第二讲　导数与微分

2.2　洛必达法则

上页 下页 返回

一、$\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

定义 如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时,两个函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零或都趋于无穷大,那末极限

$$\lim_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$$

称为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

例如, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

二、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式的求法

定理1 设(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} F(x)=0;$

(2) 在 a 点的某领域内(点 a 可以除外), $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0;$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}.$

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

如果 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理的条件，可以继续使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\cdots.$$

当$x\to\infty$时，该法则仍然成立.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

注意：洛必达法则的使用条件.

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

洛必达法则失效。

极限不存在

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1$.

例1 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(3x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x+1)}{(3x+1)}=\frac{3}{2}.$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1-3x+3}{x^2(x-1)-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}{x^2(x-1)-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

注 用洛必达法则一定要验证条件，特别是条件(1);

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=1.$$

上页 下页 返回

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解 $$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \frac{1}{3}.$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^2\cdot 2}{3x^2}$$

三、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的求法

定理2 设(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$;

(2) 在 a 点的某领域内(点 a 可以除外), $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

当$x\to a^-$, $x\to a^+$时,及$x\to\pm\infty$时,该法则仍然成立.

上页 下页 返回

例5 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx}{\cos ax}=1.$$

例6 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$.

解 $$原式=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 3x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}=3$$

$$\overset{x-\frac{\pi}{2}=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+\frac{\pi}{2})}{\tan 3(t+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cot t}{\cot 3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3t}{\tan t}=3$$

上页 下页 返回

注 运算过程中有非零极限因子，可先算出极限.

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\dfrac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{x^{3}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+e^{x}+1-2e^{x}}{3x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}-e^{x}+1}{3x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+e^{x}-e^{x}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}}{6x}=\frac{1}{6}$$

四、 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型未定式解法

关键:将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型

$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}$$

$$=0.$$

上页 下页 返回

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2 x+2x^2\cos x\sin x}{4x^3}$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x\cos x+2x^2\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^2\cdot x^2}=\frac{2}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}\qquad =\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{6x^2}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x}=2\qquad +\frac{1}{2}\qquad =\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}\qquad =\frac{1}{3}$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

步骤:

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{化为指数函数}} \left\{\begin{array}{l} e^{0\cdot\ln 0} \\ e^{\infty\cdot\ln 1} \\ e^{0\cdot\ln\infty} \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

上页 下页 返回

(1^{∞})

例12 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. $= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)}{1-x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解

$$\text{原式} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x - \ln\sin x}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x\tan x\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}}$$

$$= e^{-1}.$$

上页 下页 返回