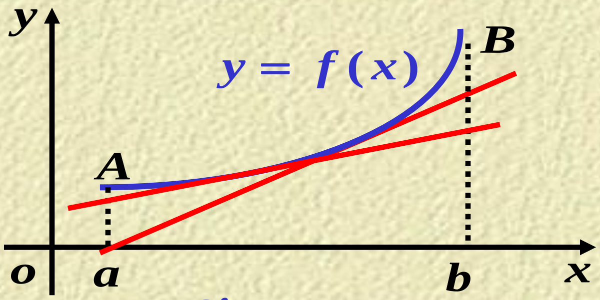
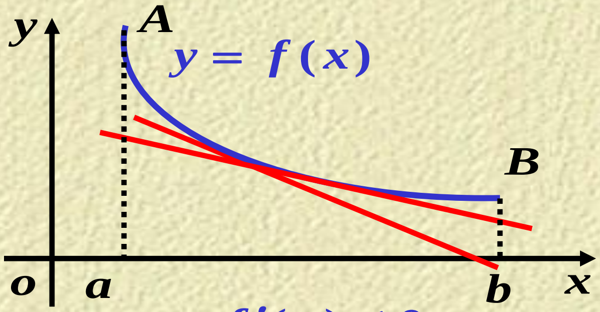
第二讲　导数的应用

2.3 函数的单调性 凹凸性

一、单调性的判别法



$f'(x) \geq 0$



$f'(x) \leq 0$

定理 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x) < 0$，那末函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

上页 下页 返回

当$x>0$时, 试证$x>\ln(1+x)$成立.

$\Updownarrow$

当$x>0$时， $f(x)=x-\ln(1+x)>0=f(0)$

$\Updownarrow$

$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加

$\Uparrow$

$f'(x)>0$

上页 下页 返回

当$x>0$时，试证$x>\ln(1+x)$成立.

证　设$f(x)=x-\ln(1+x)$,

则 $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$,

$\therefore$ 在$[0,+\infty)$上单调增加；$\because$ $f(0)=0$,

$\therefore$ 当$x>0$时，$x-\ln(1+x)>0$,

即 $x>\ln(1+x)$.

上页　下页　返回

证明不等式: 当$x>0$时, $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}$, $\qquad f(x)=x-\sin x$,

$x>0 \quad g(x)>0=g(0)$ $\qquad x>0 \quad f(x)>0=f(0)$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加 $\qquad f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$g'(x)>0$ $\qquad f'(x)>0$

上页 下页 返回

证明不等式：　当$x>0$时，$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$

设　$f(x)=x-\sin x$，　$f'(x)=1-\cos x\geq 0$，

$f(x)>f(0)=0$，　$x>\sin x$

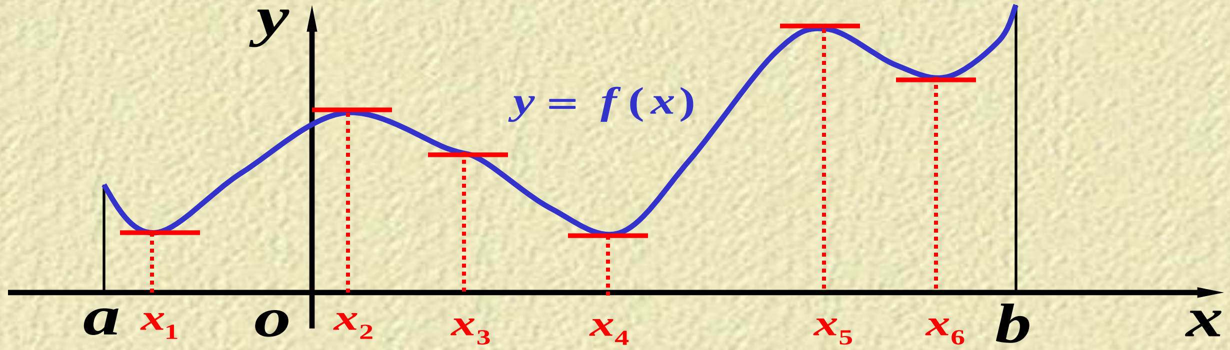
设　$g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}$，　$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，

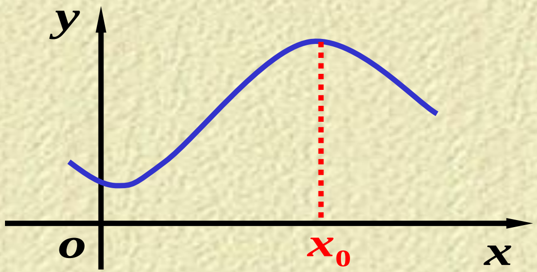
$g''(x)=-\sin x+x>0$　$\therefore g'(x)>g'(0)=0$

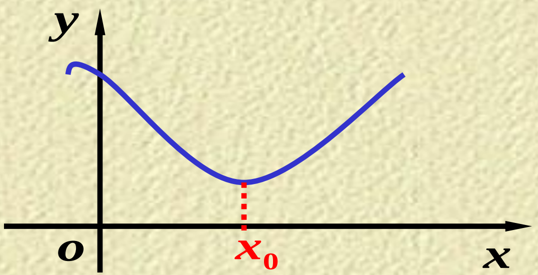
从而，　$g(x)>g(0)=0$，　$\therefore \sin x>x-\frac{x^3}{3!}$

上页　下页　返回

二、函数的极值及其求法







函数极值的求法

定理1（必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，那末必定 $f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点.

注意:可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

例如, $y=x^3$, $y'\big|_{x=0}=0$, 但 $x=0$ 不是极值点.

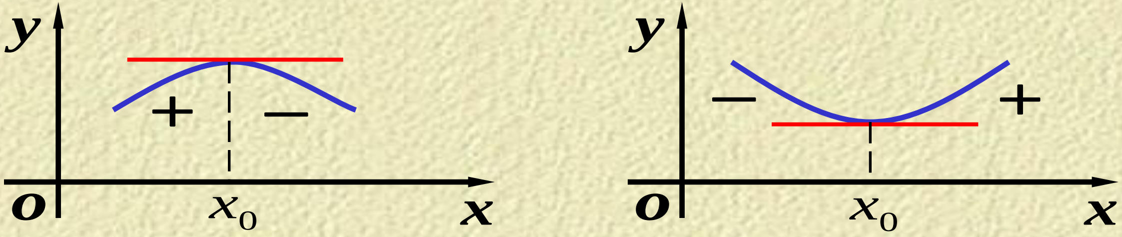
上页 下页 返回

定理2（第一充分条件） 设x_0是函数$f(x)$的临界点，

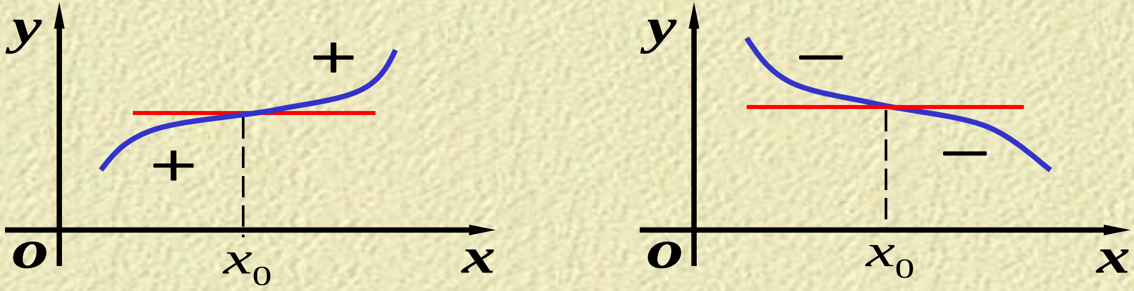
(1) 如果$x \in (x_0-\delta, x_0)$，有$f'(x)>0$；而$x \in (x_0, x_0+\delta)$，有$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 如果$x \in (x_0-\delta, x_0)$，有$f'(x)<0$；而$x \in (x_0, x_0+\delta)$有$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 如果当$x \in (x_0-\delta, x_0)$及$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x)$符号相同，则$f(x)$在x_0处无极值.



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求临界点即驻点和不可导点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在临界点左右的正负号,判断极值点;

(4) 求极值.

求出函数 $f(x)=(x-2)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$，$|x|<2$的极值.

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-2)(4x+1)(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(x-2)\sqrt[3]{(x+1)^2}+(x-2)^2\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

当$x=-1$时，$f'(x)$不存在；

$x=-1/4$时，$f'(x)=0$.

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,-1/4)$	$-1/4$	$(-1/4,2)$
$f'(x)$	$-$	∞	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	极小	$\uparrow$	极大	$\downarrow$

极大值 $f(-1/4)=(9/4)^2\sqrt[3]{9/16}$，　极小值 $f(-1)=0$.

上页　下页　返回

求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

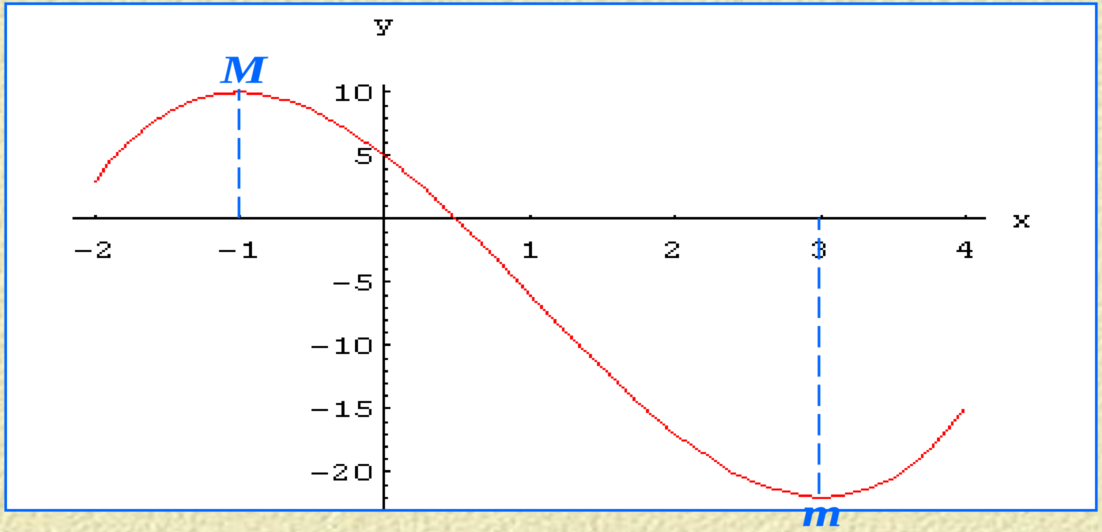
令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

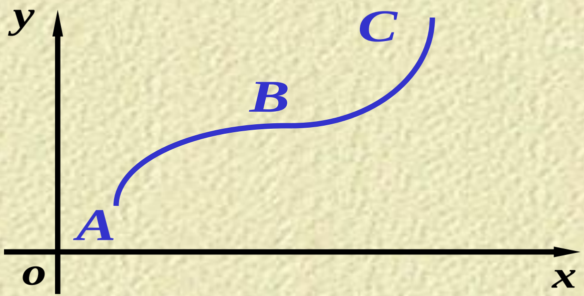
$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$$

图形如下

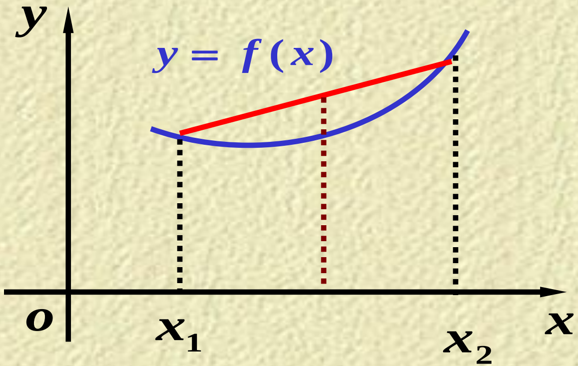


上页 下页 返回

三、曲线凹凸的定义

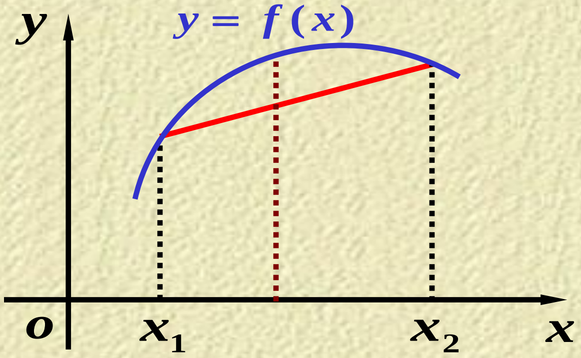


问题:如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位

于所张弦的下方

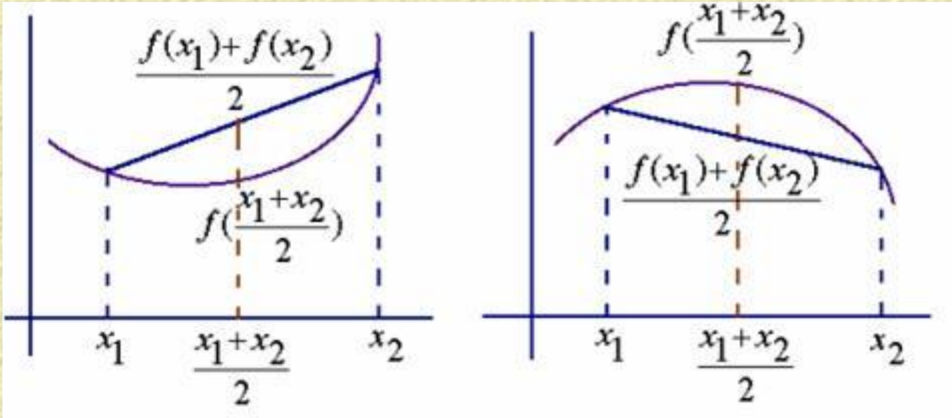


图形上任意弧段位

于所张弦的上方

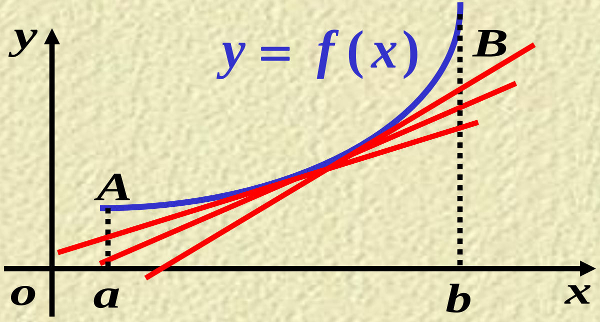
定义 设$f(x)$在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2, 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹的（或凹弧）;

如果恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那末称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的（或凸弧）.

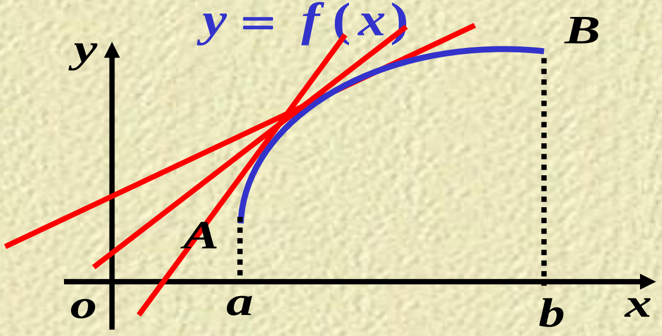


上页 下页 返回

曲线凹凸的判定



$f'(x)$ 递增　　$y'' > 0$



$f'(x)$ 递减　　$y'' < 0$

定理1　　如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，若在 (a,b) 内

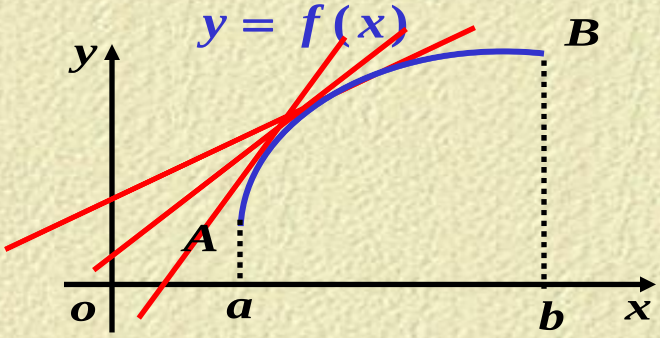
(1) $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

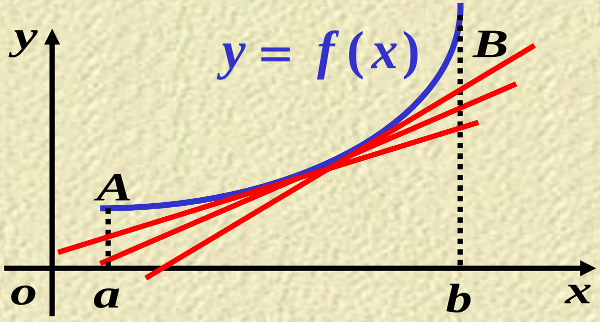
(2) $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

上页　下页　返回

定义

设$f(x)\in c[a,b]$, 在(a,b)内可微， 若$y=f(x)$位于每一点切线的上方， 则称 $f(x)$在$[a,b]$上是向下凸的（凹的）；若$y=f(x)$位于每一点切线的下方， 称$f(x)$在$[a,b]$上是向上凹的（凸的）。





四、曲线的拐点及其求法

1、定义

连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点**.

注意:拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

2、拐点的求法

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

上页 下页 返回

方法1： 设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0)=0$

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号，点$(x_0, f(x_0))$即为拐点；

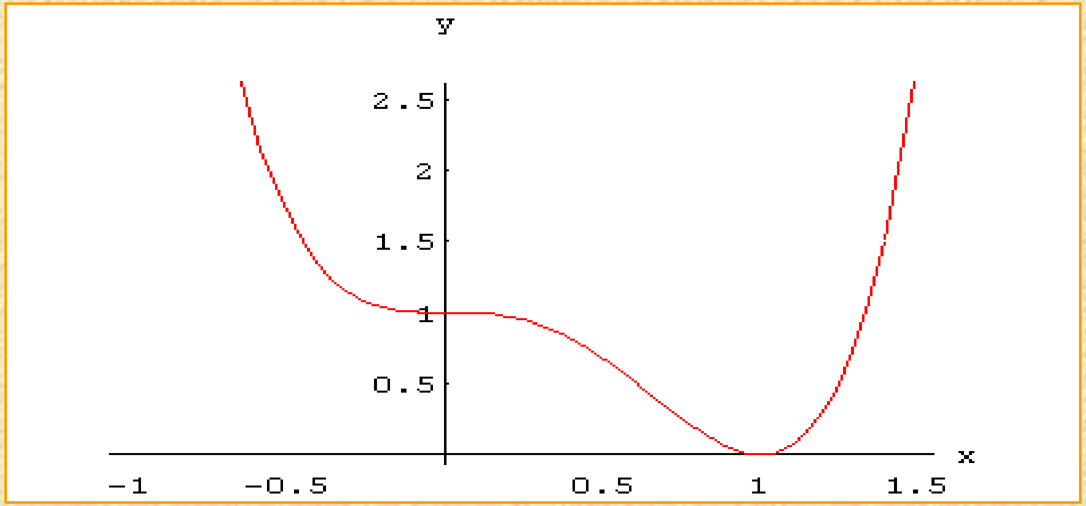
(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例 求曲线$y=3x^4-4x^3+1$的拐点及凹、凸区间.

解 $D:(-\infty,+\infty)$ $y'=12x^3-12x^2$，$y''=36x(x-\frac{2}{3})$.

令$y''=0$， 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点 $(0,1)$	凸的	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹的



凹凸区间为$(-\infty,0]$, $[0,\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},+\infty)$.

上页 下页 返回

例　求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间及其拐点。

解: $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

$f'(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}(x-1)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x)=\frac{2(2x+1)}{9\sqrt[3]{x^5}}$,

$f''(x)=0$, $x=-\frac{1}{2}$, 当$x=0$时, $f'(x)$不存在。

x	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	凹的	拐点	凸的	拐点	凹的

$(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\sqrt[3]{4})$　　$(0,0)$

上页　下页　返回