

## 0.1 Đối tượng nghiên cứu

Cơ học lưu chất có một ứng dụng rất rộng rãi trong rất nhiều hệ khác nhau như dòng khí chuyển động qua cánh máy bay, máu chảy trong mạch máu, hoặc là dòng dầu thô chảy trong các đường ống dài hàng ngàn km. Trong tác phẩm này, chúng ta sẽ đi vào nghiên cứu một loạt các hệ thống lưu chất khác nhau.

Trước tiên chúng ta nên thảo luận về hệ thống triết học nền tảng nhất của môn cơ học lưu chất. Như tên gọi của nó, môn học **Cơ học lưu chất** là một môn học nghiên cứu về các ứng xử cơ học của các lưu chất. Lưu chất là một khái niệm để gọi chung cho chất lỏng và chất khí khi ta quan sát hệ lưu chất ở thang đo vĩ mô và thang đo trung mô<sup>1</sup>.

Thang đo vĩ mô ở đây là thang đo mà chúng ta vẫn làm việc hằng ngày. Kích cỡ đặc trưng của thang đo này là phụ thuộc vào kích thước của hệ được nghiên cứu, do đó ta sẽ nhấn mạnh ở đây lối nghiên cứu điển hình (études des cas). Các nghiên cứu điển hình sẽ được thực hiện song song với các nghiên cứu phổ quát, trong đó tùy từng đối tượng cụ thể mà chúng tôi sẽ giới thiệu các cách tiếp cận cùng với các tham số liên quan.

Ở thang đo vi mô, chất lỏng và chất khí là khác nhau một cách nền tảng. Đầu tiên mật độ phân tử của các phân tử không khí là vào cỡ  $10^{25} \text{ m}^{-3}$ , còn mật độ phân tử của nước chẳng hạn là vào cỡ  $10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Mật độ phân tử của chất lỏng do đó là lớn hơn rất nhiều so với chất khí, do đó lực hút giữa các phân tử chất lỏng là đáng kể. Tập tính của chất lỏng và chất khí do đó là khác nhau, chẳng hạn như khả năng thấm ướt và khả năng hòa tan của chất lỏng; còn chất khí thì dễ dàng bị nén hơn. Một điều cần phải nhấn mạnh là ở thang đo vi mô, lưu chất không được xem là các khối liên tục nữa và sự xử lý lúc này phải được thực hiện bằng các công cụ của cơ học thống kê.

Hiển nhiên, trong phần lớn các nghiên cứu của chúng ta, ta vẫn sẽ đứng trong cơ sở sự mô hình hóa **cơ học môi trường liên tục**<sup>2</sup> và đưa vào thang đo trung mô. Với thang đo mới này, lưu chất được chia thành các khối có thể tích đủ nhỏ ở thang đo vĩ mô để xem các đại lượng cơ học liên kết với khối này là không đổi nhưng nó vẫn đủ lớn ở thang đo vi mô để xem khối này là liên tục.

Nếu gọi kích thước đặc trưng của hệ cơ học môi trường ở thang đo vĩ mô là  $L^3$ , kích thước đặc trưng của môi trường vi mô là  $l$  (thường chọn quãng đường tự do trung bình của phân tử lưu chất). Kích thước đặc trưng của một khối trung mô được kí hiệu là  $\delta$  phải thoả mãn:

$$l \ll \delta \ll L, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Ta sẽ không đưa vào đây các nghiên cứu về plasma.

<sup>2</sup>Một sự nghiên cứu đầy đủ cơ học môi trường liên tục là cần thiết trước khi bước vào đọc quyển sách này. Tuy nhiên, để tránh làm thất vọng quý độc giả, chúng tôi sẽ trình bày đầy đủ các kiến thức nền tảng của cơ học môi trường liên tục rồi mới chính thức đi vào cơ học lưu chất.

<sup>3</sup>Với một ống hình trụ, có thể chọn kích cỡ đặc trưng là đường kính ống.

để sự mô hình hóa môi trường liên tục là khả dĩ.

Sự mô tả môi trường liên tục là tốt trong gần như mọi trường hợp, nhưng những sự không liên tục vẫn có thể diễn ra ở mức độ trung mô, ta đang đề cập đến trường hợp các **sóng xung kích** đối với các máy bay trên âm hoặc **sự xâm thực** đối với các chong chóng tàu thủy. Ta cũng sẽ tính đến các hiện tượng này trong sự mô tả môi trường liên tục và bây giờ ta sẽ mở rộng các khảo sát ra các đại lượng có sự liên tục từng khúc.

## 0.2 Mô tả chuyển động

### 0.2.1 Hình thức luận Lagrange

Đầu tiên ta sẽ giả thiết rằng sự mô hình hóa môi trường liên tục là hợp lệ. Tiếp theo ta sẽ trang bị một hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  có hệ tọa độ DESCARTES  $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  liên kết làm hệ quy chiếu cho các khảo sát cơ học.

Mỗi thể tích trung mô sẽ được đánh dấu bằng một nhãn để phân biệt chúng và đối với mỗi hạt này, ta theo dõi quỹ đạo của nó theo thời gian tương tự như những gì đã làm trong môn cơ học chất điểm. Để có thể làm được điều này, ta sẽ chọn một thời điểm cố định  $t_0$  mà ta gọi là thời điểm tham chiếu và thông tin của hệ cơ học, bao gồm vị trí các hạt lưu chất ở thời điểm này là **hình thái tham chiếu**, kí hiệu là  $\kappa_0$ . Ở mọi thời điểm sau đó, ta sẽ so sánh các thông tin liên kết với hạt tương ứng, ta gọi nó là **hình thái hiện tại** và kí hiệu  $\kappa_t$ , với các thông tin tương ứng trong hình thái tham chiếu.

Để đánh dấu các hạt, ta sẽ sử dụng vị trí của hạt trong hình thái tham chiếu  $\underline{X}$  để làm nhãn dán. Vị trí của hạt trong hình thái hiện tại được biểu diễn bởi vecteur  $\underline{x}$  và quỹ đạo của hạt được biểu diễn bởi công thức:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t). \quad (2)$$

trong đó hàm vecteur  $\underline{\phi}$  là một hàm đủ chính quy<sup>4</sup>.

Vận tốc của hạt này đơn giản chính là đạo hàm riêng phần theo thời gian của biến thời gian  $t$ :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (3)$$

điều này là hiển nhiên vì  $\underline{X}$  không phụ thuộc vào thời gian (do là vị trí của hạt ở thời điểm tham chiếu). Tương tự, ta định nghĩa gia tốc của hạt:

$$\underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial t^2}(\underline{X}, t) \quad (4)$$

---

<sup>4</sup>"Đủ chính quy" ở đây là một từ dường như mang đến một sự nhập nhằng, tuy nhiên, chúng tôi sử dụng nó để tránh chủ nghĩa hình thức toán học nặng nề. Nói cho đơn giản, đó là một hàm số liên tục từng khúc và không có vô hạn số miền gián đoạn.

### 0.2.1.1 Giả thiết liên tục theo quan điểm Lagrange

## 0.2.2 Hình thức luận Euler

Xét một hệ lưu chất trong hình thái hiện tại  $\kappa_t$ . Việc thu thập "toàn bộ"<sup>5</sup> thông tin về các đại lượng cơ học của hệ trong thời điểm  $t$  ở mỗi điểm  $\underline{x}$  trong không gian sẽ tương ứng với cách mô tả Euler.

Theo cách tiếp cận này, ta không phân biệt từng hạt lưu chất với nhau mà chuyển trọng tâm chú ý sang các điểm trong không gian mà các điểm này là cố định, hiển nhiên là độc lập với thời gian. Lúc này ta không thể tìm được quỹ đạo của các hạt vì ta không còn phân biệt được các hạt lưu chất nữa và các đại lượng liên kết lúc này không còn gắn với duy nhất một hạt lưu chất nữa mà sẽ gắn với điểm đang xét. Do đó để mô tả lưu chất trong hình thức luận Euler, ta sẽ đưa vào một công cụ toán học quan trọng là **trường vecteur** (hoặc là các trường tenseur, hoặc bất kỳ cấu trúc đại số nào đó gắn với từng điểm của không gian).

Trước khi hình thức hóa hình thức luận Euler, ta sẽ đi vào khái niệm trường vecteur.

### 0.2.2.1 Trường vecteur

Trường vecteur được định nghĩa sau đây sẽ hoàn toàn toán học và mang một chủ nghĩa hình thức nặng nề, tuy nhiên, quý độc giả sẽ dần dà nhận ra được tác dụng của chúng. Ta định nghĩa:

*Cho một tập hợp  $\mathcal{E}$  được gọi là không gian nền. Một trường vecteur là không gian vecteur  $E$  đẳng cấu với  $\mathbb{R}^3$  sao cho tồn tại một ánh xạ  $\mathcal{V}$  được định nghĩa như sau:*

$$\begin{aligned}\mathcal{V} : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \mathcal{V}(P)\end{aligned}$$

*Ta gọi ánh xạ  $\mathcal{V}$  là **ánh xạ vecteur liên kết** và  $\mathcal{V}(P)$  là một vecteur. Một trường vecteur như thế là một cặp  $(\mathcal{E}, E)$ .*

Trong trường hợp không sợ hiểu lầm, ta có thể bỏ qua kí hiệu tập nền  $\mathcal{E}$  và kí hiệu trường vecteur bởi  $E$ .

**Nhận xét 1:** Nói cho đơn giản, một trường vecteur là một không gian vecteur mà mỗi vecteur được liên kết với một điểm của không gian nền. Ở đây, vecteur có và phải luôn luôn có một điểm đặt xác định.

---

<sup>5</sup>Toàn bộ ở đây là một con số khổng lồ nếu không muốn nói là không thể trong thực tế. Khi sử dụng từ này, chúng tôi muốn nhấn mạnh đến khả năng về mặt lý thuyết và qua đó sử dụng tư duy phổ quát cho sự nghiên cứu.

**Nhận xét 2:** Định nghĩa này có thể được mở rộng ra cho một trường tenseur hoặc một trường vô hướng nào đó bất kỳ (bằng cách thay đổi định nghĩa của không gian vecteur  $E$ ).

### 0.2.2.2 Vận tốc trong hình thức luận Euler

Như đã đề cập, ta có thể định nghĩa trường vận tốc tại mọi điểm của không gian trong hình thái  $\kappa_t$  bởi:

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t). \quad (5)$$

trong đó không có bất kỳ liên hệ nào giữa  $\underline{x}$  và  $t$ .

Ta có thể nhận thấy rằng, việc chồng chất các mô tả Euler ở vô hạn các thời điểm rất gần nhau  $t$  và  $t + dt$  liên tiếp, ta sẽ thu được hình ảnh của sự mô tả Lagrange.

### 0.2.3 Sự duy nhất của vận tốc

Đối với một lưu chất đang chuyển động, sự khảo sát vận tốc của dòng chảy trong cùng một hệ quy chiếu  $\mathcal{R}$  chỉ cho ta một giá trị vận tốc dù cho có sử dụng hình thức luận Lagrange hay hình thức luận Euler. Do đó phải có sự đồng nhất giữa vận tốc trong hai hình thức này.

Như vậy, nếu một hạt lưu chất ban đầu ở vị trí  $\underline{X}$  đi qua điểm  $\underline{x}$  ở thời điểm  $t$ , vận tốc đo được trong hình thức luận Euler tại điểm  $\underline{x}$  sẽ chính là vận tốc của hạt lưu chất này trong hình thức luận Lagrange, tức là:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{X}, t) \iff \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (6)$$

Mặc dù là cùng một vận tốc nhưng việc xử lý toán học các vận tốc này là khác nhau tùy theo hình thức luận.

**Nhận xét:** Mặc dù có vẻ là hình thức luận Euler đơn giản hơn về sự mô tả, ta sẽ không từ bỏ hình thức luận Euler. Lý do cho việc này là do mỗi hình thức luận có các điểm mạnh và các điểm yếu của chúng. Đối với hình thức luận Lagrange, ta phải theo dõi từng hạt một (chắc chắn số lượng hạt là khổng lồ) và điều này là rất khó để thực hiện được về mặt thực nghiệm.

**Nhận xét:**

### 0.2.4 Thể hiện các dòng chảy

Sau khi đã đề cập đến hai hình thức luận để mô tả sự chuyển động của lưu chất, ta sẽ tiến hành mô tả các hệ đường cong liên kết với các vận tốc đã được mô tả. Mục tiêu của chúng ta là sẽ hình ảnh hóa các vận tốc cho.

### 0.2.4.1 Quỹ đạo hạt

Đúng như tên gọi của nó, sự mô tả hạt bằng quỹ đạo hạt là một cách mô tả trong hình thức luận Lagrange. Theo đó, quỹ đạo của mỗi hạt mà trong hình thái  $\kappa_0$  nó có vị trí  $\underline{X}$  sẽ được mô tả bởi:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t). \quad (7)$$

### 0.2.4.2 Đường dòng

Hình dạng của trường, như mọi khi, vẫn được thể hiện thông qua các đường sức trường. Như vậy, ở một thời điểm  $t_1$  nào đó cố định, các đường dòng sẽ thể hiện trong hình thức luận Euler các sức trường. Chúng là các đường tiếp tuyến với trường vận tốc. Khi đó, gọi  $\underline{dx}$  là vecteur độ dời vô cùng bé dọc theo đường dòng, ta có:

$$\underline{dx} \wedge \underline{u}(\underline{x}, t_1) = \underline{0}. \quad (8)$$

### 0.2.4.3 Đường phát xạ - tiếp cận thực nghiệm

Khi muốn nghiên cứu chuyển động của một lưu chất, lý tưởng nhất là ta có thể đánh dấu từng hạt để nghiên cứu quỹ đạo của nó hoặc hiện thực hóa các đường dòng của nó ở một thời điểm nào đó. Tuy nhiên điều này là không khả thi, đặc biệt là khi nghiên cứu chuyển động của lưu chất quanh một cố thể.

Để có thể giải quyết được vấn đề này, ta sẽ dùng đến chất đánh dấu. Tại những điểm riêng biệt của lưu chất, ta thêm vào một ít chất đánh dấu để chúng được lưu chất kéo theo (lưu ý là càng ít làm nhiễu loạn dòng lưu chất càng tốt). Như vậy, tại một điểm cố định trong không gian ở một thời điểm cho trước, tất cả các hạt đi qua điểm này đều được đánh dấu và theo dõi. Quỹ đạo được chất đánh dấu vạch ra được gọi là **đường phát xạ**. Do đó:

*Các đường phát xạ ở thời điểm  $t_1$  nào đó là tập hợp các điểm trong không gian bị các hạt lưu chất chiếm mà trước đây các hạt này cùng đi qua một điểm  $M_0$  nào đó đã biết.*

Nếu ở thời điểm  $t'$  nào đó ( $t_0 \leq t' \leq t_1$ ), có một hạt lưu chất đi qua điểm  $M_0$  (với  $\underline{X}_0 = \underline{OM}_0$ ), thì phương trình quỹ đạo của hạt này thỏa:

$$\underline{X}_0 = \underline{\phi}(\underline{X}, t'), \quad (9)$$

trong đó  $\underline{X}$  là vị trí ban đầu của hạt lưu chất này mà nó được tính bởi:

$$\underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{X}_0, t'). \quad (10)$$

Ở thời điểm  $t_1$ , vị trí của hạt này được tính bởi:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{\phi}^{-1}(\underline{X}_0, t'), t_1) \quad (11)$$

Do đó đường phát xạ là tập hợp các đường cong có phương trình:

$$\boxed{x = \underline{\phi} \left( \underline{\phi}^{-1} (\underline{X}_0, t'), t_1 \right) \quad (t_0 \leq t' \leq t_1)}. \quad (12)$$

**Chú ý:** Trong công thức (12), chúng ta đã sử dụng định nghĩa hàm nghịch đảo của quỹ đạo  $\underline{\phi}$ . Điều này ngụ ý rằng  $\underline{\phi}$  phải là song ánh và ta đã làm rõ điều này trong phần đề cập về giả thiết liên tục [...]. Điều này một lần nữa nhấn mạnh lại khuôn khổ môi trường liên tục của chúng ta.

## 0.3 Mô tả các đại lượng vật lý

### 0.3.1 Trong hình thức luận Lagrange

Theo hình thức luận Lagrange, ta sẽ đi theo từng hạt lưu chất. Do đó khi muốn khảo sát một đại lượng nào đó, ta sẽ gắn nó với một hạt lưu chất và theo dõi sự biến thiên của nó. Cụ thể hơn, đối với một đại lượng vật lý  $\mathcal{B}$ , ta sẽ hình thức hóa nó bởi:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{X}, t). \quad (13)$$

Như vậy, sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian đơn giản chỉ là đạo hàm riêng theo thời gian:

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}(\underline{X}, t). \quad (14)$$

Phép đạo hàm này được gọi là **đạo hàm hạt**. Để phân biệt nó về mặt kí hiệu, ta viết:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}(\underline{X}, t)}. \quad (15)$$

### 0.3.2 Trong hình thức luận Euler

Theo hình thức luận Euler, ta sẽ đứng yên tại một điểm trong không gian và khảo sát một đại lượng nào đó. Do đó, ta chỉ còn có thể khảo sát sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian và việc sử dụng khái niệm trường là không thể tránh khỏi. Cụ thể hơn, với một đại lượng vật lý  $\mathcal{B}$ , ta sẽ hình thức hóa nó bởi:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{x}, t). \quad (16)$$

Sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian không dễ để khảo sát như lúc trước nữa vì giá trị của nó không còn là một giá trị nội tại của riêng từng lưu chất nữa. Bây giờ, giá trị đo được của nó tại một điểm cho trước là một giá trị mang tính tập hợp, có nghĩa là tùy theo hạt lưu chất đi qua điểm khảo sát.

Tương tự như sự duy nhất của vận tốc, giá trị của đại lượng này chỉ có một bất chấp là hình thức luận nào đang được dùng để khảo sát. Do đó, giá trị đo được của đại lượng đó tại một thời điểm  $t$  ở điểm  $\underline{x}$  cố định chính là giá trị của đại lượng tương ứng của hạt lưu chất có mặt tại thời điểm đó, tức là:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{x}, t) = \mathcal{B}(\phi^{-1}(\underline{x}, t), t). \quad (17)$$

### 0.3.3 Phép đạo hàm hạt

Sau khi đã nêu ra sự khó khăn của việc khảo sát các đại lượng vật lý bằng hình thức luận Euler, ta thấy được điều ngược lại xảy ra đối với hình thức luận Lagrange. Tuy nhiên, hình thức luận Lagrange lại rất khó triển khai trong thực tế. Do đó bây giờ ta sẽ liên kết hai hình thức luận này lại với nhau để khảo sát sự biến thiên theo thời gian của đại lượng vật lý  $\mathcal{B}$ .

Đầu tiên, ta sẽ cố định tại một vị trí  $\underline{x}$  trong không gian và thực hiện đo đại lượng vật lý này ở thời điểm  $t$ , thu được:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{x}, t) \quad (18)$$

Ta hãy tưởng tượng có một người khác đang đi theo hạt lưu chất nào đó mà ở thời điểm  $t$ , hạt lưu chất và cả người này đến tại vị trí  $\underline{x}$ . Người này đo được giá trị:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{X}, t). \quad (19)$$

Ở thời điểm gặp nhau, hai người đồng ý với nhau rằng họ cùng đo được một giá trị cho đại lượng  $\mathcal{B}$ . Sau đó họ đi xa khỏi nhau,. Sau một khoảng thời gian vô cùng nhỏ  $\delta t$ , người trên hạt lưu chất sẽ dời đi một lượng  $\underline{u}(\underline{x}, t) \delta t$ . Như vậy, người này đo được giá trị là:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{X}, t + \delta t). \quad (20)$$

Ở vị trí mới này, giá trị đại lượng này được một người cố định ở đó đo được:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t). \quad (21)$$

Sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian sẽ được tính bởi:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} (\mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) - \mathcal{B}(\underline{x}, t))}. \quad (22)$$

#### 0.3.3.1 Tính toán cho đại lượng điểm

Đại lượng điểm, tức là các đại lượng xác định tại mỗi điểm trong không gian. Nói cách khác, đó chính là các trường, bao gồm các trường vô hướng, vecteur

và tenseur. Bây giờ triển khai định nghĩa (22), ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathcal{B}}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} (\mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) - \mathcal{B}(\underline{x}, t)) \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [(\mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) - \mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t)) \\
&\quad + (\mathcal{B}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t) - \mathcal{B}(\underline{x}, t))] \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} (\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t) + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \underline{x}} (\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \\
&= \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} (\underline{x}, t) + \underline{\nabla} \mathcal{B}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)
\end{aligned}$$

Đối với đại lượng vô hướng, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} (\underline{x}, t) + \underline{\nabla} \mathcal{B}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)}, \quad (23)$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu  $\mathcal{B}$  vào bên trong dấu vecteur thành  $\underline{\nabla} \mathcal{B}$  để nhấn mạnh rằng phép lấy gradient cho ta một vecteur.

Đối với một đại lượng vecteur, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\underline{\mathcal{B}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\mathcal{B}}}{\partial t} (\underline{x}, t) + \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathcal{B}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)}, \quad (24)$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu  $\mathcal{B}$  vào bên trong dấu tenseur hạng hai để nhấn mạnh rằng phép lấy gradient cho ta một tenseur hạng hai.

Đối với một đại lượng tenseur hạng hai, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\underline{\underline{\mathcal{B}}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{B}}}}{\partial t} (\underline{x}, t) + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)}, \quad (25)$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu  $\mathcal{B}$  vào bên trong dấu tenseur hạng ba để nhấn mạnh rằng phép lấy gradient cho ta một tenseur hạng ba.

### 0.3.3.2 Tính toán cho đại lượng thể tích

Đối với một đại lượng thể tích, người ta sẽ quan tâm đến mật độ thể tích của đại lượng này,  $b(\underline{x}, t)$ . Với sự hỗ trợ của phép tính tích phân ba lớp, ta có:

$$\mathcal{B} = \iiint_{\mathcal{V}} b(\underline{x}, t) d\tau. \quad (26)$$

trong đó  $d\tau$  là thể tích vi mô của thể tích  $\mathcal{V}$ . Để giải quyết phép đạo hàm hạt của thể tích này, chúng ta sẽ đưa vào hai khái niệm quan trọng sau:



- Thể tích kiểm soát: đây là một thể tích mà nó được giới hạn bởi một bề mặt sao cho thể tích này cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Đây là một thể tích được liên kết với hình thức luận Euler.
- Thể tích vật chất: đây là một thể tích mà nó được giới hạn bởi một **mặt vật chất**, có nghĩa là một bề mặt được tạo ra bởi sự sắp xếp của các hạt lưu chất trên đó<sup>6</sup>. Đây là một thể tích được liên kết với hình thức luận Lagrange.

Hiển nhiên, đối với một thể tích kiểm soát thì có các hạt lưu chất đi vào và đi ra nó, còn thể tích vật chất bị vận chuyển đi cùng với lưu chất. Điều này chứng tỏ không có hạt vật chất nào vận chuyển vào hoặc vận chuyển ra khỏi thể tích vật chất.

Bây giờ ta sẽ thực hiện đạo hàm tích phân (26). Đương nhiên là thể tích  $\mathcal{V}$  được khảo sát phải là thể tích vật chất, nó bị kéo đi trong lưu chất và ta sẽ liên kết nó với các thể tích kiểm soát tại từng vị trí mà nó đi qua. Do đó:

$$\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left( \iiint_{\mathcal{V}(t+\delta t)} \mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}(t)} \mathcal{b}(\underline{x}, t) d\tau \right)$$

Khi sử dụng đến các thể tích được mô tả trong Hình. ??, hai số hạng trong ngoặc được biến đổi thành:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) d\tau + \iiint_{\mathcal{V}^+} \mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) d\tau \\ & - \iiint_{\mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x}, t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}^-} \mathcal{b}(\underline{x}, t) d\tau \\ & = \iiint_{\mathcal{V}^p} (\mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) - \mathcal{b}(\underline{x}, t)) d\tau \\ & + \iiint_{\mathcal{V}^+} \mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}^-} \mathcal{b}(\underline{x}, t) d\tau \end{aligned}$$

Vì thể tích  $\mathcal{V}^p$  là một thể tích "cố định" tức thời ở thời điểm đang xét, các điểm được tính tích phân sẽ không ra khỏi thể tích này, ta sẽ kí hiệu đơn giản các điểm trong thể tích bởi đơn giản một vecteur vị trí  $\underline{x}$  và do đó:

$$\iiint_{\mathcal{V}^p} (\mathcal{b}(\underline{x}, t + \delta t) - \mathcal{b}(\underline{x}, t)) d\tau = \delta t \iiint_{\mathcal{V}^p} \frac{\partial \mathcal{b}}{\partial t}(\underline{x}, t) d\tau$$

Tích phân trên hai thể tích  $\mathcal{V}^\pm$  được tính dựa vào sự vận chuyển của thể tích

---

<sup>6</sup>Ta đã đề cập đến các tính chất của nó trong phần giả thiết liên tục theo hình thức luận Lagrange.

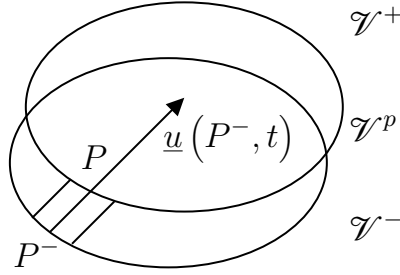
$\mathcal{V}$ , sau đó dựa vào phần tử diện tích :

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\mathcal{V}^+} \mathcal{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t) \delta t, t + \delta t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}^-} \mathcal{b}(\underline{x}, t) d\tau = \\
 & = \delta t \iint_{\partial \mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x}, t) \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{S} - \delta t \iint_{\partial \mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x}, t) \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{S} \\
 & = \delta t \oint_{\partial \mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x}, t) \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{S}
 \end{aligned}$$

Như vậy, đạo hàm hạt của tích phân của đại lượng thể tích được tính:

$$\boxed{\frac{D\mathcal{B}}{Dt} = \iiint_{\mathcal{V}^p} \frac{\partial \mathcal{b}}{\partial t}(\underline{x}, t) d\tau + \oint_{\partial \mathcal{V}^p} \mathcal{b}(\underline{x}, t) \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{S}}. \quad (27)$$

Biểu thức này là tổng quát cho các đại lượng vô hướng, vecteur và tenseur hạng hai.



**Hình 1:** Thể tích vật chất được xem xét để tính đạo hàm hạt là thể tích  $\mathcal{V}$ , ở thời điểm  $t$  nó là phần hình bao ở phía dưới, ở thời điểm  $t + \delta t$  nó là phần hình bao ở phía trên. Phần giao nhau giữa hai hình bao,  $\mathcal{V}^p$ , chính là phần thể tích cố định giữa hai thời điểm khảo sát; còn hai phần hình bán nguyệt là phần thể tích lưu chất đã bị dịch chuyển mà ta kí hiệu là  $\mathcal{V}^+$  và  $\mathcal{V}^-$ . Điểm  $P^-$  nằm trên bề mặt có vận tốc ở thời điểm  $t$  là  $\underline{u}(P^-, t)$  đã bị dịch chuyển thành điểm  $P$  cũng nằm trên bề mặt.

Khi chỉ cần tính đến các tích phân thể tích, ta có thể viết dựa vào divergence của đại lượng:

### 0.3.3.3 Tính toán cho đại lượng mặt

Đối với đại lượng mặt, thực hiện phép đạo hàm tương tự như đối với trường hợp đại lượng thể tích, ta thu được công thức quan trọng sau:

### 0.3.3.4 Tính toán cho đại lượng đường