

第三讲 积分

3.1 不定积分







一、原函数与不定积分的概念

定义: 如果在区间I内,可导函数F(x)的 导函数为f(x),即 $\forall x \in I$,都有F'(x) = f(x)或dF(x) = f(x)dx,那么函数F(x)就称为f(x)或f(x)dx在区间I内原函数.

$$(\sin x)' = \cos x$$
 $\sin x = \cos x$ 的原函数.

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 区 间 $(0,+\infty)$ 内 的 原 函 数.





不定积分的定义:

在区间I内,函数f(x)的带有任意 常数项的原函数 称为f(x)在区间I内的 不定积分,记为 $\int f(x)dx$.



例3 求积分
$$\int x^2 \sqrt{x} dx$$
.

解 $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx$
根据积分公式 (2)
$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$$

解
$$\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx$$







、不定积分的性质

 $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$

(此性质可推广到有限多个函数之和的情况)

(2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$

 $(k是常数, k \neq 0)$





$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx$$
 (分项积分法)
$$= k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx$$
例4 求积分
$$\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx.$$

$$= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C$$

(分项积分法)

 $\int \left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x) \right] dx$

 $= k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx$

 $= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C$

例 5 求积分
$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$
.

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$.

例6 求
$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

解 原式 = $\int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx$

= $\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$

设f(u)具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导,

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式(凑微分法)

 第一类換元法
 定理1 设ƒ(u)具有原理
 则有换元公式
 ∫ƒ[φ(x)]φ'(x)dx
 第一类换
 说明 使用此公式的关系
 观察重点不同, 使用此公式的关键在于将

观察重点不同,所得结论不同.







例7 求 $\int \sin 2x dx$.

例8 求
$$\int \frac{1}{3+2x} dx$$
. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
解 $u = 3+2x$ $du = 2dx$
 $\int \frac{1}{3+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C$
 $= \frac{1}{2} \ln|3+2x| + C$

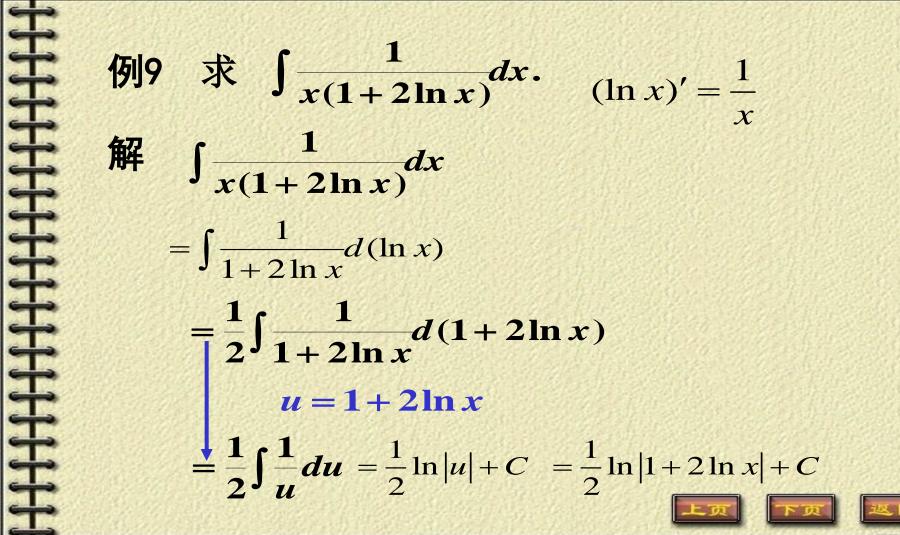
 $u = 3 + 2x \quad du = 2dx$

例8 求 $\int \frac{1}{3+2x} dx$.

 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

例9 求
$$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx$$
. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x} d(\ln x)$$



$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} = \int \frac{d\tan x}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = -\int \cos \frac{1}{x} d(\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} + C$$

 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C.$

四、第二类换元法 (代入法)

定理2 设 $x = \psi(t)$ 是单调的、可导的函数,并且 $\psi'(t) \neq 0$,又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数,则有换元公式 $\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$ 其中 $\overline{\psi}(x)$ 是 $x = \psi(t)$ 的反函数.

HHHHHHHHHHHH

第二类积分换元公式







$$\Leftrightarrow$$

$$x = \ln(t^2 - 1), \quad dx = \frac{2t}{t^2 - 1}dt,$$

$$x = \ln(t^{2} - 1), \quad dx = \frac{2t}{t^{2} - 1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{x}}} dx = \int \frac{2}{t^{2} - 1} dt = \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) dt$$



 $= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2 \ln \left| \sqrt{1 + e^x} - 1 \right| + C$





五、分部积分法

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数u = u(x)和v = v(x)具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

 $\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \qquad \int udv = uv - \int vdu.$ 分部积分公式





引11 求积分
$$\int x \cos x dx$$
.

例11 求积分
$$\int x \cos x dx$$
.

$$\mathbf{M} (-) \quad \diamondsuit u = \cos x, \quad x dx = \frac{1}{2} dx^2 = dv$$

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$$
显然, u, v' 选择不当, 积分更难进行.
$$\mathbf{M} (-) \quad \diamondsuit u = x \cos x, \quad v = x$$

$$\int x \cos x dx = x \cos x \cdot x - \int x dx \cos x$$

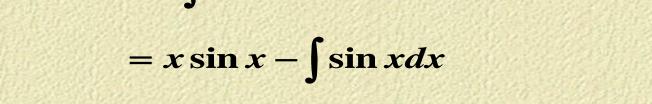
$$= x^2 \cos x - \int x (\cos x - x \sin x) dx$$

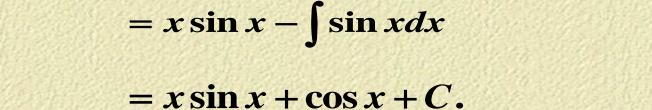
$$2$$
 2 然, u,v' 选择不当,积分更难进行。
二) 令 $u = x \cos x$, $v = x$

然,
$$u,v'$$
选择不当,积分更难进行。
二) 令 $u = x \cos x$, $v = x$
os $xdx = x \cos x \cdot x - \int xdx \cos x$

$$\cos x dx = x \cos x \cdot x - \int x dx \cos x$$

例12 求积分 $\int x \cos x dx$.







例13 求积分
$$\int x^2 e^x dx$$
. $= \frac{1}{3} \int e^x dx^3 = \frac{1}{3} e^x x^3 - \frac{1}{3} \int x^3 e^x dx$ 解 $u = x^2$, $e^x dx = de^x = dv$,
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$
 (再次使用分部积分法) $u = x$, $e^x dx = dv$ $= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$. 总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂 函数和指数函数的乘积,就考虑设幂函数为 u , 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例14 求积分 $\int x^3 \ln x dx$. 解 $u = \ln x$, $x^3 dx = a$ $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x$ $= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$ 总结 若被积函数是幂码数的乘利 数或反三角函数为u. 解 $u = \ln x$, $x^3 dx = d\frac{x^4}{4} = dv$, $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$ $= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$ 总结 若被积函数是幂函数和对数函数或幂 函数和反三角函数的乘积,就考虑设对数函



