Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional
CMAC Nordeste 2012
ISSN 2317-3297

Um algoritmo GRASP e um Híbrido aplicados ao Problema das p-Medianas

Flaviana Moreira de Souza Amorim
Universidade Federal Rural do Semi-Árido, UFERSA
59625-900, Mossoró, RN
E-mail: joflaviana@yahoo.com.br

Moacir Felizardo de França Filho, **Sérgio Ricardo de Souza**,
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET/MG – Campus II
30510-000, Belo Horizonte,MG
E-mail: franca@des.cefetmg.br, sergio@dppg.cefetmg.br,

Palavras-chave: *Otimização, Problema das p-Medianas, GRASP, ILS, Metaheurísticas*

Resumo: *Este trabalho trata uma aplicação das metaheurísticas GRASP e um algoritmo Híbrido, GRASP+ILS, utilizando, como método de busca local, o algoritmo* Fast Swap-Based *ao Problema das p-Medianas. Foram realizados testes com as instâncias OR-Library e Koerkel. O algoritmo Híbrido apresenta o melhor desempenho em termos de tempo de execução e qualidade de solução.*

1 Introdução

O Problema das p-Medianas (PPM) pode ser classificado em capacitado ou não capacitado. Este artigo trata do Problema das p-Medianas não capacitado. Neste problema o objetivo é escolher, dentre n vértices de um grafo, um conjunto de p vértices denominados medianas, de modo a minimizar a soma das distâncias de cada vértice restante até a mediana mais próxima.

O PPM é um problema clássico de Otimização Combinatória caracterizado por combinações de um conjunto finito de elementos discretos e está contido na classe de problemas NP-difícil [3].

Este artigo é estruturado como segue. Na seção 2, é apresentada uma formulação do problema. Na seção 3, é vista a estrutura de dados utilizada e os algoritmos implementados para solucionar o PPM. Na seção 4, são apresentados os resultados obtidos. E na seção 5 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 Formulação do Problema

No PPM há combinações de $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ soluções. Quando os valores de n (número total de vértices do grafo considerado) e p (quantidade de medianas a serem instaladas) são grandes é praticamente inviável o uso de métodos exatos.

A formulação matemática do Problema das p-Medianas [1]:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

ISSN 2317-3297

sujeito a:

$$\sum_{j}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in \{V - V_p\} \tag{2}$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall\, i \in \{V - V_p\} \; e \; \forall\, j \in V_p \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_j = p \quad \forall\, j \in V_p \tag{4}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}\,. \tag{5}$$

em que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo vértice é atendido pelo vértice } j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo vértice for uma das } p\text{-medianas;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O número de vértices são representados por n. A quantidade de medianas instaladas está representada por p. O custo de instalação da cada mediana no vértice i é representado por w_i. E a distância entre os vértices i e j é representado por d_{ij}.

A restrição (2) assegura que um vértice de demanda seja atendido por uma única mediana. A restrição (3) afirma que um vértice de demanda somente seja atendido por uma mediana que esteja instalada. A restrição (4) garante que são designadas exatamente as p medianas. A restrição (5) define que as variáveis envolvidas são binárias.

3 Metodologia de Solução

Esta seção apresenta os procedimentos propostos para solucionar do Problema das p-Medianas. Inicialmente, é apresentada a estrutura de dados utilizada para representar uma solução. Em seguida, são apresentadas as duas metaheurísticas implementadas, a saber, *Greedy Randomized Adaptative Search Procedure* (GRASP) e *Iterated Local Search* (ILS). Por fim, é apresentada a busca local utilizada como heurística de refinamento.

3.1 Representação da Solução

Para representar uma solução, foi definida uma matriz com n colunas e 3 linhas. A Figura 1 ilustra uma solução e mostra o movimento de troca. Na linha "*Vértices*" as medianas estão nas primeiras posições ($VetorV_p$) e os clientes nas posições seguintes ($Vetor\{V - V_p\}$). A linha "*Troca*" simula uma troca entre a mediana que está instalada no vértice 2 e o cliente do vértice 7. Na linha "*Medianas*" representa qual mediana instalada atende cada cliente. E na linha "*Distância*" estão os valores das distâncias de cada mediana a ela mesma e dela até o vértice que é cliente.

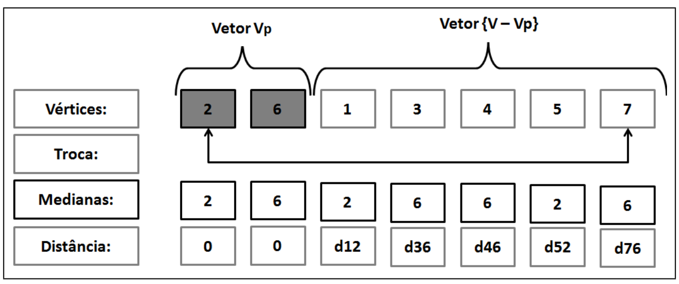

Figura 1: Movimento de troca.

ISSN 2317-3297

3.2 GRASP

A metaheurística *Greedy Randomized Adaptative Search Procedure* (GRASP) [4]. Ela consiste na aplicação iterativa de duas fases: construção e refinamento, retornando a melhor das soluções obtidas ao longo da busca.

Na fase de construção é gerada uma solução parcialmente gulosa por meio de uma função guia, $g(\cdot)$ e o refinamento é feito pela busca local *Fast Swap-Based*.

3.3 Algoritmo Híbrido (GRASP+ILS)

A metaheurística *Iterated Local Search* (ILS) [2], consiste em aplicar um procedimento de busca local a uma solução inicial s_0 e escapar de ótimos locais por meio de perturbações aplicadas à melhor solução corrente.

O ILS implementado neste trabalho possui a solução inicial construída pelo GRASP e por isso este algoritmo pode ser chamado de Híbrido, ou seja, é um algoritmo GRASP+ILS.

3.4 Busca local *Fast Swap-Based* (FSB)

Esta busca local foi desenvolvida especificamente para auxiliar na resolução do Problema das p-Medianas. A FSB tem como aspecto relevante sua habilidade em encontrar rapidamente a melhor mediana a ser desinstalada, dada a determinação de um cliente que se tornará mediana. É significativamente mais rápida que as alternativas anteriormente conhecidas [5], pois os resultados parciais obtidos são armazenados em estruturas de dados auxiliares. Com isso, é possível o uso de valores calculados em iterações iniciais do algoritmo para acelerar as próximas iterações.

4 Resultados

Os algoritmos GRASP e o Híbrido foram implementados na linguagem C++. Para testar os algoritmos, foram utilizadas as instâncias *OR-Library* e Koerkel. Para cada instância, cada algoritmo foi executado 50 vezes.

Para comparar o desempenho das metaheurísticas em termos de tempo, foram realizados experimentos com as instâncias pmed30 e K1000-4. Estas instâncias foram escolhidas por terem um comportamento que exigiram tempo e desempenho dos algoritmos. Os valores ótimos destas instâncias são, respectivamente: 1989 e 32.110.068 e os alvos são: 2000 e 32.493.567, respectivamente.

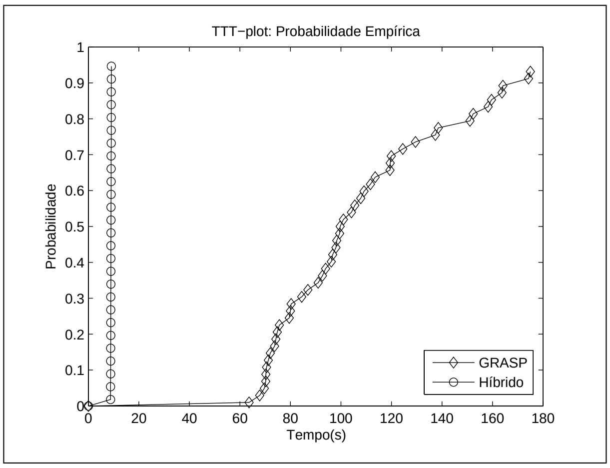

Figura 2: Time-to-target da pmed30.

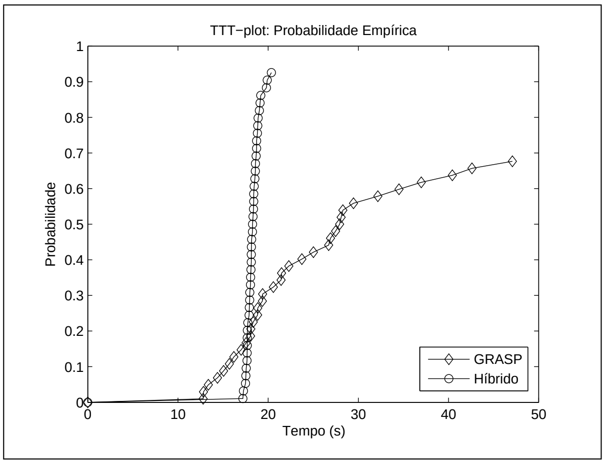

Figura 3: Time-to-target da K1000-4.

ISSN 2317-3297

A Figura 2 mostra que o algoritmo Híbrido alcança 90% do alvo em 10 segundos e o GRASP em 180 segundos. Na Figura 3 é visto que o algoritmo Híbrido alcança 90% do alvo em 18 segundos e o GRASP alcança 65% do alvo em quase 50 segundos.

A análise estatística foi feita por meio do teste de aderência que verifica a adequabilidade de um modelo em uma dada situação, comparando os melhores valores alcançados com os valores ótimos conhecidos por meio de uma Taxa de Similaridade.

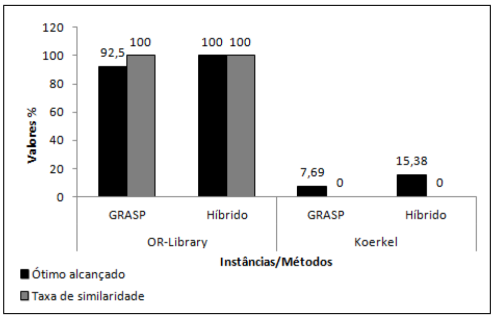

Figura 4: Gráfico de Barras.

A Figura 4 apresenta as taxas obtidas nas instâncias. Na *OR-Library* o GRASP alcançou 92,5% dos valores ótimos e uma Taxa de Similaridade igual a 100% e o Híbrido alcançou 100% dos valores ótimos e uma Taxa de Similaridade igual a 100%, portanto, os métodos são adequados para resolver estas instâncias. Na Koerkel o GRASP alcançou 7,69% dos valores ótimos e uma Taxa de Similaridade igual a 0% e o Híbrido alcançou 15,38% dos valores ótimos e uma Taxa de Similaridade igual a 0%, logo, os métodos não são adequados para resolver estas instâncias.

5 Conclusões

Este trabalho tratou o Problema das p-Medianas não-capacitado por meio de duas metaheurísticas, um GRASP e um Híbrido. O algoritmo GRASP, alcançou 65,12% dos valores ótimos em 43 diferentes instâncias. Enquanto que o algoritmo Híbrido obteve resultados superiores, alcançando 74,42% dos valores ótimos em 43 diferentes instâncias. Nas instâncias *OR-Library*, o GRASP não alcançou a solução ótima em três instâncias e o Híbrido alcançou a solução ótima em todas as instâncias. Nas instâncias Koerkel, o GRASP alcançou apenas uma solução ótima e o Híbrido alcançou duas soluções ótima. Em termo de desempenho computacional o algoritmo Híbrido é melhor que o GRASP. Assim, os resultados mostram a superioridade da implementação realizada no algoritmo Híbrido (GRASP+ILS) sobre o GRASP.

Referências

[1] O. Alp, E. Erkut e D. Drenzner, An Efficiente Genetic Algorithm for the p-Median Problem, Annals of Operations Research, 122 (2003) 21-42.

[2] H.R. Lourenço, O.C. Martin e T. Stützle, Iterated Local Search, Handbook of Metaheuristics, (2003) 321-353.

[3] O. Kariv e L. Hakimi, An Algorithmic Approach to Network Location Problems. II: The p-Medians, SIAM Journal on Applied Mathematics, 37 (1979) 539-560.

[4] M.G.C. Resende e T.A. Feo, Greedy Randomized Adaptive Search Procedures, Journal of Global Optimization, 9 (1995) 849-859.

[5] M.G.C. Resende e R. Werneck, A Fast Swap-Based Local Search Procedure for Location Problems, Annals of Operations Research, 150 (2004) 205-230.