

ALGORITMO DE PESQUISA LOCAL PARA A MÉTRICA QUADRADA k - PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DA INSTALAÇÃO COM PENALIDADES LINEARES

Yishui Wang

Academia Chinesa de Ciências dos Institutos de Tecnologia
Avançada de Shenzhen, Shenzhen 518055, China

Dongmei Zhang

Escola de Ciência e Tecnologia da Computação,
Universidade Shandong Jianzhu, Jinan 250101, China

Peng Zhang

Escola de Software, Universidade Shandong,
Jinan 250101, China

Yong Zhang *

Academia Chinesa de Ciências dos Institutos de Tecnologia
Avançada de Shenzhen, Shenzhen 518055, China

(Comunicado por Wenxun Xing)

Abstrato. No k - problema de localização de instalação, um importante problema de otimização combinatória combinando a localização de instalação clássica e k - problemas medianos, recebemos as localizações de algumas instalações e clientes, e precisamos abrir no máximo k instalações e conectar todos os clientes às instalações abertas, minimizando o custo de abertura e conexão das instalações. Este artigo considera a métrica quadrada k - problema de localização de instalação com penalidades lineares, uma versão robusta do k - problema de localização da instalação. Neste problema, não temos que conectar todos os clientes às instalações, mas cada cliente que não for atendido por nenhuma instalação deverá pagar uma multa. Os custos de conexão de instalações e clientes devem ser métricos quadrados, o que é mais geral do que o caso métrico. Fornecemos um algoritmo de aproximação constante com base no esquema de pesquisa local com operações de adição, eliminação e troca para este problema. Além disso, melhoramos a proporção de aproximação usando a técnica de escalonamento.

1 Introdução. Existem dois problemas clássicos de localização na área de otimização combinatória, o problema de localização de instalação não capacitada e k - problema mediano. Desde a década de 1960, esses dois problemas e suas variantes têm sido estudados e têm amplas aplicações na ciência da administração e na ciência da computação. No problema de localização de instalação não capacitada (FLP), um conjunto de instalações e um conjunto de clientes são fornecidos. Precisamos abrir algumas instalações, conectar cada cliente a uma instalação aberta e pagar os custos de conexão e de abertura das instalações. O objetivo é minimizar os custos totais. O k - problema mediano não tem abertura de instalação

2020 *Classificação de Matemática.* Primário: 90B80.

Palavras-chave e frases. Algoritmo de aproximação; pesquisa local; k - problema de localização de instalações; penalidades lineares; métrica quadrada.

*Autor correspondente: Yong Zhang.

custos, mas tem a restrição de cardinalidade de que o número de instalações abertas não deve ser maior do que um determinado inteiro k .

Tanto o FLP quanto k - o problema da mediana é NP-difícil mesmo se os custos de conexão forem métricos, ou seja, a não-negatividade, a simetria e as desigualdades triangulares são satisfeitas. Portanto, muitas pesquisas investigadas no algoritmo de aproximação para os problemas. Para o FLP não métrico, Hochbaum [9] apresentou um $O(n \log n)$ - algoritmo de aproximação onde n é o número de clientes e provou que a relação de aproximação é assintoticamente estreita. A maioria dos trabalhos se concentra no caso métrico. A primeira razão de aproximação constante para o FLP métrico é 3,16, fornecida por Shmoys et al. [13] Depois disso, várias razões de aproximação constantes para este problema foram apresentadas. A razão de aproximação mais conhecida atualmente é 1,488, dada por Li [11] Para o

métrica k - problema mediano, a primeira razão de aproximação constante é $6\frac{2}{3}$, apresentado por Charikar et al. [4] Após uma série de melhorias, Byrka et al. [2] deu a melhor taxa de aproximação atual de $2,675 + \epsilon$.

O k - problema de localização de instalação (k - FLP) combina o FLP e k - problema mediano, no qual o custo da instalação e a restrição de cardinalidade são considerados. Jain e Vazirani [10] primeiro introduziu este problema e usa o esquema primal-dual para fornecer um algoritmo de 6 aproximações. Zhang [18] forneceu a razão de aproximação mais conhecida atualmente $2 + 3 + \epsilon$ com a técnica de pesquisa local.

Uma variante importante do problema clássico de localização de instalação é considerar o custo da penalidade, ou seja, não precisamos conectar todos os clientes às instalações, mas os clientes que não estão conectados a nenhuma instalação devem pagar alguns custos da penalidade. As penalidades lineares significam que cada cliente penalizado deve pagar o custo da penalidade de forma independente, e o custo total da penalidade é a soma deles. Podem ser aplicadas penalidades nos casos em que existem alguns outliers no conjunto de clientes, por isso é mais robusto que o modelo original. Charikar et al. [5] primeiro estudou o FLP métrico com penalidades lineares e forneceu uma razão de 3 aproximações. Li et al. [12] melhorou a razão de aproximação para 1,5148. Xu et al. [17] considerou o FLP universal, uma extensão do FLP clássico, e deu um $(7.88 + \epsilon)$ - aproximação, que é o primeiro algoritmo de busca local para a versão penalizada do problema de localização da instalação. As melhores taxas de aproximação atuais do k - mediana e k - FLP com penalidades lineares são $3 + \epsilon$ e $2 + 3 + \epsilon$, fornecido por Li et al. [8] e Wang et al. [15], respectivamente.

O espaço métrico quadrado é um espaço de distância, no qual as raízes quadradas das distâncias entre dois pontos no espaço são métricas, ou seja, as distâncias satisfazem a não negatividade, simetria e desigualdades de triângulo ao quadrado ($\sqrt{c_{eu1, eu2}} \leq \sqrt{c_{eu1, eu3}} + \sqrt{c_{eu2, eu3}}$) para quaisquer pontos $eu1, eu2$ e $eu3$). Obviamente, o espaço métrico quadrado é mais geral do que o espaço métrico. Existem algumas literaturas que estudam a localização da instalação problema no espaço métrico quadrado. Fernandes et al. [7] mostrou que o algoritmo de arredondamento LP fornecido por Chudak e Shmoys [6] para o FLP métrico produz uma razão de aproximação 2,04011 para o FLP métrico quadrado e provou que essa razão é a melhor possível, a menos que $P = NP$. Zhang et al. [19] considerou o problema de locatio das instalações da soma dos quadrados, em que as instalações e os clientes estão localizados no espaço euclidiano, e o custo de conexão é o quadrado da distância. Este problema é equivalente ao FLP euclidiano quadrado, que é um caso especial do FLP métrico quadrado. Eles usaram a técnica de pesquisa local para apresentar um $(7,77 + \epsilon)$ - aproximação para a versão contínua do problema, e um $(9 + \epsilon)$ - aproximação para a versão discreta do problema. Além disso, outras variantes do FLP no espaço métrico quadrado foram estudadas, como o FLP capacitado [16], k - FLP [20] e FLP com penalidades [14]

Neste artigo, consideramos a métrica quadrada k -problema de localização de instalação com penalidades lineares (SM- k -FLPLP), e aplique o algoritmo de busca local com as operações de adicionar, descartar e trocar para este problema. Provamos que o algoritmo de busca local possui uma complexidade de tempo polinomial e uma razão de aproximação constante.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.1, damos a formulação da métrica quadrada k -problema de localização da instalação e o algoritmo de busca local. Na Seção 2.2, apresentamos a análise da razão de aproximação. Na Seção 2.3, usamos a técnica de escalonamento para melhorar a razão de aproximação. Finalmente, concluímos o artigo na Seção 3.

2 Pesquisa local para SM- k -FLPLP.

2.1 Formulação e algoritmo. Dado o conjunto de instalações F , o conjunto de clientes

D , custo de abertura f_{eu} para todos $eu \in F$, custo de penalidade p_j para todos $j \in D$, e um inteiro

k . Assumimos que as instalações e os clientes estão localizados em um espaço métrico quadrado e a distância $d(i, j)$ entre quaisquer dois pontos $eu, j \in F \cup D$ pode ser calculado em p

omtempo ial por um determinado oráculo Ω . Denote a instância

$I = (F, D, k, f, p, \Omega)$. O problema pode ser formulado como} do SM- k -FLPLP por

$$\min_{F \subseteq F: |F| \leq k} \sum_{eu \in F} f_{eu} + \sum_{j \in D} \min_{eu \in F} p_j \min d(i, j).$$

Observe que podemos usar um subconjunto de F para representar uma solução viável do SM- k -FLPLP da formulação acima. Para a declaração, usamos $C_f(F)$, $C_s(F)$ e

$C_p(F)$ para denotar o custo total de abertura da instalação, custo de conexão e custo de penalidade

da solução F , respectivamente. Deixe $\text{custo}(F) = C_f(F) + C_s(F) + C_p(F)$. O algoritmo de

pesquisa local (Algoritmo 1) é mostrado abaixo. Começa com uma solução viável de

o problema e encontra uma solução melhor na vizinhança indicada por $N(F)$ da solução

atual F iterativamente, até que não haja solução melhor. A definição de $N(F)$ é crucial para

o desempenho do algoritmo de busca local. Neste artigo, usamos as operações add, drop

e swap que foram usadas para o k -FLP em [18] para definir $N(F)$ do seguinte modo.

$$N(F) = \{F \cup \{i\} \mid eu \in F \setminus F, \mid F \cup \{i\} \mid \leq k\} \cup \\ \{F \setminus \{i\} \mid eu \in F\} \cup \{F \setminus A \cup B \mid U \subseteq F, B \subseteq F \setminus F, \mid A \mid = \\ \mid B \mid \leq q\},$$

Onde $q \in \mathbb{Z}^+$ é um parâmetro do algoritmo. As operações $F \cup \{se\ eu\}$ e

$F \setminus A \cup B$ são denotados por *adicionar (i)*, *eliminar (i)* e *troca (A, B)* respectivamente.

Algoritmo 1 Algoritmo de busca local para o SM- k -FLPLP

Entrada: Uma instância $I = (F, D, k, f, p, \Omega)$ e um parâmetro q .

Resultado: Uma solução ótima local.

1: Deixar F ser uma solução arbitrária viável da instância I para o SM- k -FLPLP.

2: enquanto existe uma solução F' dentro $N(F)$ tal que $\text{custo}(F') < \text{custo}(F)$ Faz

3: Atualizar $F = F'$;

4: terminar enquanto

5: Retorna F

Para um algoritmo de busca local, a solução retornada pelo algoritmo é chamada de solução ótima local. A lacuna de localidade do algoritmo é definida como a pior

razão (supermum para minimização e in fi m para maximização) do custo da solução ótima local e a solução ótima global sobre todas as instâncias. Vamos analisar a lacuna de localidade do Algoritmo 1 na próxima subseção.

2.2. Análise. O alto nível de análise da lacuna de localidade de um algoritmo de busca local é construir várias operações locais para a solução ótima local e, em seguida, de acordo com a otimização local, podemos obter várias desigualdades com relação às soluções ótimas locais e globais para estas operações. Finalmente, a lacuna de localidade é obtida pela combinação dessas desigualdades.

Para construir as operações locais, precisamos da noção de *capturar* e partições da solução ótima local denotada por F e a solução global ideal denotada por F^* , que foram usados para o SM- k -FLP na referência [20]. Deixar

$s(o) := \argmin_{eu \in F} d(i, o)$ para uma instalação $o \in F^*$ (nota: neste artigo, \argmin leva um elemento arbitrário que tem o valor mínimo). Dizemos que a instalação $s \in S$

captura a facilidade $o \in F$ se $s = s(o)$, E use *cápsulas* para denotar o conjunto de todas as instalações que são capturadas por s . Se uma instalação $eu \in S$ não captura nenhuma instalação em

F^* , então é chamado de *Boa* instalação, caso contrário, é chamada de *ruim* instalação. Observe que cada instalação em F^* é capturado por uma e apenas uma instalação ruim.

Com a perda de generalidade, assumimos que $F \cap F^* = \emptyset$ (caso contrário, só precisamos fazer uma cópia para cada instalação em $F \cap F^*$). Apresentamos duas instalações fictícias *você* e *você**, e deixar $d(u, j) = d(u^*, j) = p_j$ para todos $j \in D$. Penalizando um cliente na solução F (ou F^*) é visto como conectando o cliente à instalação fictícia *você* (ou *você**). Deixar s_j e o_j ser as instalações (incluindo as instalações fictícias) que estão conectadas ao cliente j dentro a solução F e F^* respectivamente, $D_s := \{j \in D \mid s_j \neq \text{você}\}$, $D_{p^*} := \{j \in D \mid s_j = \text{você}\}$, $D_{s^*} := \{j \in D \mid o_j \neq \text{você}^*\}$, e $D_{p^*} := \{j \in D \mid o_j = \text{você}^*\}$.

Para simplificar, deixamos $S_j := \min_{eu \in F} d(i, j)$, $S_{j^*} := \min_{eu \in F^*} d(i, j)$ para todos $j \in D$, $C_f := C_f(F)$, $C_s := C_s(F)$, $C_{p^*} := C_{p^*}(F)$, $C_{f^*} := C_{f^*}(F^*)$, $C_{s^*} := C_{s^*}(F^*)$, e $C_{p^*} := C_{p^*}(F^*)$. Para limitar o custo de F_j , precisamos dos três lemas a seguir.

Lema 2.1. (uma):
$$\sum_{j \in D_s \cap D_{s^*}} \sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} \leq \sqrt{\frac{C_s C_{s^*}}{C_{p^*} C_{p^*}}}$$

(b): $d(s(o_j), j) \leq S_j + 4 S_{j^*} \quad \forall j \in D_s \cap D_{s^*}$.

Prova. É fácil provar esse lema estendendo a prova do Lema 2 em Zhang et al. [20]. Para fins de integridade, fornecemos a prova aqui. Usando o Cauchy-

A desigualdade de Schwarz, temos $\sqrt{\sum_{j \in D_s \cap D_{s^*}} \frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} \leq \sqrt{\sum_{j \in D_s \cap D_{s^*}} \frac{S_j}{C_s}} \sqrt{\sum_{j \in D_s \cap D_{s^*}} \frac{S_{j^*}}{C_{s^*}}}$.

Para qualquer $j \in D_s \cap D_{s^*}$, podemos usar a desigualdade do triângulo ao quadrado para j , o_j , s_j e $tão o_j$. Desde a j não é penalizado em ambos F e F^* . Nós temos

$$\begin{aligned} d(s(o_j), j) &= (\sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} + \sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}})^2 \\ &\leq (\sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} + \sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}})^2 \\ &\leq (\sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} + \sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}})^2 \\ &\leq (\sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}} + \sqrt{\frac{S_j S_{j^*}}{C_s C_{s^*}}})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{S_j + 2S^*} + \sqrt{S_j})}{\sqrt{2}} \\
 &= S_j + 4S^* \quad j+4 S_j S^* \quad j,
 \end{aligned}$$

onde a primeira e a terceira desigualdades seguem da desigualdade do triângulo ao quadrado, e a segunda desigualdade segue da definição de $s(\cdot)$. \square

Lemma 2.2. Para uma instalação ruim uma , deixar $b = \argmin_{eu \in \text{boné}(a)} d(i, uma)$. Se $tão j = uma$ para cliente $j \in N_F(uma) \setminus D^*$, Onde $N_F(a)$ denota o conjunto de clientes que estão conectados para a instalação uma na solução F , então nós temos

$$d(b, j) \leq 4S_j + S^* \quad j+4 S_j S^* \quad j.$$

Prova. Desde a $j \in N_F(uma) \setminus D^*$, podemos usar a desigualdade do triângulo ao quadrado para j , o_j uma e b . Nós temos

$$\begin{aligned}
 d(b, j) &= (\sqrt{d(b, a)} + \sqrt{d(uma, j)})^2 \\
 &\leq (\sqrt{d(b, a)} + \sqrt{d(uma, j)})^2 \\
 &\leq (\sqrt{Faz_j, a} + \sqrt{d(uma, j)})^2 \\
 &\leq (\sqrt{Faz_j, j} + 2\sqrt{d(uma, j)})^2 \\
 &= \frac{(\sqrt{S_j + 2S^*} + \sqrt{S_j})^2}{\sqrt{2}} \\
 &= 4S_j + S^* \quad j+4 S_j S^* \quad j,
 \end{aligned}$$

onde a primeira e a terceira desigualdades seguem da desigualdade do triângulo ao quadrado, a segunda desigualdade segue de $b = \argmin_{eu \in \text{boné}(a)} d(i, a)$ e $tão j = uma$, e a segunda igualdade segue de $j \in N_F(uma) \setminus D^*$. \square

Para o caso de $|F| > |F^*|$, nós dividimos os conjuntos F e F^* como a seguir pro

cedimento. Colocamos todas as instalações ruins e_1, e_2, \dots, e_r para dentro r conjuntos diferentes $UMA_1, UMA_2, \dots, UMA_r$.

Para cada UMA_l , nós deixamos $B_l = \text{capa}_{eu}$ e complementar o conjunto UMA_l por quaisquer boas instalações até $|UMA_l| = |B_l|$ ou não há boas instalações suficientes. Finalmente, para cada B_{eu} tal que $|B_l| > |UMA_l|$, retiramos arbitrariamente algumas instalações de B_{eu} sujeito a $|B_l| = |UMA_l|$, e colocar essas instalações em um conjunto denotado por B_{r+1}

- Considerando o par (UMA_{eu}, B_{eu}) para todos $eu \in \{1, 2, \dots, r\}$, Suponha que $UMA_l = \{uma_{eu} \mid 1 \leq eu \leq m_{eu}\}$, $B_l = \{b_{eu} \mid 1 \leq eu \leq m_{eu}\}$. Onde $uma_{eu} \mid 1$ é a instalação ruim e $b_{eu} \mid 1 = \argmin_{eu \in B_{eu}} d(i, a_{eu})$. Nós construímos a operação *troca* $(a_{eu} \mid 1, b_{eu} \mid 1)$ para todos $l = 1, \dots, r$ e $i = 1, \dots, m_{eu}$, para a solução ideal local F .
- Para o conjunto UMA_{r+1} , nós construímos a operação *queda* (a) para todos $uma \in UMA_{r+1}$

Para o caso de $|F| \leq |F^*|$, nós construímos a partição de F e F^* usando o seguinte procedimento.

Colocamos todas as instalações ruins e_1, e_2, \dots, e_r para dentro r conjuntos diferentes

$UMA_1, UMA_2, \dots, UMA_r$. Então, para todos $l = 1, \dots, r$, Nós deixamos $B_l = \text{capa}_{eu}$ e complementar o conjunto UMA_{eu} por quaisquer boas instalações até $|UMA_l| = |B_l|$ ou não há boas instalações suficientes. Finalmente, para cada B_{eu} tal que $|B_l| > |UMA_l|$, retiramos arbitrariamente algumas instalações de B_{eu} sujeito a $|B_l| = |UMA_l|$, e colocar essas instalações em um conjunto denotado por B_{r+1}

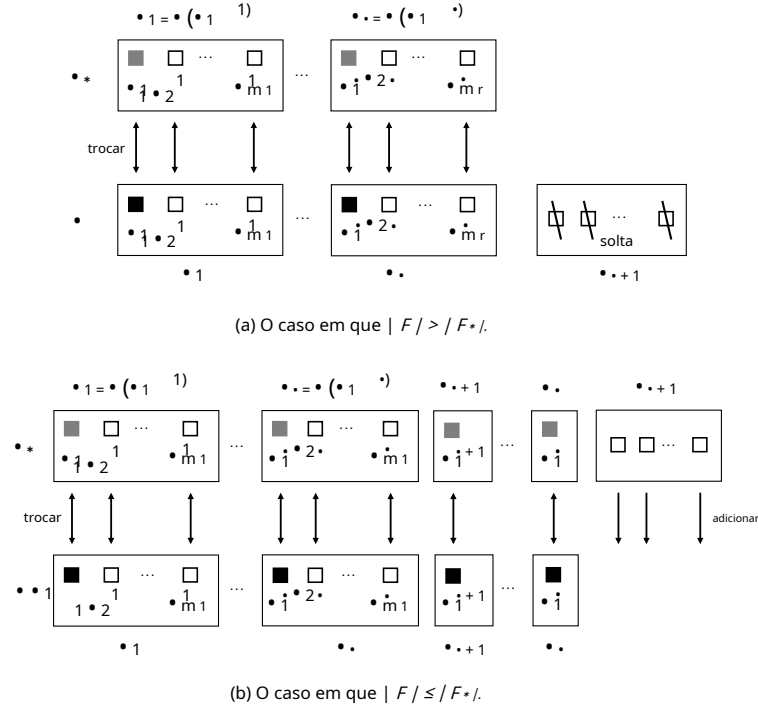


Figura 1. Partições e operações locais de F e F^* para analisar o limite superior de $C_f + C_p$. Os quadrados pretos sólidos representam todas as instalações ruins. Cada quadrado sólido cinza representa o mais próximo facilidade entre uma parte de F^* para a instalação ruim que os captura.

Após este procedimento, obtemos $F = \bigcup_{l=1}^r UMA_{eu} \in F^* = \bigcup_{l=1}^{r+1} B_{eu}$. Com esta partição, construímos operações de troca e adição da seguinte forma (ver FIGURA 1 (b))

- Para os pares $\{(UMA_{eu}, B_{eu}) \mid l=1, \dots, r\}$, nós construímos as mesmas operações de swap como em o caso que $|F| > |F^*|$.
- Para o conjunto B_{r+1} , nós construímos a operação *adição* (b) para todos $b \in B_{r+1}$

Usando as operações locais acima, juntamente com a otimização local de F , podemos obter os seguintes lemas que mostram o limite superior da penalidade e o custo de abertura da instalação da solução ótima local F .

Lema 2.3. *If $|F| > |F^*|$, temos*

$$C_f + C_p \leq C^*_{f+6} C^*_{s+2} C^*_{s+8} C^*_{s+1} \sqrt{C_{s+1} C^*_{s+1}} p.$$

Prova. Para cada operação de troca $troca(a_{eu}, b_{eu})$, só precisamos analisar o novo custo de um cliente $j \in N_{F \setminus (uma_{eu} \cup b_{eu})} \cup N_{F^* \setminus (b_{eu})}$. Existem alguns casos diferentes como segue (ver FIGURA 3)

Caso 1: $j \in N_{F \setminus (uma_{eu} \cup b_{eu})} \cap D_p$.

Neste caso, o novo custo de j é no máximo p_j após a operação de troca.

Caso 2: $j \in N_{F \setminus (uma_{eu} \cup b_{eu})} \cap N_{F^* \setminus (b_{eu})}$.

Caso 2.1: $i = 1$. Podemos reconectar o cliente j para a instalação b_{eu} , então o novo custo de j é no máximo $d(b_{eu}, j) = S^*_j$.

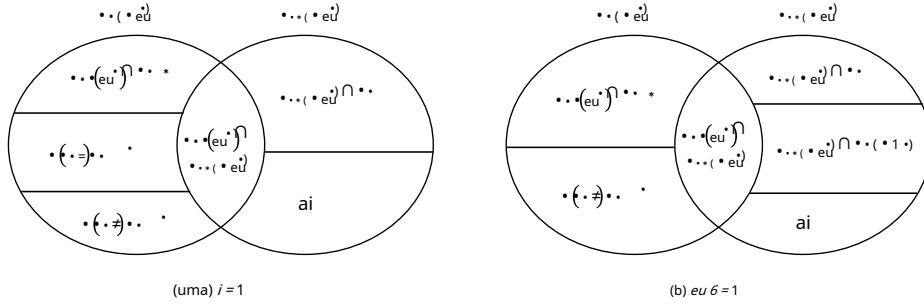


Figura 2. Casos diferentes (partição de $N_F(uma_{eu} \cup N_F(b_{eu}))$ para analisando o novo custo após a operação *troca* (a_{eu}, b_{eu}).

Caso 2.2: $eu \ 6 = 1$. Neste caso, $t\tilde{a}o_{jj} \ 6 = uma_{eu}$ Porque $t\tilde{a}o_{jj}$ é uma instalação ruim e uma_{eu} é uma boa instalação. Então $t\tilde{a}o_{jj}$ não é trocado, implicando o novo custo de j é no máximo $\{S_j^*, d(s(o_{jj}), j)\}$.

Caso 3: $j \in N_F(uma_{eu} \cup D_p \cup N_F(b_{eu}))$ e $t\tilde{a}o_{jj} \ 6 = uma_{eu}$.

Desde a $t\tilde{a}o_{jj}$ não é trocado, o novo custo de j pode ser limitado por $d(s(o_{jj}), j)$.

Caso 4: $j \in N_F(uma_{eu} \cup D_p \cup N_F(b_{eu}))$ e $t\tilde{a}o_{jj} = uma_{eu}$.

Neste caso, devemos ter $i = 1$. Portanto, o novo custo de j pode ser limitado por

$$d(b_{eu}, j) \leq 4 S_j + S_j^* \quad j+4 \quad \overline{S_j S_j^*} \text{ seguindo do Lemma 2,2.}$$

Caso 5: $j \in N_F(b_{eu} \cup N_F(uma_{eu}))$.

Caso 5.1: $i = 1$. O mesmo ocorre com o Caso 2.1.

Caso 5.2: $eu \ 6 = 1$. O novo custo de j é no máximo $d(b_{eu}, j) = S_j^*$. Observe que nós ter $t\tilde{a}o_{jj} = uma_{eu}$ nesse caso.

Caso 6: $j \in N_F(b_{eu} \cup D_p)$.

O novo custo de j é $\min \{p_j, d(b_{eu}, j)\} = \min \{p_j, S_j^*\}$.

Caso 7: $j \in N_F(b_{eu} \cup D_p \cup N_F(uma_{eu} \cup N_F(uma_{eu})))$.

A facilidade s_j não é trocado, então o novo custo é $\min \{S_j, S_j^*\}$.

Devido à otimização local da solução F , temos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \text{custo}(F \setminus \{a_{eu} \cup \{b_{eu}\}\}) - \text{custo}(F) \\
 &\leq -f_{uma_{eu}} + f_{b_{eu}} + \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap N_F(b_{eu})} (S_j^* - S_j) \\
 &\quad + \sum_{j \in NF(al) \setminus (D_p \cup N_F(b_{eu}))} (d(s(o_{jj}), j) - S_j) \\
 &\quad + \sum_{j \in NF(al) \setminus (D_p \cup N_F(b_{eu}))} (d(b_{eu}, j) - S_j) + \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap D_p} (\min \{p_j, S_j^*\} - p_j) \\
 &\quad + \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap D_p} (\min \{S_j, S_j^*\} - S_j)
 \end{aligned} \tag{1}$$

para $i = 1$, e

$$0 \leq \text{custo}(F \setminus \{a_{eu} \cup \{b_{eu}\}\}) - \text{custo}(F)$$

$$\begin{aligned}
&\leq -f_{uma} - f_{b|+} \\
&\quad \sum_{eu} \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap N_F(b_{eu})} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
&\quad + (d(s(o_j), j) - S_j) \\
&\quad + \sum_{\substack{j \in N_F(a) \setminus (D_p \cup N_F(b)) \\ s(o_j) = a}} \sum_{eu} (p_j - S_j) + \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap D_p} (\min \{ p_j, S_j^* \} - p_j) \\
&\quad + \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap N_F(uma_{eu})} (\min \{ S_j, S_j^* \} - S_j) \\
&\quad + \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap (D_p \cup N_F(uma_{eu}) \cup N_F(uma_{eu}))} (\min \{ S_j, S_j^* \} - S_j) \quad (2)
\end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots, m_{eu}$.

Então, consideramos a operação *queda* (a) para todos $uma \in UMA_{r+1}$. Existem dois casos para o novo custo de $j \in N_F(a)$ do seguinte modo.

Caso 1 $\because j \in N_F(a) \cap D_p$.

Caso 2 $\because j \in N_F(uma) \setminus D_p$. Neste caso, o novo custo de j é no máximo p_j . Desde que uma é uma boa instalação, a instalação ruim (a) não é cauí, implicando o novo custo de j pode ser limitado por $\min \{ d(s(o_j), j) \}$.

Devido à otimização local da solução F , temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \text{custo}(F \setminus \{a\}) - \text{custo}(F) \\
&\leq -f_a + \sum_{j \in N_F(a) \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{j \in N_F(uma) \setminus D_p} (d(s(o_j), j) - S_j). \quad (3)
\end{aligned}$$

Somando as desigualdades (1), (2), e (3) para todas as operações de swap e drop, nós ter

$$\begin{aligned}
0 &\leq - \sum_{uma \in F} f_a + \sum_{b \in F} f_b + \sum_{uma \in F} \sum_{j \in N_F(a) \cap D_p} (p_j - S_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_{eu}} \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap N_F(b_{eu})} (S_j^* - S_j) + \sum_{i=2}^{m_{eu}} \sum_{j \in N_F(uma_{eu}) \cap N_F(b_{eu})} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_{eu}} \sum_{\substack{j \in N_F(a) \setminus (D_p \cup N_F(b)) \\ s(o_j) = a}} \sum_{eu} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
&\quad + \sum_{\substack{j \in N_F(a) \setminus (D_p \cup N_F(b)) \\ s(o_j) = a}} \sum_{eu} (d(b_{eu}, j) - S_j) + \sum_{i=2}^{m_{eu}} \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap N_F(uma_{eu})} (S_j^* - S_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_{eu}} \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap D_p} (\min \{ p_j, S_j^* \} - p_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_{eu}} \sum_{j \in N_F(b_{eu}) \cap (D_p \cup N_F(uma_{eu}) \cup N_F(uma_{eu}))} (\min \{ S_j, S_j^* \} - S_j) \\
&\quad + \sum_{uma \in UMA_{r+1}} \sum_{j \in N_F(uma)} \sum_{D_p} (p_j - S_j) \\
&\leq - \sum_{uma \in F} f_a + \sum_{b \in F} f_b + \sum_{j \in D_p \cap D_p} (p_j - S_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^r \sum_{\substack{j \in NF(al) \setminus D^* \\ s(oj)=al}} (S_j^* - S_j) + \sum_{\substack{j \in NF(al) \setminus (D^* \cup NF^*(bl) \setminus 1) \\ s(oj)=al}} (d(b_{qu}, j) - S_j) \\
& + (\min \{ p_j, S_{ij}^* - p_j \} + (d(s(oj), j) - S_j)) \\
& \leq - \sum_{uma \in F^*} f_a + \sum_{b \in F^*} f_b + \sum_{j \in D_s \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{\substack{uma \in F_j \in NF(a) \setminus D^* \\ s(oj)=uma}} (\min \{ p_j, S_{ij}^* - p_j \}) \\
& + \sum_{l=1}^r \sum_{\substack{j \in NF(al) \setminus D^* \\ s(oj)=al}} (S_j^* - S_j) + (4 S_j + S_{j+4} S_j^* - S_j) \\
& + \sum_{\substack{uma \in F_j \in NF(a) \setminus D^* \\ s(oj)=al}} \sqrt{S_j + 4 S_{j+4} S_j^* - S_j} \\
& \leq - \sum_{uma \in F} f_a + \sum_{b \in F^*} f_b + \sum_{j \in D_s \cap D_p} p_j + \sum_{j \in D_p \cap D_p} p_j - \sqrt{p_j} + \sum_{j \in D_p \cap D_p} p_j - \sum_{j \in D_s \cap D_p} p_j \\
& + \min \{ p_j, S_{ij}^* - p_j \} + \sum_{j \in D_s \cap D_p} (2 S_j + 6 S_{j+8} S_j^* - S_j) \\
& \leq - C_f + C_p + f + C_p + 2 C_s + 6 C_s + \sqrt{s + 8 C_s C_s}
\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade segue de Lemas 2,1 (banda 2,2 , a quinta desigualdade segue do Lema 2,1 (uma). A prova está concluída. \square

Lema 2.4. *If $|F| \leq |F^*|$, temos*

$$C_f + C_p \leq C_s + f + 6 C_s + s + 2 C_s + 8 C_s \sqrt{s + C_s + C_s}.$$

Prova. Mesmo com a prova do Lemma 2,3 , podemos obter as desigualdades (1) e (2) para as operações de swap.

Para a operação de adição *adicione (b)* para todos $b \in B_{r+1}$, o novo custo de cada cliente $j \in NF^*(b)$ pode ser limitado por $\min \{ S_j^*, S_j, p_j \}$, e o custo antigo de j é S_j se $j \in D_p$ por outro lado p_j . Devido à otimização local, temos

$$\begin{aligned}
0 & \leq f_b + \sum_{j \in NF^*(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) + \sum_{j \in NF^*(b) \setminus D_p} (\min \{ S_j^*, S_j - S_j \}) \\
& \leq f_b + \sum_{j \in NF^*(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) + \sum_{j \in NF^*(b) \cap NF(uma_{eu}), t(oj)=uma_{eu}} (S_j^* - S_j) \quad (4)
\end{aligned}$$

Onde uma_{eu} é a péssima instalação de captura b .

Somando as desigualdades (1), (2), e (4) para todas as operações de troca e adição, e usar a análise semelhante no Lemma 2,3 , temos

$$0 \leq - \sum_{uma \in F} f_a + \sum_{b \in F^*} f_b + \sum_{uma \in F_j \in NF(a) \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{b \in B_{r+1} j \in NF^*(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^r \sum_{j \in N_{F_l}(uma_{eu}) \cap N_{F^*}(b_{eu})} (S_j^* - S_j) + \sum_{i=2}^m \sum_{j \in N_{F_l}(uma_{eu}) \cap N_{F^*}(b_{eu})} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_{F_l}(a) \setminus (D^*_{eu} \cup N_{F^*}(b))} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
& + \sum_{j \in N_{F_l}(a) \setminus (D^*_{eu} \cup N_{F^*}(b))} (d(b_{eu}, j) - S_j) + \sum_{i=2}^m \sum_{j \in N_{F^*}(b_{eu}) \cap N_{F_l}(uma_{eu})} (S_j^* - S_j) \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_{F^*}(b_{eu}) \cap D_p} (\min \{ p_j, S_{j^*} - p_j \}) \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{j \in N_{F^*}(b_{eu}) \cap D_p \cup N_{F_l}(uma_{eu}) \cap N_{F^*}(uma_{eu})} (\min \{ S_j, S_{j^*} - S_j \}) \\
& + \sum_{b \in B_{r+1}} \sum_{j \in N_{F^*}(b) \cap N_{F_l}(uma_{eu})} (S_j^* - S_j) \\
& \leq - \sum_{uma \in F^*} f_a + \sum_{b \in F^*} f_b + \sum_{j \in D_s \cap D_p} (p_j - S_j) + \sum_{j \in D^* \setminus \bigcup D_p} (S_j^* - p_j) \\
& + \sum_{l=1}^r \sum_{j \in N_{F_l}(a) \setminus (D^*_{eu} \cup N_{F^*}(b))} (S_j^* - S_j) + \sum_{j \in D^* \setminus \bigcup D_p} (S_j^* - p_j) \\
& + \sum_{uma \in F_l \cap N_{F^*}(a) \setminus D^*_{eu}} \sqrt{S_j + 4 S_{j^*} - S_j - S_j} \\
& \leq -C_f + C_s + f_s + C_s + p - C_p + 2 C_s + 6 C_s + s + 8 C_s + C_s.
\end{aligned}$$

A prova está concluída. \square

A seguir, analisaremos o limite superior da conexão e o custo de penalidade da solução \mathcal{F} usando os dois tipos de partições de F e F^* . Deixar $N_{F^*}(B) :=$

$b \in B \cap N_{F^*}(b)$ para todos $B \subseteq F^*$ e $N_{F_l}(A) := \sum_{uma \in UMA \cap N_{F_l}(a)} uma$ para todos $UMA \subseteq S$. Para o caso que $|F| > |F^*|$, nós construímos operações de swap e drop como segue.

- Para cada par (UMA_{eu}, B_{eu}) com $|UMA_{eu}| = |B_{eu}| \leq q$, nós consideramos a operação *troca* (A_{eu}, B_{eu}) (Veja a figura 3 (a))
- Para cada par (UMA_{eu}, B_{eu}) com $|UMA_{eu}| = |B_{eu}| = q > q$, nós consideramos as operações *troca* (a, b) para todos $uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eu}\}$ e $b \in B_{eu}$ (Veja a figura 3 (b))
- Para cada instalação $uma \in UMA_{r+1}$, nós consideramos a operação *drop* (a) .

Para o caso de $|F| \leq |F^*|$, nós construímos a operação *adicionar* (o) para todos $o \in F^*$.

Usando essas operações locais, podemos obter os limites superiores do custo de conexão e penalidade de F , como mostrado nos dois lemas a seguir.

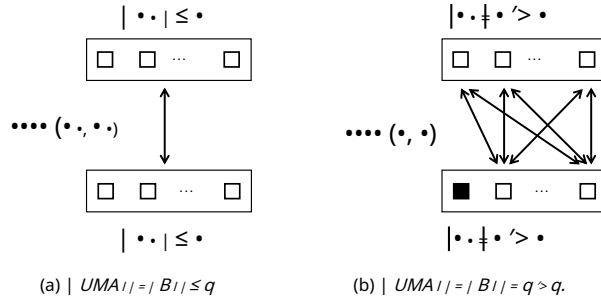


Figura 3. Operações de swap (caso de $|F| > |F^*|$) para analisar o limite superior de $C_s + C_p$. O quadrado preto sólido é uma instalação ruim.

Lemma 2.5. If $|F| > |F^*|$, temos

$$C_s + C_p \leq C^* + \frac{4}{q} C_{s+4}^* + \frac{4}{q} \sqrt{C_s^* C_{s+1} + \frac{1}{q} C_p^*}.$$

Prova. Para a operação *troca* (A_{eu}, B_{eu}) , consideramos os três casos a seguir para o novo custo de $j \in N_{F^*}(B_{eu}) \cup N_F(UMA_{eu})$.

Caso 1: $j \in N_{F^*}(B_{eu})$. Neste caso, a instalação o_j é trocado para o novo solução, implicando o novo custo de j é limitado por S_j^* . O antigo custo de j é S_j . E se $j \in D_p$, por outro lado p_j .

Caso 2: $j \in N_F(UMA_{eu}) \setminus (N_{F^*}(B_{eu}) \cup D^*_{-p})$. Desde a $j \in N_{F^*}(B_{eu})$, temos $tão(j) \in UMA_{eu}$, implicando o novo custo de j pode ser limitado por $d(s(o_j), j)$. O antigo custo de j é S_j .

Caso 3: $j \in N_F(UMA_{eu}) \setminus (N_{F^*}(B_{eu}) \cap D^*_{-p})$. O novo custo de j é limitado por p_j e o antigo custo de j é S_j .

Devido à otimização local, temos

$$0 \leq \text{custo}(F \setminus A_{eu} \cup B_{eu}) - \text{custo}(F) \sum_{uma \in UMA_{eu}} f_a + \sum_{b \in B_{eu}} f_b + \sum_{j \in N_{F^*}(B_{eu}) \setminus D_p} (S_j^* - S_j) + \sum_{j \in N_{F^*}(B_{eu}) \cap D_p} (S_j^* - p_j) + \sum_{j \in N_F(UMA_{eu}) \setminus (N_{F^*}(B_{eu}) \cup D^*_{-p})} (d(s(o_j), j) - S_j) + \sum_{j \in N_F(UMA_{eu}) \setminus (N_{F^*}(B_{eu}) \cap D^*_{-p})} (p_j - S_j). \quad (5)$$

Para a operação *troca* (a, b) para todos $uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eu_1}\}$ e $b \in B_{eu}$, há três casos para o novo custo de $j \in N_F(a) \cup N_{F^*}(b)$ do seguinte modo.

Caso 1: $j \in N_{F^*}(b)$. O novo custo de j é limitado por S_j^* . O antigo custo de j é S_j . E se $j \in D_p$, por outro lado p_j .

Caso 2: $j \in N_F(a \setminus F^*(b)) \cup D^*_{-p}$. O novo custo de j é limitado por $d(s(o_j), j)$ e o custo antigo de j é S_j .

Caso 3: $j \in N_F(a \setminus F^*(b)) \cap D^*_{-p}$. O novo custo de j é limitado por p_j e a custo antigo de j é S_j .

Devido à otimização local, temos

$$0 \leq \text{custo}(F \setminus \{a\} \cup \{b\}) - \text{custo}(F)$$

$$\begin{aligned}
& \leq -f_a + f_b + \sum_{j \in N_{F^*}(b) \setminus D_p} (S_j^* - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) \\
& \quad + \sum_{j \in N_{F^*}(a F^*(b)) \cup D_p} (d(s(o_j), j) - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(a F^*(b)) \cap D_p} (p_j - S_j).
\end{aligned} \tag{6}$$

Somando as desigualdades (6) para todas as operações de swap no par (UMA_{eu}, B_{eu}) , temos

$$\begin{aligned}
0 & \leq - \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} \sum_{b \in B_{eu}} f_a + \sum_{b \in B_{eu}} \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} f_b \\
& \quad + \sum_{b \in B_{eu}} \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} \sum_{j \in N_{F^*}(b) \setminus D_p} (S_j^* - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) \\
& \quad + \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} \sum_{b \in B_{eu}} \sum_{j \in N_{F^*}(a F^*(b)) \cup D_p} (d(s(o_j), j) - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(a F^*(b)) \cap D_p} (p_j - S_j) \\
& \leq -q' \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} f_a + (q' - 1) \sum_{b \in B_{eu}} f_b \\
& \quad + (q' - 1) \sum_{b \in B_{eu}} \sum_{j \in N_{F^*}(b) \setminus D_p} (S_j^* - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) \\
& \quad + q' \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} \sum_{j \in N_{F^*}(uma) \setminus D_p} (d(s(o_j), j) - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(a) \cap D_p} (p_j - S_j) \\
& \leq \sum_{b \in B_{eu}} f_b + \sum_{b \in B_{eu}} \sum_{j \in N_{F^*}(b) \setminus D_p} (S_j^* - S_j)_+ + \sum_{j \in N_{F^*}(b) \cap D_p} (S_j^* - p_j) \\
& \quad + 1 + \sum_{uma \in UMA_{eu} \setminus \{uma_{eq}\}} \frac{1}{q} \sum_{j \in N_{F^*}(uma) \setminus D_p} (d(s(o_j), j) - S_j) \\
& \quad + \sum_{j \in N_{F^*}(a) \cap D_p} (p_j - S_j),
\end{aligned} \tag{7}$$

onde a terceira desigualdade decorre do fato de que $q'/(q' - 1) \leq 1 + 1/q$.

Para a operação *queda* (a) para todos $uma \in UMA_{r+1}$, podemos obter a desigualdade (3) a partir de a otimização local. Somando as desigualdades (5) para todos os pares com $|UMA_{l|} = |B_{l|}| \leq q$, (7) para todos os pares com $|UMA_{l|} = |B_{l|}| = q > q$, e (3) para todos $uma \in UMA_{r+1}$, temos

$$0 \leq \sum_{o \in F^*} f_o + \sum_{j \in D_{s^*} \setminus D_p} (S_j^* - S_j)_+ + \sum_{j \in D_{s^*} \cap D_p} (S_j^* - p_j)$$

$$\begin{aligned}
& + 1 + \frac{1}{q} \sum_{j \in D_s \setminus D_p} (d(s(o), j) - S_j)^+ \sum_{j \in D_s \cap D_p} (p_j - S_j)^+ \\
& \leq \sum_{o \in F^*} f_o^+ \sum_{j \in D_s \setminus D_p} (S_j^* - S_j)^+ \sum_{j \in D_p \setminus D_s} (S_j^* - p_j)^+ \sum_{j \in D_p \cap D_s} (p_j - p_j)^+ \\
& + 1 + \frac{1}{q} \sum_{j \in D_s \setminus D_p} (S_{j+4} S_{j+4}^* S_j S_j^* - S_j - S_j)^+ \sum_{j \in D_s \cap D_p} (p_j - S_j)^+ \\
& \leq \sum_{o \in F^*} f_o^+ \sum_{j \in D_s} S_{j-} \sum_{j \in D_s} p_{j+1} + \frac{1}{q} \sum_{j \in D_p} p_j \\
& + 1 + \frac{1}{q} \sum_{j \in D_s \cap D_p} (4 S_{j+4}^* S_j S_j^* - S_j) \\
& \leq C_{f+}^* C_{s-}^* C_{s-} C_{p+1} + \frac{1}{q} (C_{p+4}^* C_{s+4}^* C_s C_{s-}^*) \\
& \leq C_{f+5}^* + \frac{4}{q} C_{s+4}^* + \frac{4}{q} \sqrt{C_s C_{s+1}^*} + \frac{1}{q} C_{p-}^* C_{s-} C_p,
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue do Lema 2,1 (b) e a quarta desigualdade segue do Lema 2,1 (uma). \square

Lema 2.6. *If $|F| \leq |F^*|$, temos*

$$C_s + C_p \leq C_{f+}^* C_{s+}^* C_{p-}^*.$$

Prova. Nós consideramos a operação *adicionar* (o) para todos $o \in F^*$. Então, é fácil obter a seguinte desigualdade a partir da otimização local.

$$\begin{aligned}
0 & \leq \sum_{o \in F^*} f_o^+ (\text{custo}(F \cup \{o\}) - \text{custo}(F)) \\
& \leq \sum_{o \in F^*} \sum_{j \in N_{F^*}(o) \setminus D_p} (S_j^* - S_j)^+ \sum_{j \in N_{F^*}(o) \cap D_p} (S_j^* - p_j)^+ \\
& + \sum_{j \in D_s \cap D_p} (p_j - S_j)^+ \sum_{j \in D_p \cap D_s} (p_j - p_j)^+ \\
& \leq \sum_{o \in F^*} f_o^+ \sum_{j \in D_s} S_{j+} \sum_{j \in D_p} p_{j-} \sum_{j \in D_s} S_{j-} \sum_{j \in D_p} p_j \\
& = C_{f+}^* C_{s+}^* C_{p-}^* C_{s-} C_p
\end{aligned}$$

que completa a prova. \square

De Lemmas 2,3 e 2,4, temos

$$\text{custo}(F) = C_{f+} C_{p+} C_s \leq C_{f+6}^* C_{s+3}^* C_{s+8} C_s \sqrt{C_{s+} C_s} \quad (8)$$

Precisamos ligar C_s de $\sqrt{C_s}$ a C_{s-}^* e C_{p-}^* . Para este fim, usamos Lemmas 2,5 e 2,6 para obter

$$0 \geq C_{s-} C_{f-5}^* + \frac{4}{q} C_{s-4}^* + \frac{4}{q} \sqrt{C_s C_{s-1}^*} + \frac{1}{q} C_{p-}^*$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s - 2} + \frac{2}{q}} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s - 2} + \frac{2}{q}} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \\
&\quad \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s - 2} + \frac{2}{q}} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \cdot (9)
\end{aligned}$$

É fácil ver isso)

$$\sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s - 2} + \frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} > 0$$

Junto com (9), temos

$$\sqrt{\frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s - 2} + \frac{2}{q}} \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \quad (10)$$

Das desigualdades (8) e (10), temos

$$\begin{aligned}
\text{custo}(F) &\leq C_s^* \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right) \\
&\quad + 3 \cdot \left(\frac{2}{q} \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \right)^2 \\
&\quad + 8 \cdot \left(\frac{2}{q} \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \right)^2 \\
&= 4 C_s^* \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right) \\
&\quad + 20 + \frac{12}{q} \sqrt{\frac{1}{C_s^*} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right)} \\
&\leq 4 C_s^* \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right) \\
&\quad + 10 + \frac{6}{q} \left(\frac{1}{f+1} + \frac{1}{q} C_{\tilde{p}+3} + \frac{2}{q} C_s^* \right) \\
&\leq \left(14 + \frac{6}{q} C_{\tilde{p}+161} + \frac{256}{q} + \frac{136}{q^2} + \frac{24}{q^3} C_s^* \right) \\
&\quad + 13 + \frac{19}{q} + \frac{6}{q^2} C_{\tilde{p}} \\
&\leq \left(161 + \frac{256}{q} + \frac{136}{q^2} + \frac{24}{q^3} \right) \text{custo}(F^*). \quad (11)
\end{aligned}$$

Imediatamente, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.7. Para o SM- k -FLPLP, a lacuna de localidade do Algoritmo 1 é limitado por

$$161 + \frac{256}{q} + \frac{136}{q^2} + \frac{24}{q^3}.$$

Observe que o algoritmo 1 pode sofrer um número exponencial de iterações. Para reduzir a complexidade do tempo, propomos o Algoritmo 1 substituindo $\text{custo}(F) < \text{custo}(F)$ em algoritmo 1 para $\text{custo}(F) < (1 - \varepsilon/Q) \text{custo}(F)$, Onde Q é um limite superior do número de operações de pesquisa local construídas na análise para limitar o custo e ε é qualquer pequeno número positivo. De Arya et al. [1], Nós temos o seguinte resultado.

Lema 2.8 (Arya et al. [1]). O número de iterações do Algoritmo 1 está em a maioria registro $(\text{custo}(F_0) / \text{custo}(F^*))^{\frac{1}{1 - \varepsilon/Q}}$, Onde F_0 é a solução viável inicial para o SM- k -FLPLP. Se a lacuna de localidade do algoritmo 1 é α , então a lacuna de localidade de Algoritmo 1 é $\alpha + \varepsilon$, Onde $\varepsilon' = \alpha\varepsilon$ $\frac{1}{1 - \varepsilon} \sim \varepsilon$.

É fácil provar que podemos definir $Q = k^2$ de nossa análise (para o caso de $F > F^*$, nós construímos no máximo $k + k(k - 1)$ operações de swap e drop; para o caso de $F \leq F^*$, construímos no máximo $2k$ trocar e adicionar operações), e $|N(F)| = O(|F| \log(\text{custo}(F_0) / \text{custo}(F^*)))$ da definição de $N(F)$. Além disso, $\log(\text{custo}(F_0) / \text{custo}(F^*))$ e o tempo para calcular $\text{custo}(F)$ são polinomiais no tamanho de entrada, então Algoritmo 1 é o tempo polinomial de acordo com o Lema 2.8. Imediatamente, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.9. Para o SM- k -FLPLP, existe um $(161 + 256/q + 136/q^2 + 24/q^3 + \varepsilon)$ -algoritmo de aproximação baseado na técnica de busca local, onde q é o limite superior do número de facilidades trocadas em cada iteração, e ε é qualquer pequena constante positiva.

2.3. Melhore a proporção de aproximação por escala. Da desigualdade (11), observamos que há uma grande lacuna entre as garantias de aproximação de C^*

e C^* . Usando a técnica de escalonamento (consulte [3]), podemos reduzir essa lacuna para melhorar a razão de aproximação. O algoritmo com escala é mostrado abaixo.

Algoritmo 2 Algoritmo de escalonamento para o SM- k -FLPLP

Entrada: Instância $I = (F, D, k, f, p, \Omega)$, parâmetros q e δ .

Resultado: Uma solução ótima local.

1: Construir uma nova instância $eu = (F, D, k, f, p, \Omega)$ dimensionando a abertura da instalação e custos de penalidade, ou seja

$$f'_{i:} = \delta f_{eu}, \forall eu \in F, \quad p'_{j:} = \delta p_{j:}, \forall j \in D.$$

2: Algoritmo de Chamada 1 na nova instância eu para obter uma solução F .

3: Retorna F

Nós usamos $C_f(F, EU)$, $C_s(F, EU)$ e $C_p(F, EU)$ para denotar a abertura da instalação, conexão e custos de penalidade da solução F na instância EU , E use C^*

$C_f(EU)$, $C_s(EU)$ e $C_p(EU)$ para denotar os custos de abertura, conexão e penalidade da instalação da solução ideal da instância EU .

A partir da análise (incluindo todas as provas) na Seção 2.2, podemos ver isso quando substituindo a solução ideal F^* com qualquer solução viável X , os resultados da análise

ainda segura. Uma vez que a solução ideal F^* de eu é uma solução viável de eu , nós temos as seguintes duas desigualdades de Lemmas 2,3 e 2,4, e a desigualdade (10)

$$C_f(F, eu) + C_p(F, eu) \leq C_f(F^*, eu) + \sqrt{6 C_s(F^*, eu) + 2 C_s(F, eu)} + 8 C_s(F^*, eu) C_s(F, eu) + C_p(F^*, eu) \quad (12)$$

$$e \quad \sqrt{\frac{C_s(F, eu)}{C_s(F^*, eu)}} \leq \left(2 + \frac{2}{q}\right) \sqrt{\frac{C_s(F^*, eu)}{C_s(F, eu)}} + \frac{1}{q} C_p(F^*, eu) + 3 + \frac{2}{q} C_s(F^*, eu) \quad (13)$$

Onde F é a solução ideal local da instância eu . Usando a desigualdade (12), temos

$$\begin{aligned} C_f(F, I) + C_p(F, I) &= \frac{C_f(F, eu) + C_p(F, eu)}{\delta} \\ &\leq \frac{C_f(F^*, eu) + 6 C_s(F^*, eu) + 2 C_s(F, eu) + 8 C_s(F^*, eu) C_s(F, eu) + C_p(F^*, eu)}{\delta} \\ &\leq C_f(F^*, I) + C_p(F^*, I) + \frac{6 C_s(F^*, I) + 2 C_s(F, I) + 8 C_s(F^*, EU) C_s(F, EU)}{\delta}. \end{aligned}$$

Adicionando $C_s(F, EU)$ para ambos os lados da desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} &C_f(F, I) + C_p(F, I) + C_s(F, EU) \\ &\leq C_f(F^*, eu) + C_p(F^*, I) + 1 + \frac{2}{\delta} C_s(F, I) + \frac{6 C_s(F^*, I) + 8 C_s(F^*, EU) C_s(F, EU)}{\delta} \\ &= C^*_f(I) + C^*_p(I) + 1 + \frac{2}{\delta} C_s(F, eu) + \frac{6 C_s(I) + 8 C_s(F^*, EU) C_s(F, eu)}{\delta}. \end{aligned}$$

Junto com a desigualdade (13) e após algumas deduções matemáticas, temos

$$\begin{aligned} &C_f(F, I) + C_p(F, I) + C_s(F, EU) \\ &\leq \max \left\{ 11 + 3\delta + \frac{4 + 2\delta}{q}, 11 + 3\delta + \frac{14 + 5\delta}{q} + \frac{4 + 2\delta}{q^2}, \right. \\ &\quad \left. 33 + \frac{128}{\delta} + \frac{64 + 192/\delta}{q} + \frac{40 + 96/\delta}{q^2} + \frac{8 + 16/\delta}{q^3} \right\} \cdot \text{custo}(F^*). \end{aligned}$$

Pela configuração

$$\delta = \sqrt{\frac{11 + \frac{25}{q+18} \frac{1}{q^2+4} \frac{1}{q^3+2}}{3 + \frac{5}{q+2} \frac{1}{q^2}} \left(\frac{11 + \frac{25}{q+18} \frac{1}{q^2+4} \frac{1}{q^3}}{3 + \frac{5}{q+2} \frac{1}{q^2}} + \frac{128 + \frac{192}{q+96} \frac{1}{q^2+16} \frac{1}{q^3}}{3 + \frac{5}{q+2} \frac{1}{q^2}} \right)},$$

obtemos que a lacuna de localidade do algoritmo 2 é

$$11 + 3\delta + \frac{14 + 5\delta}{q} + \frac{4 + 2\delta}{q^2}.$$

Quando q é grande o suficiente, a lacuna de localidade é de aproximadamente $22 + 505 \sqrt{\frac{1}{q}}$.
Consequentemente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.10. *Para o SM- k -FLPLP, existe um $(22 + 505 + \varepsilon) \sqrt{\frac{1}{q}}$ - algoritmo de aproximação baseado na técnica de busca local, onde ε é qualquer pequena constante positiva.*

3 Conclusão. Neste artigo, consideramos a métrica quadrada k -problema de localização de instalação com penalidades lineares, uma variante do clássico k -problema mediano. Aplicamos o esquema de pesquisa local com operações de adição, eliminação e troca a este problema e provamos que é um $(161 + 256 / q + 136 / q^2 + 24 / q^3 + \varepsilon)$ - algoritmo de aproximação onde ε é qualquer pequeno número positivo e q é o limite superior do número de recursos trocados em cada iteração. Quando q é grande o suficiente, a razão de aproximação se aproxima de $162 + \varepsilon$. Além disso, melhoramos a taxa de aproximação para $22 + 505 + \varepsilon$ usando a técnica de dimensionamento.

No futuro, podemos estudar como melhorar o desempenho do esquema de busca local neste problema e outras variantes importantes de k -problema médio com métrica generalizada, penalidades submodulares, restrição capacitada, etc.

Agradecimentos. O segundo autor é apoiado pela National Natural Science Foundation of China (nº 11871081). O terceiro autor é apoiado pela National Natural Science Foundation of China (Nos. 61672323 e 61972228). O quarto autor é apoiado pela Fundação Nacional de Ciências Naturais da China (nº 61433012), bolsa de pesquisa de Shenzhen (KQJSCX20180330170311901, JCYJ20180305180840138, GGF2017073114031767) e Projeto de construção de disciplina de Shenzhen para computação urbana e inteligência de dados

REFERÊNCIAS

- [1] V. Arya, N. Garg, R. Khandekar, A. Meyerson, K. Munagala e V. Pandit, [Pesquisa local heurísticas para \$k\$ -problemas de localização mediana e de instalação](#), *SIAM Journal on Computing*, 33 (2004), 544–562.
- [2] J. Byrka, T. Pensyl, B. Rybicki, A. Srinivasan e K. Trinh, [Uma aproximação melhorada para \$k\$ -correlação mediana e positiva na otimização orçada](#), *Transações ACM em Algoritmos*, 13 (2017), Art. 23, 31 pp.
- [3] M. Charikar e S. Guha, [Algoritmos combinatórios aprimorados para problemas de localização de instalações](#), *SIAM Journal on Computing*, 34 (2005), 803–824.
- [4] M. Charikar, S. Guha, É. Tardos e DB Shmoys, [Um algoritmo de aproximação de fator constante ritmo para o \$k\$ -problema mediano](#), *Simpósio Anual da ACM em Teoria da Computação (Atlanta, GA, 1999)*, ACM, Nova York, (1999), 1–10.
- [5] M. Charikar, S. Khuller, DM Mount e G. Narasimhan, Algoritmos para problemas de localização de instalações com outliers, *Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SIAM, Philadelphia, PA, (2001)*, 642–651.
- [6] FA Chudak e DB Shmoys, [Algoritmos de aproximação aprimorados para os não capacitados problema de localização de instalação](#), *SIAM Journal on Computing*, 33 (2003), 1–25.
- [7] CG Fernandes, LAA Meira, FK Miyazawa e LLC Pedrosa, [Uma abordagem sistemática para vincular LPs reveladores de fator e sua aplicação aos problemas de localização de instalações métricas e métricas quadradas](#), *Programação Matemática*, 153 (2015), 655–685.
- [8] M. Hajiaghayi, R. Khandekar e G. Kortsarz, [Algoritmos de pesquisa local para o vermelho-azul problema mediano](#), *Algorithmica*, 63 (2012), 795–814.
- [9] DS Hochbaum, [Heurísticas para o problema da mediana de custo fixo](#), *Programação Matemática*, 22 (1982), 148–162.
- [10] K. Jain e VV Vazirani, [Algoritmos de aproximação para localização de instalação métrica e \$k\$ -problemas medianos usando o esquema primal-dual e relaxamento Lagrangiano](#), *Jornal do ACM*, 48 (2001), 274–296.
- [11] S. Li, [Um algoritmo de aproximação de 1,488 para o problema de localização de instalação não capacitada](#), *Dentro-formação e computação*, 222 (2013), 45–58.

- [12] Y. Li, DL Du, NH Xiu e DC Xu, [Algoritmos de aproximação aprimorados para a instalação problemas de localização com penalidades lineares / submodulares](#), *Algorithmica*, 73 (2015), 460–482.
- [13] DB Shmoys, Tardos e K. Aardal, [Algoritmos de aproximação para localização de instalação problemas](#), *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, NY, (1997)*, 265–274.
- [14] YS Wang, DC Xu, DL Du e CC Wu, [Um algoritmo de aproximação para o enésimo Problema de localização de instalação de métrica de energia com penalidades lineares](#), *Cartas de Otimização*, 11 (2017), 983–993.
- [15] YS Wang, DC Xu, DL Du e CC Wu, [Um algoritmo de aproximação para \$k\$ -instalação problema de localização com penalidades lineares usando o esquema de pesquisa local](#), *Journal of Combinatorial Optimization*, 36 (2018), 264–279.
- [16] YC Xu, DC Xu, DL Du e DM Zhang, [Algoritmo de aproximação para quadrado problema de localização de instalação métrica com capacidades não uniformes](#), *Matemática Aplicada Discreta*, 264 (2019), 208–217.
- [17] YC Xu, DC Xu, DL Du e CC Wu, [Algoritmo de busca local para instalação universal problema de localização com penalidades lineares](#), *Journal of Global Optimization*, 67 (2017), 367–378.
- [18] P. Zhang, [Um novo algoritmo de aproximação para o \$k\$ - problema de localização de instalação](#), *Teórico Ciência da Computação*, 384 (2007), 126–135.
- [19] DM Zhang, DC Xu, YS Wang, P. Zhang e ZN Zhang, [Aproximação de pesquisa local algoritmos para a soma dos quadrados dos problemas de localização de instalações](#), *Journal of Global Optimization*, 74 (2019), 909–932.
- [20] DM Zhang, DC Xu, YS Wang, P. Zhang e ZN Zhang, [Uma pesquisa local aproxima- algoritmo de mação para uma métrica quadrada \$k\$ - problema de localização de instalação](#), *Journal of Combinatorial Optimization*, 35 (2018), 1168–1184.

Recebido em outubro de 2019; revisado em novembro de 2019.

Endereço de e-mail: ys.wang1@siat.ac.cn

Endereço de e-mail: zhangdongmei@sdjzu.edu.cn

Endereço de e-mail: algzhang@sdu.edu.cn

Endereço de e-mail: zhangyong@siat.ac.cn