

# 写给初中生的广义相对论入门

近代物理社

2025 年 7 月 2 日

本文参考书目：《微分几何入门与广义相对论》（梁灿彬）简称梁书。

我们重新定义一种时间和距离的单位使得这一单位制下光速  $c = 1$ 。

## 目录

<b>1 时空的几何学</b>	<b>2</b>
<b>2 世界的舞台：场方程</b>	<b>3</b>
2.1 潮汐力与测地偏离 . . . . .	3
2.1.1 牛顿引力下潮汐力的几何特征 . . . . .	4
2.1.2 牛顿引力下吸引力的几何特征 . . . . .	5
2.2 时空图 . . . . .	6
2.3 Einstein 真空场方程 . . . . .	6
<b>3 Schwarzschild 真空解</b>	<b>6</b>
<b>4 黑洞</b>	<b>6</b>
<b>5 宇宙学概论</b>	<b>6</b>

# 1 时空的几何学

我们每日身处时空当中，你是否曾追问过：时空是什么？我们用物理学家的观念对这一哲学问题作以阐释，我们愿意将时空抽象为包含我们认为时空本应该包含的信息的一个数学对象。

首先，我们世界里某一个特定时刻的特定位置，都应该是时空的一个组成部分，我们管这一个“点”的概念称为事件，我们说：时空是所有事件的集合。

这个集合里有许多直观的结构：比如在一个不是很大的房间里，在不长的一段时间中，可以用一个钟定义房间里的时间  $t$ ，并在房间里画上三维坐标  $O - xyz$ ，那么给定坐标  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ ，我们便可以确定这段时间房间中的一个事件。

而且，我们有很直观的感受说如果两个事件发生时间临近位置也临近，这两个事件是邻近的。因此如果给我们一张四维的纸，我们可以把那片时空的地图画在纸上，使临近的事件对应的点也临近，并且地图上有着坐标。

如果我们对一片大时空中可以分割出来的每一个奇形怪状的部分都画上地图并粘在一起，就得到了整个时空的大地图。如果把我们所说的上述结构的构造数学化，我们可以说：时空是一个微分流形。

但是凡是坐飞机时看过地图上飞机的航线的同学都知道，地球球面上连接地球上两点的最短线在地图上看是曲线。这是因为地图上的距离是失真的。

我们想描述时空的几何结构不能只有地图这一张图（初中学地理大家知道地图一定要有比例尺），我们必须明确时空的地图上的“距离（长度）”概念。

必须注意的是，这个距离的概念在地图上不同的点是不同的，因为一般而言时空的几何是弯曲的，类似于地球那样。因此，我们必须逐点给出我们的距离失真才可以真正标定距离概念。

我们还要注意，有限间隔的两点间一般而言距离是曲线长度，不方便定义。

因为当你看一个弯曲的微分流形某点附近很小的范围，它近似是平直的，我们希望定义一点附近非常临近的两点连线作为矢量，并定义这个矢量的模长平方在地图上的算法。

数学上严格构造微分流形上的矢量的方式如下：

1. 先给出微分流形集合上所有可能的到实数的映射，在地图上这显示为多元函数，因此，我们把流形上的点的信息转换为了流形上函数的信息。

2. 我们在给定点附近十分临近选一个点，将这两点函数值相减并乘上一个固定的大数，当我们把点越选越近时，我们包含临近两点的对象变成了求导算符。

3. 不难验证一点上的求导算符（我们省去求和号对重复的指标  $0 \sim 3$  求和  $A = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ，其中  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  作为基底是沿坐标的求导算符）构成线性空间，称为切空间，其中元

素称为该点的矢量。

4. 事实上，我们是反过来构造矢量的，先要求一类从函数到实数的映射算符满足线性性质，并且满足小量部分对正常量没有影响（体现为莱布尼茨律，详见梁书），从而得到矢量这种对象。

由初中所学的勾股定理  $r^2 = x^2 = y^2 = z^2$  可以推想，我们需要一个由矢量到实数的双线性映射  $|A|^2 = g(A, A) = g(a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, a^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) a^\mu a^\nu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$ 。

一般地，这样的线性映射可以由矢量到实数的线性映射构造出来，过程如下：

1. 取从矢量到实数的线性映射，选取基底  $dx^\mu$ ，满足  $dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_\nu^\mu$ ，其中

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

所有映射构成线性空间称为余切空间，其中一般元素为  $B = b_\mu dx^\mu$  称为对偶矢量。为表区分，必要时，在矢量上标以英文字母上标，对偶矢量下标以英文字母下标如  $A^a$ ， $B_b$ 。

直观上，可以将矢量想象成箭头，对偶矢量想象成地图上的斜坡等高线用来测度矢量。有趣的是，函数自然诱导出对偶矢量，我们以函数值作为直观等高线的数值。这样，其量矢量得出的实数就是很近函数值的差乘一个固定的大数，即函数导数。将对偶矢量作用于矢量基底上得出  $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$ 。这正是多元微积分中的全微分！

2. 我们构造

## 2 世界的舞台：场方程

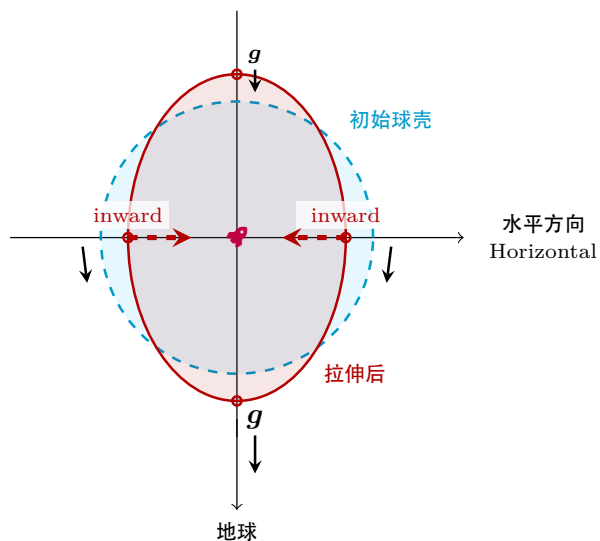
### 2.1 潮汐力与测地偏离

你也许听说过：在太空中自由下落的宇航员是**失重**的。他们感觉不到重力，就像它从未存在一样。但如果重力真的“消失”了，那我们还剩下什么？爱因斯坦敏锐地指出：自由落体并不意味着没有引力，它只是以一种新的方式留下了痕迹。

想象你穿着宇航服，漂浮在距离地球一定高度的空间中。这次你不在空间站里，而是一个人悬停在太空中，靠喷气背包保持静止。你脚下是地球，头顶是无边宇宙。此刻，围绕你布满了均匀分布的金属小珠子，构成一个球形壳体，每颗珠子都和你一样静止。

现在，你关闭喷气背包，和这些珠子一起开始自由下落，朝向地球坠落。最初，你感觉不到任何特别之处，所有的珠子似乎都安静地围绕着你。毕竟**如果地球的引力场是完全均匀的，那你们的加速度将完全一致**，相对距离也完全不会发生改变。

但渐渐地，事情开始变化。你会发现球壳赤道上的珠子，也就是你身边水平方向的珠子，开始缓慢地向你靠近。而头顶和脚下的珠子却慢慢地远离你。原来本各向同性的球面变得越来越椭。



这正是引力场不均匀的表现：你和身边的珠子都在加速，但你们加速的方向都指向地球中心，因此轨迹在会聚——水平上的珠子看起来正靠近你。另一方面，你脚下的珠子离地球更近，它比你受到更强的引力，因此加速更快，从你视角看，它向下远去；而你头顶的珠子离地球更远，它加速得没你快，因此也逐渐被你甩在身后。

这种在某些方向上拉伸、在另一些方向上压缩的引力效应，就是著名的**潮汐力**。它并不是引力本身，而是引力场变化留下的痕迹。

你可能会问：如果我们不是从静止状态掉下去，而是以恰好合适的速度水平飞行，绕地球做一个圆形轨道呢？结果是一样的。你和那一球珠子仍然会受到同样的潮汐力。

接下来我们从牛顿引力出发，一步步从潮汐力走向场方程。

### 2.1.1 牛顿引力下潮汐力的几何特征

想象一下，假设最初的粒子球体被封闭在一个立方体中。当球体下落并变形为椭球时，封闭的立方体及其内容物会发生线性变换，将其变形为一个边长为  $2\xi$ ,  $2\zeta$  和  $2\Xi$  的盒子，因此体积为  $8\xi\zeta\Xi$ 。注意到对于水平方向， $\xi$  与  $\zeta$  的地位应当是等价的，且鸡蛋所占的体积是这个盒子的一个固定比例，我们有：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^2\Xi \quad (1)$$

由于你和粒子球从静止开始，显然这个体积的变化率最初为零： $\delta\dot{\mathcal{V}} = 0$ 。这可以通过计算来验证：

$$\delta\dot{\mathcal{V}} = \frac{4\pi}{3} [2\xi\dot{\xi} + \xi^2\dot{\Xi}] = 0$$

但是潮汐力会立即加速球体的粒子，所以现在让我们计算鸡蛋体积的二阶导数：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3} [2(\dot{\xi})^2 + 2\xi\ddot{\xi} + 2\dot{\xi}\dot{\Xi} + \xi^2\ddot{\Xi}] \\ &= \frac{4\pi}{3} [2\xi\ddot{\xi} + \xi^2\ddot{\Xi}]\end{aligned}$$

但是，最初  $\xi = \delta r = \zeta$ ，且水平方向的引力差和垂直方向的引力差分别控制，因此：

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\mathcal{V}} &= \frac{4\pi}{3} [2\delta r\ddot{\xi} + \delta r^2\ddot{\Xi}] = \frac{4\pi}{3} (\delta r)^2 (2\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中  $\mathcal{K}_{\pm}$  由以下两个公式确定：

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\mathcal{K}_+\xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_+ = +\frac{GM}{r^3} \\ \ddot{\Xi} &= -\mathcal{K}_-\Xi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_- = -\frac{2GM}{r^3}\end{aligned}$$

由  $\delta\ddot{\mathcal{V}} = \delta\dot{\mathcal{V}} = 0$ ，我们可以得到美丽的平方反比潮汐力的几何特征：由平方反比定律产生的潮汐力、且只有平方反比定律是**保持体积**的。

### 2.1.2 牛顿引力下吸引力的几何特征

在前面的分析中，我们暂时忽略了球壳内部粒子对彼此的引力影响。但实际上，如果你从球体中被移开，并将原本你所在位置填充为密度为  $\rho$  的致密物质，它将对其余粒子产生新的引力源。

假设粒子球半径为  $\xi = \Xi$ ，此时球体内的粒子将受到这块致密物质的吸引。等效地，可以认为中心存在一团质量为  $\rho\delta\mathcal{V}$  的物质，产生引力使粒子向中心加速：

$$\ddot{\xi} = -\frac{G\rho\delta\mathcal{V}}{\xi^2}$$

现在我们来计算这种情况下鸡蛋体积的加速度。根据(1)：

$$\delta\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^3$$

我们对其进行两次时间导数，有：

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathcal{V}} &= 4\pi\xi^2\dot{\xi} \\ \delta\ddot{\mathcal{V}} &= 8\pi\xi\dot{\xi}^2 + 4\pi\xi^2\ddot{\xi}\end{aligned}$$

由于初始时  $\dot{\xi} = 0$ ，上式简化为：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = 4\pi\xi^2\ddot{\xi} = 4\pi\xi^2 \left( -\frac{G\rho\delta\mathcal{V}}{\xi^2} \right) = -4\pi G\rho\delta\mathcal{V}$$

因此我们得到了一个非常优雅的结论：

$$\delta\ddot{\mathcal{V}} = -4\pi G\rho\delta\mathcal{V} \quad (2)$$

即：对于一个填充了密度为  $\rho$  物质的球体而言，其体积的加速度正比于它本身，且符号为负，表示球体会向内坍缩。这种行为是平方反比引力的直接体现，体现了其稳定、集中的吸引性质。

## 2.2 时空图

## 2.3 Einstein 真空场方程

# 3 Schwarzschild 真空解

# 4 黑洞

# 5 宇宙学概论