

2

Formulações Matemáticas para os Problemas Híbridos de Projeto de Redes e de Localização de Facilidades

Este capítulo propõe formulações matemáticas de programação linear inteira para os problemas híbridos de projeto de redes e de localização de facilidades, mostrando dois modelos para o problema das p -medianas conectadas e um modelo para o problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas.

Primeiramente, serão apresentadas as definições e formulações matemáticas de três problemas clássicos. A Seção 2.1 define o problema de Steiner em grafos e apresenta duas formulações para o mesmo: um modelo baseado no problema de fluxo em redes com várias comodidades [43, 64] e um modelo baseado no problema da árvore geradora mínima restrita por grau [6, 43]. As Seções 2.2 e 2.3 apresentam, respectivamente, as definições do problema das p -medianas e do problema de localização de facilidades não-capacitadas, assim como suas respectivas formulações clássicas.

Em seguida, serão mostradas as definições e formulações propostas para os problemas híbridos. A Seção 2.4 define o problema das p -medianas conectadas e apresenta dois modelos: o primeiro une a formulação por fluxos do problema de Steiner em grafos com a formulação de p -medianas e o segundo une a formulação por árvore do problema de Steiner em grafos com a formulação de p -medianas. A Seção 2.5 define o problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas e apresenta um modelo que une a formulação por árvore do problema de Steiner em grafos com a formulação clássica do problema de localização de facilidades não-capacitadas.

Na Seção 2.6, comparações entre as duas formulações propostas para o problema das p -medianas conectadas serão realizadas em instâncias testes, utilizando-se um resolvidor de programação linear inteira com o intuito de apontar a melhor formulação para o problema nas instâncias testadas. Por último, na Seção 2.7, conclusões e considerações finais serão apresentadas sobre as formulações propostas.

2.1

Problema de Steiner em Grafos

O problema de Steiner em grafos pode ser definido como se segue [61]: dados um grafo não-orientado $G = (V, E)$, com o conjunto V de índices dos vértices do grafo, arestas E , custos positivos $c_{ij} > 0$ associados às arestas e o conjunto $T \subseteq V$ de índices dos vértices terminais, encontrar um subgrafo conexo de G de custo mínimo que contenha todos os vértices de T . Como os custos das arestas são positivos, a solução ótima será sempre uma árvore, denominada árvore de Steiner mínima.

Esse problema é NP-árduo [28], sendo bastante estudado na literatura [61, 63] e possui diversas formulações de programação inteira (mista) [43]. Os modelos descritos a seguir são baseados no problema de fluxos em redes com várias comodidades e no problema da árvore geradora mínima restrita por grau.

2.1.1

Formulação Baseada em Fluxos

O problema de fluxos em uma rede consiste no envio de uma comodidade (mercadoria, produto) de um nó origem para um nó destino, otimizando-se algum critério e obedecendo-se restrições de capacidade. Contudo, existem aplicações que necessitam que várias comodidades, muitas vezes com restrições de fluxo diferentes, compartilhem a mesma rede. Os problemas em que as comodidades compartilham os mesmos recursos da rede são denominados de problemas de fluxos em redes com várias comodidades ou multi-comodidades. Assim, o fluxo correspondente a cada par origem-destino é visualizado como uma diferente comodidade.

Seja um grafo orientado $G = (V, A)$ formado a partir do grafo $G = (V, E)$, substituindo-se cada aresta $(i, j) \in E$ por dois arcos $[i, j], [j, i] \in A$, tal que $c_{ij} = c_{ji}$. Suponha, sem perda de generalidade, que o vértice indexado por 1 é um vértice terminal. Seja também $T_1 = T \setminus \{1\}$ o conjunto dos demais vértices terminais. No problema de Steiner em um grafo orientado, deseja-se encontrar uma sub-árvore de custo mínimo que contenha um caminho direcionado entre o vértice terminal 1 e cada vértice terminal $k \in T_1$. O custo total da árvore é a soma dos custos dos arcos que dela fazem parte.

Nesse modelo, cada caminho a partir do vértice terminal 1 corresponde a um fluxo de uma comodidade entre os vértices terminais 1 e k , resultando assim, em $|T| - 1$ comodidades diferentes. Desta maneira, representa-se a conectividade do problema de Steiner em grafos via um problema de fluxos em uma rede com várias comodidades [64]. Seja w_{ij}^k a quantidade de fluxo da comodidade k passando pelo arco $[i, j] \in A$ tendo como origem o vértice terminal 1 e como destino qualquer vértice terminal $k \in T_1$.

O problema de Steiner em um grafo orientado modelado por programação inteira 0-1 utiliza a seguinte variável de decisão [64]:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } [i, j] \in A \text{ é incluído na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min } \sum_{[i,j] \in A} c_{ij} z_{ij} \quad (2-1)$$

sujeito a:

$$\sum_{[i,j] \in A} w_{ij}^k - \sum_{[j,i] \in A} w_{ji}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1 \\ -1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq 1, k \end{cases} \quad \forall i \in V, \forall k \in T_1 \quad (2-2)$$

$$w_{ij}^k \leq z_{ij}, \forall [i, j] \in A, \forall k \in T_1 \quad (2-3)$$

$$w_{ij}^k \geq 0, \forall [i, j] \in A, \forall k \in T_1 \quad (2-4)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall [i, j] \in A \quad (2-5)$$

A função objetivo (2-1) minimiza a soma dos custos nos arcos que compõem a árvore. As restrições (2-2) são as equações de conservação de fluxo, indicando que uma unidade de fluxo originária do vértice terminal 1 deve ser enviada até o vértice terminal k , passando, se necessário, por outros vértices. Os primeiro e segundo termos do lado esquerdo da equação representam, respectivamente, a soma dos fluxos que saem e entram no vértice $i \in V$. A diferença entre a soma dos fluxos que saem e entram no vértice 1 (nó fonte) deve ser igual a 1. A diferença entre a soma dos fluxos que saem e entram no vértice k (nó consumidor) deve ser igual a -1. Para qualquer outro vértice, a diferença entre a soma dos fluxos que saem e entram no vértice (nó de transbordo) deve ser igual a 0. As restrições (2-3) indicam que o fluxo direcionado entre os vértices terminais 1 e k passando por um arco $[i, j]$ é permitido somente se este arco for incluído na solução. As restrições (2-4) impõem que o fluxo direcionado entre os vértices terminais 1 e k passando por um arco $[i, j]$ seja não-negativo. As restrições (2-5) estabelecem a variável de decisão z_{ij} como binária.

2.1.2

Formulação Baseada em Árvore Geradora Mínima Restrita por Grau

Segundo a formulação baseada em árvore, o problema de Steiner em grafos equivale a encontrar uma árvore geradora mínima restrita por grau

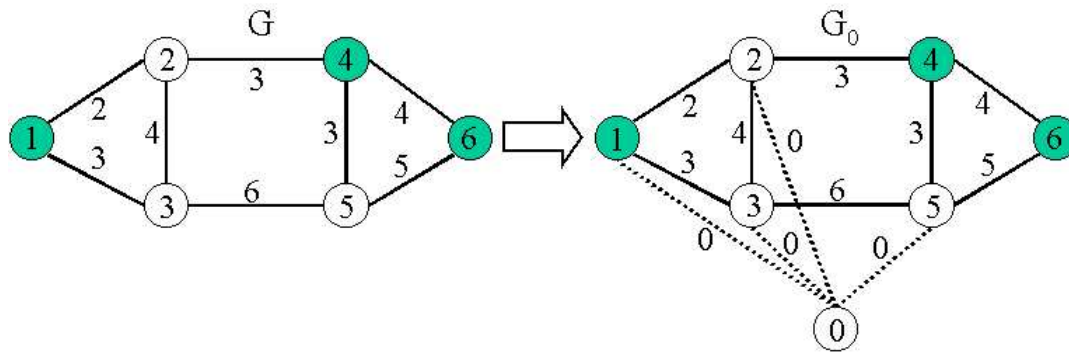


Figura 2.1: Grafo original $G = (V, E)$ e grafo modificado $G_0 = (V_0, E_0)$.

em um grafo modificado $G_0 = (V_0, E_0)$, produzido adicionando-se ao grafo original $G = (V, E)$ um vértice artificial indexado por 0 e conectando-o através de arestas de custo zero a todos os vértices no conjunto $V \setminus T$ e a um vértice terminal qualquer indexado por 1 [6, 43]. A Figura 2.1 mostra um exemplo de um grafo original G e de um grafo modificado G_0 com custos positivos associados às arestas, onde $T = \{1, 4, 6\}$ são os vértices terminais e $V \setminus T = \{2, 3, 5\}$ são os demais vértices do grafo.

A restrição por grau impõe que na árvore geradora mínima, cada vértice do conjunto $V \setminus T$ adjacente ao vértice artificial 0 deve possuir grau um. Assim, a solução ótima para o problema da árvore geradora mínima restrita por grau da Figura 2.1 é apresentada na Figura 2.2. A sub-árvore conectada ao vértice terminal 1 será a árvore de Steiner, isto é, a solução ótima para o problema de Steiner no grafo original G , representada na figura pelos vértices e arestas dentro do retângulo pontilhado. Os vértices que não estão na árvore estão diretamente conectados ao vértice artificial 0 por arestas de custo zero [6].

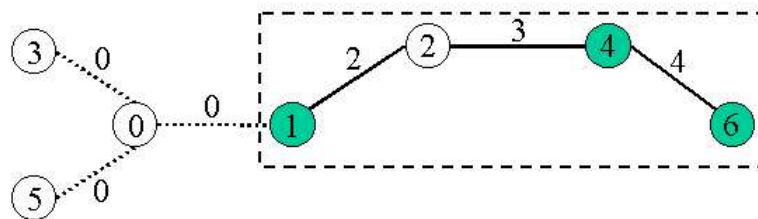


Figura 2.2: Solução ótima para o problema da árvore geradora mínima restrita por grau no grafo G_0 .

Define-se δ_i como o conjunto de arestas do grafo original G que possuem uma extremidade no vértice i , isto é, $\delta_i = [(i, j) \mid (i, j) \in E] \cup [(j, i) \mid (j, i) \in E]$ [43]. Como exemplo, seja o grafo original $G = (V, E)$ mostrado na Figura 2.1. Para o vértice 2, tem-se $\delta_2 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

O problema de Steiner em um grafo não-orientado modelado por programação inteira 0-1 utiliza a seguinte variável de decisão [6]:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \in E_0 \text{ é incluída na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in E_0} c_{ij} z_{ij} \quad (2-6)$$

sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in E_0} z_{ij} = |V_0| - 1 \quad (2-7)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_0; i,j \in W} z_{ij} \leq |W| - 1, \forall W \neq \emptyset, W \subset V_0 \quad (2-8)$$

$$z_{0i} + z_{ij} \leq 1, \forall i \in V \setminus T, \forall (i, j) \in \delta_i \quad (2-9)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E_0 \quad (2-10)$$

A função objetivo (2-6) minimiza a soma dos custos das arestas que compõem a árvore. As restrições (2-7) e (2-8) asseguram que as arestas escolhidas formam uma árvore geradora no grafo modificado G_0 . As restrições (2-7) relacionam-se à quantidade de arestas utilizadas e as restrições (2-8) são as de eliminação de sub-rotas, onde W representa um subconjunto qualquer de vértices do conjunto V_0 . As restrições (2-9) asseguram que se a aresta $(0, i)$ for usada, com $i \in V \setminus T$, nenhuma outra aresta do grafo original G que possui uma extremidade no vértice i pode ser utilizada. Assim, garante-se que, na solução ótima do grafo modificado, o vértice i esteja conectado somente ao vértice artificial 0, não pertencendo, assim, à árvore de Steiner conectada ao vértice terminal 1. As restrições (2-10) estabelecem a variável de decisão z_{ij} como binária.

2.2

Problema das p -Medianas

O problema das p -medianas pode ser definido como se segue [24, 25]: dados o conjunto F de índices das m potenciais localizações de facilidades (medianas), o conjunto U de índices dos n usuários (clientes), os custos d_{ij} de servir cada usuário i a partir de cada potencial localização de facilidade $j, \forall i \in U, \forall j \in F$ e uma constante $p \leq m$, determine quais p facilidades instalar com o objetivo de minimizar a soma dos custos de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima. O problema das p -medianas é NP-árduo [29] e é um dos mais conhecidos problemas de localização.

O problema das p -medianas modelado por programação inteira 0-1 utiliza as seguintes variáveis de decisão [50]:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o usuário } i \in U \text{ está associado à facilidade } j \in F, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in F, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min} \sum_{i \in U} \sum_{j \in F} d_{ij} x_{ij} \quad (2-11)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in F} x_{ij} = 1, \forall i \in U \quad (2-12)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i \in U, \forall j \in F \quad (2-13)$$

$$\sum_{j \in F} y_j = p \quad (2-14)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \forall i \in U, \forall j \in F \quad (2-15)$$

A função objetivo (2-11) minimiza a soma dos custos de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima. As restrições (2-12) expressam que cada usuário será designado para exatamente uma única mediana. As restrições (2-13) previnem que um usuário seja designado para uma potencial localização de facilidade que não esteja selecionada como mediana. A restrição (2-14) força que o número total de facilidades abertas seja igual a p . As restrições (2-15) estabelecem as variáveis de decisão x_{ij} e y_j como binárias.

2.3

Problema de Localização de Facilidades Não-Capacitadas

O problema de localização de facilidades não-capacitadas é outro conhecido problema de localização, que difere do problema das p -medianas em dois aspectos: existe um custo associado com a instalação de uma facilidade em uma potencial localização e não existe um limite superior no número de facilidades que podem ser abertas.

O problema pode, assim, ser definido [31]: dados o conjunto F de índices das m potenciais localizações de facilidades, o conjunto U de índices dos n usuários, os custos d_{ij} de servir cada usuário i a partir de cada potencial localização de facilidade $j, \forall i \in U, \forall j \in F$ e os custos de instalação c_j de uma facilidade em uma potencial localização $j, \forall j \in F$, determine o subconjunto de facilidades a serem abertas, minimizando a soma dos custos de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima com a soma

dos custos de instalação das facilidades. O termo “não-capacitadas” se refere às facilidades, que podem servir uma quantidade ilimitada de usuários. Esse problema também é NP-árduo [12].

O problema de localização de facilidades não-capacitadas modelado por programação inteira 0-1 utiliza as seguintes variáveis de decisão [31]:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o usuário } i \in U \text{ está associado à facilidade } j \in F, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in F, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min} \sum_{j \in F} c_j y_j + \sum_{i \in U} \sum_{j \in F} d_{ij} x_{ij} \quad (2-16)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in F} x_{ij} = 1, \forall i \in U \quad (2-17)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i \in U, \forall j \in F \quad (2-18)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \forall i \in U, \forall j \in F \quad (2-19)$$

A função objetivo (2-16) minimiza a soma dos custos de instalação das facilidades com a soma dos custos de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima. As restrições (2-17) expressam que cada usuário será designado para exatamente uma única mediana. As restrições (2-18) previnem que um usuário seja designado para uma potencial localização de facilidade que não esteja selecionada como mediana. As restrições (2-19) estabelecem as variáveis de decisão x_{ij} e y_j como binárias.

2.4

Problema Híbrido das p -Medianas Conectadas

O problema das p -medianas conectadas pode ser definido como se segue. Seja um grafo não-orientado $G = (V, E)$, com o conjunto $V = \{1, 2, \dots, n\}$ de índices dos vértices, o conjunto de arestas E e custos de instalação positivos c_{ij} de uma aresta $(i, j) \in E$. Considera-se também o mesmo conjunto V de índices das n potenciais localizações de facilidades (não-capacitadas), o mesmo conjunto V de índices dos n usuários ou clientes (com demanda unitária), os valores d_{ij} representando o custo de servir cada usuário i a partir de cada potencial localização de facilidade $j, \forall i, j \in V$ e uma constante $p \leq n$. Assim, cada vértice é simultaneamente um usuário e uma potencial

localização de facilidade. Deseja-se instalar p facilidades nos vértices do grafo, associando-se cada usuário com a facilidade aberta mais próxima, e conectar as p facilidades abertas por uma árvore. O objetivo do problema é minimizar o custo total de conectar as facilidades abertas e de servir os usuários. A árvore conecta todas as facilidades abertas, mas também inclui outros vértices que não foram selecionados como medianas (vértices de Steiner). Esses vértices são considerados usuários e, portanto, devem ser atendidos por uma das p facilidades abertas.

Retirando-se as restrições que conectam as p medianas instaladas através de uma árvore de Steiner, tem-se simplesmente o clássico problema das p -medianas, sendo, esse último então um caso especial do problema híbrido na qual as restrições de conectividade foram eliminadas. Como o problema das p -medianas é NP-árduo [29], também o é o problema das p -medianas conectadas, exceto para os casos em que $p = 1$ ou $p = n$. Quando $p = 1$, o problema híbrido torna-se o de encontrar a única mediana do grafo, pois o vértice escolhido como mediana não se conectará a nenhum outro e servirá aos clientes em todos os nós do grafo. Quando $p = n$, tem-se o problema da árvore geradora mínima, pois todos os usuários serão servidos por facilidades instaladas nos próprios vértices e uma árvore de custo mínimo conectará todos os nós do grafo.

Serão propostas duas formulações para o problema das p -medianas conectadas. A primeira une a formulação de Steiner baseada em fluxos com a formulação clássica das p -medianas. A segunda une a formulação de Steiner baseada em árvore geradora mínima restrita por grau com a formulação das p -medianas.

2.4.1

Formulação Baseada em Fluxos

Na formulação baseada em fluxos para o problema de Steiner em grafos, sabe-se, antecipadamente, qual vértice será o nó fonte (nó terminal 1) e quais vértices serão os nós consumidores (demais vértices terminais), pois o conjunto T é uma entrada para o problema. Assim, $|T| - 1$ fluxos unitários de comodidades diferentes originários do vértice terminal 1 serão consumidos pelos demais vértices terminais, passando, se necessário, pelos vértices de Steiner pertencentes ao conjunto $V \setminus T$. As restrições do modelo garantem encontrar um subgrafo conexo, mais precisamente uma árvore, e a função objetivo do problema garante que a árvore seja de custo mínimo.

A idéia da formulação baseada em fluxos para o problema das p -medianas conectadas é similar à descrita no parágrafo anterior. Porém, não se sabe antecipadamente onde localizar as p facilidades nos vértices do grafo. Associa-se, então, uma comodidade k a cada mediana a ser instalada e cria-se um vértice artificial 0 que funcionará como um nó fonte enviando fluxos unitários

de p comodidades diferentes para as medianas a serem instaladas, passando, se necessário, por vértices intermediários. O modelo garante um caminho mínimo direcionado entre o vértice artificial 0 e cada uma das p medianas instaladas, com os usuários servidos pela facilidade aberta mais próxima.

Seja um grafo orientado $G'_0 = (V'_0, A'_0)$ formado a partir do grafo $G = (V, E)$, substituindo-se cada aresta $(i, j) \in E$ por dois arcos $[i, j], [j, i] \in A'_0$, tal que $c_{ij} = c_{ji}$. Adiciona-se também ao grafo G'_0 um vértice artificial indexado por 0 e arcos $[0, j], \forall j \in V$ com custos de instalação zero entre o vértice 0 e cada um dos vértices em V . Sejam o conjunto $K = \{1, 2, \dots, p\}$ de índices da quantidade de medianas a serem instaladas e w_{ij}^k a quantidade de fluxo da comodidade $k \in K$ passando através do arco $[i, j] \in A'_0$.

O problema das p -medianas conectadas pode ser modelado com as seguintes variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o usuário } i \in V \text{ está associado à facilidade } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$f_j^k = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in V \text{ e associada à} \\ & \text{comodidade } k \in K, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } [i, j] \in A'_0 \text{ é incluído na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} + \sum_{[i,j] \in A'_0} c_{ij} z_{ij} \quad (2-20)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V \quad (2-21)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i, j \in V \quad (2-22)$$

$$\sum_{j \in V} f_j^k = 1, \forall k \in K \quad (2-23)$$

$$y_j = \sum_{k \in K} f_j^k, \forall j \in V \quad (2-24)$$

$$\sum_{[i,j] \in A'_0} w_{ij}^k - \sum_{[j,i] \in A'_0} w_{ji}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0 \\ -f_j^k, & \text{se } j \neq 0 \end{cases} \forall j \in V'_0, \forall k \in K \quad (2-25)$$

$$\sum_{[0,j] \in A'_0} z_{0j} = 1 \quad (2-26)$$

$$w_{ij}^k \leq z_{ij}, \forall [i,j] \in A'_0, \forall k \in K \quad (2-27)$$

$$w_{ij}^k \geq 0, \forall [i,j] \in A'_0, \forall k \in K \quad (2-28)$$

$$x_{ij}, y_j, f_j^k \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V, \forall k \in K \quad (2-29)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall [i,j] \in A'_0 \quad (2-30)$$

A função objetivo (2-20) minimiza o custo de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima e o custo de conectar as facilidades abertas. As restrições (2-21) expressam que cada usuário será designado para exatamente uma única mediana. As restrições (2-22) previnem que um usuário seja designado para uma potencial localização de facilidade que não esteja selecionada como mediana. As restrições (2-23) mostram que cada comodidade k deve ser associada a uma única facilidade localizada em j , indicando que não se pode associar facilidades diferentes à mesma comodidade. As restrições (2-24) asseguram que, se uma facilidade está localizada em j ($y_j = 1$), então exatamente uma comodidade k deve ser associada a j . As restrições (2-25) são as equações de conservação de fluxo para cada comodidade k . Os primeiro e segundo termos do lado esquerdo da equação representam, respectivamente, a soma dos fluxos que entram e saem no vértice $j \in V'_0$. A diferença entre a soma dos fluxos que entram e saem no vértice artificial 0 deve ser igual a 1. Para outro vértice qualquer, a diferença entre a soma dos fluxos que entram e saem no vértice deve ser igual a $-f_j^k$. O modelo determinará, para cada comodidade k , o nó consumidor (caso em que $f_j^k = 1$) e os nós intermediários (casos em que $f_j^k = 0$). A restrição (2-26) assegura que somente um arco $[0, j] \in A'_0$ pode ser utilizado. Assim, o vértice j do grafo original associado ao arco é responsável por distribuir o fluxo das diferentes comodidades para as medianas instaladas. Na solução ótima, o vértice j será sempre uma facilidade aberta devido à minimização ocorrida na função objetivo. As restrições (2-27) indicam que o fluxo passando por um arco $[i, j]$ associado a comodidade k é permitido somente se este arco for incluído na solução. As restrições (2-28) impõem que o fluxo passando por um arco $[i, j]$ associado a comodidade k seja não-negativo. As restrições (2-29) e (2-30) estabelecem as variáveis de decisão x_{ij} , y_j , f_j^k e z_{ij} como binárias.

2.4.2

Formulação Baseada em Árvore Geradora Mínima Restrita por Grau

Para se modelar o problema de Steiner em grafos através da formulação baseada em árvore, cria-se um grafo modificado adicionando-se ao grafo original um vértice artificial 0 e conectando-o através de arestas com custos zero a um vértice terminal qualquer (terminal 1) e aos vértices no conjunto $V \setminus T$. Resolvendo-se o problema da árvore geradora mínima com a restrição de que os vértices do conjunto $V \setminus T$ adjacentes ao vértice artificial 0 deve possuir grau um, tem-se a solução para o problema de Steiner no grafo original (árvore conectada ao vértice terminal 1). Nessa formulação, sabe-se, antecipadamente, onde conectar o vértice artificial 0 aos vértices do grafo original, pois o conjunto de nós terminais T é uma entrada para o problema.

A idéia da formulação baseada em árvore geradora mínima restrita por grau para o problema das p -medianas conectadas é similar à descrita no parágrafo anterior. Contudo, não se sabe antecipadamente onde localizar as p facilidades nos vértices do grafo. Criou-se, então, dois vértices artificiais 0 e $n + 1$.

O vértice 0 ficará responsável por se conectar a uma das medianas a ser instalada. Em uma analogia com o problema de Steiner em grafos, essa ligação corresponde a conexão entre os vértices 0 (artificial) e 1 (terminal).

O vértice artificial $n + 1$ ficará responsável pela restrição por grau. No problema de Steiner em grafos, os vértices terminais, com exceção do vértice 1, não estão ligados ao vértice artificial 0. Da mesma maneira, para o problema das p -medianas conectadas, ao se instalar uma mediana em um determinado vértice, este não ficará ligado ao vértice $n + 1$. No problema de Steiner em grafos, cada vértice no conjunto $V \setminus T$ está ligado ao vértice 0 e permanecerá conectado ao mesmo com grau um caso não esteja na árvore de Steiner ótima. Similarmente, no problema das p -medianas conectadas, os vértices que não possuem facilidades instaladas estarão ligados ao vértice $n + 1$ se os mesmos não estiverem na árvore de Steiner encontrada pela solução ótima. A árvore de Steiner formada pelas p medianas instaladas estará ligada ao vértice artificial 0, com os usuários sendo servidos pela facilidade aberta mais próxima.

Considere o grafo $G''_0 = (V''_0, E''_0)$ formado adicionando-se ao grafo $G = (V, E)$ dois vértices artificiais indexados por 0 e $n + 1$ e arestas $(0, j)$ e $(n + 1, j), \forall j \in V$, entre os vértices artificiais e cada um dos vértices de V com custos de instalação zero. Além disso, adiciona-se uma aresta $(0, n + 1)$ entre os vértices artificiais também com custo de instalação zero. Define-se δ_j como o conjunto de arestas do grafo original $G = (V, E)$ que possuem uma extremidade no vértice j , isto é, $\delta_j = [(i, j) \mid (i, j) \in E] \cup [(j, i) \mid (j, i) \in E]$.

O problema das p -medianas conectadas pode ser modelado por programação inteira 0-1 com as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o usuário } i \in V \text{ está associado à facilidade } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \in E_0'' \text{ é incluída na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_0''} c_{ij} z_{ij} \quad (2-31)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V \quad (2-32)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i, j \in V \quad (2-33)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p \quad (2-34)$$

$$\sum_{(0,j) \in E_0''} z_{0j} = 1 \quad (2-35)$$

$$z_{0j} \leq y_j, \forall j \in V \quad (2-36)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_0''} z_{ij} = |V_0''| - 1 \quad (2-37)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_0''; i,j \in W} z_{ij} \leq |W| - 1, \forall W \neq \emptyset, W \subset V_0'' \quad (2-38)$$

$$z_{(n+1)j} + y_j \leq 1, \forall j \in V \quad (2-39)$$

$$z_{(n+1)j} + z_{ij} \leq 1, \forall j \in V, \forall (i, j) \in \delta_j \quad (2-40)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V \quad (2-41)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E_0'' \quad (2-42)$$

A função objetivo (2-31) minimiza o custo de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima e o custo de conectar as facilidades abertas. As restrições (2-32) expressam que cada usuário será designado para exatamente uma única mediana. As restrições (2-33) previnem que um usuário seja designado para uma potencial localização de facilidade que não esteja selecionada como mediana. A restrição (2-34) garante que p medianas serão instaladas nos

vértices do grafo. A restrição (2-35) assegura que uma única aresta $(0, j)$ será utilizada. As restrições (2-36) garantem que não se pode instalar a aresta $(0, j)$ se a potencial localização j não esteja selecionada como mediana. A restrição (2-35) e as restrições (2-36) asseguram a conexão entre o vértice artificial 0 e uma das p medianas instaladas. As restrições (2-37) e (2-38) asseguram que as arestas escolhidas formam uma árvore geradora no grafo G_0'' . As restrições (2-37) relacionam-se à quantidade de arestas utilizadas e as restrições (2-38) são as de eliminação de sub-rotas, onde W representa um subconjunto qualquer de vértices do conjunto V_0'' . As restrições (2-39) asseguram que, se uma mediana for instalada no vértice j , isto é, se $y_j = 1$, então a aresta $(n + 1, j)$ não será utilizada. As restrições (2-40) asseguram que, caso não ocorra a instalação de uma mediana no vértice j , isto é, se $y_j = 0$ e a aresta $(n + 1, j)$ for utilizada, então nenhuma outra aresta do grafo original G que possui uma extremidade no vértice j pode ser utilizada. Assim, os vértices que não pertencem à árvore de Steiner estarão diretamente ligados ao vértice artificial $n + 1$. As restrições (2-41) e (2-42) estabelecem as variáveis de decisão x_{ij} , y_j e z_{ij} como binárias.

2.5

Problema Híbrido de Localização de Facilidades Não-Capacitadas Conectadas

O problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas difere do problema das p -medianas conectadas em dois aspectos: existe um custo associado na instalação de uma facilidade em uma potencial localização e não existe um limite superior no número de facilidades que podem ser abertas.

O problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas pode ser definido como se segue: seja um grafo não-orientado $G = (V, E)$ com o conjunto $V = \{1, 2, \dots, n\}$ de índices dos vértices do grafo, arestas E e custos de instalação positivos c_{ij} de uma aresta $(i, j) \in E$. Considera-se também o mesmo conjunto V de índices das n potenciais localizações de facilidades (não-capacitadas), o mesmo conjunto V de índices dos n usuários (com demanda unitária), os valores d_{ij} representando o custo de servir cada usuário i a partir de cada potencial localização de facilidade $j, \forall i, j \in V$ e o custo de instalação c_j de uma facilidade no vértice $j, \forall j \in V$. Assim, cada vértice é simultaneamente um usuário e uma potencial localização de facilidade. Deseja-se instalar um conjunto de facilidades nos vértices do grafo, associando-se os usuários à facilidade aberta mais próxima, e conectar as facilidades abertas por uma árvore. O objetivo do problema é minimizar o custo total de conectar as facilidades abertas, o custo fixo de instalação das mesmas e o custo de servir os usuários. A árvore conecta todas as facilidades abertas, mas também inclui outros vértices que não foram selecionados como medianas (vértices de Steiner). Esses vértices são considerados usuários e, portanto, devem ser

atendidos por uma das facilidades abertas.

Retirando-se as restrições que conectam as medianas instaladas através de uma árvore de Steiner, tem-se simplesmente o clássico problema de localização de facilidades não-capacitadas, sendo, esse último então um caso especial do problema híbrido na qual as restrições de conectividade foram eliminadas. Como esse problema é NP-árduo [12], também o é o problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas.

Na próxima seção será apresentada uma formulação que une a formulação de Steiner baseada em árvore geradora mínima restrita por grau com a formulação clássica do problema de localização de facilidades não-capacitadas.

2.5.1

Formulação Baseada em Árvore Geradora Mínima Restrita por Grau

A formulação baseada em árvore para o problema das p -medianas conectadas pôde facilmente ser adaptada para o problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas, acrescentando-se na função objetivo do primeiro problema uma parcela referente à soma dos custos de instalação de uma facilidade em uma potencial localização j e retirando-se a restrição (2-34) que força a instalação de um número fixo de medianas.

Considere o grafo $G_0^* = (V_0^*, E_0^*)$ formado adicionando-se ao grafo $G = (V, E)$ dois vértices artificiais indexados por 0 e $n + 1$ e arestas $(0, j)$, $(n + 1, j)$, $\forall j \in V$, entre os vértices artificiais e cada um dos vértices de V com custos de instalação zero. Além disso, adiciona-se uma aresta $(0, n + 1)$ entre os vértices artificiais, também com custo de instalação zero.

O problema de localização de facilidades não-capacitadas conectadas modelado por programação inteira 0-1 utiliza as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o usuário } i \in V \text{ está associado à facilidade } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se há uma facilidade localizada em } j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } (i, j) \in E_0^* \text{ é incluída na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e pode ser expresso como segue:

$$\text{Min} \sum_{j \in V} c_j y_j + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_0^*} c_{ij} z_{ij} \quad (2-43)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \forall i \in V \quad (2-44)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \forall i, j \in V \quad (2-45)$$

$$\sum_{(0,j) \in E_0^*} z_{0j} = 1 \quad (2-46)$$

$$z_{0j} \leq y_j, \forall j \in V \quad (2-47)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_0^*} z_{ij} = |V_0^*| - 1 \quad (2-48)$$

$$\sum_{(i,j) \in E_0^*; i,j \in W} z_{ij} \leq |W| - 1, \forall W \neq \emptyset, W \subset V_0^* \quad (2-49)$$

$$z_{(n+1)j} + y_j \leq 1, \forall j \in V \quad (2-50)$$

$$z_{(n+1)j} + z_{ij} \leq 1, \forall j \in V_0^*, \forall (i, j) \in \delta_j \quad (2-51)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V \quad (2-52)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E_0^* \quad (2-53)$$

A função objetivo (2-43) minimiza o custo de instalação das facilidades, o custo de servir cada usuário com a facilidade aberta mais próxima e o de conectar as facilidades abertas. As restrições (2-44) expressam que cada usuário será designado para exatamente uma única mediana. As restrições (2-45) previnem que um usuário seja designado para uma potencial localização de facilidade que não esteja selecionada como mediana. A restrição (2-46) assegura que uma única aresta $(0, j)$ será utilizada. As restrições (2-47) garantem que não se pode instalar a aresta $(0, j)$ se a potencial localização j não estiver selecionada como mediana. A restrição (2-46) e as restrições (2-47) asseguram a conexão do vértice artificial 0 a uma das medianas instaladas. As restrições (2-48) e (2-49) asseguram que as arestas escolhidas formam uma árvore geradora no grafo G_0^* . As restrições (2-48) relacionam-se à quantidade de arestas utilizadas e as restrições (2-49) são as de eliminação de sub-rotas, onde W representa um subconjunto qualquer de vértices do conjunto V_0^* . As restrições (2-50) asseguram que, se uma mediana for instalada no vértice j , isto é, se $y_j = 1$, então a aresta $(n + 1, j)$ não será utilizada. As restrições (2-51) asseguram que, caso não ocorra a instalação de uma mediana no vértice j , isto é, se $y_j = 0$ e a aresta $(n + 1, j)$ for utilizada, então nenhuma outra aresta do grafo original G que possui uma extremidade no vértice j pode ser utilizada. Assim, os vértices que não pertencem à árvore de Steiner estarão diretamente ligados ao vértice artificial $n + 1$. As restrições (2-52) e (2-53) estabelecem as variáveis de decisão x_{ij} , y_j e z_{ij} como binárias.

O modelo garante que uma árvore de Steiner mínima conectará um

subconjunto de medianas instaladas, com os usuários sendo servidos pela facilidade aberta mais próxima.

2.6

Comparações entre os Modelos para o Problema das p -Medianas Conectadas

As comparações entre o modelo por fluxos e o modelo por árvore para o problema das p -medianas conectadas serão realizadas em grafos retirados da literatura de p -medianas [25], do problema de Steiner [60] e de modelos integrados de projeto de redes e de localização de facilidades [16, 36, 37].

O primeiro grupo de instâncias, denominado grupo de instâncias proporcionais, foi obtido como se segue. Dado um grafo $G = (V, E)$, os custos associados às arestas foram gerados aleatoriamente entre $[1, 20]$, utilizando-se o gerador de números aleatórios de Matsumoto e Nishimura [53]. O custo de servir cada usuário i a partir de cada facilidade j é dado pelo valor d_{ij} do caminho mais curto do vértice i ao vértice j no grafo G , calculado a partir dos custos associados às arestas. O custo de instalação c_{ij} de cada aresta é obtido multiplicando-se o custo da mesma pelo fator w , isto é, $c_{ij} = a_{ij} \times w$, onde a_{ij} é o custo associado à aresta (i, j) e w assume os valores 2, 5 e 10.

O segundo grupo de instâncias, denominado grupo de instâncias não proporcionais, foi obtido a partir do grupo de instâncias proporcionais da seguinte maneira. Dado um grafo $G = (V, E)$ com custos associados às arestas entre $[1, 20]$, o custo de servir cada usuário i a partir de cada facilidade j é dado pelo valor d_{ij} do caminho mais curto do vértice i ao vértice j no grafo G , como no primeiro grupo de instâncias. Porém, o custo de instalação c_{ij} de cada aresta é escolhido aleatoriamente no intervalo $[(w \times a_{ij}) - (w \times a_{ij})/2, (w \times a_{ij}) + (w \times a_{ij})/2]$, onde a_{ij} é o custo associado à aresta (i, j) e w assume os valores 2, 5 e 10.

Os modelos foram executados em uma máquina Pentium IV 3.2 GHz com 1 Gbyte de memória RAM sob o sistema operacional Windows XP utilizando-se a versão 8.0 do resolvidor de programação linear inteira ILOG CPLEX. Para a execução do modelo baseado em árvore, a restrição de eliminação de sub-rotas foi substituída pela restrição de Miller-Tucker-Zemlin utilizada no problema do caixeiro viajante [38].

As Tabelas 2.1 a 2.12 mostram os resultados obtidos pela formulação baseada em fluxos e pela formulação baseada em árvore para as instâncias proporcionais e não proporcionais. As colunas das tabelas indicam, respectivamente, o nome do problema (Instância), o número de vértices do grafo (n), o número de arestas do grafo ($|E|$), o número de facilidades a serem instaladas (p), o valor da solução ótima do problema (F_O), o tempo gasto em segundos para encontrar a solução ótima (Tempo (s)) e o número de nós explorados pelo

algoritmo de *branch and bound* (Nós).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_1	9	20	3	36	0,30	128
P_2	9	20	4	36	1,33	973
P_3	10	14	3	18	0,30	119
P_4	10	14	4	17	1,00	438
P_5	10	18	3	49	0,59	325
P_6	10	18	4	48	1,59	1.163
P_7	15	30	3	93	1,55	647
P_8	15	30	4	85	12,50	5.096
P_9	15	30	5	83	296,17	111.600
P_10	17	40	3	97	3,27	880
P_11	17	40	4	94	52,25	18.532
P_12	17	40	5	91	61,19	16.796
P_13	21	38	3	76	2,30	322
P_14	21	38	4	70	129,83	36.830
P_15	21	38	5	68	576,72	103.452
P_16	21	38	6	66	12.396,83	1.809.532
P_17	21	45	3	138	3,84	708
P_18	21	45	4	126	521,22	141.452
P_19	21	45	5	118	15.383,72	3.084.294
P_20	21	45	6	114	119.958,31	20.410.121
P_21	21	52	3	124	3,09	633
P_22	21	52	4	121	24,98	4.117
P_23	21	52	5	118	1.709,16	273.834
P_24	21	52	6	116	7.333,94	1.056.254
P_25	25	40	3	117	3,44	363
P_26	25	40	4	109	96,75	6.428
P_27	25	40	5	103	3.813,91	406.974
P_28	25	40	6	100	2.014,67	220.022

Tabela 2.1: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias proporcionais ($w = 2$).

Para a formulação por fluxos, independente do valor de w e do grupo de instâncias (proporcionais e não proporcionais), observa-se que, mantendo-se o mesmo grafo e aumentando-se o número de facilidades a serem abertas, aumenta-se a dificuldade para encontrar a solução ótima em termos de tempo de processamento e número de nós explorados. Como exemplo, sejam as instâncias proporcionais P_19 e P_20 ($w = 2$). Ao instalar uma única facilidade a mais no mesmo grafo, a instância P_20 explora aproximadamente 6,6 vezes mais nós do que a instância P_19, e gasta aproximadamente 7,7 vezes mais tempo do que a mesma para encontrar a solução ótima. Já na formulação por árvore, em alguns grupos de instâncias (proporcionais e não proporcionais), ocorre o mesmo padrão de comportamento, porém, as diferenças em termos de tempos de processamento permanecem na ordem dos segundos, e não aumenta-se demasiadamente o número de nós explorados.

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_29	9	20	3	50	0,22	67
P_30	9	20	4	58	1,59	1.543
P_31	10	14	3	26	0,30	126
P_32	10	14	4	29	1,52	1.024
P_33	10	18	3	68	0,42	122
P_34	10	18	4	72	0,81	484
P_35	15	30	3	123	2,00	752
P_36	15	30	4	126	7,34	3.404
P_37	15	30	5	128	172,36	64.730
P_38	17	40	3	119	2,25	599
P_39	17	40	4	122	17,84	5.192
P_40	17	40	5	126	100,69	27.426
P_41	21	38	3	96	4,31	1.184
P_42	21	38	4	94	74,17	18.094
P_43	21	38	5	96	212,75	45.075
P_44	21	38	6	98	2.000,20	399.423
P_45	21	45	3	185	28,72	8.263
P_46	21	45	4	187	253,89	65.712
P_47	21	45	5	185	7.331,91	1.377.828
P_48	21	45	6	184	27.696,42	4.450.700
P_49	21	52	3	147	2,19	387
P_50	21	52	4	149	19,91	4.137
P_51	21	52	5	152	246,53	53.180
P_52	21	52	6	158	1.617,08	242.045
P_53	25	40	3	139	10,27	1.596
P_54	25	40	4	136	45,70	8.062
P_55	25	40	5	135	320,22	48.937
P_56	25	40	6	133	1.133,42	162.556

Tabela 2.2: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias proporcionais ($w = 5$).

Observa-se, em geral, que a formulação por fluxos e por árvore encontra a solução ótima das instâncias não proporcionais em um menor tempo de processamento (explorando um menor número de nós) quando comparado com o tempo gasto pelas mesmas formulações para encontrar a solução ótima das instâncias proporcionais.

Ambos os modelos encontram a solução ótima nas 168 instâncias testadas. Porém, verifica-se uma maior explosão do número de nós explorados na formulação por fluxos do que na formulação por árvore, caracterizando uma maior dificuldade de resolução dos problemas pelo modelo por fluxos em relação ao modelo por árvore. A formulação por árvore é, na maioria das vezes, muito mais rápida do que a formulação por fluxos para encontrar a solução ótima dos problemas. Todas as instâncias foram resolvidas em menos de um minuto pela formulação por árvore, enquanto que algumas instâncias são resolvidas em horas pela formulação por fluxos.

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_57	9	20	3	65	0,20	37
P_58	9	20	4	83	0,73	464
P_59	10	14	3	36	0,25	82
P_60	10	14	4	45	1,22	747
P_61	10	18	3	92	0,36	100
P_62	10	18	4	112	0,80	477
P_63	15	30	3	143	1,63	472
P_64	15	30	4	166	3,55	1.503
P_65	15	30	5	178	44,67	15.914
P_66	17	40	3	133	0,70	98
P_67	17	40	4	149	6,03	1.471
P_68	17	40	5	165	37,16	11.249
P_69	21	38	3	111	2,52	349
P_70	21	38	4	118	21,08	5.937
P_71	21	38	5	126	107,91	23.952
P_72	21	38	6	138	812,76	173.479
P_73	21	45	3	225	7,69	1.382
P_74	21	45	4	241	103,36	22.175
P_75	21	45	5	249	1.801,94	303.584
P_76	21	45	6	259	5.489,17	780.932
P_77	21	52	3	162	1,78	178
P_78	21	52	4	178	14,59	2.305
P_79	21	52	5	192	74,86	19.264
P_80	21	52	6	208	543,00	99.529
P_81	25	40	3	154	3,66	499
P_82	25	40	4	158	21,72	4.028
P_83	25	40	5	166	261,45	48.545
P_84	25	40	6	174	1.455,19	305.195

Tabela 2.3: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias proporcionais ($w = 10$).

2.7

Considerações Finais

Neste capítulo foram formulados dois problemas que possuem características de projeto de redes e de localização de facilidades simultaneamente e que procuram localizar facilidades em uma rede, conectando-as por uma árvore de Steiner e minimizando o custo de atendimento oferecidos pelas facilidades abertas aos usuários da rede. Foram apresentadas, também, formulações de programação linear inteira para os mesmos. Para o primeiro, duas modelagens foram propostas: uma baseada na junção da formulação por fluxos para Steiner com a formulação clássica de p -medianas e a outra unindo a formulação por árvore de Steiner restrita por grau com a formulação das p -medianas. Esse último modelo pôde ser facilmente adaptado para o segundo problema, bastando para isso incluir um custo fixo para a instalação de uma facilidade em um vértice da rede e eliminar a restrição de limite superior no número de fa-

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_1	9	20	3	36	0,17	18
P_2	9	20	4	36	0,08	10
P_3	10	14	3	18	0,06	13
P_4	10	14	4	17	0,08	0
P_5	10	18	3	49	0,11	20
P_6	10	18	4	48	0,13	20
P_7	15	30	3	93	0,63	435
P_8	15	30	4	85	0,73	810
P_9	15	30	5	83	1,88	2.933
P_10	17	40	3	97	0,38	133
P_11	17	40	4	94	0,45	207
P_12	17	40	5	91	0,59	287
P_13	21	38	3	76	1,05	263
P_14	21	38	4	70	1,36	576
P_15	21	38	5	68	1,31	842
P_16	21	38	6	66	1,91	1.806
P_17	21	45	3	138	24,72	22.264
P_18	21	45	4	126	33,83	34.504
P_19	21	45	5	118	46,56	50.829
P_20	21	45	6	114	53,64	60.848
P_21	21	52	3	124	0,55	42
P_22	21	52	4	121	0,63	93
P_23	21	52	5	118	0,95	254
P_24	21	52	6	116	1,47	766
P_25	25	40	3	117	6,33	2.905
P_26	25	40	4	109	7,72	4.067
P_27	25	40	5	103	11,53	6.966
P_28	25	40	6	100	12,97	9.551

Tabela 2.4: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias proporcionais ($w = 2$).

cilidades a serem abertas, já que o próprio modelo determina o subconjunto ótimo de facilidades. Como a formulação por fluxos do primeiro problema é dependente do número de facilidades abertas p e o segundo problema não o é, a formulação por fluxos não pôde ser adaptada para o segundo problema.

Por último, os dois modelos propostos para o problema das p -medianas conectadas foram comparados utilizando-se um resolvidor de programação linear inteira. Os resultados mostraram que a formulação por árvore geradora restrita por grau foi superior à formulação por fluxos nas instâncias testadas (proporcionais e não proporcionais) e será o modelo utilizado para encontrar soluções ótimas ou limites inferiores na avaliação das heurísticas propostas.

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_29	9	20	3	50	0,09	11
P_30	9	20	4	58	0,09	24
P_31	10	14	3	26	0,09	11
P_32	10	14	4	29	0,08	5
P_33	10	18	3	68	0,09	12
P_34	10	18	4	72	0,08	11
P_35	15	30	3	123	0,50	189
P_36	15	30	4	126	0,45	264
P_37	15	30	5	128	0,51	454
P_38	17	40	3	119	0,28	17
P_39	17	40	4	122	0,28	50
P_40	17	40	5	126	0,27	25
P_41	21	38	3	96	0,81	120
P_42	21	38	4	94	0,64	85
P_43	21	38	5	96	0,69	167
P_44	21	38	6	98	0,97	551
P_45	21	45	3	185	6,02	3.425
P_46	21	45	4	187	10,97	8.739
P_47	21	45	5	185	24,92	23.744
P_48	21	45	6	184	20,91	20.126
P_49	21	52	3	147	0,41	18
P_50	21	52	4	149	0,47	42
P_51	21	52	5	152	0,42	30
P_52	21	52	6	158	0,50	32
P_53	25	40	3	139	3,22	1.172
P_54	25	40	4	136	3,75	1.556
P_55	25	40	5	135	5,69	2.998
P_56	25	40	6	133	5,41	3.271

Tabela 2.5: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias proporcionais ($w = 5$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
P_57	9	20	3	65	0,06	3
P_58	9	20	4	83	0,05	5
P_59	10	14	3	36	0,09	12
P_60	10	14	4	45	0,09	5
P_61	10	18	3	92	0,08	9
P_62	10	18	4	112	0,08	5
P_63	15	30	3	143	0,30	26
P_64	15	30	4	166	0,28	51
P_65	15	30	5	178	0,17	17
P_66	17	40	3	133	0,13	2
P_67	17	40	4	149	0,20	16
P_68	17	40	5	165	0,17	13
P_69	21	38	3	111	0,61	43
P_70	21	38	4	118	0,48	50
P_71	21	38	5	126	0,56	39
P_72	21	38	6	138	0,53	95
P_73	21	45	3	225	2,91	1.546
P_74	21	45	4	241	3,42	1.822
P_75	21	45	5	249	3,74	2.754
P_76	21	45	6	259	5,94	5.325
P_77	21	52	3	162	0,31	6
P_78	21	52	4	178	0,25	7
P_79	21	52	5	192	0,23	9
P_80	21	52	6	208	0,24	5
P_81	25	40	3	154	0,69	33
P_82	25	40	4	158	0,70	111
P_83	25	40	5	166	0,97	297
P_84	25	40	6	174	1,17	469

Tabela 2.6: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias proporcionais ($w = 10$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_1	9	20	3	32	0,20	52
NP_2	9	20	4	30	0,75	548
NP_3	10	14	3	17	0,31	84
NP_4	10	14	4	16	0,91	463
NP_5	10	18	3	44	0,31	118
NP_6	10	18	4	42	1,11	692
NP_7	15	30	3	87	1,22	362
NP_8	15	30	4	78	13,97	6.516
NP_9	15	30	5	76	183,30	81.684
NP_10	17	40	3	92	2,03	304
NP_11	17	40	4	90	29,53	6.952
NP_12	17	40	5	87	150,23	37.420
NP_13	21	38	3	72	3,70	278
NP_14	21	38	4	66	30,25	7.189
NP_15	21	38	5	64	477,77	121.651
NP_16	21	38	6	62	1.957,30	429.284
NP_17	21	45	3	127	8,78	2.274
NP_18	21	45	4	115	50,92	11.096
NP_19	21	45	5	108	5.074,88	1.179.114
NP_20	21	45	6	104	100.080,89	17.833.865
NP_21	21	52	3	121	5,11	853
NP_22	21	52	4	116	76,72	14.107
NP_23	21	52	5	110	480,27	83.500
NP_24	21	52	6	106	11.023,27	1.746.696
NP_25	25	40	3	110	3,45	283
NP_26	25	40	4	102	13,11	1.851
NP_27	25	40	5	96	223,08	24.593
NP_28	25	40	6	91	681,56	66.593

Tabela 2.7: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias não proporcionais ($w = 2$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_29	9	20	3	43	0,25	90
NP_30	9	20	4	46	0,38	196
NP_31	10	14	3	25	0,41	131
NP_32	10	14	4	29	1,69	1.179
NP_33	10	18	3	62	0,39	142
NP_34	10	18	4	64	0,63	313
NP_35	15	30	3	120	1,53	475
NP_36	15	30	4	119	19,09	8.643
NP_37	15	30	5	119	44,03	20.844
NP_38	17	40	3	119	2,25	458
NP_39	17	40	4	116	25,28	7.199
NP_40	17	40	5	118	24,50	6.575
NP_41	21	38	3	93	3,50	376
NP_42	21	38	4	91	48,61	10.755
NP_43	21	38	5	91	238,14	61.981
NP_44	21	38	6	90	704,73	141.179
NP_45	21	45	3	172	24,88	6.805
NP_46	21	45	4	168	169,02	34.607
NP_47	21	45	5	168	644,88	152.827
NP_48	21	45	6	167	3.274,08	568.291
NP_49	21	52	3	146	5,34	625
NP_50	21	52	4	146	47,70	9.727
NP_51	21	52	5	146	180,47	23.480
NP_52	21	52	6	148	1.346,05	215.413
NP_53	25	40	3	133	6,97	730
NP_54	25	40	4	124	35,20	5.894
NP_55	25	40	5	121	241,42	27.416
NP_56	25	40	6	119	770,66	71.758

Tabela 2.8: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias não proporcionais ($w = 5$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_57	9	20	3	54	0,23	36
NP_58	9	20	4	62	0,31	123
NP_59	10	14	3	35	0,44	87
NP_60	10	14	4	48	1,30	1.109
NP_61	10	18	3	90	0,41	170
NP_62	10	18	4	100	0,75	360
NP_63	15	30	3	138	1,28	178
NP_64	15	30	4	160	4,22	1.904
NP_65	15	30	5	172	33,67	13.567
NP_66	17	40	3	134	1,39	215
NP_67	17	40	4	149	9,89	2.601
NP_68	17	40	5	158	19,44	5.928
NP_69	21	38	3	114	4,91	587
NP_70	21	38	4	115	29,55	6.350
NP_71	21	38	5	123	85,16	19.785
NP_72	21	38	6	139	976,14	245.514
NP_73	21	45	3	215	15,44	2.869
NP_74	21	45	4	230	121,08	23.298
NP_75	21	45	5	229	572,55	115.116
NP_76	21	45	6	242	5.478,03	950.650
NP_77	21	52	3	153	4,50	256
NP_78	21	52	4	166	10,41	1.368
NP_79	21	52	5	188	42,95	10.357
NP_80	21	52	6	203	468,50	97.320
NP_81	25	40	3	144	5,49	478
NP_82	25	40	4	147	19,03	3.810
NP_83	25	40	5	154	322,63	46.331
NP_84	25	40	6	155	1.467,81	251.148

Tabela 2.9: Resultados obtidos pela formulação por fluxos para as instâncias não proporcionais ($w = 10$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_1	9	20	3	32	0,08	4
NP_2	9	20	4	30	0,03	9
NP_3	10	14	3	17	0,08	21
NP_4	10	14	4	16	0,06	10
NP_5	10	18	3	44	0,03	0
NP_6	10	18	4	42	0,03	10
NP_7	15	30	3	87	0,59	375
NP_8	15	30	4	78	0,69	635
NP_9	15	30	5	76	0,77	1.045
NP_10	17	40	3	92	0,25	31
NP_11	17	40	4	90	0,27	72
NP_12	17	40	5	87	0,23	50
NP_13	21	38	3	72	1,14	455
NP_14	21	38	4	66	1,30	689
NP_15	21	38	5	64	2,83	2.699
NP_16	21	38	6	62	2,80	3.203
NP_17	21	45	3	127	7,22	4.696
NP_18	21	45	4	115	11,52	8.617
NP_19	21	45	5	108	7,59	6.436
NP_20	21	45	6	104	8,23	8.398
NP_21	21	52	3	121	0,56	84
NP_22	21	52	4	116	0,94	274
NP_23	21	52	5	110	0,77	121
NP_24	21	52	6	106	0,69	140
NP_25	25	40	3	110	3,58	1.364
NP_26	25	40	4	102	4,78	2.130
NP_27	25	40	5	96	4,89	2.657
NP_28	25	40	6	91	5,08	2.232

Tabela 2.10: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias não proporcionais ($w = 2$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_29	9	20	3	43	0,05	5
NP_30	9	20	4	46	0,03	5
NP_31	10	14	3	25	0,09	14
NP_32	10	14	4	29	0,06	15
NP_33	10	18	3	62	0,05	17
NP_34	10	18	4	64	0,03	5
NP_35	15	30	3	120	0,45	173
NP_36	15	30	4	119	0,58	406
NP_37	15	30	5	119	0,28	151
NP_38	17	40	3	119	0,23	24
NP_39	17	40	4	116	0,16	10
NP_40	17	40	5	118	0,17	11
NP_41	21	38	3	93	0,94	236
NP_42	21	38	4	91	1,22	546
NP_43	21	38	5	91	1,05	510
NP_44	21	38	6	90	0,80	417
NP_45	21	45	3	172	5,86	4.060
NP_46	21	45	4	168	7,83	6.278
NP_47	21	45	5	168	10,70	10.649
NP_48	21	45	6	167	8,86	8.370
NP_49	21	52	3	146	0,48	36
NP_50	21	52	4	146	0,42	26
NP_51	21	52	5	146	0,39	18
NP_52	21	52	6	148	0,56	67
NP_53	25	40	3	133	3,55	1.786
NP_54	25	40	4	124	3,02	1.084
NP_55	25	40	5	121	2,20	932
NP_56	25	40	6	119	2,09	877

Tabela 2.11: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias não proporcionais ($w = 5$).

Instância	n	$ E $	p	F_O	Tempo (s)	Nós
NP_57	9	20	3	54	0,03	5
NP_58	9	20	4	62	0,01	3
NP_59	10	14	3	35	0,05	7
NP_60	10	14	4	48	0,06	7
NP_61	10	18	3	90	0,05	6
NP_62	10	18	4	100	0,03	7
NP_63	15	30	3	138	0,23	57
NP_64	15	30	4	160	0,22	47
NP_65	15	30	5	172	0,14	15
NP_66	17	40	3	134	0,17	8
NP_67	17	40	4	149	0,14	11
NP_68	17	40	5	158	0,16	8
NP_69	21	38	3	114	0,80	183
NP_70	21	38	4	115	0,67	80
NP_71	21	38	5	123	0,66	182
NP_72	21	38	6	139	0,80	434
NP_73	21	45	3	215	1,89	549
NP_74	21	45	4	230	2,73	1.293
NP_75	21	45	5	229	2,53	1.600
NP_76	21	45	6	242	3,09	2.216
NP_77	21	52	3	153	0,25	3
NP_78	21	52	4	166	0,33	17
NP_79	21	52	5	188	0,38	31
NP_80	21	52	6	203	0,36	81
NP_81	25	40	3	144	0,83	44
NP_82	25	40	4	147	0,91	78
NP_83	25	40	5	154	0,88	214
NP_84	25	40	6	155	0,72	132

Tabela 2.12: Resultados obtidos pela formulação por árvore para as instâncias não proporcionais ($w = 10$).