1　世界的舞台：场方程

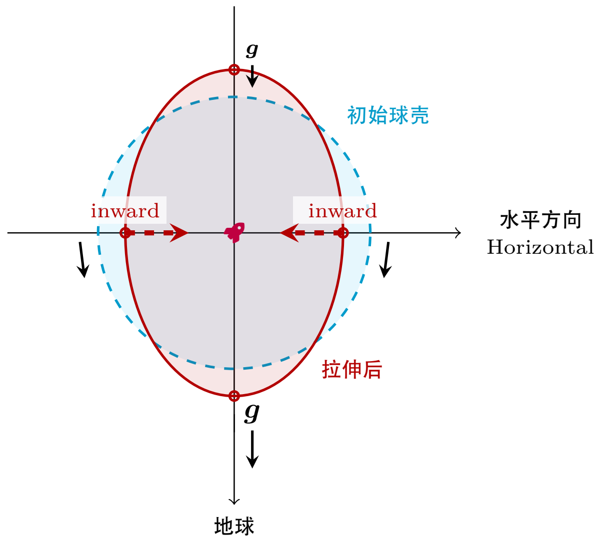
1.1　潮汐力与测地偏离

你也许听说过：在太空中自由下落的宇航员是**失重**的。他们感觉不到重力，就像它从未存在一样。但如果重力真的“消失”了，那我们还剩下什么？爱因斯坦敏锐地指出：自由落体并不意味着没有引力，它只是以一种新的方式留下了痕迹。

想象你穿着宇航服，漂浮在距离地球一定高度的空间中。这次你不在空间站里，而是一个人悬停在太空中，靠喷气背包保持静止。你脚下是地球，头顶是无边宇宙。此刻，围绕你布满了均匀分布的金属小珠子，构成一个球形壳体，每颗珠子都和你一样静止。

现在，你关闭喷气背包，和这些珠子一起开始自由下落，朝向地球坠落。最初，你感觉不到任何特别之处，所有的珠子似乎都安静地围绕着你。毕竟**如果地球的引力场是完全均匀的，那你们的加速度将完全一致**，相对距离也完全不会发生改变。

但渐渐地，事情开始变化。你会发现球壳赤道上的珠子，也就是你身边水平方向的珠子，开始缓慢地向你靠近。而头顶和脚下的珠子却慢慢地远离你。原来本各向同性的球面变得越来越椭。



这正是引力场不均匀的表现：你和身边的珠子都在加速，但你们加速的方向都指向地球中心，因此轨迹在会聚——水平上的珠子看起来正靠近你。另一方面，你脚下的珠子离地球更近，它比你受到更强的引力，因此加速更快，从你视角看，它向下远去；而你头顶的珠子离地球更远，它加速得没你快，因此也逐渐被你甩在身后。

这种在某些方向上拉伸、在另一些方向上压缩的引力效应，就是著名的**潮汐力**。它并不是引力本身，而是引力场变化留下的痕迹。

你可能会问：如果我们不是从静止状态掉下去，而是以恰好合适的速度水平飞行，绕地球做一个圆形轨道呢？结果是一样的。你和那一球珠子仍然会受到同样的潮汐力。

接下来我们从牛顿引力出发，一步步从潮汐力走向场方程。

1.1.1 牛顿引力下潮汐力的几何特征

想象一下，假设最初的粒子球体被封闭在一个立方体中。当球体下落并变形为椭球时，封闭的立方体及其内容物会发生线性变换，将其变形为一个边长为 $2\xi, 2\zeta$ 和 2Ξ 的盒子，因此体积为 $8\xi\zeta\Xi$。注意到对于水平方向，ξ 与 ζ 的地位应当是等价的，且鸡蛋所占的体积是这个盒子的一个固定比例，我们有：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^2\Xi \tag{1}$$

由于你和粒子球从静止开始，显然这个体积的变化率最初为零：$\delta\dot{\mathcal{V}} = 0$。这可以通过计算来验证：

$$\delta\dot{\mathcal{V}} = \frac{4\pi}{3}\left[2\xi\dot{\xi} + \xi^2\dot{\Xi}\right] = 0$$

但是潮汐力会立即加速球体的粒子，所以现在让我们计算鸡蛋体积的二阶导数：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3}\left[2(\dot{\xi})^2 + 2\xi\ddot{\xi} + 2\dot{\xi}\dot{\Xi} + \xi^2\ddot{\Xi}\right] \\ &= \frac{4\pi}{3}\left[2\xi\ddot{\xi} + \xi^2\ddot{\Xi}\right]\end{aligned}$$

但是，最初 $\xi = \delta r = \zeta$，且水平方向的引力差和垂直方向的引力差分别控制，因此：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3}\left[2\delta r\ddot{\xi} + \delta r^2\ddot{\Xi}\right] = \frac{4\pi}{3}(\delta r)^2\left(2\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{K}_\pm$ 由以下两个公式确定：

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\mathcal{K}_+\xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_+ = +\frac{GM}{r^3} \\ \ddot{\Xi} &= -\mathcal{K}_-\Xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_- = -\frac{2GM}{r^3}\end{aligned}$$

由 $\delta\ddot{\mathcal{V}} = \delta\dot{\mathcal{V}} = 0$，我们可以得到美丽的平方反比潮汐力的几何特征：由平方反比定律产生的潮汐力、且只有平方反比定律是**保持体积**的。

1.1.2 牛顿引力下吸引力的几何特征

在前面的分析中，我们暂时忽略了球壳内部粒子对彼此的引力影响。但实际上，如果你从球体中被移开，并将原本你所在位置填充为密度为 ρ 的致密物质，它将对其余粒子产生新的引力源。

假设粒子球半径为 $\xi = \Xi$，此时球体内的粒子将受到这块致密物质的吸引。等效地，可以认为中心存在一团质量为 $\rho\,\delta\mathcal{V}$ 的物质，产生引力使粒子向中心加速：

$$\ddot{\xi} = -\frac{G\rho\,\delta\mathcal{V}}{\xi^2}$$

现在我们来计算这种情况下鸡蛋体积的加速度。根据(1)：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^3$$

我们对其进行两次时间导数，有：

$$\delta\dot{\mathcal{V}} = 4\pi\xi^2\dot{\xi}$$
$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = 8\pi\xi\dot{\xi}^2 + 4\pi\xi^2\ddot{\xi}$$

由于初始时 $\dot{\xi} = 0$，上式简化为：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = 4\pi\xi^2\ddot{\xi} = 4\pi\xi^2\left(-\frac{G\rho\,\delta\mathcal{V}}{\xi^2}\right) = -4\pi G\rho\,\delta\mathcal{V}$$

因此我们得到了一个非常优雅的结论：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = -4\pi G\rho\,\delta\mathcal{V} \tag{2}$$

即：对于一个填充了密度为 ρ 物质的球体而言，其体积的加速度正比于它本身，且符号为负，表示球体会向内坍缩。这种行为是平方反比引力的直接体现，体现了其稳定、集中的吸引性质。

1.2 时空图

对于人类来说，四维时空本质上是无法直接感知或想象的。那么我们该如何理解它呢？一个常用的策略是：牺牲一部分维度，用简化后的图像帮助我们进行推理。

更具体地说，我们可以画出时间轴，并从三个空间维中选择两个（或进一步简化，只选择一个）作为图中的水平面。这样，我们就在二维图中嵌入了三维空间的投影和一维时间的演化轨迹。

图中展示的是一个理想化的时空图——事件发生在锥顶，向外传播的光在每一时刻形成一个球面，其在图上投影为圆圈。光的整个传播过程构成一个向上的圆锥面，称为光锥。沿光锥传播的路径称为**零世界线（null worldline）**，而低于光速的粒子轨迹则位于锥内，形成**类时世界线（timelike worldline）**。

从图中可以看出，光锥是决定事件因果结构的核心：只有位于某事件光锥内部的其他事件，才能以亚光速信号与该事件产生因果联系。而处于光锥外部的事件，即使空间上很近，也永远不可能对其产生影响。

尽管这幅图省略了一个空间维度，但只要两个空间方向在物理上是等价的，我们就不会丢失任何信息。事实上，在经典平坦时空中，空间方向是完全对称的，我们可以随意隐藏其中之一而无损推理。然而时间方向则完全不同，它在物理中有明确的方向性，不能省略。

我们再从另一个角度重新理解光锥。考虑一个事件发出光脉冲，该脉冲以光速均匀向外传播，形成一个球形波前。图中呈现为不断膨胀的圆锥面，其上每一点代表光达到的空间位置。这个圆锥就是所谓的**光锥**，它的内部代表可能被该事件因果影响的区域。物理学告诉我们，任何具有非零质量的粒子，其传播速度必须低于光速，因此其轨迹必然限制在光锥内部。

由于光锥的几何性质，我们也可以将它看作一种因果图层，决定了从某个事件出发可以到达哪里，也决定了哪些事件可以成为它的因。我们称粒子在时空图中的轨迹为其**世界线**，而其轨迹的切向量被称为该粒子的**四速度**（**4-velocity**）。

四速度是定义在四维时空中的矢量，用于描述粒子的运动状态。即使一个粒子在空间中静止，它依然以单位速率沿时间轴前进，因此它仍具有非零的四速度，其方向正对时间轴。

对于光子而言，情况则不同。由于其速度恒定且为 c，它的世界线是沿光锥边界延伸的。于是它的四速度不再是一个类时向量，其长度等于零。换句话说，**光子的四速度长为零**。

1.3 Einstein 真空场方程