NoteBook

Persist in what you like

Record Life

Learning
daily life

Bài 2: Vector trong $\mathbb{R}^n$

1) Một bộ gồm số thực $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một vector cỡ n.
(đgℓ)

$\mathbb{R}^n$ được gọi là không gian vector Euclid n chiều.

Ký hiệu: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$ vector cột $\rightarrow v^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$ ↳ vector dòng.

$T \to$ chuyển vị (transpose) trên matrix

Đặc biệt: vector $\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ số } 0} \in \mathbb{R}^n$

2) Cho $\begin{cases} v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n. \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

① $v = u \Leftrightarrow v_i = u_i \ \forall i \in \overline{1,n}$.

② $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, \dots, \alpha v_n) \in \mathbb{R}^n$.
(nhân vô hướng)

- scalar → giá trị vô hướng
- vector
- matrix
- tensor

③ $v + u = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \in \mathbb{R}^n$.
(tổng 2 vector)

Đặc biệt: Cho $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$,
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$.
được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, \dots, v_k$ với hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Ví dụ: $v_1 - v_2$ là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2 với hệ số $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$
vector $\mathbf{0}$ là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2 với hệ số $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
vì $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2$

3) Cho $v = (v_1, \dots v_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ trị tuyệt đối
(chiều dài, chuẩn norm)
length

norm

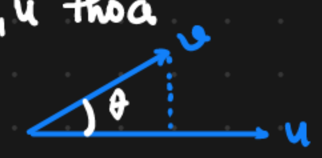
Nhận xét:
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$. norm
- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ norm

- $\langle v, u \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \in \mathbb{R}^n$
(inner dot product)
tích vô hướng

Nhận xét: $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$
$\langle v, u \rangle = v^T u = [v_1 \ v_2 \ v_3 \dots v_n] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}$

- góc giữa 2 vector $\theta = \widehat{v, u}$ thoả

$$\cos\theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}$$



$\langle v, u \rangle = \|u\| \|v\| . \cos\theta$

- $\cos\theta > 0$: $u \equiv v$
- $\cos\theta < 0$: $u >< v$ (trái nhau)
- $\cos\theta \approx 0$: u k° liên quan v.

Đặc biệt:
- $\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \cos\theta \Leftrightarrow \langle v, u\rangle = 0$ thì $u \perp v$ hay v, u trực giao.
- $0 \perp v, \forall v \in \mathbb{R}^n$ (vì $\langle 0, v\rangle = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0$)
- $\|v\| = 1$ thì v gọi là vector đơn vị (unit vector)
- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

4) Chiếu vuông góc v lên u là vector $proj_u v = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} v$

$proj_u v$

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ cho $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Tính $-2v$?

$-2v = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$v - 2u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\|v\| = \sqrt{1^2+0+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\,\|u\|} = \dfrac{v^T.u}{\|v\|.\|u\|} = \dfrac{(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \widehat{v, u} = 60^\circ$

$proj_v u = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} v = \dfrac{v^T.u}{\|u\|^2} v = \dfrac{(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$proj_u v = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} u = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

5) Cho $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ là họ k vector trong $\mathbb{R}^n$, tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.

$V = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ được gọi là k^{o}gian vector sinh bởi S, kí hiệu

$V = span(S) = span(\{v_1, \dots, v_k\})$

S được gọi là tập sinh của V.

Ví dụ: trong $\mathbb{R}^3$, cho $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$span(\{v_1\})$ = đg thẳng chứa vector v_1.

Cho $v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

Cm: $v_3 \in span\{v_1, v_2\}$

$\begin{cases} v_4 \notin span\{v_1, v_2\} \\ span\{v_1, v_2, v_4\} = \mathbb{R}^3. \end{cases}$

Giả sử $v_3 = (0, 1, 1)$ là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2.

$\Rightarrow v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 1\end{matrix} \Rightarrow v_3 = v_1 - v_2$

$\Rightarrow v_3 \in span\{v_1, v_2\}$

$v_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$ vô no $\Rightarrow v_4 \notin span(\{v_1, v_2\})$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_4 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r(\tilde{A}) = 3 =$ số vector $\Rightarrow$ hệ có n₀ duy nhất.

$\Rightarrow v_1 v_2 v_4$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow span(\{v_1, v_2, v_4\}) = \mathbb{R}^3$.

6) Họ $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu hệ pttt thuần nhất

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

có nghiệm duy nhất là $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow$ phụ $\in$ tuyến tính.

(vô số nghiệm)

7) Nếu $\left\{ \begin{array}{l} S = \{v_1, \dots, v_k\} \text{ độc lập tuyến tính} \\ span(S) = V \end{array} \right.$

thì S được gọi là một cơ sở của V

k gọi là số chiều của V

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$, $B_0 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

là một cơ sở $\mathbb{R}^3$, đgl cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

Mệnh đề: nếu V có số chiều là k thì

Họ $S = \{v_1, v_2 \dots v_k\}$ độc lập tuyến tính là cơ sở.

Mệnh đề: Cho $B = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$ là cơ sở kg V

$\forall v \in V$, tồn tại duy nhất $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ sao cho

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

Ta nói $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$ là tọa độ của v theo B.

8) Họ $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ được gọi là trực giao nếu

$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

Hơn nữa, nếu $\|v_i\| = 1, \forall i$ thì S được gọi là hệ trực chuẩn.

9) Nếu B là cơ sở của V và B trực giao thì B được gọi là cơ sở trực giao của V.

Mệnh đề:

- Nếu B trực giao thì B độc lập tuyến tính.
- Nếu $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ là một cơ sở trực giao của V thì $\forall v \in V$, ta có:

$$v = \text{proj}_{v_1} v + \text{proj}_{v_2} v + \dots + \text{proj}_{v_k} v$$
$$= \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k$$

Hơn nữa nếu B là cơ sở trực chuẩn

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_k \rangle v_k$$

Ví dụ: Cho $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

- Cm B là một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.
- Tìm tọa độ của $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trong B.

- Ta có: $\begin{cases} \langle v_1, v_2 \rangle = 0.1 + 2.0 + 0.1 = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle = 1.1 + 0.0 + 1.(-1) = 0 \\ \langle v_3, v_1 \rangle = 0.1 + 2.0 + 0.(-1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ trực giao $\Rightarrow$ B trực giao (1) $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ độc lập tuyến tính

Mà $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\Rightarrow$ B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ B là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.

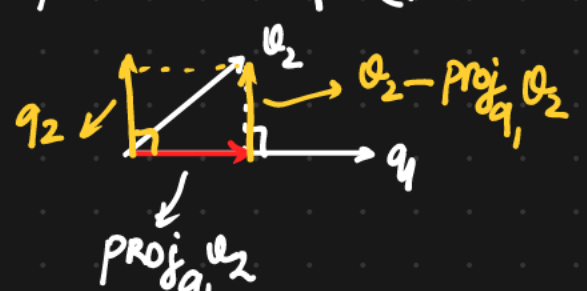
- Vì B là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$, xét $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ có tọa độ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ trong B với:

$$\alpha_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = \frac{1.0 + 2.1 + 0.1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha_2 = \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} = \frac{1.1 + 0.1 + 1.1}{2} = 1 \qquad \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$
$$\alpha_3 = \frac{\langle v, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} = \frac{1.1 + 1.0 - 1.1}{2} = 0$$

Bài toán: $\begin{cases} \text{Input: } C = \{v_1, \dots, v_k\} \text{ trong } \mathbb{R}^n \\ \text{Output: } B = \{q_1, \dots, q_n\} \text{ là một cơ sở trực giao/chuẩn của } \text{span}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) \end{cases}$

* Thuật toán Gram-Schmidt:

$$q_1 = v_1$$
$$q_2 = v_2 - \text{proj}_{q_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1$$



$$q_3 = v_3 - \text{proj}_{q_1} v_3 - \text{proj}_{q_2} v_3$$
$$= v_3 - \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2$$

- Nếu $q_i = 0$ thì "bỏ đi" vector v_i
- Thuật toán dừng khi xử lý hết v.

Có thể có $k < K$: C không độc lập tuyến tính.

$B = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ là cơ sở trực giao của span(C)

Nếu muốn trực chuẩn:

$$B' = \{q_1', q_2', \dots, q_k'\} \text{ với } q_i' = \underbrace{\frac{1}{\|q_i\|} q_i}_{\text{thu lại thành vector đơn vị}}$$

Ví dụ: Cho $C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Dùng Gram-Schmidt xây dựng một cơ sở trực chuẩn cho span(C).

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(1\,0\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{q_1, q_2, q_3\}$ là cơ sở trực giao của span{(C)}

$$q_1' = \frac{q_1}{\|q_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2' = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3' = 0$$

$\Rightarrow B' = \{q_1', q_2', q_3'\}$ là cơ sở trực chuẩn của span({C})

Trong $\mathbb{R}^4$ cho $C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dùng Gram-Schmidt xây dựng cơ sở trực giao cho span({C})

Trong $\mathbb{R}^3$ cho $C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dùng Gram-Schmidt xây dựng cơ sở trực chuẩn cho span(C).

$$q_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{q_1} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\|q_1\|^2} q_1 - \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\|q_2\|^2} q_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_1' = \frac{q_1}{\|q_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2' = 0$$

$$q_3' = \frac{q_3}{\|q_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \sqrt{6}/6 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B' = (q_1', q_2', q_3')$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

MA TRẬN (Matrix Algebria)

1) • Một bảng m dòng, n cột số thực:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

được gọi là ma trận cỡ $m \times n$

- Nếu $m = n$ thì $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ được gọi là ma trận vuông cấp n
- $0 = (0_{ij})_{m\times n}$ được gọi là ma trận không cấp n.

$I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i=j \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$ được gọi là ma trận đơn vị cấp n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- vector cột: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n\times 1}$

- vector dòng: $v^T = [v_1 \; v_2 \cdots v_n] \in \mathbb{R}^n \equiv \boxed{R^{1\times n}}$

2) $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \; \forall ij$
- $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$
- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

3) Phép nhân ma trận vector

Vd: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}1 + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Tích vô hướng

$$\underbrace{\begin{pmatrix} — a_1^T — \\ — a_2^T — \\ \cdots \\ — a_m^T — \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{b}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_1^T b \\ a_2^T b \\ \vdots \\ a_m^T b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

• Tổ hợp tuyến tính:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n$$

Vd: hệ pttt m pt, n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

có thể được viết là:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}^{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

$\Leftrightarrow Ax = b$

4) Phép nhân ma trận:

$$A_{m\times n} B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

- Tích vô hướng:

$$\begin{pmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_p \\ | & & | \end{pmatrix} = (a_i^T b_j)$$

Lưu ý: • Phép nhân ma trận k^0 có t/c giao hoán

• $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ lần}}$

- Tổ hợp tuyến tính:

$$A \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_p \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

5) Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta nói A khả nghịch nếu có $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho $AB = I_n$ (hoặc $BA = I_n$). Khi đó, B được gọi là nghịch đảo của A, kí hiệu $B = A^{-1}$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

→ Không khả nghịch.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ với } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Khả nghịch

Dùng Gauss - Jordan tìm nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 + 2d_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 + 3d_3]{-d_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3d_3]{d_1 - 2d_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Xét $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$, ta có:

$Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}$

$\downarrow$ vector

Xét $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = y$

Nếu gọi $B = A^{-1}$ thì $By = BAx = I_n x = x$

6) Cho $A \in \mathbb{R}^n$, định thức của A, kí hiệu $\det(A)$ hoặc $|A|$ là một con số thực để tính bằng đệ quy như sau:

- $n = 1$, $A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11}$
- $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- $n \geq 2$, chọn khai triển theo dòng i bất kỳ:

$$\det(A) = \sum_{j=1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{-i,-j})$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \end{matrix} \\ \text{dòng } i & \begin{bmatrix} \cdots & & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Với $A_{-i,-j}$ là ma trận A bỏ đi dòng i, cột j.

Mệnh đề: $\det(A^T) = \det(A)$

A^T là chuyển vị của A (chuyển dòng thành cột)

$\Rightarrow$ chọn khai triển theo cột

$\Rightarrow$ nên chọn dòng/cột nhiều số 0 để khai triển

vd: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix} \overset{\text{dòng 1}}{=} 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$

$= 3.(4 - 9.5) + 1.(2.9 + 1)$

$= -104$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{cột } 1}{=} 1.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 24.$$

Mệnh đề: định thức qua các phép biến đổi sơ cấp:

- $A \xrightarrow{d_i = \alpha d_i} B$: $\det(B) = \alpha \det(A)$
- $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} B$: $\det(B) = -\det(A)$
- $A \xrightarrow{d_i = d_i + \alpha d_j} B$: $\det(B) = \det(A)$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{just remember}}$

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{d_3 - 3d_1}{\overset{d_2 - 2d_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & -19 & 13 \\ 0 & -27 & 13 \end{vmatrix} \overset{\text{cột } 1}{=} -(-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} -19 & 13 \\ -27 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -104$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{d_3 + 2d_1 \\ d_4 - 2d_1}}{\overset{d_2 - 2d_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{cột } 3}{=} 3.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{cột } 1}{=} 3.\left(3.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3.[3.(2) - (5-12)]$$

$$= 39$$

Tính

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_4}{=} -\begin{vmatrix} b & b & b & a \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix} \underset{d_3 - d_1}{\overset{d_2 - d_1}{=}} -\begin{vmatrix} b & b & b & a \\ 0 & a-b & 0 & -(a-b) \\ 0 & 0 & a-b & -(a-b) \\ a & b & b & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{cột } 1}{=} -\left[b.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a-b & 0 & -(a-b) \\ 0 & a-b & -(a-b) \\ b & b & b \end{vmatrix} + a.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} b & b & a \\ a-b & 0 & -(a-b) \\ 0 & a-b & -(a-b) \end{vmatrix}\right]$$

$$= -b\left((a-b).(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a-b & -(a-b) \\ b & b \end{vmatrix} + b.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -(a-b) \\ a-b & -(a-b) \end{vmatrix}\right)$$

$$+ a\left[b.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 0 & -(a-b) \\ a-b & -(a-b) \end{vmatrix} + (a-b)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & a \\ a-b & -(a-b) \end{vmatrix}\right)$$

$$= -b\left((a-b)\left[(a-b)b + b(a-b)\right] + b(a-b)^2\right)$$
$$+ a\left(-(a-b)^2 b + (a-b)\left(b(a-b) + a(a-b)\right)\right)$$

$$= -b\left((a-b)^2\, 2b + b(a-b)^2\right)$$
$$+ a\left(-(a-b)^2 b + (a-b)^2(a+b)\right)$$
$$= -3b^2(a-b)^2 + (a-b)^2 a^2 = (a^2 - 3b^2)(a-b)^2$$
$$= (a-b)^3(a+3b)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{d_1+d_2+d_3+d_4} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

Mệnh đề:

① A khả nghịch ⇔ hệ pttt $Ax = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$

⇔ $\det(A) \neq 0$.

② $(A^{-1})^{-1} = A$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

③ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

④ $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, $\det(A^k) = [\det(A)]^k$.

chú ý có thể

PHÂN TÍCH MA TRẬN.

$A \xleftarrow{\text{tổng hợp}} = BCD$ (compose, synthesis)

(phức tạp) $\xrightarrow{\text{p.tích}}$ ("đơn giản", "đẹp", "dễ hiểu" hơn)

(analysis decompose)

<I> Phân tích QR:

1) Nếu $Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gồm các cột trực chuẩn thì

$Q^T Q = I_n = (q_i^T . q_j)_{m\times n}$.

Thêm nữa, nếu $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ thì $Q^{-1} = Q^T$ và Q được gọi là ma trận trực giao (orthogonal matrix).

Tính chất: $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ trực giao:

(*) $Q^{-1} = Q^T$

(*) $\forall v, u \in \mathbb{R}^n$

$\langle Qv, Qu\rangle = (Qv)^T Qu$

$= v^T Q^T . Qu = v^T . u = \langle v, u\rangle \Rightarrow$ Bảo toàn tính tích vô hướng vector

(*) $\|Qv\| = \|v\|$

(*) $\|Qv\|^2 = (Qv)^T (Qv) = v^T . Q^T Q v = v^T v = \|v\|^2$)

4) $\widehat{Qv, Qu} = \widehat{v, u}$

Mệnh đề: Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gồm các cột độc lập tuyến tính, tồn tại $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gồm các cột trực chuẩn và $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tam giác trên khả nghịch sao cho:

$$A = QR$$

(phân tích QR — trực giao hoá)

Thuật toán:

B1) $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

B2) Trực giao hoá bằng Gram-schmidt:

$u_1 = v_1$

$u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2$

$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_1} v_3 - \text{proj}_{u_2} v_3$

$\vdots$

$q_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|} u_1$

$\vdots$

$q_n = \dfrac{1}{\|u_n\|} u_n$

B3) $Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ có các cột trực chuẩn.

$$R = \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} v_1^T q_1 & v_2^T q_1 & \cdots & v_n^T q_1 \\ 0 & v_2^T q_2 & \cdots & v_n^T q_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_n^T q_n \end{bmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ví dụ: phân tích QR ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \; 0 \; 1]}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 .$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \; 0 \; 1]}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \; 1 \; 0]}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{bmatrix}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1^T q_1 & v_2^T q_1 & v_3^T q_1 \\ 0 & v_2^T q_2 & v_3^T q_2 \\ 0 & 0 & v_3^T q_3 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

$$= [q_1\, q_2\, q_3] \begin{bmatrix} v_1^T . q_1 & v_2^T q_1 & v_3^T q_1 \\ 0 & v_2^T q_2 & v_3^T q_2 \\ 0 & 0 & v_3^T q_3 \end{bmatrix} \rightarrow R$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Phân tiến QR ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2\, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{2}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3\, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3\, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{1}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = QR$

$Q^T A = Q^T Q R$

$\Rightarrow R = Q^T A$ ✓

$A = QR$

$\Rightarrow Q^T A = Q^T Q R$

$\Leftrightarrow Q^T A = R$

$\Rightarrow \boxed{R = Q^T A}$

II. Phân tích trị riêng: (eigenvalue)

1) Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, số thực $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là một trị riêng của A nếu có vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ sao cho $Av = \lambda v \iff (A - \lambda I_n)v = 0$

v được gọi là một vector riêng (eigenvector) của A ứng với λ

Nếu λ là một trị riêng của A thì tập tất cả các nghiệm của hệ PTTT thuần nhất:

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

tạo thành một không gian vector được gọi là không gian riêng (eigenspace) của A ứng với λ.

Mệnh đề: λ là trị riêng của A $\iff$ λ là nghiệm của pt

$$\underbrace{\det(A - \lambda I_n) = 0}_{\text{ptrình đặc trưng của A. bậc cao n}}$$

⊛ Phân tích trị riêng:

B1) Giải phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I_n) = 0$ được các trị riêng.

B2) Với từng trị riêng λ, giải hệ PTTT thuần nhất:

$(A - \lambda I_n)v = 0$ để tìm một cơ sở của kg riêng tương ứng với λ.

Ví dụ. Phân tích trị riêng $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B1: Giải ptrình đặc trưng

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

$$\iff \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

cột 1

$$\iff (1-\lambda).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda).(2-\lambda)^2 = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Vậy A có 2 trị riêng $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Với $\lambda_1 = 1$, kg riêng là no của hệ

$$(A - \lambda_1 I_3)v = 0$$

• $A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{d_1 + d_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pivot

Nghiệm: $\begin{cases} v_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Vậy một cơ sở cho kg riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ là $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

⊛ Với trị riêng $\lambda_2 = 2$, Kg riêng là n_o của hệ.

$$(A - \lambda_2 I_3)\,v = 0$$

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 = -d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Vậy một cơ sở không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda_2 = 2$ là

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Phân tích trị riêng ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-2\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right.$$

Với trị riêng $\lambda_1 = 1$, Kg riêng là n_o của hệ

$$(A - \lambda_1 I_3)\,v = 0$$

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 + \frac{3}{2}d_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Vậy một cơ sở cho kg riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

② Phân tích trị riêng ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Giải pt đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1)^{2+2}.(-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda).[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda).(\lambda^2 - 5\lambda \quad) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 5 \end{matrix}\right.$$ Vậy A có 2 trị riêng là $\left[\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix}\right.$

Với trị riêng $\lambda_1 = 0$, kg riêng là no của hệ:

$$(A - \lambda_1 I_3) v = 0$$

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}d_3 + d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2\beta \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy 1 cơ sở cho kg riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(*) Cho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ta nói A chéo hoá được nếu có:

$$\begin{cases} P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ khả nghịch} \\ D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ đg chéo.} \end{cases}$$

Sao cho $A = P\underset{I_n}{D}P^{-1}$. Khi đó, ta nói P làm chéo A thành D.

Mệnh đề: A chéo hoá được $\Leftrightarrow$ A có đủ n vector riêng cơ sở.

Nếu chéo hoá được thì đặt P là ma trận gồm n cột vector riêng cơ sở,

$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ với λ_i là trị riêng ứng với vector riêng v_i thì P chéo hoá A thành D.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ có 2 trị riêng là:

- $\lambda = 0$ có cơ sở $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\lambda = 5$ có cơ sở $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Vì A có đủ 3 vector riêng cơ sở nên A chéo hoá được

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

thì P chéo hoá A thành D.

- Ktra: $A = P.D.P^{-1}$ (Rảnh)

Mệnh đề: Nếu P chéo hoá A thành D

$$A = PDP^{-1}$$

thì $A^k = PDP^{-1}P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} \dots DP^{-1} = PD^kP^{-1}$

Ví dụ: Chéo hoá ma trận sau nếu được: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

giải phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \overset{d_1}{\Leftrightarrow} (-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-\lambda).(-\lambda).(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda^2 = 0 \\ 1-\lambda = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$

Với trị riêng $\lambda_1 = 0$, vg riêng là no của hệ:

$$(A - \lambda_1 I_3) v = 0$$

$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\beta/3 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$ thì có cơ sở $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với trị riêng $\lambda_2 = 1$, kg riêng là n_0 của hệ:

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0$$

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = \alpha \end{cases}$$

$$\to v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1 \to \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Do A có 3 vector riêng $\Leftrightarrow$ A chéo hoá được:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì P chéo hoá A thành D.

Chéo hoá $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{pmatrix}$

I) Chéo hoá trực giao:

① Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta nói A chéo hoá trực giao được nếu có:

$\begin{cases} Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ trực giao} \\ D \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ đường chéo} \end{cases}$, sao cho $A = QDQ^T$.

② Mệnh đề: $\underbrace{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ chéo hoá trực giao được}}_{\text{có đủ vector riêng cơ sở}} \Leftrightarrow A$ đối xứng $(A^T = A)$

③ Thuật toán chéo hoá trực giao:

Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng

Bước 01: Tìm các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ của A

Bước 02: Với từng trị riêng λ_i:

tìm cơ sở $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{ir}\}$ của Kg riêng tương ứng trực chuẩn:

$\xrightarrow{\text{hoá Gram-Schimid}} \{q_{i1}, \dots, q_{iR}\}$

Bước 03: $Q = (\text{các } q)$, $D = \begin{pmatrix} \text{các trị riêng tương ứng} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

Ta có: $A = QDQ^T$

(Q trực giao, D đường chéo)

Ví dụ: Chéo hoá trực giao $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

giải pt đặc trưng:

$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\overset{\text{cột } 3}{\Leftrightarrow} (-\lambda).(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-\lambda).[(1-\lambda)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ (1-\lambda)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Với giá trị riêng $\lambda_1 = 0$, kg riêng của là no của hệ:

$(A - \lambda_1 I_3)v = 0$

$A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases}$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ kg cơ sở là $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với trị riêng $\lambda_2 = 2$, kg riêng là no của hệ:

$(A - \lambda_2 I_3)u = 0$

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_2 = \alpha \\ u_3 = 0 \end{cases} \rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Thuật toán gram-schmidt:

$$\lambda_1 = 0 : \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ q_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 2 : \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do A có vector trực chuẩn tại riêng = dim A = 3 ⇒ A chéo hoá trực giao được

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = Q.D.Q^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

chéo hoá trực giao $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Giải pt đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{d_1 = d_1 + d_2 + d_3} \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\longrightarrow (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[d_3 + d_1]{d_2 + d_1} (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{cột } 1}{\Rightarrow} (-\lambda).(-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda = 3\end{array}\right.$

Với trị riêng $\lambda_1 = 0$, kg riêng là no của hệ:

$(A - \lambda_1 I_3)v = 0 \Rightarrow A - \lambda_1 I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 - d_3]{d_1 + d_2 + d_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}d_2]{d_1 + \frac{1}{3}d_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ là kg cơ sở λ_1

Với $\lambda_2 = 3$, kg riêng là no của hệ:

$(A - \lambda_2 I_3)v = 0 \Rightarrow A - \lambda_2 I_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha - \beta \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ là Kg gian cơ sở

Thuật toán Gram - Schmidt:

$\lambda_1 = 0 : \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$u_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

II> Phân tích trị suy biến (SVD)

<1> Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, matrix $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là ma trận Gram của A.

Mệnh đề: 1) $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng

$((A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA)$

2) A^TA chéo hoá trực giao được.

3) A^TA có các trị riêng k⁰ âm → ma trận nửa xác định ⊕ (> 0) phải bỏ $\lambda = 0$

<II> Nếu λ là trị riêng của A^TA thì $\sigma = \sqrt{\lambda}$ được gọi là trị suy biến (singular value) của A.

<III> Mệnh đề (SVD - Singular Value Decomposition)

Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ta có:

$$\begin{cases} U \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ trực giao} \\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ "đường chéo"} \\ V \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ trực giao.} \end{cases}$$

sao cho $A = U\Sigma V^T$

<IV> Mệnh đề (SVD rút gọn - Condensed SVD)

Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ có hạng là k, có

$$\begin{cases} U \in \mathbb{R}^{m\times k} \text{ gồm k cột trực chuẩn. } U^TU = I_k \\ \Sigma \in \mathbb{R}^{k\times k} \text{ đường chéo khả nghịch} \\ V \in \mathbb{R}^{n\times k} \text{ gồm k cột trực chuẩn } V^TV = I_k \end{cases}$$

sao cho $A = U\Sigma V^T$.

5) Thuật toán SVD: cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

B1) $G = A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$

B2) chéo hoá trực giao G sắp trị riêng giảm dần. (k⁰ âm)

$G = QDQ^T$

giảm dần

$$Q = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{\text{k cột}}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \vdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & \lambda_k & & 0 \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

k dòng

k cột

Đặt $V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$

B3: $A = U\Sigma V^T$

$\Rightarrow AV = U\Sigma$

$\Rightarrow AV\Sigma^{-1} = U \Rightarrow \boxed{U = AV\Sigma^{-1}}$

Ví dụ 1:

Phân tích SVD ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Nhận xét: ma trận A là ma trận "ngang" vì có số dòng < số cột.

B1: $G = A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$

B2: Tìm trị riêng và các vector riêng của A.

Giải ptđt: $|G - I_2\lambda| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 52-\lambda & 24 \\ 24 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (52-\lambda)(16-\lambda) - 24^2 = 0 \Leftrightarrow 832 - 68\lambda + \lambda^2 - 576 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 68\lambda + 256 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 4 \\ \lambda = 64 \end{array}\right.$

Vậy A có 2 trị riêng $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 64$

Với $\lambda_1 = 4$, không gian riêng $E(\lambda_1) = E(4)$ là k° gian nghiệm của hệ:

$(A - I_2\lambda_1)v = \vec{0}$

$A - I_2\lambda_1 = \begin{bmatrix} 48 & 24 \\ 24 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{12}d_2]{\frac{1}{24}d_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha/2 \\ v_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Một cơ sở cho không gian riêng tương ứng $\lambda_1 = 4$ là $B_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 64$, không gian riêng $E(\lambda_2) = E(64)$ là k° gian n₀ của hệ:

$(A - I_2\lambda_2)v = \vec{0}$

$A - I_2\lambda_2 = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ 24 & -48 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{24}d_2]{-\frac{1}{12}d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Một cơ sở cho k° gian riêng $E(\lambda_2) = E(64)$ tương ứng $\lambda_2 = 64$ là $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$t_2 =$

• $E(\lambda_1) = E(4) \Rightarrow B_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

• $E(\lambda_2) = E(64) \Rightarrow B_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Thuật toán Gram - Schmidtz:

• $\lambda_1 = 4 \rightarrow B_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$u_1 = t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow q_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 64 \rightarrow B_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$u_2 = t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow q_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Do G có đủ vector trực chuẩn trị riêng $= 2 = \dim G = 2$

$\Rightarrow$ G chéo hoá trực giao được.

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Đặt $V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow U = AV\Sigma^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Lưu ý: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ thì $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Nếu A gầy [ ] $n < m$: ok!
- Nếu A béo [ ] $n > m$

Đặt $B = A^T$

- Phân tích SVD cho B: $B = U\Sigma V^T$

Có: $A = B^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma U^T$

Thi Giữa Kỳ: 22CLC10

1) Sáng thứ 6 (21/6), 7h45'
2) Hội trường I.
   (bận thực sự: chiều Thứ 6: 13h45')
3) Thi tự luận, 90p, được dùng tài liệu giấy và Calculator.
4) Nội dung:
   ① Hệ PTTT (ôn rồi)
   ② Nghịch đảo, định thức → chưa ôn → nên ôn kỹ.
   ③ Trực giao hoá, QR (ôn rồi) Gram-Schmidt
   ④ chéo hoá, mũ ma trận (ôn rồi)
   ⑤ chéo hoá trực giao và SVD. (ôn rồi)
   ↳ ôn rồi béo ↳ gầy

Ví dụ: ptích SVD

$r(A) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = R^{m\times n} = R^{2\times 3}$$

Nhận xét: A là ma trận "béo" vì A có số cột nhiều hơn số dòng.

$$\Rightarrow B = A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G = B^T . B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} \qquad G = R^{2\times 2}$$

giải pt đặc trưng: $\det(G - I_2 \lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (9-\lambda)^2 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9-\lambda = 9 \\ 9-\lambda = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ (loại)} \\ \lambda = 18 \end{array}\right.$$

Vậy B có 1 trị riêng là $\lambda = 18$

. Với $\lambda = 18$, không gian riêng $E(\lambda) = E(18)$ là KG nghiệm của hệ:

$$(G - I_2 \lambda) v = \vec{0}$$

Ta có: $$G - I_2\lambda = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{9}d_1]{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in R.$$

$\Rightarrow E(\lambda) = E(18)$ có cơ sở là $B_2 = \left\{ t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Thuật toán Gram - Schmidt:

$$\lambda = 18 \rightarrow t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow q = \frac{u}{\|u\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = [18]$$

$$\Rightarrow \text{Đặt } V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = [3\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow B = U \Sigma V^T$$

$$\Rightarrow U = B V \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B^T = (U\Sigma V^T)^T$$

$$= V \Sigma U^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} . [3\sqrt{2}] . \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(đúng ?!)

Phân tích SVD

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Nhận xét A là ma trận vuông.

$G = A^T A$.

$= \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 28 \\ 28 & 146 \end{bmatrix}$

Giải ptđt : $\det(G - I_2\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 104-\lambda & 28 \\ 28 & 146-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (104-\lambda)(146-\lambda) - 28^2 = 0$

$\Leftrightarrow 15184 - 250\lambda + \lambda^2 - 28^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 250\lambda + 14400 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 160 \\ \lambda = 90 \end{array}\right.$ (n) Vậy G có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 90$ và $\lambda_2 = 160$.

Với $\lambda_1 = 90$, không gian riêng $E(\lambda_1) = E(90)$ là k^0 gian n_0 của hệ:

$(G - I_2\lambda_1)v = \vec{0}$

$G - I_2\lambda_1 = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{28}d_2]{\frac{1}{14}d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -2\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E(\lambda_1) = E(90)$ có cơ sở là $B_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (1)

Với $\lambda_2 = 160$, $E(\lambda_2) = E(160)$ là k^0 gian n_0 của hệ: $(G - I_2\lambda_2)v = \vec{0}$.

$G - I_2\lambda_2 = \begin{bmatrix} -56 & 28 \\ 28 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{14}d_2]{1/28 d_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha/2 \\ v_2 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E(\lambda_2) = E(160)$ có cơ sở $B_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (2)

Thuật toán Gram - Schmidt:

(1) $\Rightarrow u_1 = t_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(2) $\Rightarrow u_2 = t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 160 & 0 \\ 0 & 90 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{10}}{40} = \frac{\sqrt{2}}{40}$

Đặt $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -2/\sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 4\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = U\Sigma V^T \Rightarrow U = AV\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -2/\sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} \end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{40} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{40} & -2/\sqrt{15} \\ \frac{\sqrt{2}}{20} & \frac{\sqrt{2}}{30} \end{bmatrix}$

Find singular value decomposition for $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{8\sqrt{15} + 11\sqrt{2}}{30} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-8\sqrt{15} + \sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A = U\Sigma V^T.$

Nhận xét: A là ma trận "béo" vì ma trận A có số cột > số dòng.

Đặt $B = A^T \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$G = B^T.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Giải ptđt: $\det(G - I_2\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$

Vậy G có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$.

Với $\lambda_1 = 1$ thì $E(\lambda_1) = E(1)$ là k^0 gian n_0 của hệ: $(G - I_2\lambda_1)v = \vec{0}$

$G - I_2\lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2+d_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}. \Rightarrow E(\lambda_1) = E(1)$ có cơ sở là $B_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (1)

Với $\lambda_2 = 3$ thì $E(\lambda_2) = E(3)$ là k^0 gian n_0 của hệ: $(G - I_2\lambda_2)v = \vec{0}$

$G - I_2\lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-d_1]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}. \Rightarrow E(\lambda_2) = E(3)$ có cơ sở là $B_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (2)

Thuật toán Gram-Schmidt:

(1) $\Rightarrow u_1 = t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(2) $\Rightarrow u_2 = t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow U = B.V\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$B = U \Sigma V^T \Rightarrow A = B^T = (U \Sigma V^T) = (V^T)^T \cdot (U \Sigma)^T$$

$$= V \cdot \Sigma U^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Bài tập Exercises 05

(week 05)

Bài 1:

Tìm các trị riêng và các cơ sở cho Kg riêng tương ứng

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

giải ptđt:

$\det(A_1 - I_2\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$

Vậy A_1 có 2 trị riêng là $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = 4$

Với $\lambda_1 = -1$, Kgian riêng là no của hệ:

$(A_1 - I_2\lambda_1)v = 0$

Ta có. $A_1 - I_2\lambda_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}d_2]{\frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Vậy có một cơ sở cho Kg riêng tương ứng $\lambda_1 = -1$ là $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 4$, Kg riêng là no của hệ:

$(A_1 - I_2\lambda_2)v = 0$

Ta có: $A_1 - I_2\lambda_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{2}{3}\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Với $\lambda_2 = 4$, có một cơ sở cho Kg riêng tương ứng $\lambda_2 = 4$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

giải ptđtrưng: $\det(A_2 - I_2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 8\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$. Vậy A có 1 trị riêng là $\lambda = 4$

Với $\lambda = 4$, Kgian riêng là no của hệ:

$(A_2 - I_2\lambda)v = 0$. Ta có: $A_2 - I_2\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Vậy một cơ sở cho Kg riêng tương ứng với $\lambda = 4$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Giải phương trình đặc trưng: $|A_3 - I_3\lambda| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\xrightarrow{d_1 = d_1 + d_2 + d_3} \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \longrightarrow (-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[d_2 + d_1]{d_3 + d_1} (-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{cột } 1}{=} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}(-\lambda).1$

$= (1-\lambda)^2.\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$. Vậy A_3 có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = 1$

Với $\lambda_1 = 0$, k° gian riêng là nghiệm của hệ: $(A_3 - I_3\lambda_1)v = 0$

Ta có: $A_3 - I_3\lambda_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 + d_1 + d_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 + \frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 + d_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -\alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Vậy một cơ sở cho kg riêng tương ứng $\lambda_1 = 0$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Với $\lambda_2 = 1$, k° gian riêng là no của hệ: $(A_3 - I_3\lambda_2)v \overset{!}{=} 0$

Ta có: $A_3 - I_3\lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2 + d_1]{d_3 + d_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{d_3 \Leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1/2\, d_3]{-1/2\, d_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 + d_2 + d_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vậy một cơ sở cho k° gian riêng ứng với $\lambda_2 = 1$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Giải ptđt: $\det(A_4 - I_2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -5 \end{array}\right.$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -5$

Với $\lambda_1 = 1$, K° gian riêng là n₀ của hệ: $(A_4 - I_2\lambda_1)v = 0$

Ta có: $A_4 - I_2\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}d_2]{1/4 d_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vậy một cơ sở cho không gian riêng tương ứng $\lambda_1 = 1$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Với $\lambda_2 = -5$, K° gian riêng là n₀ của hệ: $(A_4 - I_2\lambda_2)v = 0$

Ta có: $A_4 - I_2\lambda_2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[1/2 d_2]{1/2 d_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 - 3d_2} \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-\frac{1}{10}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Vậy một cơ sở cho không gian riêng tương ứng $\lambda_2 = -5$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$A_9 = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Giải ptđt: $\det(A_9 - I_4\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & -8 & 6 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\overset{\text{cột 1}}{\Leftrightarrow} (9-\lambda)(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\overset{\text{cột 1}}{\Leftrightarrow} (9-\lambda) \cdot (-1-\lambda)(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (9-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 9 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = 7 \end{array}\right.$

Với $\lambda_1 = -1$, K° gian riêng là n₀ của hệ: $(A_9 - I_4\lambda_1)v = 0$

$A_9 - I_4\lambda_1 = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}d_3,\ \frac{1}{8}d_2]{d_2 \Leftrightarrow d_4} \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} v_1 = 4/5\,\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Với $\lambda_2 = 3$, k^0 gian riêng là n_0 của hệ: $(A_9 - I_4\lambda_2)v = 0$

$$A_9 - I_4\lambda_2 = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ v_2 = 0 \\ v_3 = \alpha \\ v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Với $\lambda_3 = 7$, k^0 gian riêng là n_0 của hệ: $(A_9 - I_4\lambda_3)v = 0$

$$A_9 - I_4\lambda_3 = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -3/2\,\alpha \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = \alpha \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Với $\lambda_4 = 9$, k^0 gian riêng là n_0 của hệ: $(A_4 - I_4\lambda_4)v = 0$

$$A_9 - I_4\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases} \rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bài 2

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

giải ptđt: $|A_4 - I_3\lambda| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

cột 1

$\Rightarrow (1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$

Với $\lambda_1 = 0$, k⁰ gian riêng là n_0 của hệ: $(A_4 - I_3\lambda)v = 0$

$A_4 - I_3\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -\alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in R$

Vậy một cơ sở cho k⁰ gian riêng tương ứng $\lambda_1 = 0$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Với $\lambda_2 = 1$, k⁰ gian riêng là n_0 của hệ: $(A_4 - I_3\lambda_2)v = 0$

Ta có: $A_4 - I_3\lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in R$

Vậy một cơ sở cho kg riêng tương ứng $\lambda_2 = 1$ là $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Với $\lambda_3 = 2$, k⁰ gian riêng là n_0 của hệ $(A_4 - I_3\lambda_3)v = 0$

Ta có: $(A_4 - I_3\lambda_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-d_1]{d_3 + d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in R$

Vậy một cơ sở cho k⁰ gian riêng tương ứng $\lambda_3 = 2$ là $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Ta có: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

A có đủ 3 vector cơ sở $\Rightarrow$ A chéo hoá đc

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

B_3: Tìm ma trận chéo hoá trực giao?

$$A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

giải ptđt: $\det(A_6 - I_4\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{dòng } 4}{\Leftrightarrow} (-\lambda)(-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{\text{dòng } 3}{\Leftrightarrow} (-\lambda)(-1)^{3+3} \cdot (-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2[(3-\lambda)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ (3-\lambda)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Vậy A_6 có 3 trị riêng là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ và $\lambda_3 = 4$

Với $\lambda_1 = 0$, k° gian riêng là n₀ của hệ: $(A_6 - I_4\lambda_1)v = 0$

$$A_6 - I_4\lambda_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 - \frac{1}{3}d_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}d_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 - d_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/3\, d_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = \alpha \\ v_4 = \beta \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Một cơ sở cho không gian riêng tương ứng $\lambda_1 = 0$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 2$, không gian riêng là nghiệm của hệ: $(A_6 - I_4\lambda_2)v = \vec{0}$

$$A_6 - I_4\lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}d_3 \\ -\frac{1}{2}d_4}]{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Vậy một cơ sở cho k° gian riêng tương ứng $\lambda_2 = 2$ là $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Với $\lambda_3 = 4$, không gian riêng là nghiệm của hệ: $(A_6 - I_4\lambda_3)v = \vec{0}$

$$A_6 - I_4\lambda_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{4}d_3 \\ -\frac{1}{4}d_4}]{d_2 + d_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 \Leftrightarrow d_4]{d_2 \Leftrightarrow d_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Một cơ sở cho K^0 gian riêng tương ứng $\lambda_3 = 4$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ta có: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \rightarrow \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \lambda_2 = 2 \rightarrow \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left\{ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dùng thuật toán Gram-Schmidt:

- $\lambda_1 = 0$: $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0\,0\,0\,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- $\lambda_2 = 2$: $\left\{ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow u_3 = v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_3 = 4 : \left\{ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow u_4 = v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow q_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do A_6 có 4 vector trực chuẩn trị riêng = $\dim A_6 = 4$

$\Rightarrow A_6$ có thể chéo hoá trực giao được

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_6 = QDQ^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải pt đt: $\det(A_5 - I_3\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{d_1+d_2+d_3} \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[d_3+d_1]{d_2+d_1} (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{cột } 1}{\Rightarrow} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \text{ (đơn)} \\ \lambda = 3 \text{ (kép)} \end{array}\right.$$

Với $\lambda_1 = 0$, kgian riêng là kgian no của hệ: $(A_5 - I_3\lambda_1)v = \vec{0}$

$$A_5 - I_3\lambda_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3+d_2+d_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1+2d_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}d_2]{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1+2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow E(\lambda) = E(0)$ có cơ sở là $B_1 = \left\{ t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 3$, kgriêng là kgian no của hệ: $(A_5 - I_3\lambda_2)v = \vec{0}$

$$A_5 - I_3\lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha - \beta \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$E(\lambda_2) = E(3)$ có cơ sở là $\beta_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; t_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Thuật toán Gram - Schmidt:

$\lambda_1 = 0 \rightarrow E(\lambda_1) = E(0) \rightarrow \beta_1 = \left\{ t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow u_1 = t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \rightarrow E(\lambda_2) = E(3) \rightarrow \beta_2 = \left\{ t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; t_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 = t_3 - \dfrac{\langle t_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{(-1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} q_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ q_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} Q = [q_1\ q_2\ q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$

$\Rightarrow A = QDQ^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T$

ĐỀ THI GIỮA KỲ

TOÁN ỨNG DỤNG VÀ THỐNG KÊ - CLC - 26/06/22

(KHÔNG sử dụng tài liệu - Thời gian: 90 phút)

Bài 1. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau. Cho biết nghiệm tổng quát của hệ nếu hệ có vô số nghiệm.

(a) (1.5 điểm)

$$\begin{cases} 5x_1 & +25x_2 & -20x_3 & +10x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & +10x_2 & -4x_3 & +28x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & +17x_2 & -18x_3 & +16x_4 & = & -7 \\ 3x_1 & +13x_2 & -3x_3 & +13x_4 & = & 21 \end{cases}$$

(b) (2 điểm)

$$\begin{cases} 4x_1 & -8x_2 & +20x_3 & -4x_4 & +20x_5 & = & 8 \\ 4x_1 & -8x_2 & +22x_3 & & +12x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & -4x_2 & +14x_3 & +6x_4 & -6x_5 & = & -8 \\ 3x_1 & -6x_2 & +18x_3 & +x_4 & -7x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & -4x_2 & +7x_3 & -10x_4 & +12x_5 & = & 21 \end{cases}$$

Bài 2. Bằng thuật toán Gram-Schmidt, cho biết tập các vector cột của các ma trận sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính. Thực hiện phân rã QR cho ma trận tương ứng nếu tập các vector là độc lập tuyến tính.

(a) (1.5 điểm)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & 4 \\ -12 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

(b) (1.5 điểm)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bài 3. Tìm tất cả các trị riêng và cơ sở của không gian riêng tương ứng của các ma trận sau. Thực hiện chéo hóa cho ma trận tương ứng nếu có thể.

(a) (1.5 điểm)

$$\begin{bmatrix} -12 & -4 & -1 \\ 29 & 13 & 1 \\ 45 & 20 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) (2 điểm)

$$\begin{bmatrix} -11 & -3 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & -10 & -2 \\ -19 & 3 & 5 & 3 \\ 15 & -14 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài 01:

1a) (1.5 điểm)

ĐỀ THI GIỮA KỲ (CLC - 26/06/2022)

$$\begin{cases} 5x_1 + 25x_2 - 20x_3 + 10x_4 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 28x_4 = 6 \\ 3x_1 + 17x_2 - 18x_3 + 16x_4 = -7 \\ 3x_1 + 13x_2 - 3x_3 + 13x_4 = 21 \end{cases}$$

Ma trận hoá hệ phương trình trên, ta được ma trận mở rộng:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 25 & -20 & 10 & 5 \\ 2 & 10 & -4 & 28 & 6 \\ 3 & 17 & -18 & 16 & -7 \\ 3 & 13 & -3 & 13 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[d_2 = \frac{1}{2} d_2]{d_1 = \frac{1}{5} d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 14 & 3 \\ 3 & 17 & -18 & 16 & -7 \\ 3 & 13 & -3 & 13 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 - 3d_1 \\ d_4 - 3d_1}]{d_2 - d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 10 & -10 \\ 0 & -2 & 9 & 7 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} d_3]{\frac{1}{2} d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & 7 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 + 2d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 17 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 17 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 - 3d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 - 6d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 + 3d_3 - 5d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 113 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 - 5d_2 + 4d_3 - 2d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -430 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 113 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -430 \\ x_2 = 113 \\ x_3 = 31 \\ x_4 = -5 \end{cases}$$

Vậy hệ pt có n₀ duy nhất $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-430, 113, 31, -5)$.

1b) (2 điểm)

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 20x_3 - 4x_4 + 20x_5 = 8 \\ 4x_1 - 8x_2 + 22x_3 + 12x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 44x_3 + 6x_4 - 6x_5 = -8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 18x_3 + x_4 - 7x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 10x_4 + 12x_5 = 21 \end{cases}$$

Ma trận hoá hpt trên, ta được ma trận mở rộng:

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & -8 & 20 & -4 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 22 & 0 & 12 & 2 \\ 2 & -4 & 44 & 6 & -6 & -8 \\ 3 & -6 & 18 & 1 & -7 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & -10 & 12 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := \frac{1}{2}d_3]{d_1 := \frac{1}{4}d_1,\ d_2 := \frac{1}{2}d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 11 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 22 & 3 & -3 & -4 \\ 3 & -6 & 18 & 1 & -7 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & -10 & 12 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1,\ d_4 - 3d_1,\ d_5 - 2d_1]{d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -22 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 2 & 17 \end{array}\right] \xrightarrow{d_5 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -22 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -20 & 20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}d_5]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & 4 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -22 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - 17d_2]{d_4 - 3d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & -76 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -34 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 + 2d_5]{d_3 + 30d_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 46 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_5 + \frac{12}{37}d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{802}{37} \end{array}\right]$$

Vì $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = \frac{802}{37}$ nên hệ p.trình trên vô nghiệm.

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \emptyset$

Bài 2:

2a) (1,5 điểm)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & 4 \\ -12 & -2 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Lập $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & 4 \\ -12 & -2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[2d_1]{\frac{1}{2}d_4} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3+d_1 \\ d_4+d_1}]{d_2-d_1} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4+\frac{3}{4}d_2]{d_3+d_2} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{4}{7}d_4]{\frac{1}{7}d_3} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4-d_3 \\ d_2+d_3}]{\frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}d_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}(d_1+d_2-2d_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 = \text{số vector}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ độc lập tuyến tính.

Do tập các vector $\{v_1, v_2, v_3\}$ là độc lập tuyến tính nên ta dùng thuật toán Gram - Schmidt để phân rã ma trận trên.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{(-1\ 2\ -2\ -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}}{3^2+6^2+6^2+12^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} - \frac{(2\ 3\ 4\ -10)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}}{225}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{(2\ 3\ 4\ -10)\begin{pmatrix} -8/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}}{(\frac{8}{5})^2+(\frac{4}{5})^2+(\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}\begin{pmatrix} -8/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} - \frac{8}{15}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -8/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \\ -16/5 \\ -32/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16/5 \\ 8/5 \\ -8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/5 \\ 7/5 \\ 28/5 \\ -14/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \beta = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} -14/5 \\ 7/5 \\ 28/5 \\ -14/5 \end{pmatrix} \right\}$$ là cơ sở trực giao

của K^0 gian vector $\{v_1, v_2, v_3\}$

Các vector trực chuẩn là:

$$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

Ma trận trực giao hoá: $Q = [q_1 \ q_2 \ q_3] = \begin{bmatrix} 1/5 & -4/5 & -2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ -2/5 & -2/5 & 4/5 \\ -4/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix} v_1^T q_1 & v_2^T q_1 & v_3^T q_1 \\ 0 & v_2^T q_2 & v_3^T q_2 \\ 0 & 0 & v_3^T q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = QR = \begin{bmatrix} 1/5 & -4/5 & -2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ -2/5 & -2/5 & 4/5 \\ -4/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Bài 3:

3a) (1.5 điểm) $A=\begin{bmatrix}-12&-4&-1\\29&13&1\\45&20&2\end{bmatrix}$ giải phương trình đặc trưng: $\det(A-I_3\lambda)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-12-\lambda&-4&-1\\29&13-\lambda&1\\45&20&2-\lambda\end{vmatrix}=0 \xrightarrow{d_2+d_1} \begin{vmatrix}-12-\lambda&-4&-1\\17-\lambda&9-\lambda&0\\45&20&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\xrightarrow{5d_1+d_3} 5\begin{vmatrix}-15-5\lambda&0&-3-\lambda\\17-\lambda&9-\lambda&0\\45&20&2-\lambda\end{vmatrix}=0 \xrightarrow{c_1-9/4c_2} \begin{vmatrix}-15-5\lambda&0&-3-\lambda\\-\frac{13}{4}+\frac{5}{4}\lambda&9-\lambda&0\\0&20&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\overset{\text{cột }3}{\Leftrightarrow} (-3-\lambda).(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-\frac{13}{4}+\frac{5}{4}\lambda&9-\lambda\\0&20\end{vmatrix}+(2-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-15-5\lambda&0\\-\frac{13}{4}+\frac{5}{4}\lambda&9-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (-3-\lambda).\left(-\frac{13}{4}+\frac{5}{4}\lambda\right).20+(2-\lambda).(15-5\lambda)(9-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow 5(-3-\lambda)(-13+5\lambda)+5(-3-\lambda)(2-\lambda)(9-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow 5(-3-\lambda).\left[(-13+5\lambda)+(2-\lambda)(9-\lambda)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-3\\ \lambda^2-11\lambda+18-13+5\lambda=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-3\\ \lambda^2-6\lambda+5=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-3\\ \lambda=5\\ \lambda=1\end{array}\right.$. Vậy A có 3 trị riêng là $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=5$

Với $\lambda_1=-3$, không gian riêng là nghiệm của hệ: $(A-I_3\lambda_1)v=\vec{0}$

$A-I_3\lambda_1=\begin{bmatrix}-9&-4&-1\\29&16&1\\45&20&5\end{bmatrix}\xrightarrow[d_2+d_1]{\frac{1}{5}d_3}\begin{bmatrix}-9&-4&-1\\20&12&0\\9&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3+d_1}\begin{bmatrix}-9&-4&-1\\20&12&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[-d_1]{\frac{1}{4}d_2}\begin{bmatrix}9&4&1\\5&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{d_2-\frac{5}{9}d_1}\begin{bmatrix}9&4&1\\0&7/9&-\frac{5}{9}\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{9d_2}\begin{bmatrix}9&4&1\\0&7&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}v_1=-3/7\alpha & \forall\alpha\in\mathbb{R}\\ v_2=5/7\alpha\\ v_3=\alpha\end{cases}\Rightarrow v=\alpha\begin{pmatrix}-3/7\\5/7\\1\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{7}\begin{pmatrix}-3\\5\\7\end{pmatrix}\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

Một cơ sở cho không gian riêng tương ứng trị riêng $\lambda_1=-3$ là: $\left\{\begin{pmatrix}-3\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$

Với $\lambda_2=1$, không gian riêng là no của hệ: $(A-I_3\lambda_2)v=\vec{0}$

$A-I_3\lambda_2=\begin{bmatrix}-13&-4&-1\\29&12&1\\45&20&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-d_1]{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&4&13\\1&12&29\\1&20&45\end{bmatrix}\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1}\begin{bmatrix}1&4&13\\0&8&16\\0&16&32\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\frac{1}{16}d_3]{1/8\,d_2}\begin{bmatrix}1&4&13\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{d_3-d_2}\begin{bmatrix}1&4&13\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{d_1-4d_2}\begin{bmatrix}1&4&13\\0&0&5\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{5}d_2}\begin{bmatrix}1&4&13\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{d_1-13d_2}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}v_1=-4\alpha\\ v_2=\alpha\\ v_3=0\end{cases}\Rightarrow v=\alpha\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Một cơ sở cho K° gian riêng tương ứng $\lambda_2 = 1$ là $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_3 = 5$, không gian riêng là n_0 của hệ: $(A - I_3 \lambda_3) v = \vec{0}$

$$A - I_3\lambda_3 = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -1 \\ 29 & 8 & 1 \\ 45 & 20 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-d_1]{c_3 \leftrightarrow c_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 1 & 8 & 29 \\ -3 & 20 & 45 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 + 3d_1]{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 32 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}d_3]{\frac{1}{4}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 - 16d_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -51 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{51}d_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Một cơ sở cho K° gian riêng tương ứng $\lambda_3 = 5$ là $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ta có:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \Rightarrow \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \lambda_3 = 5 \Rightarrow \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{cases}$$

Do A có đủ 3 vector trị riêng cơ sở $= \dim A = 3$

$\Rightarrow$ A có thể chéo hoá được

$$P = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

P chéo hoá A thành D

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

2b) (2 điểm)

$B = \begin{bmatrix} -11 & -3 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & -10 & -2 \\ -19 & 3 & 5 & 3 \\ 15 & -14 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ giải phương trình đặc trưng:

$\det(B - I_4 \lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -11-\lambda & -3 & 9 & 3 \\ 8 & 9-\lambda & -10 & -2 \\ -19 & 3 & 5-\lambda & 3 \\ 15 & -14 & 17 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\xrightarrow[c_2 + c_3]{c_3 - 3c_4} \begin{vmatrix} -11-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 7-\lambda & -4 & -2 \\ -19 & 6 & -4-\lambda & 3 \\ 15 & -11-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{dòng 1}}{\Leftrightarrow} (-11-\lambda).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -2 \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ -11-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 3.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 8 & 7-\lambda & -4 \\ -19 & 6 & -4-\lambda \\ 15 & -11-\lambda & 8+3\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(-11-\lambda).\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -2 \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ -11-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}}_{B_1}$$

$$\underbrace{-3\begin{vmatrix} 8 & 7-\lambda & -4 \\ -19 & 6 & -4-\lambda \\ 15 & -11-\lambda & 8+3\lambda \end{vmatrix}}_{B_2} = 0 \quad (1)$$

$$B_1 = (-11-\lambda).\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -2 \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ -11-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{d_1 - d_3} (-11-\lambda)\begin{vmatrix} 18 & -12-3\lambda & -5+\lambda \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ -4-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{d_1 - 3d_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -14+\lambda \\ 6 & -4-\lambda & 3 \\ -4-\lambda & 8+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}(-11-\lambda) \overset{\text{dòng 1}}{\Longrightarrow} (-1)^{1+3}.(-14+\lambda).(-11-\lambda)\begin{vmatrix} 6 & -4-\lambda \\ -4-\lambda & 8+3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-14+\lambda).\left[6(8+3\lambda) - (4+\lambda)^2\right].(-11-\lambda)$$

$$= (-14+\lambda)(-11-\lambda).(48 + 18\lambda - 16 - 8\lambda - \lambda^2)$$

$$= (-\lambda^2 + 3\lambda + 154)(-\lambda^2 + 10\lambda + 32)$$

$$B_2 = 3\begin{vmatrix} 8 & 7-\lambda & -4 \\ -19 & 6 & -4-\lambda \\ 15 & -11-\lambda & 8+3\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[d_3 - \frac{8}{15}d_1]{d_2 + \frac{19}{8}d_1} 3\begin{vmatrix} 8 & 7-\lambda & -4 \\ 0 & \frac{181}{8} - \frac{19}{8}\lambda & -\frac{27}{2} - \lambda \\ 0 & -\frac{221}{15} - \frac{7}{15}\lambda & \frac{152}{15} + 3\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{cột 1}}{\Leftrightarrow} (-1)^{1+1}.8.3\begin{vmatrix} \frac{181}{8} - \frac{19}{8}\lambda & -\frac{27}{2} - \lambda \\ -\frac{221}{15} - \frac{7}{15}\lambda & \frac{152}{15} + 3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 24.\left[\left(\frac{181}{8} - \frac{19}{8}\lambda\right)\left(\frac{152}{15} + 3\lambda\right) - \left(\frac{27}{2} + \lambda\right)\left(\frac{221}{15} + \frac{7}{15}\lambda\right)\right]$$

$$= 24 \cdot \left[\left(\frac{181}{8} - \frac{19}{8}\lambda \right)\left(\frac{152}{15} + 3\lambda \right) - \left(\frac{27}{2} + \lambda \right)\left(\frac{221}{15} + \frac{7}{15}\lambda \right) \right]$$

$$= 24 \cdot \left[\left(\cancel{\frac{3439}{15}} + \frac{5257}{120}\lambda - \cancel{\frac{57}{8}\lambda^2} \right) - \left(\cancel{\frac{1989}{10}} + \cancel{\frac{7}{15}\lambda^2} + \frac{631}{30}\lambda \right) \right]$$

$$= 24 \left[-\frac{911}{120}\lambda^2 + \frac{911}{30} + \frac{911}{40}\lambda \right] = -21864 \left[\frac{\lambda^2}{120} - \frac{\lambda}{40} - \frac{1}{30} \right]$$

$$= -21864 \left[\frac{\lambda^2 - 3\lambda - 4}{120} \right] = -\frac{911}{5}(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$

$$(1) \Rightarrow (-\lambda^2 + 3\lambda + 154)(-\lambda^2 + 10\lambda + 32) + \frac{911}{5}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda - 154)(\lambda^2 - 10\lambda - 32) + \frac{911}{5}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\lambda^4} - \cancel{10\lambda^3} - \cancel{32\lambda^2} - \cancel{3\lambda^3} + \cancel{30\lambda^2} + \cancel{96\lambda} - \cancel{154\lambda^2} + \cancel{1540\lambda}$$
$$+ \cancel{4928} + \cancel{\frac{911}{5}\lambda^2} - \cancel{\frac{2733}{5}\lambda} - \cancel{\frac{3644}{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - 13\lambda^3 + \frac{131}{5}\lambda^2 + \frac{5447}{5}\lambda + \frac{20996}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda^4 - 65\lambda^3 + 131\lambda^2 + 5447\lambda + 20996 = 0$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI GIỮA KỲ

Học kỳ 2 – Năm học 2023-2024

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng KT-ĐBCL ghi)
CK2324-2
MTH00051

Tên học phần:	**Toán ứng dụng và Thống kê**	**Mã HP:**	**MTH00051**
Thời gian làm bài:	**60 phút**	Ngày thi:	**24/04/2024**

Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: ....Hà lam.............................. **MSSV**: …………… **STT**: …..

Bài 1. (3.0 điểm) Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Bài 2. (4.0 điểm) Cho ma trận A như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & -14 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Hãy phân tích QR cho ma trận A.

Bài 3. (3.0 điểm) Cho ma trận

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}.$$

a) Hãy chéo hóa ma trận B.

b) Hãy tính B^{32}.

(Đề thi gồm 1 trang)

Họ tên người ra đề/MSCB: .... Chữ ký: ....

Họ tên người duyệt đề: .... Chữ ký:.................

Bài 1 (3đ)

3đ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Ma trận hoá hpt trên, ta có:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 - d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 + 7d_2]{d_3 - 5d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{4}d_4]{\frac{1}{2}d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4 - d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Đúng

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_4 = t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + t \in \mathbb{R} \\ x_3 = 6 + 2t \in \mathbb{R} \\ x_4 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy hpt có vô số nghiệm với dạng nghiệm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3+t, 6+2t, t) \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Bài 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & -14 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A có 3 vector

Đặp $B = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & -14 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{d_4 \leftrightarrow d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & -14 \\ 4 & 4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - 2d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & -14 \\ 0 & 6 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 + d_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4/45}\begin{pmatrix}2&-1&-7\\0&-6&17\\0&-3&-14\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\begin{pmatrix}2&-1&-7\\0&-3&-14\\0&-6&17\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-2d_2}\begin{pmatrix}2&-1&-7\\0&-3&-14\\0&0&45\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-d_2]{d_3/45}\begin{pmatrix}2&-1&-7\\0&3&14\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}(d_1+d_2+7d_3)]{\frac{1}{3}(d_2-14d_3)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(B) = 3 =$ số vector của A

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính.

Do A gồm các vector cột $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính nên ta có thể dùng thuật toán Gram-Schmidt để phân rã QR cho ma trận A.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix},\quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = \begin{pmatrix}4\\-8\\-3\\-1\end{pmatrix} - \frac{(4\ -8\ -3\ -1)\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix}}{4^2+4^2+2^2}\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\-8\\-3\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-8\\-3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 = \begin{pmatrix}14\\3\\-14\\-7\end{pmatrix}$$

$$- \frac{(14\ 3\ -14\ -7)\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix}}{4^2+4^2+2^2}\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{(14\ 3\ -14\ -7)\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\\0\end{pmatrix}}{6^2+6^2+3^2}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}14\\3\\-14\\-7\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}4\\4\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-10\\-10\end{pmatrix}$$

Chú ý bài toán 2 sai dấu ở q_2

$q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Ma trận trực giao: $Q = [q_1 \; q_2 \; q_3] = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix} v_1^T q_1 & v_2^T q_1 & v_3^T q_1 \\ 0 & v_2^T q_2 & v_3^T q_2 \\ 0 & 0 & v_3^T q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = QR = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$ (sai dấu)

Bài 3

a) chéo hoá B?

$B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix}$ giải p.trình đặc trưng: $\det(B - I_3\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 & -12 \\ 6 & -6-\lambda & 12 \\ 6 & -8 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 & -12 \\ 6 & -6-\lambda & 12 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{d_2 + d_1} \begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 & -12 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -(2-\lambda) & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -4-\lambda & 8 & -12 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{c_2 + c_3} (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -4-\lambda & -4 & -12 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{dòng } 3}{\Leftrightarrow} (2-\lambda)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4-\lambda & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda+4) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Vậy B có 2 trị riêng $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = 2$.

Với $\lambda_1 = 0$, kgian riêng là n_0 của hệ: $(B - I_3\lambda_1)v = \vec{0}$

$$B - I_3\lambda_1 = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}d_2,\ \frac{1}{2}d_3]{-\frac{1}{4}d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}d_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 + 2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Một cơ sở cho kg riêng tương ứng với $\lambda_1 = 0$ là: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 2$, không gian nghiệm là n_0 của hệ: $(B - I_3\lambda_2)v = \vec{0}$

$$B - I_3\lambda_2 = \begin{bmatrix} -6 & 8 & -12\\ 6 & -8 & 12\\ 6 & -8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_2-d_1]{d_3-d_2} \begin{bmatrix} -6 & 8 & -12\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{4\alpha - 6\beta}{3} = \dfrac{4}{3}\alpha - 2\beta.\\ v_2 = \alpha\\ v_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow v = \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

Một cơ sở cho không gian riêng tương ứng $\lambda_2 = 2$ là $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow B_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow B_2 = \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

Do B có số chiều là 3 và bằng với số vectơ cơ sở của các kgian riêng tương ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ và $\lambda_2 = 2$ nên B chéo hoá được

$P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

P làm chéo hoá B thành ma trận D.

$\Rightarrow B = P.D.P^{-1}$

3b) $B^{32} = ?$

Ta có: $B^n = P.D.P^{-1}$

$\Rightarrow B^n = P.D^n.P^{-1}$

Do D là ma trận đg chéo nên dễ dàng tính được:

$$D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^n = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{n+2} & -2^{n+1}\\ 0 & 3.2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2^{n+1}) & (2^{n+2}) & (-3.2^{n+1})\\ 3.2^n & -3.2^n & 3.2^{n+1}\\ 3.2^n & -2^{n+2} & 7.2^n \end{bmatrix}$$

$$B^{32} = \begin{bmatrix} -2^{33} & 2^{34} & -3.2^{33} \\ 3.2^{32} & -3.2^{32} & 3.2^{33} \\ 3.2^{32} & -2^{34} & 7.2^{32} \end{bmatrix}$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI GIỮA HỌC KỲ

Học kỳ 2 – Năm học 2022-2023

MÃ LƯU TRỮ	
(do phòng KT-ĐBCL ghi)	
GK22232	
MTH00051	

Tên học phần: **Toán ứng dụng và thống kê** **Mã HP:** MTH00051

Thời gian làm bài: **45'** Ngày thi: 27/04/2023

Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài*

Họ tên sinh viên: ....

Câu 1 (3.0đ). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 9 \\ x - 2z + 7t = 11 \\ 3x - 3y + z + 5t = 8 \\ 2x + y + 4z + 4t = 10 \end{cases}$$

~~x = -14/29~~
~~y = 2/29~~
~~z = 33/29~~

x = -1
y = 0
z = 1
t = 2

Câu 2. (4.0đ) Cho ma trận

1 1 1 1
-2 -2 2 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$v_i \; \frac{\sum_i u_i \cdot v_j}{|v_j|^2} v_j$

Phân tích QR cho ma trận A.

A = QR

⇒ R = Q^T.A

Câu 3. (3.0đ) Cho ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -10 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Tìm các trị riêng và vector riêng của ma trận A. -2

b) Tìm A^{100}. 3

$A = P.D.P^{-1}$

Họ tên người ra đề/MSCB: ...

(Đề thi gồm 1 trang)

Bài 1:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 9 \\ x - 2z + 7t = 11 \\ 3x - 3y + z + 5t = 8 \\ 2x + y + 4z + 4t = 10 \end{cases}$$

$$\rightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 - 3d_1 \\ d_4 - 2d_1}]{d_2 - 2d_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 - 3d_2]{d_4 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{5}d_4 \\ -\frac{1}{14}d_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 - 3d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 + d_4]{-d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-(d_2 - 7d_3 + 10d_4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1 + 2d_3 - 7d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Vậy hpt trên có 1 no duy nhất là: $(x, y, z, t) = (-1, 0, 1, 2)$

Bài 2 (4đ)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có các vector cột như sau:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Muốn phân rã A thành QR thì A phải gồm các vector cột độc lập tuyến tính. Đầu tiên, ta cm $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính.

$$\text{Lập } B = (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 + d_1 \\ d_4 - d_1}]{d_2 - d_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}d_4 \\ \frac{1}{6}d_3}]{\frac{1}{2}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 - 3d_4 \\ d_1 - d_4}]{d_2 - d_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 \leftrightarrow d_3]{d_3 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 - d_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow r(B) = 3 = \dim\{v_1, v_2, v_3\} = 3$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ độc lập tuyến tính.

Do $\{v_1, v_2, v_3\}$ đltt nên ta sẽ dùng thuật toán Gram-Schmidt để trực giao hoá A và phân rã A thành QR.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{(-1\ 3\ -1\ 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 \times 4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{(-1\ 3\ 5\ 7)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{(-1\ 3\ 5\ 7)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ q_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ q_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{26} \\ -2/\sqrt{26} \\ 3/\sqrt{26} \\ 2/\sqrt{26} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ma trận trực giao $\Rightarrow Q = [q_1\ q_2\ q_3] = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -3/\sqrt{26} \\ 1/2 & 1/2 & -2/\sqrt{26} \\ -1/2 & 1/2 & 3/\sqrt{26} \\ 1/2 & 1/2 & 2/\sqrt{26} \end{bmatrix}$

$$\langle v_1, q_1 \rangle = v_1^T q_1 = (-1\ 1\ -1\ 1)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\langle v_2, q_1 \rangle = v_2^T q_1 = (-1\ 3\ -1\ 3)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

$$\langle v_3, q_1\rangle = v_3^T q_1 = (-1\ 3\ 5\ 7)\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 3$$

$$\langle v_2, q_2\rangle = v_2^T q_2 = (-1\ 3\ -1\ 3)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3 - 1 = 2$$

$$\langle v_3, q_2\rangle = v_3^T q_2 = (-1\ 3\ 5\ 7)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

$$\langle v_3, q_3\rangle = v_3^T q_3 = (-1\ 3\ 5\ 7)\begin{pmatrix}-3/\sqrt{26}\\-2/\sqrt{26}\\3/\sqrt{26}\\2/\sqrt{26}\end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{26}} - \frac{6}{\sqrt{26}} + \frac{15}{\sqrt{26}} + \frac{14}{\sqrt{26}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix}\langle v_1 q_1\rangle & \langle v_2 q_1\rangle & \langle v_3 q_1\rangle\\ 0 & \langle v_2 q_2\rangle & \langle v_3 q_2\rangle\\ 0 & 0 & \langle v_3 q_3\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\0 & 2 & 7\\0 & 0 & \sqrt{26}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = QR = \begin{bmatrix}-1/2 & 1/2 & -3/\sqrt{26}\\1/2 & 1/2 & -2/\sqrt{26}\\-1/2 & 1/2 & 3/\sqrt{26}\\1/2 & 1/2 & 2/\sqrt{26}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\0 & 2 & 7\\0 & 0 & \sqrt{26}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\1 & 3 & 3\\-1 & -1 & 5\\1 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

Bài 3: (3 điểm)

a) Tìm trị riêng và các vector riêng của ma trận A.

$$A = \begin{pmatrix}-7 & 0 & 5\\0 & 3 & 0\\-10 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

giải ptđt: $\det(A - I_3\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-7-\lambda & 0 & 5\\0 & 3-\lambda & 0\\-10 & 0 & 8-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

dòng 1

$$\Leftrightarrow (-7-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\0 & 8-\lambda\end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 3-\lambda\\-10 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-7-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda) + 5.10(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)\left[(-7-\lambda)(8-\lambda) + 50\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 3\\ \lambda^2 - \lambda - 56 + 50 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 3\\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 3\\ \lambda = -2\end{array}\right.$$

Vậy A có 2 trị riêng lần lượt là: $\lambda_1 = -2$ và $\lambda_2 = 3$

Với $\lambda_1 = -2$, không gian riêng là n_0 của hệ: $(A - I_3\lambda_1)v = 0$

$$A - I_3\lambda_1 = \begin{bmatrix}-5 & 0 & 5\\0 & 5 & 0\\-10 & 0 & 10\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}d_2,\ -\frac{1}{10}d_3]{-\frac{1}{5}d_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 - d_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}v_1 = \alpha\\ v_2 = 0 \quad \forall \alpha \in R\\ v_3 = \alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \forall \alpha \in R$$

b) Tìm A^{100}.

Một cơ sở cho kg riêng ứng với $\lambda_1 = -2$ là: $E(\lambda_1) = E(-2) \Rightarrow B_1 = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 3$, không gian riêng là no của hệ: $(A - I_3 \lambda_2)v = 0$

$$A - I_3\lambda_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{\frac{1}{5} d_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \beta/2 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = \beta \end{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$E(\lambda_2) = E(3)$ có cơ sở $B_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Chéo hoá ma trận A:

$E(\lambda_1) = E(-2) \Rightarrow B_1 = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$E(\lambda_2) = E(3) \Rightarrow B_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Do $\dim E(\lambda_1) + \dim E(\lambda_2) = 1 + 2 = 3 = \dim A \Rightarrow A$ chéo hoá được

$$P = \begin{bmatrix} u & v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Do $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

Do D là ma trận đg chéo nên D^n dễ dàng tính được:

$$D^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

Và $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 3^n \\ 0 & 3^n & 0 \\ (-2)^n & 0 & 2.3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^n.2 - 3^n & 0 & -(-2)^n + 3^n \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2.(-2)^n - 2.3^n & 0 & 2.3^n - (-2)^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{101} - 3^{100} & 0 & -2^{100} + 3^{100} \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ 2^{101} - 2.3^{100} & 0 & 2.3^{100} - 2^{100} \end{bmatrix}$$

Tối ưu lồi

(Convex optimization)

1) Hàm số $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

được gọi là hàm giá trị thực n biến thực nói gọn là hàm n biến (n=1, gọi là hàm số).

Ví dụ: • $f(x,y) = x^2y + 2x + 3$ là hàm 2 biến

• $f(x) = f(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{x}) = [3\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ là hàm 3 biến

$= c^T x$ với $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

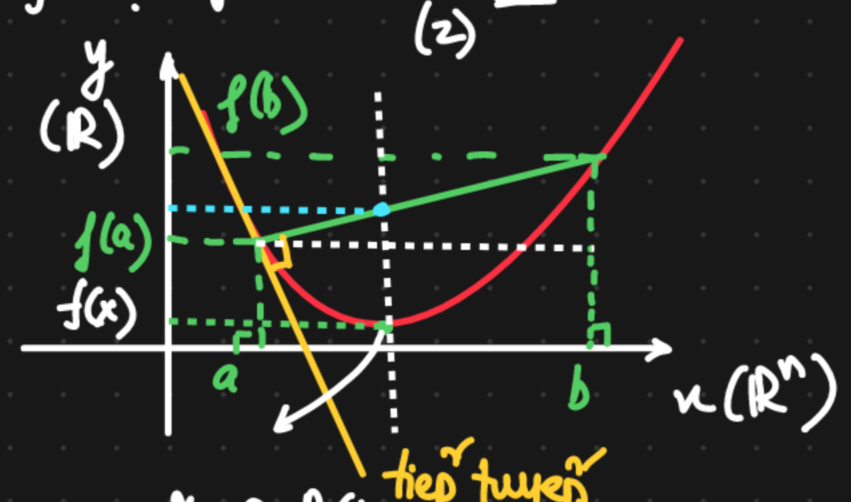
2) Hàm $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

. Nếu với mọi $a, b \in \mathbb{R}^n$ $\forall \theta \in (0,1)$ (1)

$$\boxed{f(a + \theta(b-a)) \le f(a) + \theta(f(b) - f(a))}$$

thì f được gọi là hàm lồi (convex).

(1)	(2)
$<$	Lồi ngặt (strictly convex)
$\geq$	Lõm (concave)
$>$	Lõm ngặt (strictly concave)
còn lại	k^0 lồi k^0 lõm



$x = a + \theta(b-a)$ $(0 \le \theta \le 1)$

Mệnh đề: f lồi $\Leftrightarrow$ $-f$ lõm

Ví dụ: trường hợp n = 1 (hàm một biến)

① $f(x) = |x|$ là hàm lồi có cực tiểu toàn cục tại $x = 0$

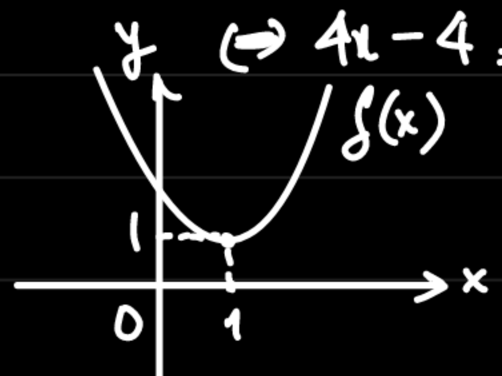
② $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$\Rightarrow f'(x) = 4x - 4$

$\Rightarrow f''(x) = 4 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

nên f là hàm lồi $\rightarrow$ f có cực tiểu toàn cục tại $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$

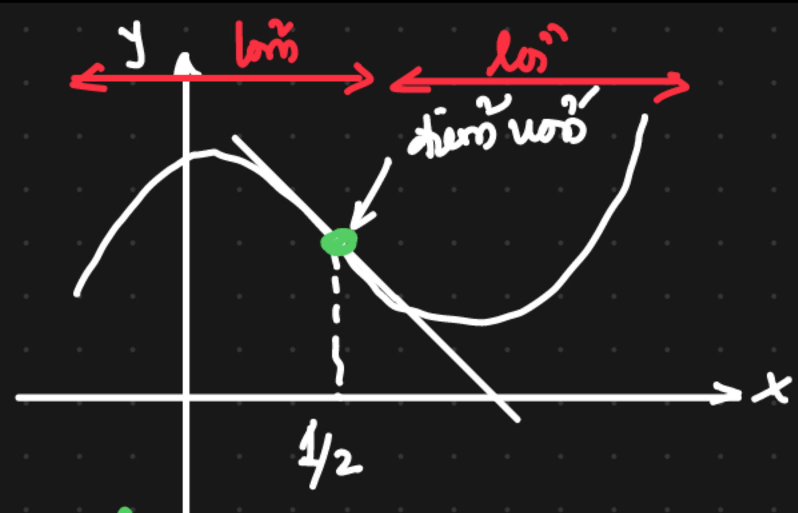


$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f''(x) = 12x - 6$

x		$\frac{1}{2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$



→ không lồi không lõm

Mệnh đề: Nếu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (hàm 1 biến) có đạo hàm cấp 2 liên tục thì

f lồi $\Longleftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ → có cực tiểu

lồi ngặt > 0

lõm ≤ 0 → có cực đại.

lõm ngặt > 0

cực trị tại $f''(x) = 0$

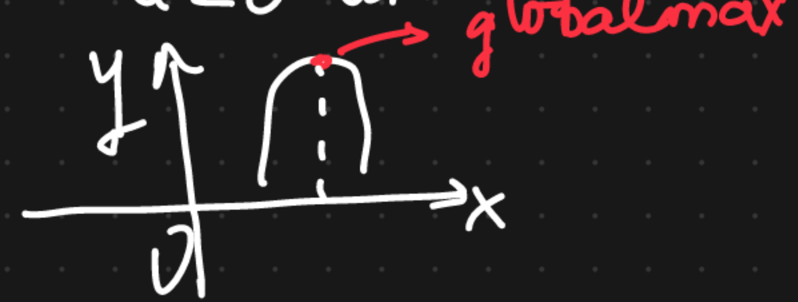
Hàm 1 biến bậc 2: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

$a > 0$: f lồi

$a < 0$ lõm



cực trị tại $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{2a}}$

→ $2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$

Ví dụ: Cho hàm bậc 2 (1 biến)

$f(x) = -2x^2 + 5x + 4$

Khảo sát tính lồi / lõm và cực trị

$f'(x) = -4x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}}$ → f đạt cực đại tại $x = \frac{5}{4}$

$f''(x) = -4 < 0$ → lõm ngặt)

(*) Cho $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, xấp xỉ taylor bậc 2 của f tại a là:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

Ví dụ: Tìm xấp xỉ taylor bậc 2 của

$$f(x) = \cos(x) \text{ tại } a = 0$$

Từ đó tính $\cos(0{,}001)$

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -1$

$f(x) \approx 1 + 0(x-0) + \frac{1}{2}(-1)(x-0)^2$

$\approx 1 - \frac{1}{2} x^2$

$\Rightarrow f(0{,}01)^2 \approx -\frac{1}{2} 0{,}01^2 - 1 - 0{,}005 \approx 0{,}99995$

3) Cho $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, vectơ gradient của f tại $x \in \mathbb{R}^n$ là:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(f')

(*) Ma trận Hess của f tại x là:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(f'')

Mệnh đề. $\nabla^2 f(x)$ đối xứng.

Ví dụ: Cho hàm 2 biến:

$$f(x,y) = 3x^2y + 2x + 1$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy + 2 \\ 3x^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ (đối xứng)}$$

4) Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng $(A = A^T)$

hàm n biến:

$f(x) = x^TAx \; (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ được gọi là dạng toàn phương (quadratic form)

Ví dụ: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_3^2$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{x^T} \underbrace{\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 3 & 2 & 0 \\ x_2 & 2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x}$$

$$\boxed{= x^TAx}$$

5) Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng A được gọi là xác định dương (positive definite) kí hiệu $A > 0$ nếu $x^TAx > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

nửa xác định dương kí hiệu $A \succeq 0$ nếu $x^TAx \geq 0$.

(semi-positive definite)

xác định âm ——— $A < 0$ ——— < 0

nửa xđ âm ——— $A \leq 0$ ——— ≤ 0

còn lại gọi là k° xác định dấu.

Mệnh đề: Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng.

$A > 0 \Leftrightarrow$ các trị riêng của A đều dương (>0)

$A \succeq 0 \Leftrightarrow$ ——— ≥ 0 (≥ 0)

$A < 0 \Leftrightarrow$ ——— âm (< 0)

$A \leq 0 \Leftrightarrow$ ——— $\left\{\begin{matrix}\text{âm} \\ = 0\end{matrix}\right.$ (≤ 0)

→ A không xác định dấu khi có trị riêng $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

$\left\{\begin{matrix} \text{lồi} \to \text{cực tiểu} \\ \text{lõm} \to \text{cực đại} \end{matrix}\right.$ → just remember

Mệnh đề: Cho $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f lồi ngặt $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ } cực tiểu

lồi ——— $\succeq$

lõm ngặt ——— $<$

lõm ——— $\preceq$ } cực đại

} cực trị tại hệ phương trình $\nabla f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ: Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

hàm n biến $f(x) = x^T A x + b^T x + c$ được gọi là hàm bậc 2 n biến

Mệnh đề:

(i) $\nabla f(x) = 2Ax + b$ ✓

(ii) $\nabla^2 f(x) = 2A$ ($\nabla^2 f(x)$ cùng dấu A) ✓

Vậy $\begin{cases} A > 0: \text{lồi ngặt} \to \text{cực tiểu} \\ A < 0: \text{lõm ngặt} \to \text{cực đại} \end{cases}$ tại no của hệ pttt: $2Ax = -b$ ✓

Ví dụ: Cho hàm số 2 biến

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy - 2x + y + 1$$

Xét tính lồi lõm và cực trị: ✓

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy - 2x + y + 1$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x + 4y - 2 \\ 4x + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Giải pt đặc trưng: $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ ✓

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(-\lambda) - 4\times 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 + 2\sqrt{5} > 0 \\ \lambda = 2 - 2\sqrt{5} < 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A$ k° xác định dấu $\Rightarrow f(x)$ không lồi, k° lõm.

$$f(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x + y - 10$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 10x - 4y + 2 \\ -4x + 16y + 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{bmatrix} = A$$

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -4 \\ -4 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (10-\lambda)(16-\lambda) - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 160 - 26\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 18 > 0 \\ \lambda = 8 > 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A > 0 \Rightarrow f$ lồi ngặt.

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại $\nabla f(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 4y + 2 = 0 \\ -4x + 16y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1/4 \\ y = -1/8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) = -\frac{165}{16}$$

b) Cho $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục xấp xỉ Taylor bậc 2 của f tại $a \in \mathbb{R}^n$ là:

$$\underset{(x \in \mathbb{R}^n)}{f(x)} = f(a) + \nabla f(a)^T (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T \nabla^2 f(a)(x-a)$$

Ví dụ: Cho hàm 2 biến:

$$f(x,y) = e^x \ln(1+y)$$

Tìm xấp xỉ Taylor bậc 2 của f tại $a = (0,0)$.

Từ đó, tính $f(0{,}01; 0{,}01)$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x . \ln(1+y) \\ e^x . \dfrac{1}{1+y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \ln(1+y) & e^x . \dfrac{1}{1+y} \\ e^x . \dfrac{1}{1+y} & e^x . -\dfrac{1}{(1+y)^2} \end{bmatrix}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$f(x,y) \underset{(0,0)}{\approx} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x\ y) . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow f(x,y) \approx 0 + y + \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{y}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\approx y + \begin{bmatrix} \frac{y}{2} & \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\approx y + \frac{xy}{2} + y\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)$

$\approx y + xy - \frac{y^2}{2}$

$\Rightarrow f(0{,}01; 0{,}01) = 0{,}01 + 0{,}01^2 - \frac{0{,}01^2}{2}$

$= 0{,}01005$

$f(x,y) = \sin x^2 \cos y$

Xấp xỉ Taylor bậc 2 tại $a = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x\cos x^2 \cos y \\ \sin x^2 \cdot (-\sin y) \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2\cos y\,(\cos x^2 - 2x^2 \sin x^2) & -2x\cos x^2 \sin y \\ -2x\cos x^2 \sin y & -\sin x^2 \cos y \end{bmatrix}$

$f(0,0) = 0$

$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla f(0,0)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f(x,y) \approx 0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\approx \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{y}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\approx x^2$

Phần 2: Least Square

I) Least Square:

1) Bài toán bình phương tối thiểu (least square problem)

Cho $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ tìm

$$\hat{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|^2 \quad (*)$$ ✓

- $\hat{x}$ nghiệm / lời giải của bài toán (*) ✓
- $r = Ax - b$ được gọi là vector phần dư / vector lỗi. ($r \in \mathbb{R}^m$)
- $f(x) = \|Ax-b\|^2 = \|r\|^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2$ gọi là hàm lỗi, cụ thể là tổng bình phương lỗi (Mean Squared Error)

(Sum of Square Error SSE.)

Nhận xét: $f(x) = \|Ax-b\|^2$ là hàm n biến.

Giá trị thực không âm ($f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$)

(*) Nếu hệ pttt $Ax=b$ có nghiệm x^* thì $f(x^*) = \|Ax-b\|^2 = 0$

$\Rightarrow \hat{x} = x^*$

(Nếu $Ax=b$ có nghiệm thì nó chính là nghiệm của (*))

Vậy $A\hat{x} \overset{\text{gần}}{\simeq} b$ nhất.

($A\hat{x}$ xấp xỉ b tốt nhất).

Mệnh đề: $f(x) = \|Ax-b\|^2$ là hàm lồi.

$\Longrightarrow f$ có cực tiểu toàn cục ((*) có nghiệm) là no của hệ PTTT: $A^TAx = A^Tb$ (**)

(muốn $Ax=b$ giải $A^TAx = A^Tb$) (normal equation)

Chứng minh:

$$f(x) = \|Ax-b\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) \quad (\|r\|^2 = r^Tr)$$

$$= (x^TA^T - b^T)(Ax-b) \quad \left(\begin{matrix}(A+B)^T = A^T + B^T \\ (AB)^T = B^TA^T\end{matrix}\right)$$

$$= x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb$$

$$= x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb \quad (x^TA^Tb \in \mathbb{R}^{1\times 1})$$

$$= x^TA^TAx - 2(A^Tb)^Tx + b^Tb$$

$\Rightarrow f$ là hàm bậc 2 n biến.

$$\nabla f(x) = 2A^TA - 2A^Tb$$

$$\nabla^2 f(x) = 2A^TA$$

Đã biết: A^TA là ma trận Gram của A có các trị riêng k' âm $\Rightarrow A^TA \geq 0$

$\Rightarrow f$ hàm lồi, cực tiểu tại $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A^TAx = A^Tb}$

(*) Nếu A có các cột độc lập tuyến tính (rank$(A) = m$) thì A^TA khả nghịch.
nên $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$.

$$\hat{x} = \underbrace{A^{\dagger}}_{}b$$

giả nghịch đảo của A. (pseudo-inverse). ~~Fake~~

(*) Nếu A khả nghịch

$$A^{\dagger} = (A^TA)^{-1}A^T$$
$$= A^{-1}.(A^T)^{-1}.A^T = A^{-1}.$$

(muốn $Ax = b$
làm liều $x = A^{-1}b$
làm liều ok $x = A^{\dagger}b$) ✓

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1) Tìm $\hat{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\arg\min} \|Ax - b\|^2$

2) Tìm lỗi $\|A\hat{x} - b\|^2$.

① $\hat{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\arg\min} \|Ax - b\|^2$

$$= A^{\dagger}.b = (A^T.A)^{-1}.A^T.b$$
$$\approx \begin{bmatrix} 0,1789 \\ 0,5017 \end{bmatrix}$$

② $\|A\hat{x} - b\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} -4.3228 \\ 0.5401 \\ -1.351 \end{bmatrix} \right\|^2$

$\approx 20,80351$ ✓

Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 10 & -7 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Tìm $\hat{x}$ để $\hat{A}\hat{x} \simeq b$ nhất.
- Tìm lỗi $\|A\hat{x} - b\|^2$.

- $\hat{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^3}{\arg\min} \|(Ax-b)\|^2 = A^T b = (A^TA)^{-1}.A^Tb.$

Mà $A^TA = \begin{bmatrix} 11 & 12 & -7 \\ 12 & 120 & -84 \\ -7 & -84 & 59 \end{bmatrix}$; $A^Tb = \begin{bmatrix} 5 \\ 22 \\ -15 \end{bmatrix}$

Giải hệ: $A^TAx = A^Tb$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 11 & 12 & -7 \\ 12 & 120 & -84 \\ -7 & -84 & 59 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 22 \\ -15 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 12 & -7 & 5 \\ 12 & 120 & -84 & 22 \\ -7 & -84 & 59 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow[11d_2 - 12d_1]{11d_3 + 7d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 12 & -7 & 5 \\ 0 & -1176 & +840 & -182 \\ 0 & -840 & 600 & -130 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 - \frac{1}{7}\alpha \\ 13/84 + \frac{5}{7}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(2) $\|A\hat{x} - b\|^2$ với $\alpha = 0 \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 13/84 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\simeq 4,16634.$

II, Data fitting – Linear Regression:

(*) Bài toán hồi quy tuyến tính (linear regression)

1) Cho bộ dữ liệu (dataset) có m:

$D = \{(x^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (x^{(m)}, y^{(m)})\}$

$x^{(i)} \in \mathbb{R}^d$, $y^{(i)} \in \mathbb{R}$.

đầu vào, đầu ra

2) Cho n hàm cơ bản cho trước

$f_1, f_2, \ldots, f_n : \boxed{\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}}$.

các tham số (parameters)

Tìm $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ sao cho mô hình tuyến tính $f(x) = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \ldots + \theta_n f_n(x)$

$= \sum_{i=1}^{n} \theta_i f_i(x)$

*giải thích bộ dữ liệu D "tốt nhất". Cụ thể $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$

$$= \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (y^{(i)} - f(x^{(i)}))^2}_{SSE} \quad (*)$$

huấn luyện (training)

SSE → hàm lỗi.

Đặt $A = \begin{array}{c} \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} f_1(x^{(1)}) & f_2(x^{(1)}) & \dots & f_n(x^{(1)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x^{(m)}) & f_2(x^{(m)}) & \dots & f_n(x^{(m)}) \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{array} \end{array}}_{m\times n}$, $b = \underbrace{\begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix}}_{m\times 1}$

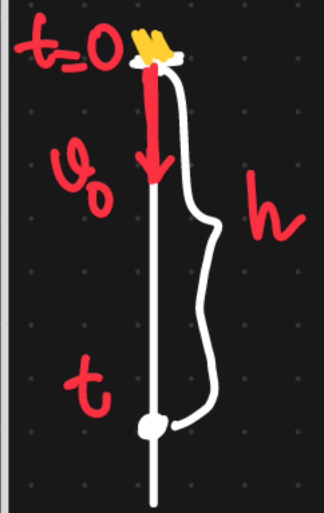
$\boxed{\text{bộ tham số tối ưu}}$

$$(*) \Leftrightarrow \hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|A\theta - b\|^2$$

- Ta đã biết lời giải: $A^TA\theta = A^Tb$

  nếu A^TA khả nghịch $\boxed{\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb.}$

Ví dụ:



$$h = v_0 t + g\frac{t^2}{2}.$$

Tìm v_0, g dựa vào bộ dữ liệu:

t(s)	0.1	0.2	0.3
h(m)	0.31	1.05	2.51

Giải: Đặt các tham số $\theta_1 = v_0$, $\theta_2 = g$

Có $h = v_0 t + g\frac{t^2}{2} = \theta_1 f_1(t) + \theta_2 f_2(t)$

Với $\begin{cases} f_1(t) = t \\ f_2(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

Đặt $A = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.005 \\ 0.2 & 0.020 \\ 0.3 & 0.045 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} \end{array}$, $b = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} 0.31 \\ 1.05 \\ 2.51 \end{bmatrix}$

- Bộ tham số tối ưu:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -0.19 \\ 56.74 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{array}$$

Vậy $\begin{cases} v_0 = -0.19\ (m/s) \\ g = 56.74\ (m/s^2) \end{cases}$

Khảo sát lò xo, muốn biết độ cứng k

Quy luật phụ thuộc m theo l được cho

$$m = a + \frac{l}{k}$$

Cho bảng số liệu:

m(g)	0	2	4	6
l (cm)	6.1	7.5	8.6	10.5

Đặt các tham số $\theta_1 = a$, $\theta_2 = \frac{1}{k}$

Có $m = a + \frac{l}{k} = \theta_1 . f_1(l) + \theta_2 f_2(l)$

với $\begin{cases} f_1(l) = 1 \\ f_2(l) = l \end{cases}$

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 6.1 \\ 1 & 7.5 \\ 1 & 8.6 \\ 1 & 10.5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -8.3 \\ 1.38 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -8.3 \\ \frac{1}{k} = 1.38 \end{cases}$$

$\rightarrow k = 0.7246$ (N/m)

XÍCH MARKOV
(Markov chain)

I) Nhắc lại xác suất rời rạc:

1) Cho biến ngẫu nhiên rời rạc (discrete random variable) X nhận giá trị trên tập hữu hạn $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ ($|S| = n$), vector

$$P_X = P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ với } p_i = \mathbb{P}_r(X = s_i)$$ được gọi là vector phân phối xs (distribution)

của X.

Ví dụ: gọi xúc sắc đồng chất, gọi X là mặt ra của xúc sắc thì X là bnn rời rạc nhận giá trị trong tập.

$S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ có phân phối

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ \vdots \\ 1/6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

$P_r(X = 1)$

Phân phối dạng này được gọi là phân phối đều.

Nhận xét:

1) $p_i \geq 0$
2) $\sum p_i = 1$

Ví dụ: Tung 1 đồng xu đồng chất 4 lần. Tìm phân phối của:

1) X là số lần được ngửa.
2) Y là số lần được ngửa liên tiếp dài nhất.

① gọi X là số lần mặt ngửa thì X là bnn rời rạc nhận giá trị ở tập.

$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$P = \mathbb{P}(X = x)$$
$$= \begin{cases} C_4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}, & x \in [0, 4] \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1/16 \\ \frac{4}{16} \\ 6/16 \\ 4/16 \\ 1/16 \end{bmatrix}$$

② Y là số lần liên tiếp ngửa dài nhất ?

$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P = 0 \Leftrightarrow Pr(Y=0) = \frac{1}{16}$

$P = 1 \Leftrightarrow Pr(Y=1) = 7/16$

$P = 2 \Leftrightarrow Pr(Y=2) = \frac{5}{16}$

$P = 3 \Leftrightarrow Pr(Y=3) = \frac{2}{16}$

$P = 4 \Leftrightarrow Pr(Y=4) = \frac{1}{16}$

$$P_Y = \begin{bmatrix} 1/16 \\ 7/16 \\ 5/16 \\ 2/16 \\ 1/16 \end{bmatrix}$$

2) Một số công thức xác suất:

⊙ $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$ đồng thời.

xác suất có đkiện

⊙ Công thức nhân: $Pr(A \cap B) = Pr(B)\, Pr(A|B)$.

⊙ Công thức toàn phần:

$$Pr(Y=y) = \sum_{x \in S_x} Pr(X=x)\, Pr(Y=y \mid X=x)$$

⊙ Công thức Bayes :

$$Pr(X=x \mid Y=y) = \frac{Pr(X=x)\, Pr(Y=y \mid X=x)}{Pr(Y=y)}$$

⊙ X, Y độc lập

$\Leftrightarrow Pr(X=x, Y=y) = Pr(X=x)\, Pr(Y=y) \quad \forall x \in S_x, y \in S_y$.

Ví dụ: Bốc liên tiếp k° hoàn lại mỗi lần 1 viên bi từ hộp gồm 2 bi đỏ và 3 bi đen

gọi X, Y lần lượt là màu của bi được bốc ở lần 1, 2.

(1) $Pr(Y = đỏ)$

(2) $Pr(X = đỏ \mid Y = đỏ)$ Đỏ: 1, đen: 0

(1) $Pr(Y=1) = \sum_{x \in \{0,1\}} P(X=x)\, P(Y=1 \mid X=x)$

$= P(X=0)\, P(Y=1 \mid X=0) + P(X=1)\, P(Y=1 \mid X=1)$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

2) $P(X=1 | Y=1)$

$$= \frac{P(X=1)\, P(Y=1|X=1)}{P(Y=1)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

II, Xích Markov:

1) Dãy bnn rời rạc $X_0, X_1, \ldots$ có chung tập giá trị.
$S=\{1,2,\ldots,K\}$ được gọi là xích Markov nếu:

$$P_r(X_{n+1}=i \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n=j)$$
$$= P_r(X_{n+1}=i \mid X_n=j) \quad \forall i,j,x_0,\ldots,x_{n-1} \in S$$
và $\forall n = 0,1,\ldots$ (*)

- S đgl k/gian trạng thái (state space)
- $X_n=j$ thì ta nói xích có trạng thái j tại t/điểm n.
- $P_r(X_{n+1}=i \mid X_n=j)$ đgl xác suất để xích chuyển từ trạng thái j sang trạng thái i sau 1 bước.
- (*) đgl Markov, ý là "tương lai k/o phụ ∈ quá khứ nếu biết hiện tại".

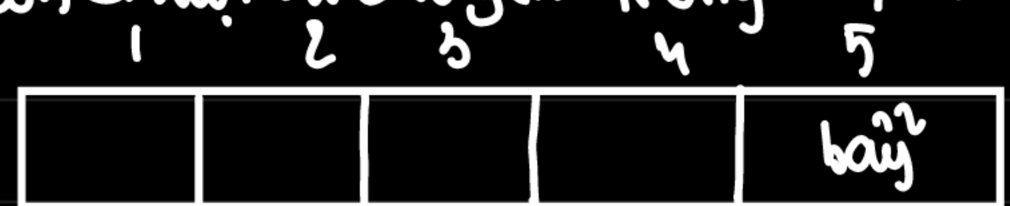
2) Cho xích Markov $X_0, X_1, \ldots$ có tập trạng thái $S=\{1,2,\ldots,K\}$
Đặt ma trận

$$P = (p_{ij})_{K\times K} \text{ với } p_{ij} = P_r(X_{n+1}=i \mid X_n=j).$$

P đgl ma trận chuyển trạng thái 1 bước của xích
(transition matrix)

3) Phân phối của X_n được kí hiệu là π_n.
π_n được gọi là phân phối của xích tại thời điểm n.
π_0 đgl phân phối đầu (initial distribution) của xích.

Ví dụ: có một con chuột di chuyển trong một căn nhà gồm 5 phòng



Ở phòng 5 có đặt bẫy. Giả sử sau mỗi ngày chuột chọn đại phòng kế bên để chuyển đến.

gọi X_n là vị trí chuột (phòng nào?) ở ngày thứ n. X_0 là vị trí chuột ngày đầu tiên

Ta có: $X_0, X_1, \ldots$ là xích Markov có tập trạng thái $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vì

$$P_r(X_{n+1} = j \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i)$$
$$= P_r(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Ma trận chuyển của xích $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nếu ban đầu con chuột được thả ở phòng 1 thì phân phối đầu (phân phối của X_0) là:

$$\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$$
#1 #2 #3 #4 #5

Nếu ban đầu con chuột để thả ngẫu nhiên vào 1 trong các phòng thì $\pi_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$
#1 #2 #3 #4 #5.

4) Mệnh đề: Cho $X_0, X_1, \ldots$ là xích Markov có ma trận chuyển P và phân phối đầu π_0.

① $P_r(X_{n+m} = i \mid X_n = j) = (P^m)_{ij}$

② $\pi_{n+m} = P^m \pi_n$

Đặc biệt: $\pi_m = P^m \pi_0$.

Ví dụ con chuột: nếu $\pi_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ thì $\pi_2 = P^2 \pi_0$ với

$$P^2 = PP = \begin{array}{c} \\ \#1 \\ \#2 \\ \#3 \\ \#4 \\ \#5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \#1 & \#2 & \#3 & \#4 & \#5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\pi_2 = P^2 \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{PAGE\_RANK}}$

↓

thuật toán tìm kiếm Google.

Cho xích Markov $X_0, X_1, \dots$ có ma trận chuyển

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 2 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 3 & 0.6 & 0.6 & 0.5 \end{array}$$

và phân phối đầu $\Pi_0 = (0.2, 0.3, 0.5)$ (trạng thái 1, 2, 3)

Tính

(a) $P_r(X_7 = 3 \mid X_6 = 2)$?

(b) $P_r(X_9 = 2 \mid X_1 = 2, X_5 = 1, X_6 = 3)$

(c) $P_r(X_0 = 3 \mid X_2 = 1)$

(d) $E(X_2)$.

(a) $P_r(X_7 = 3 \mid X_6 = 2) = ?$

$$P^2 = PP = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.18 & 0.18 \\ 0.27 & 0.28 & 0.27 \\ 0.54 & 0.54 & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^3 = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.18 & 0.18 \\ 0.27 & 0.28 & 0.27 \\ 0.54 & 0.54 & 0.55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.181 & 0.18 & 0.183 \\ 0.273 & 0.274 & 0.272 \\ 0.546 & 0.546 & 0.545 \end{bmatrix}$$

$P_r = (P)_{ij}$

$= (P)_{32}$

$= 0.6$

(b) $P_r(X_9 = 2 \mid X_1 = 2, X_5 = 1, X_6 = 3)$

$= P_r(X_9 = 2 \mid X_6 = 3)$

$= (P^3)_{23} \approx 0.272$

(c) $P_r(X_0 = 3 \mid X_2 = 1) = \dfrac{P(X_2 = 1 \mid X_0 = 3)\, P(X_0 = 3)}{P(X_2 = 1)}$

$= \dfrac{P^2_{13} \cdot P(X_0 = 3)}{P(X_2 = 1)} \approx \dfrac{0.18 \times 0.5}{0{,}182} = 0{,}4945$

(d) $\Pi_2 = P^2 \Pi_0 = P^2 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}182 \\ 0{,}273 \\ 0{,}545 \end{bmatrix}$

$E(X_2) = 0{,}182 + 0{,}273 \times 2 + 0{,}545 \times 3$

$= 2{,}363$

Có 2 hộp bi:

I	II
3 đỏ	3 đen

Mỗi lần bốc 1 viên của I → tráo 2 viên.
1 viên II

Tính xs sau 10 lần thì hộp I vẫn gồm 3 đỏ??

Gọi X_n là bnn thể hiện số bi đỏ của hộp 1 sau n lần.

$X_n \in \{\}$

X_0 là số bi đỏ của hộp I ban đầu

$X_0, X_1, \dots$ là xích Markov có tập trạng thái $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P_r(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ là xs để X_{n+1} có i bi đỏ biết X_n có j bi đỏ.

Ma trận chuyển của $P \in \mathbb{R}^4$.

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

XÍCH MARKOV

1) Cho xích Markov $X_0, X_1, \dots$ có tập trạng thái $S = \{1, 2, \dots\}$ và ma trận chuyển $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$.
Vector $\pi \in \mathbb{R}^k$ được gọi là phân phối giới hạn (limiting distribution) của xích nếu:

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} P_r(X_n = i \mid X_0 = j) \quad \forall i, j \in S$$

Phân phối giới hạn có thể k° có nhưng nếu có thì là duy nhất.

Mệnh đề: π là phân phối giới hạn của xích iff:

(1) $\pi_i = \lim_{n \to \infty} P_r(X_n = i)$ $\forall$ phân phối đầu.

(2) Với mọi phân phối đầu $\alpha \in \mathbb{R}^k$:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} P^n_\alpha$$

(3) $$\lim_{n \to \infty} P^n = \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \pi & \pi & \dots & \pi \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: π là phân phối giới hạn của xích có nghĩa là trong dài hạn, xác suất xích ở trạng thái i là π_i.

2, Cho xích Markov $X_0, X_1, \dots$ có ma trận chuyển P. Vector $\pi \in \mathbb{R}^k$ đgl phân phối dừng (stationary distribution) nếu

$$\pi = P\pi \Leftrightarrow (P - I)\pi = 0$$

(π là vector xác suất)

3) Nếu tồn tại n để P^n gồm toàn các số dương thì P hay xích đc gọi là chính quy (regular).

Mệnh đề: Nếu P chính quy thì phân phối giới hạn cũng là phân phối dừng duy nhất. Khi đó, ta tìm phân phối giới hạn bằng cách giải hệ PTTT có điều kiện:

$$\begin{cases} \pi = P\pi \\ \pi \text{ là vector xác suất} \end{cases}$$

Vd: con chuột $\boxed{\#1 \mid \#2 \mid \#3 \mid \#4}$

Mỗi lần di chuyển chuột ở lại hoặc chuyển sang phòng bên với xác suất như nhau.

Ma trận chuyển

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

. Ta có P^3 gồm toàn các số dương nên P là chính qui.

Đặt $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in \mathbb{R}^4$ là phân phối dừng.

thì $\begin{cases} P\pi = \pi \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \geq 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2/10 \\ \pi_2 = 3/10 \\ \pi_3 = 3/10 \\ \pi_4 = 2/10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

#1 #2 #3 #4

Cho $X_0, X_1, \ldots$ là xích Markov có ma trận chuyển.

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 \\ 0.5 & 0 & 1/3 \\ 0.5 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0,667 & 0 & 0,444 \\ 0,167 & 0.5 & 0,278 \\ 0,167 & 0.5 & 0,278 \end{pmatrix}$$

Và phân phối đầu $\alpha = (\equiv \pi_0)\ (0,5;\ 0,5)$. Tìm

a) $P_r(X_3 = 1 \mid X_0 = 2, X_1 = 3)$

b) $P_r(X_1 = 3, X_3 = 1)$

c) $P_r(X_0 = 2, X_1 = 3 \mid X_3 = 1)$

d) Phân phối giới hạn của xích.

a) $P_r(X_3 = 1 \mid X_1 = 3) = p^2_{13} = 0{,}444.$

b) $P_r(X_1 = 3, X_3 = 1)$

$= P_r(X_3 = 1)\, P_r(X_1 = 3 \mid X_3 = 1)$

$= P_r(X_3 = 1) \cdot \dfrac{P(X_3 = 1 \mid X_1 = 3) \cdot P(X_1 = 3)}{P_r(X_3 = 1)}$

$= P(X_3 = 1 \mid X_1 = 3)\, P(X_1 = 3)$

$= p^2_{13} \cdot P(X_1 = 3) = 0{,}444 \times 0{,}417,$

$= 0{,}185148$

$\pi_0 = \alpha = (0.5, 0, 0.5)$

$\pi_1 = P\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (0.5, 0, 0.5)$

$= \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0{,}417 \\ 0{,}417 \end{bmatrix} \Rightarrow P(X_1 = 3) = 0{,}417$

c) $P_r(X_0 = 2, X_1 = 3 \mid X_3 = 1).$

$= \dfrac{P_r(X_3 = 1 \mid X_0 = 2, X_1 = 3) \cdot P(X_0 = 2, X_1 = 3)}{P(X_3 = 1)}$

$= \dfrac{P_r(X_3 = 1 \mid X_1 = 3) \cdot P(X_0 = 2) \cdot P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)}{P(X_3 = 1)}$

$= \dfrac{p^2_{13} \cdot 0 \cdot p_{32}}{P(X_3 = 1)} = 0$

d) Vì P^3 gồm toàn các giá trị dương của P chính quy. Ta có:

$$\begin{cases} \pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$\rightarrow \pi = \left(\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

Ví dụ: Tung xúc sắc đồng chất nhiều lần. Tính xác suất mặt ra lớn nhất sau 10 lần tung là mặt 4.

Gọi X_n là bnn thể hiện cho mặt xúc xắc lớn nhất sau lần tung n nhỏ hơn 4, bằng 4 hoặc lớn hơn 4.

$$X_n = \{-1, 0, 1\}.$$

Ta có: $\pi_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]^T$

Ma trận chuyển:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

Xác suất để mặt xúc sắc lớn nhất <4, $=4$, >4, sau 10 lần tung:

$$\pi_{10} = P^9 \pi_1 = \begin{bmatrix} 9,7.10^{-4} \\ 0,0163 \\ 0,9826 \end{bmatrix}$$

Vậy xs để mặt xs lớn nhất là 4 sau 10 lần tung là: 0,0163.

Ví dụ: Tung đồng xu đồng chất nhiều lần. Tính xác suất chiều dài chuỗi ngửa dài nhất k0 quá 3 sau 10 lần tung.

$< 3 \quad = 3 \quad > 3$

Gọi X_n là bnn thể hiện cho chuỗi ngửa dài nhất $< 3, = 3, > 3$ sau 10 lần tung.

$S = \{<3, =3, >3\}$ $\qquad \pi_1 = [$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \end{array}$$

Vd1:

Gọi X_n là mặt ra lớn nhất sau lần tung n.

$X_0, X_1, \dots$ xích Markov với tập trạng thái:

$$S = \{\#, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ \# \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \# & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 5/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\pi_0 = (\underset{\#}{1}, \underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \underset{3}{0}, \underset{4}{0}, \underset{5}{0}, \underset{6}{0})$$

$$\left[(P^{10}) \pi_0 \right]_4$$

Thi cuối kỳ (bắt buộc ký tên)

Tg 90', KHÔNG DÙNG TÀI LIỆU

1) Lồi / lõm và cực trị
2) Least squares và data fitting
3) Xích Markov.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 2 – Năm học 2021-2022

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng KT-ĐBCL ghi)
CK2122-2
MTH00051

Tên học phần:	Toán ứng dụng và thống kê	Mã HP:	MTH00051
Thời gian làm bài:	90phút	Ngày thi:	28/06/2022

Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: Nguyễn Thanh Tấn **MSSV:** 20120369 **STT:** 17

Câu 1 (2.5 *điểm*). Cho hàm số 3 biến được xác định bởi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 5$$

a) Xét tính lồi/lõm của f.

b) Xác định các điểm cực tiểu/cực đại toàn cục và giá trị nhỏ nhất/lớn nhất tương ứng của f (nếu có).

Câu 2 (2.5 *điểm*). Khảo sát 2 đại lượng x, y. Cho bảng dữ liệu như sau:

x	-1	2	4	5
y	3	4	7	9

Với mỗi mô hình được cho sau, dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất (least squares) xác định các tham số θ_1, θ_2 của mô hình, tính chuẩn vector phần dư (residual) và dự đoán giá trị của y tại $x_0 = 12$.

a) Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

b) Mô hình $y = \exp\left[\theta_1 x + \ln(\theta_2) x^2\right]$

Câu 3 (2.5 *điểm*).

Cho *xích Markov* (Markov chain) $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ 3 trạng thái $S = \{1, 2, 3\}$ với *ma trận chuyển* (transition matrix)

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Giả sử phân phối đầu là $\pi_0 = (0,5; 0,5; 0)$.

a) Tính $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 3)$.

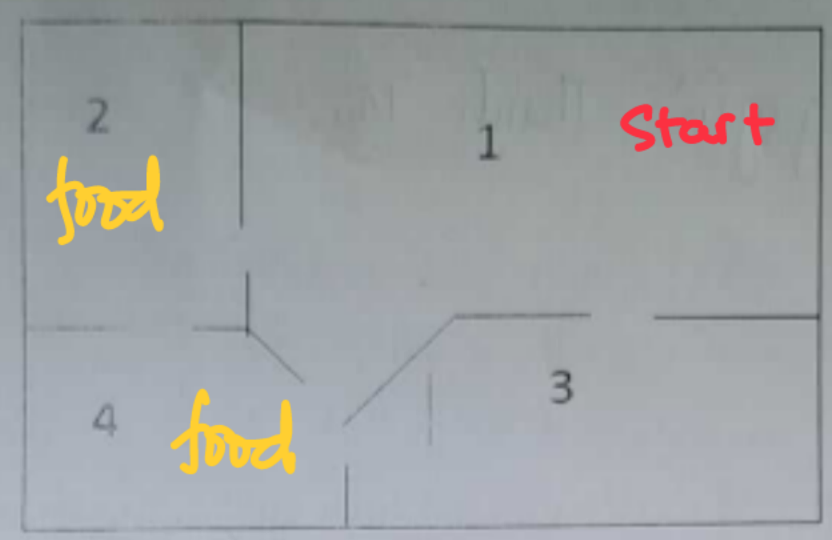
b) Tính $P(X_2 = 1, X_4 = 2 \mid X_1 = 2, X_0 = 1)$.

c) Tính $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$.

d) Tính $P(X_3 + X_5 \geq X_1)$.

Câu (2.5 *điểm*).

Giả sử một con chuột chạy trong một mê cung có bốn phòng như trong hình sau và nó sẽ di chuyển sang các phòng khác mỗi ngày một cách ngẫu nhiên với xác suất bằng nhau.



Biết ban đầu chuột ở phòng 1.

a) Tìm xác suất chuột ở phòng 3 sau đúng 3 ngày ?

b) Nếu ngày thứ 3 thức ăn được đặt vào phòng 2 và phòng 4, tính xác suất chuột tìm được thức ăn.

c) Xác suất sau rất nhiều ngày chuột ở mỗi phòng là bao nhiêu?

gọi X_n là vị trí chuột (phòng) sau n ngày.

X_0 là vị trí chuột ban đầu.

Ta có: $X_0, X_1, \dots$ là xích Markov với tập trạng thái $S = \{1,2,3,4\}$.

$\Pi_0 = (1,0,0,0)$

Ma trận chuyển P tương ứng tập $S = \{1,2,3,4\}$.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow P^3 = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{7}{27} \\ 7/27 & 1/9 & 1/9 & 7/27 \\ 7/27 & 1/9 & 1/9 & 7/27 \\ 7/27 & 7/18 & 7/18 & 2/9 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Tìm xác suất chuột ở phòng 3 sau đúng 3 ngày?

$$P(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) = P^3_{31} = 7/27.$$

$$\Pi_3 = P^3 \Pi_0 = \begin{bmatrix} 2/9 \\ 7/27 \\ 7/27 \\ 7/27 \end{bmatrix}$$

b) Nếu ngày 3 thức ăn để đặt vào phòng 2 và 4, tính xs chuột tìm được thức ăn?

$$P(X_3 = 2 \mid X_0 = 1) + P(X_3 = 4 \mid X_0 = 1)$$

$$= P^3_{21} + P^3_{41} = \frac{7}{27} + \frac{7}{27} = \frac{14}{27}.$$

(c) XS sau rất nhiều ngày chuột ở mỗi phòng là ?

Ta có: P^2 gồm toàn số dương nên P là chính quy.

Gọi $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \in \mathbb{R}^4$ là phân phối dừng.

$$\Rightarrow \begin{cases} P\pi = \pi \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \geq 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_4 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_4. \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0,3 \\ \pi_2 = 0,2 \\ \pi_3 = 0,2 \\ \pi_4 = 0,3 \end{cases}$$

Vậy sau rất nhiều ngày, XS chuột ở mỗi phòng là:

- Phòng 1: 0,3
- Phòng 2: 0,2
- Phòng 3: 0,2
- Phòng 4: 0,3

Câu 1 (2.5 *điểm*). Cho hàm số 3 biến được xác định bởi

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 5$$

a) Xét tính lồi/lõm của f.

b) Xác định các điểm cực tiểu/cực đại toàn cục và giá trị nhỏ nhất/lớn nhất tương ứng của f (nếu có).

Câu 1:

a) xét tính lồi/lõm của f?

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 5$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_2 - 2x_1 - 2x_3 + 1 \\ 8x_3 - 2x_2 + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} = A.$$

Giải phương trình đặc trưng, ta có: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{dòng } 1}{\Leftrightarrow} (6-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)\left[(8-\lambda)(2-\lambda) - 4\right] + 2.\left[(-2)(8-\lambda)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)\left[16 - 10\lambda + \lambda^2 - 4\right] - 4(8-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 12) - 32 + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{6\lambda^2} - \cancel{60\lambda} + \cancel{72} \cancel{-\lambda^3} + \cancel{10\lambda^2} \cancel{-12\lambda} - \cancel{32} + \cancel{4\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 68\lambda + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= 0{,}697 > 0 \\ \lambda_2 &= 8{,}754 > 0 \\ \lambda_3 &= 6{,}548 > 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow A > 0 \Rightarrow f \text{ lồi ngặt.}$$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 - 2x_3 + 1 = 0 \\ 8x_3 - 2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4/5 \\ x_2 = -19/10 \\ x_3 = -3/5. \end{cases}$$

Vậy điểm cực tiểu toàn cục là $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{19}{10}, -\frac{3}{5}\right)$

Với giá trị nhỏ nhất tương ứng là $f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{19}{10}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{67}{20}$

~~Câu~~ 2 (2.5 *điểm*). Khảo sát 2 đại lượng x, y. Cho bảng dữ liệu như sau:

x	-1	2	4	5
y	3	4	7	9

Với mỗi mô hình được cho sau, dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất (least squares) xác định các tham số θ_1, θ_2 của mô hình, tính chuẩn vector phần dư (residual) và dự đoán giá trị của y tại $x_0 = 12$.

vecto norm

a) Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

b) Mô hình $y = \exp\left[\theta_1 x + \ln(\theta_2) x^2\right]$

a) $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

Đặt $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x \end{cases} \Rightarrow A = \begin{array}{c|cc} & & \\ (1) & 1 & -1 \\ (2) & 1 & 2 \\ (3) & 1 & 4 \\ (4) & 1 & 5 \\ \hline & f_1(x) & f_2(x) \end{array}$; $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = y$

$\Rightarrow y = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$

Bộ tham số tối ưu: $\boxed{\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb}$

$\Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 46 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 23/42 & -5/42 \\ -5/42 & 1/21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0,3095 \\ 0,9761 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \approx 3,3095 \\ \theta_2 \approx 0,9761 \end{cases}$

$\rightarrow y \approx 3,3095 + 0,9761x \Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} 2,3334 \\ 5,2617 \\ 7,2139 \\ 8,19 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Bộ lỗi $= \|y^* - y\| = \begin{bmatrix} 0,6666 \\ 1,2617 \\ 0,2139 \\ 0,81 \end{bmatrix}$

Dự đoán giá trị y_0 tại $x_0 = 12 \Rightarrow y_0 \approx 15,0227$

Vector phần dư (residual):

$\Rightarrow \|r\| = 1,6547$

b) $y = e^{\theta_1 x + \ln(\theta_2) x^2}$

$\Leftrightarrow \theta_1 x + \ln(\theta_2) x^2 = \ln(y)$

$\Leftrightarrow f(y) = \underbrace{\theta_1}_{\theta_1'} f_1(x) + \underbrace{\ln(\theta_2)}_{\theta_2'} f_2(x)$

Đặt $\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = x^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} \theta_1' = \theta_1 \\ \theta_2' = \ln(\theta_2) \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} f_1(x) & f_2(x) \end{array} \end{array} ; \quad b = \begin{bmatrix} \ln(3) \\ \ln(4) \\ \ln(7) \\ \ln(9) \end{bmatrix}$$

Bộ tham số tối ưu: $\hat{\theta}' = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 0,0648 \\ 0,0891 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0,0648 \\ \ln(\theta_2) = 0,0891 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0,0648 \\ \theta_2 = 1,0932 \end{cases}$

$\Rightarrow y \approx e^{0,0648x + 0,0891x^2}$

$\Rightarrow$ Giá trị dự đoán y_0 tại $x_0 = 12$: $y_0 \approx 812604,6623$

Cách 1: Tính trực tiếp.

Vectơ phần dư: $y^* = \begin{bmatrix} 1,0246 \\ 1,6258 \\ 5,3914 \\ 12,8263 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \|r\| = \|y^* - y\| = 5,1737$

$\left(r \approx \begin{bmatrix} 1,9754 \\ 2,3742 \\ 1,6086 \\ 3,8263 \end{bmatrix} \right)$

Cách 2:

$y^* \approx A\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0,0243 \\ 0,486 \\ 1,6848 \\ 2,5515 \end{bmatrix} \Rightarrow r = y^* - y = \begin{bmatrix} 1,0743 \\ 0,9 \\ 0,2611 \\ -0,3543 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} \ln(3) \\ \ln(4) \\ \ln(4) \\ \ln(9) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \|r\| = 1,46895$.

Cho ~~xích Markov~~ (Markov chain) $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ 3 trạng thái S = {1, 2, 3} với *ma trận chuyển* (transition matrix)

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$P^7 = \begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 0.495 & 0.495 & 0.495 \\ (2) & 0.274 & 0.274 & 0.274 \\ (3) & 0.232 & 0.232 & 0.232 \end{array}$$

Giả sử phân phối đầu là $\pi_0 = (0,5; 0,5; 0)$.

~~a)~~ Tính $P(X_4 = 2 | X_1 = 3)$.

~~b)~~ Tính $P(X_2 = 1, X_4 = 2 | X_1 = 2, X_0 = 1)$.

~~c)~~ Tính $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$.

~~d)~~ Tính $P(X_3 + X_5 \geq X_1)$.

$$\Rightarrow P^2 = \begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 0.52 & 0.47 & 0.47 \\ (2) & 0.26 & 0.31 & 0.26 \\ (3) & 0.22 & 0.22 & 0.27 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ (2) & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ (3) & 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{array}$$

$\pi_0 = (0.5; 0.5; 0) \Rightarrow \pi_2 = P^2 \pi_0 = \begin{bmatrix} 0.495 \\ 0.285 \\ 0.22 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^3 = \begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 0.5 & 0.485 & 0.495 \\ (2) & 0.27 & 0.275 & 0.28 \\ (3) & 0.23 & 0.24 & 0.225 \end{array}$$

a) $P(X_4 = 2 | X_1 = 3) = (P^3)_{23} = 0.28$

(b) $P(X_2 = 1, X_4 = 2 | X_1 = 2; X_0 = 1) = \dfrac{P(X_2 = 1, X_4 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$

$$= \frac{P(X_4 = 2 | X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)\, P(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$$

$$= \frac{P(X_4 = 2 | X_2 = 1)\, P(X_2 = 1 | X_0 = 1, X_1 = 2) P(X_0 = 1, X_1 = 2)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$$

$$= P^2_{21} \times P_{12} = 0,26 \times 0,3$$
$$= 0,078$$

$\pi_1 = P\pi_0$

$$= \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

(c) $P(X_1=2, X_2=1, X_3=3)$

$= P(X_3=3 \mid X_1=2, X_2=1)\, P(X_1=2, X_2=1)$

$= P(X_3=3 \mid X_2=1)\, P(X_2=1 \mid X_1=2)\, P(X_1=2)$

$= P_{31} \times P_{12} \times 0{,}25 = 0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}015.$ ✓

(d) $P(X_3+X_5 \geq X_1) = 1 - P(X_3+X_5 < X_1)$

Nếu $X_1 = 1 \Rightarrow X_3 + X_5 < 1 \Rightarrow \begin{cases} X_3 = \varnothing \\ X_5 = \varnothing \end{cases} \Rightarrow P(X_3+X_5 < X_1) = 0$

Nếu $X_1 = 2 \Rightarrow X_3 + X_5 < 2 \Rightarrow \underbrace{X_3 + X_5 = 1}_{\text{vô lý vì } X_3, X_5 \in \{1,2,3\}} < 2 \Rightarrow P(X_3+X_5<X_1) = 0$

Nếu $X_1 = 3 \Rightarrow X_3 + X_5 < 3 \Rightarrow \begin{cases} X_3 = 1 \\ X_5 = 1 \end{cases}$

$P(X_3 = 1, X_5 = 1, X_1 = 3)$

$= P(X_5=1 \mid X_3=1, X_1=3)\, P(X_3=1, X_1=3)$

$= P(X_5=1 \mid X_3=1)\, P(X_3=1 \mid X_1=3)\, P(X_1=3)$

$= P^2_{11} . P^2_{13} \times 0{,}3$

$= 0{,}52 \times 0{,}47 \times 0{,}3 = 0{,}07332$ ✓

$\Rightarrow P(X_3+X_5 \geq X_1) = 0{,}92668$

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
Học kỳ 2 – Năm học 2023-2024

Tên học phần: Toán ứng dụng và thống kê — Mã HP: MTH00051

Thời gian làm bài: 90 phút — Ngày thi: 08/07/2024

Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: .... **MSSV:** .... **STT:** .....

Câu 1 (3 *điểm*). Cho hàm số $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+2x_1+3x_2+x_3+5$ xác định trên $\mathbb{R}^3$.

a) Kiểm tra tính lồi/lõm của hàm f.

b) Xác định các điểm cực tiểu (cực đại) toàn cục và giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) tương ứng của f.

Câu 2 (3 *điểm*). Người ta thực hiện nghiên cứu mối quan hệ giữa nguy cơ tai nạn trong lúc lái xe và sử dụng bia rượu. Dữ liệu gồm nồng độ cồn trong máu (BAC) của một người với nguy cơ gặp tai nạn. Ví dụ, ở bảng dữ liệu sau, một người có BAC là 0,09 có khả năng gây tai nạn cao gấp 3,54 lần so với một người không uống bia rượu.

BAC	0,07	0,09	0,15	0,19
Nguy cơ gặp tai nạn	2,09	3,54	22,1	65,32

Dựa vào bảng dữ liệu trên, bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Gọi x là nồng độ cồn trong máu, y là nguy cơ gây tai nạn của một người, hãy xây dựng các mô hình ước lượng nguy cơ gây tai nạn như sau:

– Mô hình thứ nhất: $y=ax+b$.

– Mô hình thứ hai: $y=a.b^x$.

b) Trong hai mô hình ở câu a), mô hình nào tốt hơn? Giải thích.

c) Cảnh sát giao thông kiểm tra nồng độ cồn trong máu của một người, đo được nồng độ là 0,22. Sử dụng mô hình thứ hai, hãy cho biết nguy cơ gây tai nạn giao thông của người đó cao gấp mấy lần người không uống bia rượu.

Câu 3 (3 *điểm*). Cho xích Markov $X_n, n=0,1,2,...$ với không gian trạng thái $E=\{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển:

$$P=\begin{bmatrix}0,40 & 0,50 & 0,10\\ 0,05 & 0,70 & 0,25\\ 0,05 & 0,50 & 0,45\end{bmatrix}$$

Biết phân phối ban đầu là: $p_0=P(X_0=0)=0,3;\ p_1=P(X_0=1)=0,4;\ p_2=P(X_0=2)=0,3$.

a) Tính $P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0)$.

b) Tính $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$.

c) Tìm phân phối dừng của của xích Markov đã cho.

Câu 4 (3 *điểm*). Một tài xế taxi cung cấp dịch vụ ở hai khu vực A và B của thành phố. Khách lên xe ở khu vực A sẽ chọn điểm đến ở khu vực A với xác suất 0,6 hoặc ở khu vực B với xác suất 0,4. Khách lên xe ở khu vực B sẽ chọn điểm đến ở khu vực A với xác suất 0,3 hoặc ở khu vực B với xác suất 0,7. Lợi nhuận kỳ vọng của người lái xe cho một chuyến đi hoàn toàn ở khu A là 6; đối với chuyến đi hoàn toàn ở khu B là 8, và đối với một chuyến đi bao gồm cả hai khu vực là 12. Tìm lợi nhuận trung bình trên mỗi chuyến đi của người lái xe taxi.

Câu 1 (3 *điểm*). Cho hàm số $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+2x_1+3x_2+x_3+5$ xác định trên $\mathbb{R}^3$.

a) Kiểm tra tính lồi/lõm của hàm f

b) Xác định các điểm cực tiểu (cực đại) toàn cục và giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) tương ứng của f.

Câu 1:

a) Ktra tính lồi / lõm của hàm f.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5.$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3 \\ -2x_2 + 2x_3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

giải ptrình đặc trưng, ta có: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dòng 1

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda) - 4\right] + 2\left[(-2)(2-\lambda)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4) - 4(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 4) - 8 + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{6\lambda^2} - 36\lambda + \cancel{24} - \lambda^3 + \cancel{6\lambda^2} - \cancel{4\lambda} - \cancel{8} + \cancel{4\lambda} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 - 2\sqrt{3} > 0 \\ \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{3} > 0 \\ \lambda_3 = 4 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow A > 0 \Rightarrow f \text{ lồi ngặt.}$$

$\Rightarrow$ f đạt giá trị nhỏ nhất tại $\nabla f(x_1,x_2,x_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3}{2} \\ x_2 = -7/2 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

$f(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}; -4) = -\frac{15}{4}$

Vậy điểm cực tiểu toàn cục $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -4)$ và giá trị nhỏ nhất tương ứng của f là $(-\frac{15}{4})$

Câu 2 (3 *điểm*). Người ta thực hiện nghiên cứu mối quan hệ giữa nguy cơ tai nạn trong lúc lái xe và sử dụng bia rượu. Dữ liệu gồm nồng độ cồn trong máu (BAC) của một người với nguy cơ gặp tai nạn. Ví dụ, ở bảng dữ liệu sau, một người có BAC là 0,09 có khả năng gây tai nạn cao gấp 3,54 lần so với một người không uống bia rượu.

BAC	0,07	0,09	0,15	0,19
Nguy cơ gặp tai nạn	2,09	3,54	22,1	65,32

Dựa vào bảng dữ liệu trên, bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Gọi x là nồng độ cồn trong máu, y là nguy cơ gây tai nạn của một người, hãy xây dựng các mô hình ước lượng nguy cơ gây tai nạn như sau:

- Mô hình thứ nhất: $y = ax + b$.
- Mô hình thứ hai: $y = ab^x$.

b) Trong hai mô hình ở câu a), mô hình nào tốt hơn? Giải thích.

$x_0 = 0,22$

c) Cảnh sát giao thông kiểm tra nồng độ cồn trong máu của một người, do được nồng độ là 0,22. Sử dụng mô hình thứ hai, hãy cho biết nguy cơ gây tai nạn giao thông của người đó cao gấp mấy lần người không uống bia rượu.

Câu 2:

a) Ta có: $\begin{cases} x \text{ (BAC) là nồng độ cồn trong máu.} \\ y \text{ là nguy cơ gây tai nạn của 1 ng.} \end{cases}$

- Mô hình 1: $y = ax + b$.

Đặt các tham số $\theta_1 = a$, $\theta_2 = b$

$\Rightarrow y = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ với $\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c c} & \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ & \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0,07 & 1 \\ 0,09 & 1 \\ 0,15 & 1 \\ 0,19 & 1 \end{bmatrix} \\ f_1(x) \quad f_2(x) \end{array} ; \quad b = \begin{bmatrix} 2,09 \\ 3,54 \\ 22,1 \\ 65,32 \end{bmatrix}$$

Ta có: Bộ trọng số tối ưu theo phương pháp least square:

$$A^TA\hat{\theta} = A^Tb.$$

Ta cần chứng minh: A^TA khả nghịch.

$B = A^TA = \begin{bmatrix} 0,0716 & 0,5 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix}$, do B là ma trận vuông và $\det(B) = 0,0716 \times 4 - 0,5^2 = 0,0364$

$\Rightarrow B$ khả nghịch $\Rightarrow \hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 501,038 \\ -39,367 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 501,038 \\ b = -39,367 \end{cases}$

$\Rightarrow y \approx y^* = 501,038x - 39,367.$

Bộ tham số tối ưu:

• <u>Mô hình thứ 2</u>: $y = ab^x$

$\Leftrightarrow \log_2 y = \log_2(ab^x)$

$\Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 a + \log_2 b^x$

$\Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 a + x\log_2 b$. $\Rightarrow y = 2^{\log_2 a + x\log_2 b}$

$\Rightarrow y \approx y^* = 2^{-1,8912 + 41,8948x}$

Đặt $\begin{cases} \theta_1 = \log_2 a \\ \theta_2 = \log_2 b \\ f(y) = \log_2 y \end{cases} \Rightarrow f(y) = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ với $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0,07 \\ 1 & 0,09 \\ 1 & 0,15 \\ 1 & 0,19 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} f_1(x) & f_2(x) \end{array} \end{array}, \quad b = \begin{bmatrix} \log_2 2,09 \\ \log_2 3,54 \\ \log_2 22,1 \\ \log_2 65,32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0635 \\ 1,8237 \\ 4,4659 \\ 6,0295 \end{bmatrix}$$

$A^TA\hat{\theta} = A^Tb$ (1)

$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0,5 \\ 0,5 & 0,0716 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^TA) = 0,0364 \neq 0$

$\Rightarrow A^TA$ khả nghịch,

$(1) \Rightarrow \hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} -1,8912 \\ 41,8948 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \log_2 a = -1,8912 \\ \theta_2 = \log_2 b = 41,8948 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0,2696 \\ b = 4,0888 \times 10^{12} \end{cases}$

$\Rightarrow y \approx y^* = 0,2696 \times (4,0888 \times 10^{12})^x$.

b) $f(\hat{\theta}) = \|A\hat{\theta} - b\|^2$

<u>Mô hình 1</u> $y \approx y^* = 501,038x - 39,367$

$\Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} -4,2943 \\ 5,7264 \\ 35,7887 \\ 55,8302 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 2,09 \\ 3,54 \\ 22,1 \\ 65,32 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow y^* - y = \begin{bmatrix} -6,3843 \\ 2,1864 \\ 13,6887 \\ -9,4898 \end{bmatrix} \Rightarrow f_1(\hat{\theta}) = \|y^* - y\|^2$

$= 322,9764$ (*)

Mô hình 2: $y \approx y^* = 2^{-1,8912 + 41,8948x}$

$$\Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} 2,0583 \\ 3,679 \\ 21,0102 \\ 67,1266 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0,07 \\ 0,09 \\ 0,15 \\ 0,19 \end{bmatrix} \Rightarrow y^* - y = \begin{bmatrix} 1,9883 \\ 3,589 \\ 20,8602 \\ 66,9366 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f_2(\vec{\theta}) = 4932,4906 \quad (**)$

(*), (**) $\Rightarrow$ Vì độ lỗi của mô hình 1 bé hơn độ lỗi của mô hình 2

$\Rightarrow$ Mô hình 1 tốt hơn.

c) Dùng mô hình thứ 2, $x_0 = 0,22$

$\rightarrow y_0 \approx 160,4139$

Vậy nguy cơ gây tai nạn giao thông của ng đó cao 160,4139 lần ng k^0 uống bia rượu.

Câu 3 (3 *điểm*). Cho xích Markov $X_n, n=0,1,2,...$ với không gian trạng thái $E=\{0,1,2\}$ và ma trận xác suất chuyển:

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,40 & 0,50 & 0,10 \\ 0,05 & 0,70 & 0,25 \\ 0,05 & 0,50 & 0,45 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Pi_0 = (0,3 ; 0,4 ; 0,3).$

Biết phân phối ban đầu là: $p_0 = P(X_0=0)=0,3$; $p_1 = P(X_0=1)=0,4$; $p_2 = P(X_0=2)=0,3$.

a) Tính $P(X_3=1 \mid X_1=0)$.

b) Tính $P(X_0=0, X_1=1, X_2=2)$.

c) Tìm phân phối dừng của của xích Markov đã cho.

(a) $P(X_3=1 \mid X_1=0) = P^2_{10} = 0,0675$

$$P^2=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,19 & 0,6 & 0,21 \\ 0,0675 & 0,64 & 0,2925 \\ 0,0675 & 0,6 & 0,3325 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) $P(X_0=0, X_1=1, X_2=2) = P(X_2=2 \mid X_0=0, X_1=1)\, P(X_0=0, X_1=1)$

$= P(X_2=2 \mid X_1=1)\, P(X_1=1 \mid X_0=0)\, P(X_0=0)$

$= P_{21}\, P_{10}\, P_0 = 0,5 \times 0,05 \times 0,3$

$= 7,5 \times 10^{-3}$

c) Gọi $\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2) \in \mathbb{R}^3$ là phân phối dừng. Ta có: P gồm toàn bộ số dương $\Rightarrow$ P là ma trận chính quy.

$$\Rightarrow \begin{cases} P\Pi = \Pi \\ \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2 \geq 0 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,4\Pi_0 + 0,5\Pi_1 + 0,1\Pi_2 = \Pi_0 \\ 0,05\Pi_0 + 0,7\Pi_1 + 0,25\Pi_2 = \Pi_1 \\ 0,05\Pi_0 + 0,5\Pi_1 + 0,45\Pi_2 = \Pi_2 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \\ \Pi_0, \Pi_1, \Pi_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi_0 = \frac{1}{3} \geq 0 \\ \Pi_1 = \frac{1}{3} \geq 0 \\ \Pi_2 = \frac{1}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ là fân fối dừng.

Câu 4 (3 *điểm*). Một tài xế taxi cung cấp dịch vụ ở hai khu vực A và B của thành phố. Khách lên xe ở khu vực A sẽ chọn điểm đến ở khu vực A với xác suất 0,6 hoặc ở khu vực B với xác suất 0,4. Khách lên xe ở khu vực B sẽ chọn điểm đến ở khu vực A với xác suất 0,3 hoặc ở khu vực B với xác suất 0,7. Lợi nhuận kỳ vọng của người lái xe cho một chuyến đi hoàn toàn ở khu A là 6; đối với chuyến đi hoàn toàn ở khu B là 8, và đối với một chuyến đi bao gồm cả hai khu vực là 12. Tìm lợi nhuận trung bình trên mỗi chuyến đi của người lái xe taxi.

$$P = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & 0,6 & 0,3 \\ B & 0,4 & 0,7 \end{array} \qquad \begin{cases} S_A = \{AA, AB\} \\ S_B = \{BB, BA\} \\ x \in (S_A \cup S_B) \end{cases}$$

gọi $f(x)$ là hàm biểu thị lợi nhuận cho chuyến xe x

$$\Rightarrow \begin{cases} f(AA) = 6 \\ f(BB) = 8 \\ f(AB) = f(BA) = 12 \end{cases}$$

P gồm toàn số dương nên P chính quy.

$\Rightarrow$ P có pp giới hạn cũng là pp dừng duy nhất.

Đặt $\pi = (\pi_A, \pi_B)$ là pp dừng.

$$\Rightarrow \begin{cases} P\pi = \pi \\ \pi_A, \pi_B \geq 0 \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,6\pi_A + 0,3\pi_B = \pi_A \\ 0,4\pi_A + 0,7\pi_B = \pi_B \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_A = 3/7 \\ \pi_B = 4/7 \end{cases}$$

Lợi nhuận kỳ vọng trung bình khi:

- đi ở A: $E(X_A) = \sum_{x \in S_A} f(x) P(X_A = x)$

$$= 6 \times 0.6 + 12 \times 0,4 = 8.4$$

- đi ở B: $E(X_B) = \sum_{x \in S_B} f(x) P(X_B = x) = 8 \times 0,7 + 12 \times 0,3 = 9,2$

Lợi nhuận tb: $E(x) = \frac{3}{7} E(X_A) + \frac{4}{7}(E(X_B)) \approx 8,857$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN

Học kỳ 2 – Năm học 2022-2023

MÃ LƯU TRỮ (do phòng KT-ĐBCL ghi) CK2223-2 MTH00051

Tên học phần: **Toán ứng dụng và thống kê** **Mã HP:** MTH00051

Thời gian làm bài: **90phút** Ngày thi: 20/6/2023

Ghi chú: *Sinh viên [☐ được phép / ☒ không được phép] sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: .... **MSSV**: .... **STT**: .....

Câu 1 (2.5 *điểm*). Cho hàm số 3 biến được xác định bởi

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - z^2 - xy + xz - yz + 2x + 3y + 2z$$

a) Xét tính lồi/lõm của f.

b) Xác định các điểm cực tiểu(cực đại) toàn cục và giá trị nhỏ nhất(lớn nhất) tương ứng của f.

Câu 2 (3.0 *điểm*). Khảo sát 2 đại lượng x, y. Cho bảng dữ liệu như sau:

x	2	3	5	6
y	0	-10	-48	-76

Với mỗi mô hình được cho sau, dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất (least squares) xác định các tham số $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ của mô hình, tính chuẩn vector phần dư (residual) và dự đoán giá trị của y tại $x_0 = 10$.

a) Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

b) Mô hình $y = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3$.

Câu 3 (3.5 *điểm*).

Cho *xích Markov* (Markov chain) $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ 3 trạng thái S = {1, 2, 3} với *ma trận chuyển* (transition matrix)

$$P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Giả sử phân phối đầu là $\pi_0 = (0.3, 0.25, 0.45)$.

a) Tính $P(X_4 = 2 | X_1 = 3)$,

b) Tính $P(X_2 = 1, X_4 = 2 | X_1 = 2, X_0 = 1)$,

c) Tính $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$,

d) Tìm phân phối dừng của xích.

Họ tên người ra đề/MSCB: .... Chữ ký: ....

Họ tên người duyệt đề: .... Chữ ký: ....

Câu 4 (1.0 *điểm*).

Nam có 4 cái dù, một số ở nhà, một số ở văn phòng. Nam di chuyển giữa nhà - văn phòng và chỉ mang dù đi nếu trời mưa. Thời tiết tại khu vực Nam sống được dự báo xác suất mưa là 0.6. Nếu trời không mưa, Nam để dù lại (ở nhà hoặc văn phòng). Có thể xảy ra trường hợp tất cả các dù đều ở một nơi, trong khi Nam ở nơi khác, khi ấy nếu bắt đầu mưa và Nam phải di chuyển, Nam sẽ bị ướt. Tìm xác suất Nam bị ướt.

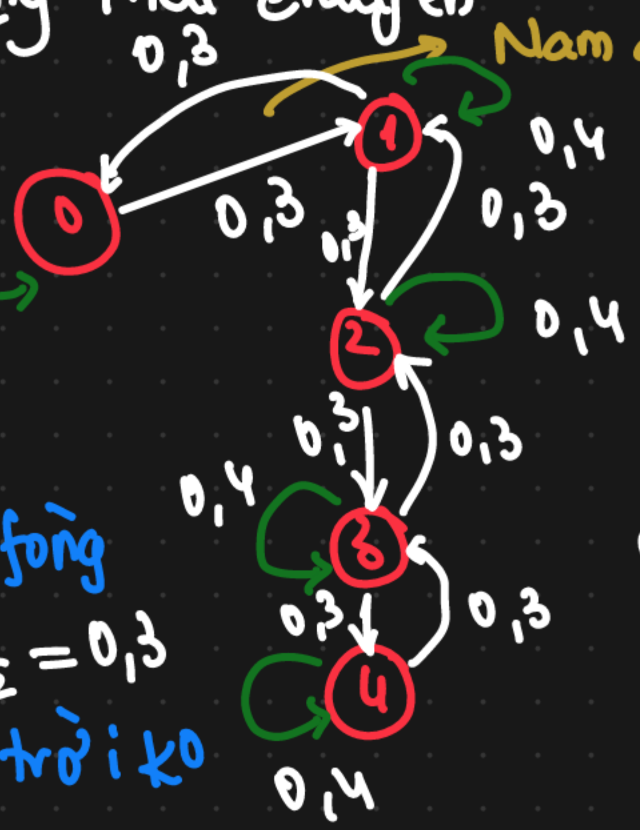
Gọi X_n là số cây dù của Nam ở văn phòng sau n lần di chuyển.

Xác suất Nam ở nhà = XS Nam ở văn phòng = $1/2$. XS trời mưa = 0,6 → XS trời k⁰ mưa = 0,4.

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ là xích Markov với tập trạng thái $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

với trạng thái 0: 0 dù ở văn phòng, 4 dù ở nhà.
- 1: 1 dù ở văn phòng; 3 dù ở nhà
- 2: 2 dù ở văn phòng, 2 dù ở nhà.
- 3: 3 dù ở văn phòng, 1 dù ở nhà
- 4: 4 dù ở văn phòng, 0 dù ở nhà.

Sơ đồ trạng thái chuyển



Nam đang 0 cây ở công ty → mang 1 cây ⇒ trời mưa.
↳ 4 cây ở nhà → 3 cây ở nhà
↳ Nam đang ở nhà.
↳ XS Nam ở nhà → văn phòng và trời mưa = $0,6 \times \frac{1}{2} = 0,3$.

Nam k⁰ cần lấy dù. ← 0,7

XS Nam k⁰ ở nhà mà ở văn phòng và trời mưa = $0,6 \times \frac{1}{2} = 0,3$
+ XS Nam đang ở nhà và trời k⁰ mưa = $0,4 \times \frac{1}{2} = 0,2$
+ XS Nam đang ở văn phòng và trời k⁰ mưa = $0,4 \times \frac{1}{2} = 0,2$

↳ 0,7

Số dù k⁰ bị thay đổi khi và chỉ khi Nam k⁰ cần dù ⇒ trời k⁰ mưa
⇒ XS giữ nguyên số dù = XS trời k⁰ mưa = 0,4.

Ma trận chuyển:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vấn đề đặt ra: chúng ta k⁰ thể xác định được số lần di chuyển từ nhà → văn phòng hay ngược lại của Nam
⇒ số $n \to \infty$
⇒ cta cần tìm phân phối giới hạn của xích.

P^3 gồm toàn số dương ⇒ P chính quy ⇒ P có phân phối giới hạn là phân phối dừng duy nhất.

Gọi $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ là phân phối dừng.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}7\pi_0 + 0{,}3\pi_1 = \pi_0 \\ 0{,}3\pi_0 + 0{,}4\pi_1 + 0{,}3\pi_2 = \pi_1 \\ 0{,}3\pi_1 + 0{,}4\pi_2 + 0{,}3\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}3\pi_2 + 0{,}4\pi_3 + 0{,}3\pi_4 = \pi_3 \\ 0{,}3\pi_3 + 0{,}7\pi_4 = \pi_4 \end{cases}$$

$\rightarrow \pi_0 = \pi_1$

$\rightarrow \pi_1 = \pi_2$

$\rightarrow \pi_2 = \pi_3$

$\rightarrow \pi_3 = \pi_4$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \geq 0.$$

$\hookrightarrow \pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0.2 \\ \pi_1 = 0.2 \\ \pi_2 = 0{,}2 \\ \pi_3 = 0{,}2 \\ \pi_4 = 0{,}2 \end{cases}$$

- Nam bị ướt khi và chỉ khi
  - { trời mưa → 0,6; Nam ở công ty → $\frac{1}{2}$; 0 dù ở công ty, 4 dù ở nhà ↳ $\pi_0 = 0{,}2$ }
  - +
  - { trời mưa → 0,6; Nam ở nhà → $\frac{1}{2}$; 0 dù ở nhà, 4 dù ở công ty. ↳ $\pi_4 = 0.2$ }

$$\Rightarrow XS = \left(0.6 \times \frac{1}{2} \cdot 0{,}2\right) \times 2 = 0.12$$

Câu 1 (2.5 *điểm*). Cho hàm số 3 biến được xác định bởi

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - z^2 - xy + xz - yz + 2x + 3y + 2z$$

a) Xét tính lồi/lõm của f.

b) Xác định các điểm cực tiểu(cực đại) toàn cục và giá trị nhỏ nhất(lớn nhất) tương ứng của f.

a) Xét tính lồi/lõm của f.

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - z^2 - xy + xz - yz + 2x + 3y + 2z$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -4x - y + z + 2 \\ -2y - x - z + 3 \\ -2z + x - y + 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = A$$

Giải pt đặc trưng; ta có: $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\xrightarrow{d_3+d_2} \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{d_2+d_1} \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 1 \\ -5-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 1 \\ -5-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{d_1+d_3} \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 2 \\ 5+\lambda & 3+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} (3+\lambda) = 0$$

$$\xrightarrow{d_2+d_1} \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 3+\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} (3+\lambda) = 0 \overset{\text{dòng 1}}{\Leftrightarrow} \left[(-4-\lambda)(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3+\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3+\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] (3+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(-4-\lambda)(3+\lambda-2) + 2 \times 1 \right] (3+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(-4-\lambda)(1+\lambda) + 2 \right] (3+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4 - 4\lambda - \lambda - \lambda^2 + 2)(3+\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-\lambda^2 - 5\lambda - 2)(3+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -3 \\ \lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -3 < 0 \\ \lambda = -5 + \sqrt{17} < 0 \\ \lambda = (-5 - \sqrt{17})/2 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow A < 0$$

$\Rightarrow$ f lõm ngặt.

b) f đạt giá trị lớn nhất tại $\nabla f(x,y,z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y + z + 2 = 0 \\ -x - 2y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 5/6 \\ z = 5/6 \end{cases}$$

Vậy điểm cực đại toàn cục f là: $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ và giá trị lớn nhất là $f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{31}{12}$

Câu ~~2~~ (3.0 *điểm*). Khảo sát 2 đại lượng x, y. Cho bảng dữ liệu như sau:

x	2	3	5	6
y	0	-10	-48	-76

Với mỗi mô hình được cho sau, dùng phương pháp bình phương nhỏ nhất (least squares) xác định các tham số $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ của mô hình, tính chuẩn vector phần dư (residual) và dự đoán giá trị của y tại $x_0 = 10$.

~~a)~~ Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

~~b)~~ Mô hình $y = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3$.

(a) Mô hình $y = \theta_1 + \theta_2 x. = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ với $\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = x \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c c} & \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} f_1(x) & f_2(x) \end{array} \end{array} ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -48 \\ -76 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix}$$ là ma trận vuông và $\det(A^TA) = 4 \times 74 - 16^2 = 40 \neq 0$

$\Rightarrow A^TA$ khả nghịch.

$$\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} 85/2 \\ -19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 85/2 \\ \theta_2 = -19 \end{cases} \Rightarrow y \approx y^* = \frac{85}{2} - 19x.$$

$$\Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -29/2 \\ -105/2 \\ -143/2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -48 \\ -76 \end{bmatrix} \Rightarrow y^* - y = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -9/2 \\ -9/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \|r\| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 9$$

$$y_0 \approx \frac{85}{2} - 19x_0 = \frac{85}{2} - 19 \times 10 = -\frac{295}{2} = -147,5.$$

b) Mô hình $y = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3$

$= \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x) + \theta_3 f_3(x)$ với $\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x \\ f_3(x) = 1 \end{cases}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -48 \\ -76 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{array}{c c} & \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \end{array} \end{array} \Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 2018 & 376 & 74 \\ 376 & 74 & 16 \\ 74 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A^TA) = 360 \neq 0 \Rightarrow A^TA$ khả nghịch

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = -3 \\ \theta_2 = 5 \\ \theta_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \approx y^* = -3x^2 + 5x + 2$$

$$\Rightarrow y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -48 \\ -76 \end{bmatrix} \Rightarrow y^* - y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|r\| = 0.$$

$$y_0 \approx -3x_0^2 + 5x_0 + 2 = -248.$$

Câu 3 (3.5 *điểm*).

Cho *xích Markov* (Markov chain) $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ 3 trạng thái S = {1, 2, 3} với *ma trận chuyển* (transition matrix)

$$\begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ \hline (1) & 0.85 & 0.2 & 0.1 \\ (2) & 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ (3) & 0.05 & 0.1 & 0.6 \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^2 = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array}}{\begin{bmatrix} 0{,}7475 & 0{,}32 & 0.205 \\ 0.17 & 0{,}54 & 0.4 \\ 0{,}0825 & 0.14 & 0.395 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow P^3 = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array}}{\begin{bmatrix} 0.6776 & 0.394 & 0.2938 \\ 0.2185 & 0.452 & 0.419 \\ 0.1039 & 0.154 & 0.2873 \end{bmatrix}}$$

Giả sử phân phối đầu là $\pi_0 = (0.3, 0.25, 0.45)$ (với (1) (2) (3) trên các thành phần).

a) Tính $P(X_4 = 2 | X_1 = 3)$,

b) Tính $P(X_2 = 1, X_4 = 2 | X_1 = 2, X_0 = 1)$,

c) Tính $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3)$,

d) Tìm phân phối dừng của xích,

$$\pi_1 = P\pi_0 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}34 \\ 0{,}31 \end{bmatrix}$$

a) $P(X_4 = 2 | X_1 = 3) = (P^3)_{23} = 0{,}419$

(b) $P(X_2 = 1, X_4 = 2 | X_1 = 2, X_0 = 1) = \dfrac{P(X_2 = 1, X_4 = 2, X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$

$$= \frac{P(X_4 = 2 | X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)\, P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}$$

$$= \frac{P(X_4 = 2 | X_2 = 1)\, P(X_2 = 1 | X_0 = 1, X_1 = 2)\, P(X_0 = 1, X_1 = 2)}{P(X_0 = 1, X_1 = 2)}$$

$$= P(X_4 = 2 | X_2 = 1)\, P(X_2 = 1 | X_1 = 2) = (P^2)_{21} \times (P)_{12} = 0{,}17 \times 0{,}2 = 0{,}034.$$

(c) $P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3) = P(X_3 = 3 | X_1 = 2, X_2 = 1)\, P(X_1 = 2, X_2 = 1)$

$$= P(X_3 = 3 | X_2 = 1)\, P(X_2 = 1 | X_1 = 2)\, P(X_1 = 2)$$

$$= P_{31} \times P_{12} \times 0{,}34$$

$$= 0{,}05 \times 0{,}2 \times 0{,}34 = 3{,}4 \times 10^{-3}.$$

d) Tìm fân fối dừng của xích?.

Ta có: P gồm toàn số dương nên P là chính quy. ⇒ P có phân phối giới hạn cũng là PP dừng duy nhất.

Đặt $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ là fân fối dừng của xích

$$\Rightarrow \begin{cases} P\pi = \pi \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}85\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3 = \pi_1 \\ 0{,}1\pi_1 + 0{,}7\pi_2 + 0{,}3\pi_3 = \pi_2 \\ 0{,}05\pi_1 + 0{,}1\pi_2 + 0{,}6\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 9/17 \\ \pi_2 = 11/34 \\ \pi_3 = 5/34 \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi = \left(\frac{9}{17}; \frac{11}{34}; \frac{5}{34}\right)$ là fân fối dừng của xích.

Câu 1: $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 4(x_1 - x_2 + 3)$

a) Ktra tính lồi/lõm?

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 4 \\ x_1 + 2x_2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Giải pt đặc trưng: $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 > 0 \\ \lambda_2 = 3 > 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow A > 0$ vì có các trị riêng > 0.

$\Rightarrow f$ lồi ngặt.

b) f đạt giá trị nhỏ nhất tại $\nabla f(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4. \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Vậy điểm cực tiểu toàn cục là $(x_1, x_2) = (-4, 4)$ và giá trị nhỏ nhất tương ứng là $f(-4;4) = -4$

Câu 2:

a) x: tuổi xe, y: số Km đã chạy.

$\begin{cases} f(x,y): \text{giá bán.} \\ f(x,y) = ax + by + c \end{cases}$

Thế x, y từ bộ dữ liệu vào, ta có:

$$\begin{cases} 8a + 1960b + c = 201,6 \\ a + 13b + c = 812 \\ 5a + 450b + c = 400,4 \\ 7a + 966b + c = 252. \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 8 & 1960 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 5 & 450 & 1 \\ 7 & 966 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} 201,6 \\ 812 \\ 400,4 \\ 252 \end{bmatrix}}^{b} \Rightarrow AX = b$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 1960 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 450 & 1 \\ 7 & 966 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 201,6 \\ 812 \\ 400,4 \\ 252 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 139 & 24695 & 21 \\ 24695 & 4977265 & 3379 \\ 21 & 3379 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^TA) = 50626286 \neq 0$$

$\Rightarrow A^TA$ khả nghịch.

$$\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} -106,5395 \\ 0,0729 \\ 914,21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -106,5395 \\ b = 0,0729 \\ c = 914,21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = -106,5395x + 0,0729xy + 914,21$$

b) y: số km đã chạy.

$g(x,y) = ax + by + c = a\,g_1(x,y) + b\,g_2(x,y) + c\,g_3(x,y)$ với $\begin{cases} g_1(x,y) = x \\ g_2(x,y) = y \\ g_3(x,y) = 1. \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c c} & \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}\begin{bmatrix} 8 & 245 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 5 & 90 & 1 \\ 7 & 138 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 201,6 \\ 812 \\ 400,4 \\ 252 \end{bmatrix}$$

$$\quad\;\; g_1 \quad g_2 \quad g_3$$

$A^TA = \begin{bmatrix} 139 & 3389 & 21 \\ 3389 & 87338 & 486 \\ 21 & 486 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận vuông và $\det(A^TA) = 447610 \neq 0$

$\rightarrow A^TA$ khả nghịch.

$$\hat{\theta} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix} -109,7722 \\ 0,7167 \\ 905,7229 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -109,7722 \\ b = 0,7167 \\ c = 905,7229. \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x,y) = -109,7722x + 0,7167y + 905,7229.$$

c) $f^*(x,y) \approx \begin{bmatrix} 204,778 \\ 808,6182 \\ 414,3175 \\ 238,8549 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \alpha_{f(x,y)} \approx 19,6984$

$g^*(x,y) \approx \begin{bmatrix} 203,1368 \\ 805,2678 \\ 421,3649 \\ 236,2221 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_{g(x,y)} \approx 27,1321$

$\Rightarrow$ mô hình 1 tốt hơn vì $\alpha_{f(x,y)} < \alpha_{g(x,y)}$

3

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{bmatrix}$$