复变函数试题（2021年1月, A卷，共10题，每题10分）

1. 求出$\cos(x+iy)$的实部与虚部，这里$x,\,y\in R$，并由此证明：对任意复数$A+iB$, 方程$\cos(x+iy)=A+iB$有无穷多个解，这里$A,\,B\in R$.

2. 设C_r是圆周：$|z|=r>0$, 函数$f(z)$在复平面处处可导，用$f(z)$关于C_r的闭曲线积分公式给出$f(z)$在原点的n阶导数的公式(Cauchy高阶导数公式)，这里n是正整数。并由此证明：(1) 若令$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, 则$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$; (2) 若$f(z)$是有界的，即存在常数$M>0$使$|f(z)|\le M, \forall z\in C$, 则$f(z)$是常数（Liouville定理）.

3. 分别举例并说明理由：存在幂级数使得在收敛圆周$|z|=R$上(i) 处处发散；(ii) 在一些点收敛，在一些点发散；(iii) 处处收敛。利用$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$, $|z|<1$, 证明：当$r\in[0,\,1)$, $\quad\theta\in[0,\,2\pi]$ 时，

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2),\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n}=\arctan\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}.$$

并由以上公式证明：当$r\to1^-$, $\quad\theta\in(0,2\pi)$ 时，有以下等式：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right),\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}.$$

4. 求复积分$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 4z^5}{z^n}dz$, 这里$n$是正整数.

5. 求复积分

$$J=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}dz,$$

这里n,m是正整数，a,b是复数，且$|a|\neq1$, $|b|\neq1$, $|a|\le|b|$.(提示：分别讨论以下五种情况: (1) $a=b,|a|<1$; $\quad$(2) $a=b,|a|>1$; $\quad$(3) $a\neq b,|a|<1$, $|b|<1$; $\quad$(4) $|a|<1<|b|$; $\quad$(5) $a\neq b,|a|>1,|b|>1$.)

6. 求实积分 (1) $\quad I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$, $\qquad$ 这里a, b 是实数，且$a>|b|\ge0$.

(2) $\quad I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$, $\qquad$ 这里$A>0$, $B>0$.

7. 求实积分$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos kx dx}{(x^2+ax+b)}$, $\qquad$ 这里$k>0$, $a,b\in R$, $4b>a^2$.

8. 写出将区域$D=\{z:|z-a|>a,\ |z-b|<b\}$映到单位圆盘$|w|<1$的一个单值解析映射，这里$0<a<b$.

9. 求出将单位圆盘$|z|<1$到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式，并使$w(z_0)=0$, 这里$|z_0|<1$. 并由此证明以下不变式：

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

10. 以下两题中任选一题(作两道题只给第一题的分数)

(I). 求实积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}},\qquad \text{这里}n\text{是正整数，}r>0\text{是常数，}x\in R.$$

(II). 求实积分

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^n},\qquad \text{这里}n\text{是正整数,}\ r>0\text{是常数，}x\in R.$$