第三讲　　积分

3.1　　不定积分

上页　下页　返回

一、原函数与不定积分的概念

定义： 如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$或$dF(x) = f(x)dx$，那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)dx$在区间I内原函数.

例 $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $\sin x$是$\cos x$的原函数.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\ln x$是$\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

上页 下页 返回

不定积分的定义：

在区间I内，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$在区间I内的**不定积分**，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号

被积函数

被积表达式

积分变量

任意常数

上页 下页 返回

例3　求积分　$\int x^2\sqrt{x}dx$.

解　$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2）　$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

上页　下页　返回

二、 不定积分的性质

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$

（此性质可推广到有限多个函数之和的情况）

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

（k 是常数，$k\neq 0$）

上页 下页 返回

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]dx$$

（分项积分法）

$$= k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx + \cdots + k_n \int f_n(x)dx$$

例4 求积分 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$$

上页 下页 返回

例 5 求积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x + C.$

例6 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

解 原式 $= \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})dx = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2})dx$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c$$

上页 下页 返回

三、第一类换元法

定理1 设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

说明 使用此公式的关键在于将

$\int g(x)dx$ 化为 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$

观察重点不同，所得结论不同.

上页 下页 返回

例7 求 $\int \sin 2x dx$.

解（一）$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$;

解（二）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= 2\int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C$;

解（三）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= -2\int \cos x d(\cos x) = -(\cos x)^2 + C$.

例8 求 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

解 $u = 3 + 2x \quad du = 2dx$

$$\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C$$

上页 下页 返回

例9 求 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$

$$= \int \frac{1}{1+2\ln x} d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x} d(1+2\ln x)$$

$u = 1 + 2\ln x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln|u| + C \quad = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C$$

上页 下页 返回

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f\left[\varphi(x)\right]d\left[\varphi(x)\right] = F\left[\varphi(x)\right] + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} = \int \frac{d\tan x}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = -\int \cos\frac{1}{x}d(\frac{1}{x}) = -\sin\frac{1}{x} + C$$

四、第二类换元法（代入法）

定理2 设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，

则有换元公式 $\int f(x)dx=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$

其中 $\overline{\psi}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

第二类积分换元公式

例10 求$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令$t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1), \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2}{t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \quad = 2\ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right|+C$$

上页 下页 返回

五、分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

分部积分公式

上页 下页 返回

例11 求积分 $\int x\cos x dx$.

解（一） 令 $u=\cos x$, $xdx=\frac{1}{2}dx^2=dv$

$$\int x\cos x dx=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然， u,v' 选择不当，积分更难进行.

解（二） 令 $u=x\cos x$, $v=x$

$$\int x\cos x dx=x\cos x\cdot x-\int x dx\cos x$$

$$=x^2\cos x-\int x(\cos x-x\sin x)dx$$

例12　求积分 $\int x\cos x dx$.

解（三）　令 $u = x$,　$\cos x dx = d\sin x = dv$

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

例13 求积分 $\int x^2e^x dx$. $=\frac{1}{3}\int e^x dx^3 = \frac{1}{3}e^x x^3 - \frac{1}{3}\int x^3 e^x dx$

解 $u = x^2$, $e^x dx = de^x = dv$,

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

（再次使用分部积分法） $u = x$, $e^x dx = dv$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u, 使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例14　求积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解　$u = \ln x$,　$x^3 dx = d\frac{x^4}{4} = dv$,

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

总结　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例15 求积分 $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t 2tdt=2\int te^t dt=2\int td(e^t)$$

$$=2\left(te^t-\int e^t dt\right)$$

$$=2(t-1)e^t+C$$

$$=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$$