

# 1 世界的舞台：场方程

## 1.1 潮汐力与测地偏离

你也许听说过：在太空中自由下落的宇航员是**失重**的。他们感觉不到重力，就像它从未存在一样。但如果重力真的“消失”了，那我们还剩下什么？爱因斯坦敏锐地指出：自由落体并不意味着没有引力，它只是以一种新的方式留下了痕迹。

想象你穿着宇航服，漂浮在距离地球一定高度的空间中。这次你不在空间站里，而是一个人悬停在太空中，靠喷气背包保持静止。你脚下是地球，头顶是无边宇宙。此刻，围绕你布满了均匀分布的金属小珠子，构成一个球形壳体，每颗珠子都和你一样静止。

现在，你关闭喷气背包，和这些珠子一起开始自由下落，朝向地球坠落。最初，你感觉不到任何特别之处，所有的珠子似乎都安静地围绕着你。毕竟**如果地球的引力场是完全均匀的，那你们的加速度将完全一致**，相对距离也完全不会发生改变。

但渐渐地，事情开始变化。你会发现球壳赤道上的珠子，也就是你身边水平方向的珠子，开始缓慢地向你靠近。而头顶和脚下的珠子却慢慢地远离你。原来本各向同性的球面变得越来越椭。

这正是引力场不均匀的表现：你和身边的珠子都在加速，但你们加速的方向都指向地球中心，因此轨迹在会聚——水平上的珠子看起来正靠近你。另一方面，你脚下的珠子离地球更近，它比你受到更强的引力，因此加速更快，从你视角看，它向下远去；而你头顶的珠子离地球更远，它加速得没你快，因此也逐渐被你甩在身后。

这种在某些方向上拉伸、在另一些方向上压缩的引力效应，就是著名的**潮汐力**。它并不是引力本身，而是引力场变化留下的痕迹。

你可能会问：如果我们不是从静止状态掉下去，而是以恰好合适的速度水平飞行，绕地球做一个圆形轨道呢？结果是一样的。你和那一球珠子仍然会受到同样的潮汐力。

接下来我们从牛顿引力出发，一步步从潮汐力走向场方程。

### 1.1.1 牛顿引力下潮汐力的几何特征

想象一下，假设最初的粒子球体被封闭在一个立方体中。当球体下落并变形为椭球时，封闭的立方体及其内容物会发生线性变换，将其变形为一个边长为  $2\xi$ ,  $2\zeta$  和  $2\Xi$  的盒子，因此体积为  $8\xi\zeta\Xi$ 。注意到对于水平方向， $\xi$  与  $\zeta$  的地位应当是等价的，且鸡蛋所占的体积是这个盒子的一个固定比例，我们有：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^2\Xi \quad (1)$$

由于你和粒子球从静止开始，显然这个体积的变化率最初为零： $\delta\dot{\mathcal{V}} = 0$ 。这可以通过计算来验证：

$$\delta\dot{\mathcal{V}} = \frac{4\pi}{3} [2\xi\dot{\xi} + \xi^2\dot{\Xi}] = 0$$

但是潮汐力会立即加速球体的粒子，所以现在让我们计算鸡蛋体积的二阶导数：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3} [2(\dot{\xi})^2 + 2\xi\ddot{\xi} + 2\dot{\xi}\dot{\Xi} + \xi^2\ddot{\Xi}] \\ &= \frac{4\pi}{3} [2\xi\ddot{\xi} + \xi^2\ddot{\Xi}]\end{aligned}$$

但是，最初  $\xi = \delta r = \zeta$ ，且水平方向的引力差和垂直方向的引力差分别控制，因此：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3} [2\delta r\ddot{\xi} + \delta r^2\ddot{\Xi}] = \frac{4\pi}{3} (\delta r)^2 (2\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中  $\mathcal{K}_{\pm}$  由以下两个公式确定：

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\mathcal{K}_+\xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_+ = +\frac{GM}{r^3} \\ \ddot{\Xi} &= -\mathcal{K}_-\Xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_- = -\frac{2GM}{r^3}\end{aligned}$$

由  $\delta\ddot{\mathcal{V}} = \delta\dot{\mathcal{V}} = 0$ ，我们可以得到美丽的平方反比潮汐力的几何特征：由平方反比定律产生的潮汐力、且只有平方反比定律是**保持体积**的。

### 1.1.2 牛顿引力下吸引力的几何特征

在前面的分析中，我们暂时忽略了球壳内部粒子对彼此的引力影响。但实际上，如果你从球体中被移开，并将原本你所在位置填充为密度为  $\rho$  的致密物质，它将对其余粒子产生新的引力源。

假设粒子球半径为  $\xi = \Xi$ ，此时球体内的粒子将受到这块致密物质的吸引。等效地，可以认为中心存在一团质量为  $\rho\delta\mathcal{V}$  的物质，产生引力使粒子向中心加速：

$$\ddot{\xi} = -\frac{G\rho\delta\mathcal{V}}{\xi^2}$$

现在我们来计算这种情况下鸡蛋体积的加速度。根据(??)：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^3$$

我们对其进行两次时间导数，有：

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathcal{V}} &= 4\pi\xi^2\dot{\xi} \\ \delta\ddot{\mathcal{V}} &= 8\pi\xi\dot{\xi}^2 + 4\pi\xi^2\ddot{\xi}\end{aligned}$$

由于初始时  $\dot{\xi} = 0$ ，上式简化为：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = 4\pi\xi^2\ddot{\xi} = 4\pi\xi^2\left(-\frac{G\rho\delta\mathcal{V}}{\xi^2}\right) = -4\pi G\rho\delta\mathcal{V}$$

因此我们得到了一个非常优雅的结论：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = -4\pi G\rho\delta\mathcal{V} \quad (2)$$

即：对于一个填充了密度为  $\rho$  物质的球体而言，其体积的加速度正比于它本身，且符号为负，表示球体会向内坍缩。这种行为是平方反比引力的直接体现，体现了其稳定、集中的吸引性质。

## 1.2 时空图

## 1.3 Einstein 真空场方程