2020 A

一、1.(纪恩图)$(A\cup B)\setminus C = A\cup(B\setminus C)$ ×

(判断) $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$ √

$A\triangle(B-C) = A\triangle B - C$ ×

2、判断:$E(XY)=E(X)E(Y)$ ×; $(E(|X|))^2 \le E(X^2)$ √ ; $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$ ×

3. $P(X=n)=3^{-n}\cdot C$. 为概率分布, $C=?$ 2 . 此为参数 $q=\frac{1}{3}$ 的 ? n何 分布

4.

5.

6.

7.

8.

9. $X_1,\cdots,X_n$ 为 $N(\mu,\sigma^2)$. 求 X_1+X_2 的密度 $f(x)=?$; $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}$ 的 $g(x)=?$; $(\bar{X}-\mu)\sqrt{\frac{n(n-1)}{\sum_i(X_i-\bar{X})^2}}$ 的 $h(x)=?$

忘记题号的:

10. $P(X=n)=p_n$, $P(Y=n)=q_n$, $P(X\le Y)=?$ $P(X=Y)=?$

?. $X\sim(1,9)$, $Y\sim(0,16)$, $\rho_{X,Y}=-\frac{1}{2}$, $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$

求: $E(Z)=\frac{1}{3}$, $Var(Z)=3$, $\rho_{X,Z}=0$

$$\sigma^2\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}\sigma^2(X)+\frac{1}{4}\sigma^2(Y)+2\,Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$=1+4+2\cdot\frac{1}{6}Cov(X,Y)=3.$$

$$Cov(X,Y)=\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y=-6=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\rho_{X,Z}=\frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z}=\frac{E(XZ)-E(X)E(Z)}{3\times 3}=\frac{\frac{1}{3}-1\times\frac{1}{3}}{9}=0$$

$$E(Z)=E\left(X\frac{X}{3}+\frac{XY}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X^2)+\frac{1}{2}E(XY)=\frac{10}{3}+\frac{-6}{2}=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=(E(X))^2+\sigma^2(X)=1+9=10$$

$$E(X,Y)=-6$$

? . $X\sim B(2,p)$, $Y\sim B(3,p)$, $P(X\geqslant 1)=\frac{5}{9}$，求 $p=?$ $\frac{1}{3}$

此时，$P(Y\geqslant 1)=\frac{19}{27}$ $P(X+Y\geqslant 3)=\frac{17}{81}$

? X:

x	-2	0	1	2	4
p	0.3	0.1	0.2	0.15	0.25

求 $E[X]$ 0.9 . $E(|X|)$ 2.1 . $Var[X]$ 5.19

? $\{X_i\}$ 在 $[-1,1]$ 上均匀分布. 求 $E(X_1)=0$; $Var\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{n}{3}$; $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sqrt{n}}<1\right)=?$
(n个独立)

(9用积分表示).

这几个打？的题是前面10道填空中忘记题号的。

整张卷子忘记了一个填空。

字乱，懒得用电脑打出来了（

二、1. $f(x,\beta)=\begin{cases}\beta x^{-(\beta+1)}, & x>1 \\ 0, & x\le 1.\end{cases}$ $\beta>1$.

有观测值 $X_1,\cdots,X_n$. 求 β 的极大似然估计.

2. 事件A发生的概率 θ.（未知）. 300次观测，发生120次；

求 $\hat{\theta}_B$.

3. 一个家庭4个孩子. 男，女等概率.

(1) 随机选一家庭，老大为男，求剩下3个为女的概率.

(2) ……，随机选一孩子为男，……

（男孩女孩悖论，见 Wikipedia）

4. 元件直径 $X\sim N(10,1)$.

利润 $L=\begin{cases}-2, & x<9 \\ 30, & 9\le x\le 11 \\ -5, & x>11\end{cases}$.

求平均利润.（用单位正态分布函数表示）.

三、证明题：

1. （"有把握"）$P(A|C)\geq P(B|C)$, $P(A|C^c)\geq P(B|C^c)$, 求证：$P(A)\geq P(B)$.

2. 独立的 $X_1,X_2\sim N(0,1)$. $Y=\dfrac{X_1}{X_2}$. 求证：$Y\sim$ Cauchy 分布.

① 密度函数 ② 独立 $\Rightarrow$ 联合密度函数

③ $P(Y\le x)=P(\frac{X_1}{X_2}\le x)=P(X_1\le X_2 x \text{ 且 } X_2>0)+P(X_1\geq X_2 x \text{ 且 } X_2<0)$

④ 写成二重积分，令 $x_1=x_2 u$，……，后续令 $\frac{x_2^2}{2}=t$

⑤ $\int \frac{du}{\pi(1+u^2)}$

3. $c \neq E(X)$ 时，求证 $Var(X) < E\left((X-c)^2\right)$.
$(c \in \mathbb{R})$

四. 奖励题 (6'):

（车流量问题）：两车间隔时间 T，密度函数 $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ $(t>0)$

一段时间 t 内，有 $N(t)$ 辆车通过，

求证：$P(N(t)=n) = \dfrac{e^{-\alpha t}}{n!}(\alpha t)^n$.（Poisson 分布）.

（卷面分 60 ；应该来调分）.