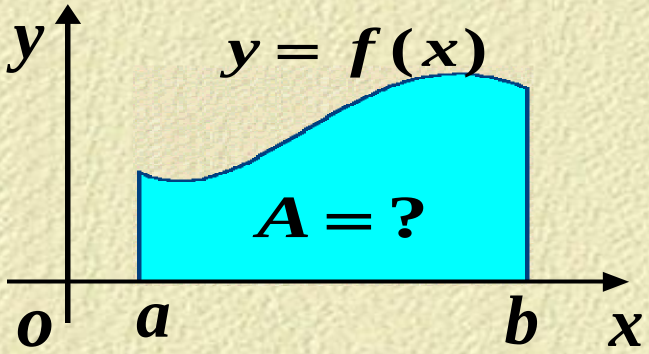
第三讲　　积分

3.2　　定积分

一、问题的提出

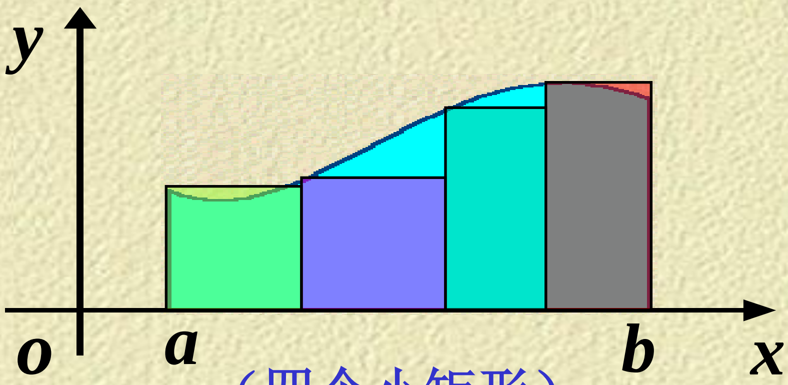
实例1 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、x轴与两条直线$x=a$、$x=b$所围成.

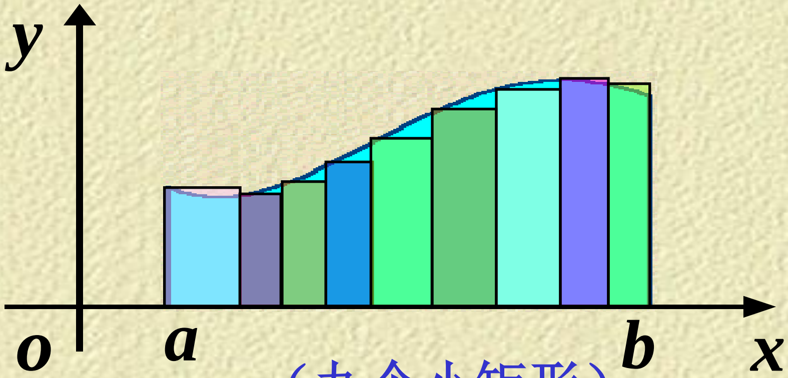


上页 下页 返回

用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）

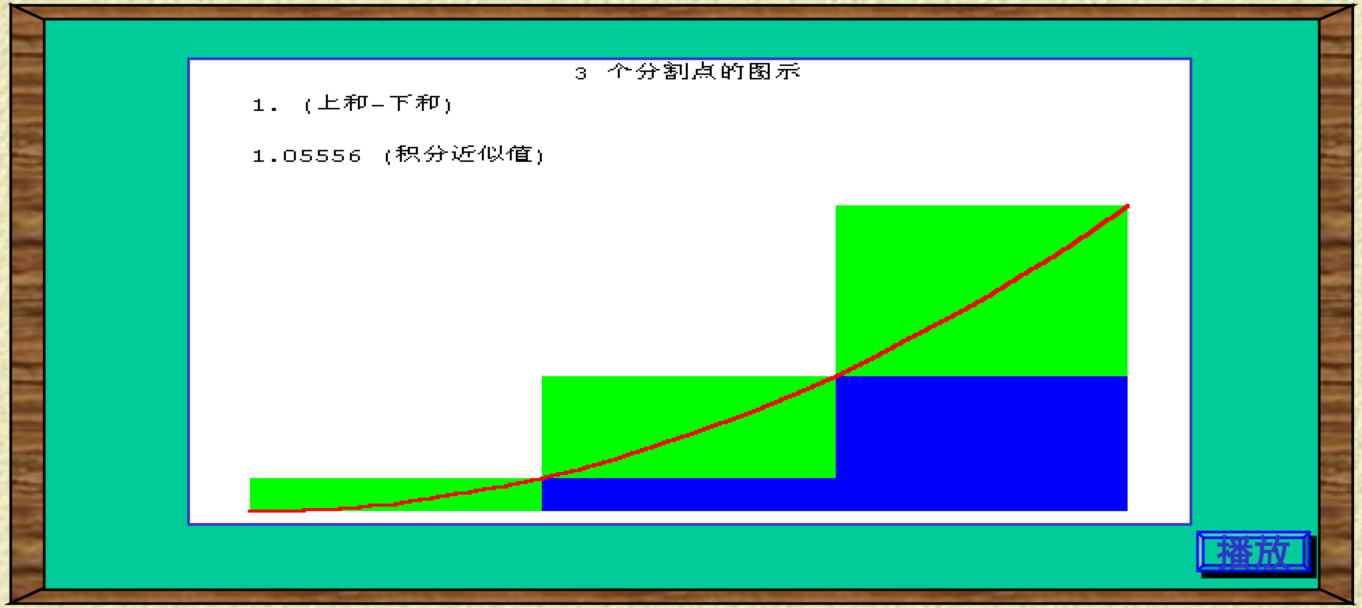


（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

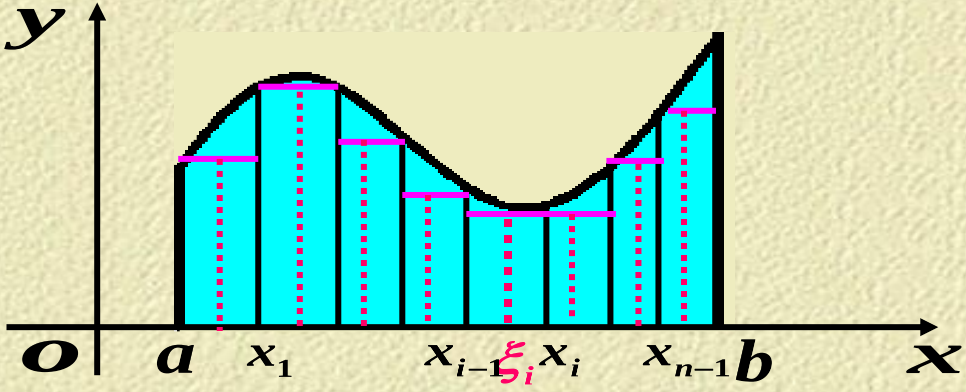
上页 下页 返回

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$,
长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;



在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$
上任取一点 ξ_i,

以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

上页 下页 返回

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为 $$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

二、定积分的定义

定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点　$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

上页　下页　返回

怎样的分法，　也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda\to 0$时，和S总趋于确定的极限I，　我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记为

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分上限

积分下限

积分和

被积函数

被积表达式

积分变量

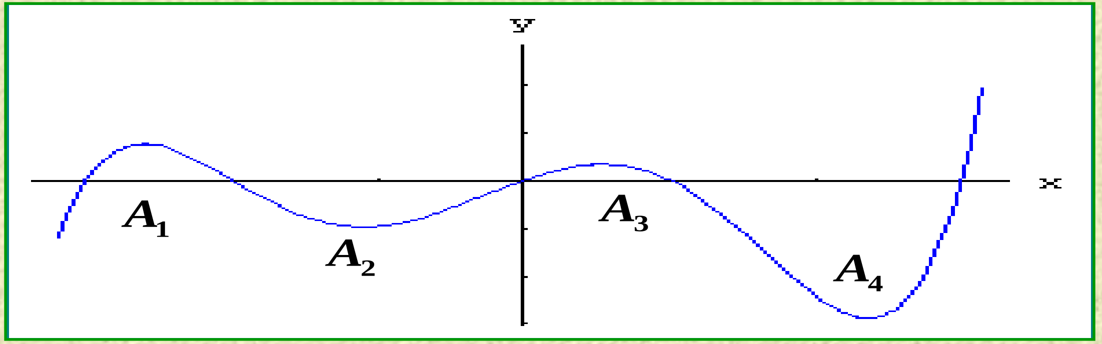
$[a,b]$ 积分区间

上页　下页　返回

三、定积分的几何意义

$f(x) > 0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$　　曲边梯形的面积

$f(x) < 0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$　曲边梯形的面积的负值



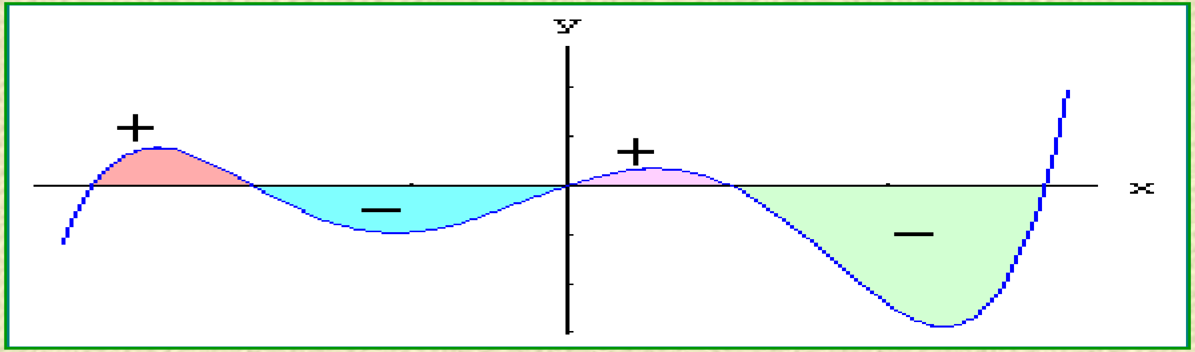
$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

上页　下页　返回

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



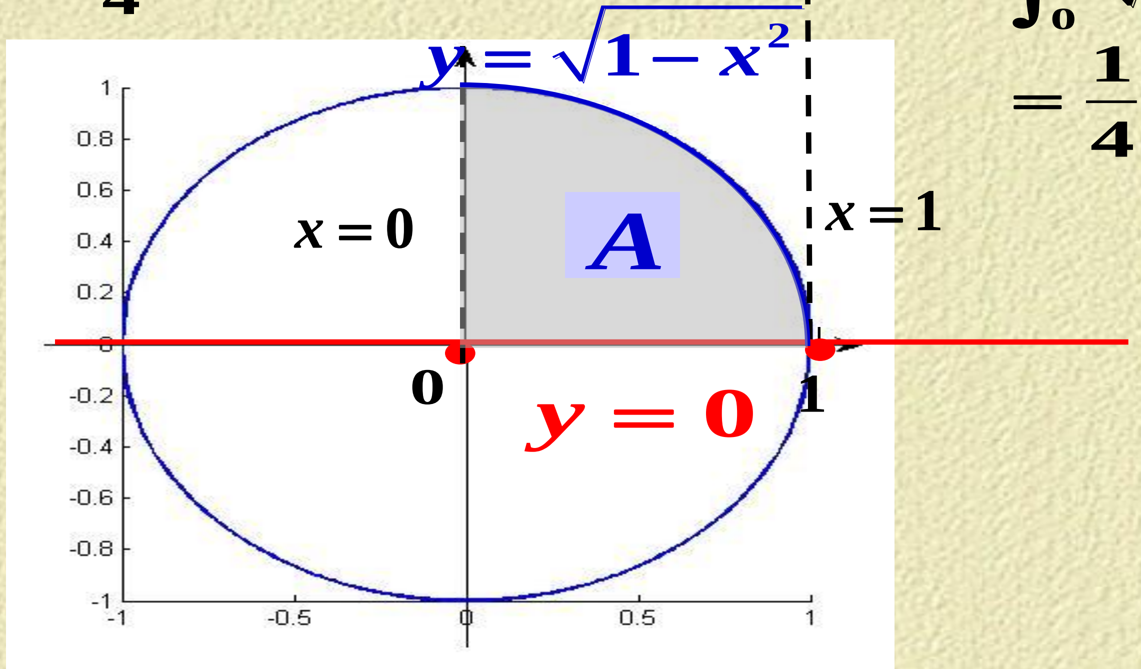
上页 下页 返回

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$,

表示由$x=0, x=1, y=\sqrt{1-x^2}$及x轴围成

的$\frac{1}{4}$圆面积.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{1}{4}.$$



上页 下页 返回

四、变上限积分函数 $\int_a^x f(t)dt$

b_1 $[a,b_1]$ $f(t)$ $\int_a^{b_1} f(t)dt$

b_2 $[a,b_2]$ $f(t)$ $\int_a^{b_2} f(t)dt$

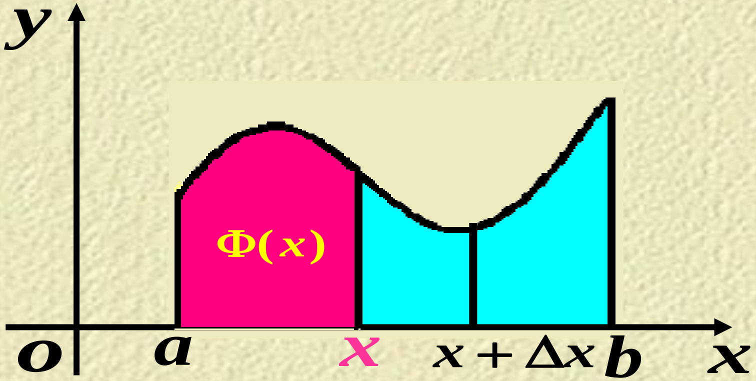
$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

上页 下页 返回

积分上限函数的性质 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$$



例1　求下列函数的导数

(1) $\Phi(x)=\int_0^x \sin t^2 dt$

解 （1） $\Phi'(x)=[\int_0^x \sin t^2 dt]'=\sin x^2$

(2) $\Phi(x)=\int_x^0 \cos(3t+1)dt$

解 （2） $\Phi'(x)=[\int_x^0 \cos(3t+1)dt]'$

$$=[-\int_0^x \cos(3t+1)dt]'$$

$$=-\cos(3x+1)$$

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

补充

如果 $f(t)$ 连续，$a(x)$、$b(x)$ 可导，

则 $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ 的导数 $F'(x)$ 为

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

$$= f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

上页 下页 返回

(3) $\Phi(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

解 (3) $\Phi'(x)=[\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt]' =\sqrt{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)'$

$$=2x\sqrt{1+x^4}$$

(4) $\Phi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \quad =-2x\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+3x^2\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$

解 (4) $\Phi'(x)=(\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt)'$

$$=(\int_{x^2}^{a}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt+\int_{a}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt)'$$

$$=-(\int_{a}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt)'+(\int_{a}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt)'$$

例2　设$y=\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln\left(1+t^{6}\right)dt$，求$\frac{dy}{dx}$

解

$$\frac{dy}{dx}=\ln\left(1+(\sqrt[3]{x})^{6}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)'-\ln\left(1+\left(\sqrt{x}\right)^{6}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\ln\left(1+x^{2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(1+x^{3}\right)$$

例3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解　$\dfrac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt,$

$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' \quad = \sin x\cdot e^{-\cos^2 x},$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}\ln(1+t)dt}{x^2}$

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^{1}\ln(1+t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\int_{1}^{\cos x}\ln(1+t)dt}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_{1}^{\cos x}\ln(1+t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\ln(1+\cos x)}{2x}$$

$$=\frac{\ln 2}{2}$$

上页 下页 返回

五、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

上页　下页　返回

例5 求 $\int_0^1 xe^{x^2}dx$

解

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2)$$

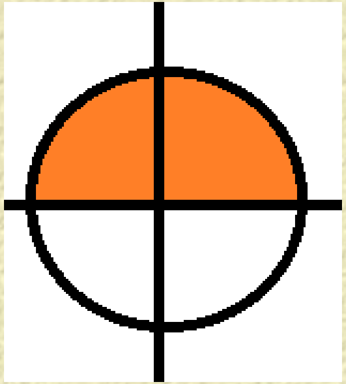
$$= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e-e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$$

例6 计算 $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{\cos x}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}0, & f(-x)=-f(x)\\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(-x)=f(x)\end{cases}$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{x}{\cos x}dx+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$$



$$=\frac{1}{2}\pi\cdot 4=2\pi$$

例7 计算 $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^x}\,dx$

解 令 $\sqrt{1+e^x}=t$, 则 $x=\ln(t^2-1)$, $dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt.$

当 $x=\ln 3$ 时, $t=2$; 当 $x=\ln 8$ 时, $t=3.$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^x}\,dx=\int_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=\left[2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Big|_2^3=2+\ln\frac{3}{2}$$

上页 下页 返回

分部积分公式

设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$.

定积分的分部积分公式

上页 下页 返回

例8　计算下列积分

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x de^x = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \quad = e \; - e^x \Big|_0^1 \; = 1$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx = x \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} \quad = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$$

$$\int_1^2 x \ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2 \quad = \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

上页 下页 返回

例9 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}dx \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

上页 下页 返回

例10 计算$\int_{-1}^{1}(x+|x|)e^{-|x|}dx$

解 $\int_{-1}^{1}(x+|x|)e^{-|x|}dx=\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}dx+\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx$

$$=0\ +2\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}xd\left(-e^{-x}\right)=2(-xe^{-x}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}e^{-x}dx)$$

$$=2(-e^{-1}-e^{-x}\Big|_{0}^{1})$$

$$=2(1-\frac{2}{e})$$

上页 下页 返回