



## Bài 2.2 BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ M

### DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai trong khoảng  $(x_0 - h; x_0 + h)$ , với  $h > 0$ . Khi đó:

1. Nếu  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.

2. Nếu  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại.

3/ Hàm số  $y = f(x)$  đạt **CỰC TRỊ** tại  $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

**VD1:** Hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  khi  $m$  bằng

A.  $m = 3$

B.  $m = 1$

C.  $m = 2$

D.  $m = -2$

**VD2:** Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m-1)x$  đạt cực đại tại  $x = 1$  khi

A.  $m > 2$

B.  $m \geq 2$

C.  $m = 2$

D.  $m = -2$

### DẠNG 2. CỰC TRỊ HÀM BẬC BA

#### BÀI TOÁN 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN

Cho hàm bậc ba:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ )  $\Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1) Hàm bậc ba không có cực trị hoặc có 2 cực trị.

2) Có 2 điểm cực trị: đạo hàm có 2 nghiệm phân biệt  $\Delta'_{y'} > 0$   $b^2 - 3ac > 0$

Không có điểm cực trị: đạo hàm có nghiệm kép hoặc vô nghiệm  $\Delta'_{y'} \leq 0$   $b^2 - 3ac \leq 0$

3) Nếu  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của  $y'$  tức hai điểm cực trị thì theo Vi-Ét  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} \\ x_1 x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$

**VD3:** Cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$ . Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  để hàm số có 2 điểm cực trị cùng dấu.

A.  $\frac{-23}{4} < m < 2$ .

B.  $\frac{-15}{4} < m < 2$ .

C.  $\frac{-21}{4} < m < 2$ .

D.  $-2 < m < 2$ .



**VD4:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6}$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + 2x_2 = 1$ .

- A.  $m < 0$ .      **B.**  $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$ .      C.  $m = \frac{3}{2}$ .      D.  $m = 2$ .

**VD5:** Tìm tất các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $-1 < x_1 < x_2$ .

- A.  $-\frac{7}{2} < m < -2$ .      B.  $-3 < m < 1$ .      C.  $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ .      **D.**  $-\frac{7}{2} < m < -3$

## BÀI TOÁN 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỰC ĐẠI – CỰC TIỂU

Phương trình Đường thẳng qua hai điểm cực trị được xác định theo 3 cách sau:

**Cách 1.** Lấy phần dư của biểu thức  $\frac{y}{y'}$

**Cách 2.** Sử dụng công thức:  $y_{CD-CT} = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$

**Cách 3.** Sử dụng công thức:  $y_{CD-CT} = \frac{-2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$        $\Delta' = b^2 - 3ac$

**VD6:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ ?

- A.**  $y = -\frac{29}{9} - \frac{2}{9}x$       B.  $y = \frac{29}{9} - \frac{2}{9}x$       C.  $y = \frac{29}{9} + \frac{2}{9}x$       D.  $y = -\frac{29}{9} + \frac{2}{9}x$

**VD7:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$  có hai điểm cực trị. Đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm  $C(0; -1)$  thẳng hàng.

- A.**  $m = 4$ .      B.  $m = 1$ .      C.  $m = -3$ .      D.  $m = 2$ .

**VD8:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho đường thẳng  $AB$  vuông góc với đường thẳng:  $y = x + 2$ .

- A.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$ .      **C.**  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$ .

**DẠNG 3. CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG**

Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị là (C). Suy ra:  $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 - b)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

**Nhận xét:** Hàm trùng phương luôn có cực trị, nó có 1 hoặc 3 cực trị.

1) (C) có ba điểm cực trị  $\Leftrightarrow ab < 0$ ;

2) (C) có 1 điểm cực trị  $\Leftrightarrow ab \geq 0$

3) (C) chỉ có cực đại mà k có cực tiểu  $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

4) (C) chỉ có cực tiểu mà k có cực đại  $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

\* Hàm số có 3 cực trị tạo tam giác vuông cân:  $b^3 = -8a$

\* Hàm số có 3 cực trị tạo tam giác đều:  $b^3 = -24a$

\* Hàm số có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích S:  $32a^3(S)^2 + b^5 = 0$

**VD9:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có 3 điểm cực trị

A.  $m > 2$

**B.**  $m > -1$

C.  $m > -2$

D.  $m > 3$

**VD10:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có cực trị

A.  $m \geq 2$

B.  $m \geq -1$

C.  $m \leq -1$

**D.**  $m \in \mathbb{R}$

**VD11:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$  có đúng 1 cực trị

A.  $m = -1$

B.  $m = 2$

**C.**  $m \leq -1$

D.  $m \in \mathbb{R}$

**VD12:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

~~A.~~  $m = -1$ .

~~B.~~  $m \neq 0$ .

C.  $m = 1$ .

**D.**  $m = \pm 1$ .

**VD13:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m-1$  có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A.  $m = 0$ .

B.  $m = 1$ .

**C.**  $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ .

D.  $m = 1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ .

**VD14:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$  có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại  $m$ .

**B.**  $m = \sqrt[5]{2}$ .

C.  $m = -\sqrt[5]{2}$ .

D.  $m = \pm\sqrt[5]{2}$ .

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Câu 1:** Hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + \frac{1}{3}$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$  khi  $m$  bằng
- A.  $m = 1$                       B.  $m = 2$                       C.  $m = 3$                       D.  $m = \emptyset$
- Câu 2:** Hàm số  $y = (x - m)^3 - 3x$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$  khi  $m$  bằng
- A.  $m = -2$                       B.  $m = -1$                       C.  $m = 2$                       D.  $m = 1$
- Câu 3:** Hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$  có hai điểm cực trị thì
- A.  $m = 0$                       B.  $m < 0$                       C.  $m > 0$                       D.  $m \neq 0$
- Câu 4:** Hàm số  $y = (m - 3)x^3 - 2mx^2 + 3$  không có cực trị khi
- A.  $m = 3$                       B.  $m = 0$  hoặc  $m = 3$                       C.  $m = 0$                       D.  $m \neq 3$
- Câu 5:** Hàm số  $y = -x^3 + (2m - 1)x^2 - (2 - m)x - 2$  có cực đại và cực tiểu khi  $m$  thỏa mãn
- A.  $m \in (-\infty; -1)$                       B.  $m \in \left(-1; \frac{5}{4}\right)$
- C.  $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$                       D.  $m \in (-1; +\infty)$
- Câu 6:** Tìm tất các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$  có 2 cực trị?
- A.  $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$ .                      B.  $m \in (-3; 1)$ .
- C.  $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ .                      D.  $m \in [-3; 1]$ .
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$  có hai điểm cực trị có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ .
- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = -\frac{2}{3}$ .                      C.  $m = \frac{2}{3}$ .                      D.  $m = -\frac{1}{2}$ .
- Câu 8:** Gọi  $x_1, x_2$  là hai điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để:  $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$
- A.  $m = \pm\sqrt{2}$ .                      B.  $m = \pm 2$ .                      C.  $m = 0$ .                      D.  $m = \pm 1$ .
- Câu 9:** Biết đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  có hai điểm cực trị  $A, B$ . Khi đó phương trình đường thẳng  $AB$  là:
- A.  $y = x - 2$ .                      B.  $y = 2x - 1$ .                      C.  $y = -2x + 1$ .                      D.  $y = -x + 2$ .

**Câu 10:** Biết đồ thị hàm số  $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 5$  có hai điểm cực trị  $A, B$ . Khi đó phương trình đường thẳng  $AB$

A.  $y = \frac{25}{3} - \frac{14}{9}x$       B.  $y = \frac{14}{9}x + \frac{25}{3}$       C.  $y = \frac{25}{3} + \frac{14}{9}x$       D.  $y = \frac{14}{9}x - \frac{25}{3}$

**Câu 11:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$  có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình:  $y = -4x$  ( $d$ ).

A.  $m \in \{1\}$ .      B.  $m \in \{0; 1\}$ .      C.  $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ .      D.  $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

**Câu 12:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$  có đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng có phương trình:  $y = 3x$  ( $d$ ).

A.  $m = \pm\sqrt{\frac{45}{2}}$ .      B.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$ .      C.  $m = 2$ .      D.  $m = \pm\sqrt{\frac{47}{2}}$ .

**Câu 13:** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + (2m+4)x^2 - 3m + 2$  không có cực trị nào?

A.  $m > -2$       B.  $m < -2$       C.  $m = -2$       D.  $m = \emptyset$

**Câu 14:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m$  chỉ có đúng một cực trị.

A.  $0 < m \leq 1$       B.  $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$       D.  $0 \leq m \leq 1$ .

**Câu 15:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$  chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A.  $m < -1$ .      B.  $-1 \leq m \leq 0$ .      C.  $m > 1$ .      D.  $-1 \leq m < 0$ .

**Câu 16:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại  $m$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ .      D.  $m = -1$ .

**Câu 17:** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:  $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

A. Không tồn tại  $m$ .      B.  $\begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{cases}$ .      C.  $m = \sqrt[3]{3}$ .      D.  $m = \pm\sqrt[3]{3}$ .