概率密度函数为\$f_{X,Y}(x, y)\$，其中\$f_{Y|X}(y|x)\$和\$f_{X|Y}(x|y)\$分别代表\$X = x\$时\$Y\$的条件分布以及\$Y = y\$时\$X\$的条件分布；\$f_X(x)\$和\$f_Y(y)\$分别代表X和Y的边缘分布。

$$\int_x\int_y f_{X,Y}(x,y)dydx=1$$

独立变量的联合分布

对于互相独立的事件$P(X)及P(Y)$，任意x和y而言有离散随机变量

$$P(X=x\ and\ Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$$

或者有连续随机变量

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$$