第二讲　导数与微分

2.1 导数与微分的概念

上页 下页 返回

一、导数的定义

定义 设函数 $y = f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义，当自变量 x在 x_0处取得增量 Δx(点 $x_0 + \Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数 y取得增量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x \to 0$时的极限存在，则称函数 $y = f(x)$在点 x_0处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$在点 x_0处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} 或 \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

即 $$\left.y'\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式 $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$x=x_0+\Delta x(x=x_0+h)$ $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

◆关于单侧导数

1.左导数:

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

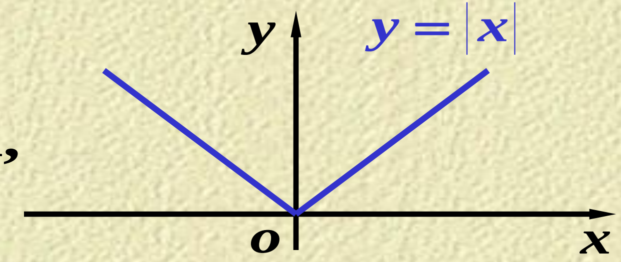
$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_{-}(x_0)$ 和右导数 $f'_{+}(x_0)$ 都存在且相等.

上页 下页 返回

例 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解



$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

$$|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

即 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$,

所以，函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

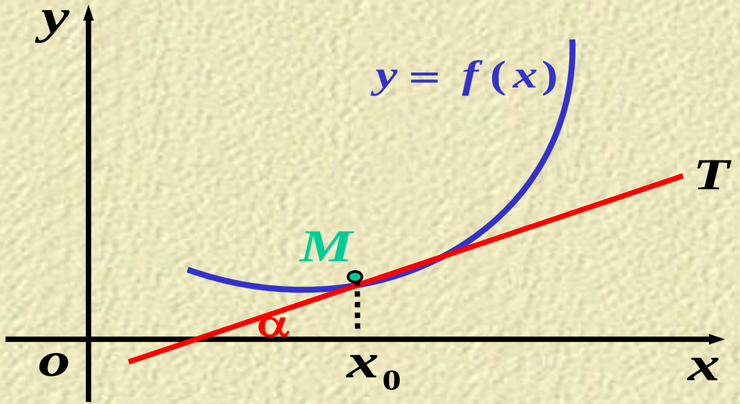
上页 下页 返回

二、导数的几何意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例7 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点$(\frac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\frac{1}{2})$, 即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$, 即 $2x-8y+15=0.$

上页 下页 返回

三、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

注意： 该定理的逆定理不成立.

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，在$x=0$处的连续性与可导性.

上页　下页　返回

例　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，在$x=0$处的连续性与可导性.

解　$\because \sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$　　$\therefore f(x)$在$x=0$处连续.

但在$x=0$处有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

四、微分的定义

定义 设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及 $x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad (1)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数 $y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量 Δx的微分，记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$，即$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$

注：(1)式等价于 $\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\cdot\Delta x}{\Delta x}=0.$

可微与可导的关系

定理 函数 $f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$在任意点x的微分，称为函数的微分，记作 dy或$df(x)$，即 $dy = f'(x)\Delta x$.

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分,
记作 dx, 即 $dx = \Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于
该函数的导数. 导数也叫"微商".

五、和、差、积、商的求导法则

定理1 如果函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导，则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导，并且

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

上页 下页 返回

函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$d\left[u(x) \pm v(x)\right]$$

$$= \left[u(x) \pm v(x)\right]' dx$$

$$= \left[u'(x) \pm v'(x)\right] dx$$

$$= u'(x)dx \pm v'(x)dx$$

$$= du(x) \pm dv(x)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} dx$$

$$= \frac{u'(x)dx \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)dx}{v^2(x)}$$

$$= \frac{du(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot dv(x)}{v^2(x)}$$

例 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数与微分 .

解 **法1 先求导数，后求微分**

$$y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$$

$$dy = (3x^2 - 4x + \cos x)dx$$

法2 先求微分，后求导数

$$dy = d\left(x^3\right) - 2d\left(x^2\right) + d(\sin x)$$

$$= 3x^2dx - 4xdx + \cos xdx = (3x^2 - 4x + \cos x)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + \cos x$$

例 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数与微分.

解 $\because y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

$$dy = (2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x)dx.$$

例　求 $y=\tan x$ 的导数.　$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

解　$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即　$(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得　$(\cot x)'=-\csc^2 x.$

上页　下页　返回

六、复合函数的求导法则　一阶微分形式的不变性

（1）复合函数的求导法则

定理　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导. (链式法则)

$$y = f(u) \quad u = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad y = f(\varphi(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot (\varphi(x))'$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(\varphi(x)) \cdot (\varphi(x))'$$

例7 求函数 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(\sin x)}(\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

上页 下页 返回

例 求函数$y=\ln\tan\frac{x}{2}$的导数.

解 令$y=\ln u, u=\tan v, v=\frac{x}{2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 v\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin x}=\csc x$$

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'$$

$$=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'$$

上页 下页 返回

例 求函数 $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because\ y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \frac{1}{3(x-2)}\cdot 1$$

$$= \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{3(x-2)}$$

例 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解

$$y' = e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'$$

$$= e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot (\frac{1}{x})'$$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x}.$$

例 求函数$y=\sqrt{\arcsin\dfrac{1}{x}}$的导数.

解 $$y'=\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\arcsin\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\arcsin\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=-\frac{1}{2x\sqrt{(x^{2}-1)\arcsin\frac{1}{x}}}$$

(2) 微分形式的不变性

$y = \sin x, dy = \cos x dx$

$y = \sin 2x,$

$dy = 2\cos 2x dx = \cos 2x \cdot 2dx$

设函数 $y = f(u)$ 有导数 $f'(u)$,

(1) 若 u 是自变量时， $dy = f'(u)du$; $= \cos 2x d2x$

(2) 若 u 是中间变量时，即另一变量 x 的可微函数 $u = \varphi(x)$，则 $dy = f'(u)\varphi'(x)dx$

$\because \varphi'(x)dx = du,$ $\quad \therefore dy = f'(u)du.$

结论: 无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(u)du}$

微分形式的不变性

上页 下页 返回

基本初等函数的导数与微分公式

$(C)' = 0$ $\qquad$ $d(C) = 0$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $d(\sin x) = \cos x dx$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad$ $d(\tan x) = \sec^2 x dx$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$ $\qquad$ $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad$ $d(a^x) = a^x \ln a dx$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad d(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2} dx$$

例 求函数$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$的导数.

解 $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(x'+\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(x^2+a^2)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

七、隐函数的导数

定义: 由方程所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \longrightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

$$y + x - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$y + \sin xy = e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow y = ?$$

问题: 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

上页 下页 返回

求函数 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sin x)}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$(\ln y(x))' = ?$$

$$\frac{d \ln y(x)}{dx} = \frac{1}{y(x)}(y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

隐函数求导法则：用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例 求由方程$x+x^5+y+y^5=0$所确定的函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解 依题意 $x+x^5+y(x)+y^5(x)=0$

方程两边同时对x求导得：

$$\left[x+x^5+y(x)+y^5(x)\right]'_x=(0)'_x$$

$$1\ +5x^4\ +y'\ +5y^4\cdot y'\ =0$$

解之得：$y'=-\dfrac{1+5x^4}{1+5y^4}$ $\quad\left(\dfrac{dy(x)^5}{dx}=\dfrac{dy(x)^5}{dy(x)}\cdot\dfrac{dy(x)}{dx}=5y^4\cdot y'\right)$

方程中隐含着y是x的函数，所以含y的项都是x的复合函数

用复合函数求导法则方程两边同时对x求导或同时求微分

例 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数$y = y(x)$的导数$\frac{dy}{dx}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边同时对x求导 $y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$， 由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1.$$

上页 下页 返回

八、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

上页 下页 返回

例 设函数$y=y(x)$由参数方程

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

确定，求$\frac{dy}{dx}$.

解 因为 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$,

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t}{2}.$$

例 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的一阶导数.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

三、对数求导法

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, $y=x^{\sin x}$.

方法:

先在方程两边取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

--------对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

上页 下页 返回

例 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

例 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$，求y'.

解 方法1：等式两边取对数得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

方法2：函数为幂指函数，恒等变形为

$$y = x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$$

利用复合函数的求导法则

$$\therefore\ y' = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)'$$

$$= e^{\sin x \ln x}(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

$$y = x^2 \arcsin(\sin^2 x)$$

$$y = \frac{\ln(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})}{x}$$

$$e^{xy} + \sin(x + y) = 0$$

$$e^{xy} + \sin(x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$y = (\sin x)^x$$