



Bài 2.2 BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ M

DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

1. Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

2. Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

3/ Hàm số $y = f(x)$ đạt **CỰC TRỊ** tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

VD1: Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi m bằng

A. $m = 3$

B. $m = 1$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

VD2: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m-1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi

A. $m > 2$

B. $m \geq 2$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

DẠNG 2. CỰC TRỊ HÀM BẬC BA

BÀI TOÁN 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN

Cho hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) $\Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1) Hàm bậc ba không có cực trị hoặc có 2 cực trị.

2) Có 2 điểm cực trị: đạo hàm có 2 nghiệm phân biệt $\Delta'_{y'} > 0$

Không có điểm cực trị: đạo hàm có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Delta'_{y'} \leq 0$

3) Nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của y' tức hai điểm cực trị thì theo Vi-Ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-B}{A} \\ x_1 x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$

VD3: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 2 điểm cực trị cùng dấu.

A. $\frac{-23}{4} < m < 2$.

B. $\frac{-15}{4} < m < 2$.

C. $\frac{-21}{4} < m < 2$.

D. $-2 < m < 2$.



VD4: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

- A.** $m < 0$. **B.** $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$. **C.** $m = \frac{3}{2}$. **D.** $m = 2$.

VD5: Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

- A.** $-\frac{7}{2} < m < -2$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < -3$

BÀI TOÁN 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỰC ĐẠI – CỰC TIỂU

Phương trình Đường thẳng qua hai điểm cực trị được xác định theo 3 cách sau:

Cách 1. Lấy phần dư của biểu thức $\frac{y}{y'}$

Cách 2. Sử dụng công thức: $y_{CD-CT} = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$

Cách 3. Sử dụng công thức: $y_{CD-CT} = \frac{-2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$

VD6: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$?

- A.** $y = -\frac{29}{9} - \frac{2}{9}x$ **B.** $y = \frac{29}{9} - \frac{2}{9}x$ **C.** $y = \frac{29}{9} + \frac{2}{9}x$ **D.** $y = -\frac{29}{9} + \frac{2}{9}x$

VD7: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị. Đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C(0; -1)$ thẳng hàng.

- A.** $m = 4$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = 2$.

VD8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng: $y = x + 2$.

- A.** $\begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$.

**DẠNG 3. CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG**

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C). Suy ra: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 - b)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Nhận xét: Hàm trùng phương luôn có cực trị, nó có 1 hoặc 3 cực trị.

1) (C) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$;

2) (C) có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$

3) (C) chỉ có cực đại mà k có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

4) (C) chỉ có cực tiểu mà k có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

* Hàm số có 3 cực trị tạo tam giác vuông cân: $b^3 = -8a$

* Hàm số có 3 cực trị tạo tam giác đều: $b^3 = -24a$

* Hàm số có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích S: $32a^3(S)^2 + b^5 = 0$

VD9: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có 3 điểm cực trị

A. $m > 2$

B. $m > -1$

C. $m > -2$

D. $m > 3$

VD10: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có cực trị

A. $m \geq 2$

B. $m \geq -1$

C. $m \leq -1$

D. $m \in \mathbb{R}$

VD11: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đúng 1 cực trị

A. $m = -1$

B. $m = 2$

C. $m \leq -1$

D. $m \in \mathbb{R}$

VD12: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = -1$.

B. $m \neq 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = \pm 1$.

VD13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

D. $m = 1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

VD14: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. Không tồn tại m .

B. $m = \sqrt[5]{2}$.

C. $m = -\sqrt[5]{2}$.

D. $m = \pm \sqrt[5]{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Câu 1:** Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + \frac{1}{3}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi m bằng
- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = 3$ D. $m = \emptyset$
- Câu 2:** Hàm số $y = (x - m)^3 - 3x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi m bằng
- A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 2$ D. $m = 1$
- Câu 3:** Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có hai điểm cực trị thì
- A. $m = 0$ B. $m < 0$ C. $m > 0$ D. $m \neq 0$
- Câu 4:** Hàm số $y = (m - 3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị khi
- A. $m = 3$ B. $m = 0$ hoặc $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m \neq 3$
- Câu 5:** Hàm số $y = -x^3 + (2m - 1)x^2 - (2 - m)x - 2$ có cực đại và cực tiểu khi m thỏa mãn
- A. $m \in (-\infty; -1)$ B. $m \in \left(-1; \frac{5}{4}\right)$
- C. $m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ D. $m \in (-1; +\infty)$
- Câu 6:** Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị?
- A. $m \in (-3; 1) \setminus \{-2\}$ B. $m \in (-3; 1)$.
- C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ D. $m \in [-3; 1]$.
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.
- A. $m = 0$. B. $m = -\frac{2}{3}$. C. $m = \frac{2}{3}$. D. $m = -\frac{1}{2}$.
- Câu 8:** Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$
- A. $m = \pm\sqrt{2}$. B. $m = \pm 2$. C. $m = 0$. D. $m = \pm 1$.
- Câu 9:** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:
- A. $y = x - 2$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = -2x + 1$. D. $y = -x + 2$.

Câu 10: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 5$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB

A. $y = \frac{25}{3} - \frac{14}{9}x$ B. $y = \frac{14}{9}x + \frac{25}{3}$ C. $y = \frac{25}{3} + \frac{14}{9}x$ D. $y = \frac{14}{9}x - \frac{25}{3}$

Câu 11: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y = -4x$ (d).

A. $m \in \{1\}$. B. $m \in \{0; 1\}$. C. $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$. D. $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 12: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng có phương trình: $y = 3x$ (d).

A. $m = \pm\sqrt{\frac{45}{2}}$. B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$. C. $m = 2$. D. $m = \pm\sqrt{\frac{47}{2}}$.

Câu 13: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (2m+4)x^2 - 3m + 2$ không có cực trị nào?

A. $m > -2$ B. $m < -2$ C. $m = -2$ D. $m = \emptyset$

Câu 14: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m$ chỉ có đúng một cực trị.

A. $0 < m \leq 1$ B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m < -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m > 1$. D. $-1 \leq m < 0$.

Câu 16: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m . B. $m = 0$. C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$. D. $m = -1$.

Câu 17: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

A. Không tồn tại m . B. $\begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt[3]{3} \end{cases}$. C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = \pm\sqrt[3]{3}$.