Chương 1

ĐỘNG LỰC HỌC CỦA XOÁY

1.1 Sự tương đồng với điện từ học

1.2 Động lực học của lưu số

Ta định nghĩa lưu số đối với một trường vận tốc trên một đường cong kín $\mathscr{C}$:

$$\Gamma = \oint_{\mathscr{C}} \underline{u} \cdot d\underline{\ell}, \tag{1.1}$$

trong đó $d\underline{\ell}$ là vecteur vô cùng nhỏ tiếp tuyến với đường cong.

Chúng ta sẽ nghiên cứu động lực học của xoáy bằng việc nghiên cứu sự biến đổi của lưu số trên một đường cong kín bất kỳ. Các kết quả này cũng được áp dụng cho sự phân bố liên tục của xoáy trong trường hợp có đường dòng bị kì dị.

1.2.1 Nguồn hình thành của lưu số

Mặc dù ở trên ta tiếp cận với một khuôn khổ lý tưởng của lưu chất, hiện tại ta khảo sát một lưu chất nhớt, với các khuôn khổ tổng quát nhất có thể. Thay thế phương trình Navier-Stokes vào biểu thức của đạo hàm lưu số, chúng ta suy ra :

$$\frac{D}{Dt}\left[\oint_{\mathscr{C}} \underline{u} \cdot d\underline{\ell}\right] = \oint_{\mathscr{C}} \frac{D\underline{u}}{Dt} \cdot d\underline{\ell} = \oint_{\mathscr{C}} \underline{f}_{\mathrm{vol}} \cdot d\underline{\ell} - \oint_{\mathscr{C}} \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p \cdot d\underline{\ell} + \oint_{\mathscr{C}} \nu \Delta \underline{u} \cdot d\underline{\ell}$$

Số hạng đầu tiên ở vế phải nhất của phương trình này là số hạng lực. Nếu lực này ***không*** được suy ra từ một thế, và lưu số của nó trên một đường cong kín là không bị triệt tiêu, là một nguồn tạo ra lưu số. Chúng ta xét hai trường hợp quan trọng:

- Lực Coriolis : Đây là một lực không có nguồn gốc từ thực tế, mà chỉ là một hiệu ứng do sự thay đổi hệ tọa độ. Ở trái đất, nó là nguồn gốc của các lốc xoáy. Ta sẽ nghiên cứu lực này kỹ hơn trong các phần nói về động lực học của khí quyển và đại dương.

- Lực từ-thủy động : Đây là lực được tạo ra do sự tác động của một trường từ. Trường từ này không gia tốc hạt mà chỉ làm thay đổi hướng của dòng chảy. Ta sẽ nghiên cứu lực này kỹ hơn trong các phần nói về từ-thủy động học.

Số hạng thứ hai là số hạng gradient áp suất. Nếu lưu chất không chảy khuynh áp, tích phân thứ hai là không khác không. Trong trường hợp này, tâm lực Archimede không trùng với trọng tâm của một phần tử lưu chất (tâm của lực đẩy Archimede được xác định thông qua các đường đẳng áp trong lưu chất), điều này tạo ra một moment trên phần tử lưu chất và chính nó tạo ra lưu số. Thực vậy,

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{C}} \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p \cdot d\underline{\ell} &= \iint_{\mathscr{S}} \underline{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p\right) \cdot d\underline{S} \\
&= \underbrace{\iint_{\mathscr{S}} \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} \wedge \underline{\nabla} p d\underline{S}}_{=0} + \iint_{\mathscr{S}} \underline{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}\right) \wedge \underline{\nabla} p \cdot d\underline{S} \\
&= \iint_{\mathscr{S}} \underline{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}\right) \wedge \underline{\nabla} p \cdot d\underline{S}.
\end{aligned}$$

Kết quả này thể hiện rõ hơn điều đó (lưu số do gradient áp suất được tạo ra do sự không trùng nhau của đường đẳng áp và đường đẳng khối lượng riêng).

Số hạng thứ ba của phương trình này là số hạng nhớt. Độ nhớt gây ra các gradient vận tốc xuất hiện gần các cố thể và do đó tạo ra lưu số: tích phân trên một đường cong kín của số hạng lực nhớt là khác không.

1.2.2 Định lý Kelvin : sự bảo toàn lưu số

Thiết lập định lý Kelvin

Định lý Kelvin mô tả lưu số đối với một đường cong kín, mà mỗi điểm của nó bị dịch chuyển với vận tốc của lưu chất tại điểm đó. Chúng ta đặt mình trong khuôn khổ sau :

– Lưu chất là không nhớt : $\eta = 0$;

– Các lực thể tích là các lực thế : $\underline{f} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{\varphi}$;

– Khối lượng riêng là hằng số hoặc là chỉ phụ thuộc vào áp suất (chất lưu chảy khuynh áp) : $\rho = f(p)$.

Như vậy, ta đặt minh trong một khuôn khổ cực kỳ hạn chế của một lưu chất lý tưởng khuynh áp chịu một lực thể tích bảo toàn. Tuy nhiên, ta sẽ chỉ ra các lợi ích trong khuôn khổ cực kỳ hạn chế này về sau. Ở vế phải của công thức chúng ta thu được định lý Kelvin :

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}. \tag{1.2}$$

Các hệ quả của định lý Kelvin

- Một chất lỏng không nhớt, bắt đầu chuyển động từ trạng thái nghỉ, sẽ không bao giờ tạo ra một cuộc xoáy nào về sau.

- Trong dòng chảy xoáy, ống xoáy sẽ di chuyển đúng theo đường đi được tạo nên bởi hạt lưu chất.

- Thông lượng của xoáy được bảo toàn dọc theo ống xoáy.

- Nguồn xoáy (trong trường hợp này là một đường xoáy) sẽ di chuyển với tốc độ cục bộ của lưu chất.

1.3 Động lực học của xoáy

1.3.1 Phương trình vận chuyển xoáy

Từ phương trình Navier-Stokes của lưu chất :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{u} \wedge \underline{\omega} + \underline{\nabla}\left(\frac{\underline{u}^2}{2}\right) = \underline{f}_{\text{vol}} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{u}.$$

Lấy rota hai vế của phương trình này, trong giả thiết lưu chất ***chảy khuynh áp, lưu chất là không nén được*** và ***lực thể tích là lực thế*** , chúng ta có :

$$\frac{\partial\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{u}\right)}{\partial t}-\underline{\nabla}\wedge\left(\underline{\omega}\wedge\underline{u}\right)+\underline{\nabla}\wedge\left[\left(\frac{\underline{u}^2}{2}\right)\right]=\underbrace{\underline{\nabla}\wedge\underline{f}_{\text{vol}}}_{=\underline{0}}-\underbrace{\underline{\nabla}\wedge\left(\frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p\right)}_{=\underline{0}}+\nu\Delta\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{u}\right).$$

Thực hiện biến đổi tiếp tục số hạng thứ hai của vế trái, ta có:

$$\boxed{\frac{D\underline{\omega}}{Dt}=\left(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla}\right)\underline{u}+\nu\Delta\underline{\omega}}. \tag{1.3}$$

1.3.2 Định lý Lagrange

Phương trình (1.3) cho chúng thấy được sự duy trì không xoay trong dòng chảy của lưu chất lý tưởng nếu ban đầu nó là không xoay. Thực vậy, đối với một lưu chất lý tưởng, $\nu=0$, phương trình (1.3) được rút gọn thành:

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt}=\left(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla}\right)\underline{u}$$

Để giải phương trình này, ta sẽ sử dụng lại hình thức luận Lagrange. Tại thời điểm t, ở vị trí $\underline{x}$, vận tốc dòng chảy chính là vận tốc $\underline{U}$ của một hạt lưu chất ban đầu ở vị trí $\underline{X}$ nào đó:

$$\underline{u}(\underline{x},t)=\underline{U}(\underline{X},t)$$

Sử dụng dạng khai triển tường minh của công thức rút gọn, ta có:

$$\frac{D\omega_i}{Dt}=\omega_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\omega_k\frac{\partial U_i(\underline{X},t)}{\partial x_k}=\omega_k\frac{\partial U_i(\underline{X},t)}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$$

Vì $\underline{X}$ không phụ thuộc vào thời gian, ta có:

$$\frac{D\omega_i}{Dt}=\omega_k\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\frac{\partial U_i(\underline{X},t)}{\partial X_j}=\omega_k\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i(\underline{X},t)}{\partial X_j}\right)$$

Hơn nữa, bởi vì $\partial X_j/\partial x_k\cdot\partial x_k/\partial X_i=\delta_{ij}$, do đó, khi nhân hai vế của biểu thức $D\omega_i/Dt$ ở trên với $\partial x_k/\partial X_j$ rồi rút gọn, ta thu được:

$$\frac{D}{Dt}\left(\omega_k\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)=0$$

Giải phương trình vi phân đơn giản này, ta thu được nghiệm:

$$\boxed{\underline{\omega}=\left(\underline{\omega}_0\cdot\underline{\nabla}_{\underline{X}}\right)\underline{x}}. \tag{1.4}$$

Đây là biểu thức của ***định lý Lagrange***. Định lý này chỉ thực sự hữu ích khi biết được trường vận tốc của dòng chảy lúc ban đầu. Tuy nhiên, định lý này có thể giúp chúng ta rút ra được một kết luận hữu ích:

> *Đối với một lưu chất lý tưởng chảy khuynh áp, chịu tác dụng của lực khối bảo toàn, nếu ban đầu trong một vùng nào đó không xoáy, thì sau khi thể tích này bị vận chuyển đối lưu đi, bên trong thể tích này không bao giờ xuất hiện xoáy.*

Sự đối lưu và sự bập bênh của ống xoáy

Hiện tại chúng ta sẽ bỏ qua hiệu ứng nhớt. Để phân tích sự biến đổi của $\underline{\omega}$, chúng ta sẽ xét một ống xoáy có chiều dài dl, vecteur diện tích S song song với $\underline{\omega}$. Đầu tiên chúng ta phân tích số hạng thứ hai của vế phải của (1.3) theo một thành phần song song và một thành phần vuông góc với $\underline{\omega}$:

$$(\underline{\omega} \cdot \underline{\nabla})\,\underline{u} = \omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \underline{e}_z + \omega \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \underline{e}_\perp.$$

Thay biểu thúc được phân tích này vào (1.3), chúng ta có :

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \underline{e}_z + \omega \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \underline{e}_\perp \tag{1.5}$$

Số hạng $\omega \partial v_z/\partial z$ thể hiện hiệu ứng đối lưu của ống xoáy, và số hạng $\omega \partial v_\perp/\partial z$ thể hiện hiệu ứng xoay.

Số hạng đối lưu phản ánh trực tiếp sự bảo toàn moment động lượng, liên kết với sự bảo toàn lưu số bao quanh một ống xoáy.

Nghiên cứu xoáy Hill

Xoáy này được giới hạn trong một hình cầu bán kính R với trường xoáy như sau trong tọa độ trụ :

$$\underline{\omega} = \begin{cases} Ar\underline{e}_\theta & \text{bên trong hình cầu} \\ \underline{0} & \text{bên ngoài hình cầu} \end{cases}, \tag{1.6}$$

Phương trình (1.3) được biến đổi thành :

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} = \omega_\theta \frac{v_r}{r}.$$

Đạo hàm vế phải của nó :

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{D\omega_\theta}{Dt} + \omega_\theta \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\omega_\theta v_r}{r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} v_r = 0.$$

1.3.3 Cân bằng đối lưu-khuếch tán trong dòng chảy xoáy

1.4 Lưu chất trong chuyển động xoay

Áp dụng công thức biến đổi gia tốc giữa hai hệ quy chiếu trong trường hợp gốc tọa độ là cố định và vận tốc xoay của hệ quy chiếu xoay là cố định, ta có :

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p - \underline{\nabla}\varphi + \nu\Delta\underline{u} - 2\underline{\Omega} \wedge \underline{u} + \underline{\nabla}\left(\frac{1}{2}\left(\underline{\Omega} \wedge \underline{r}\right)^2\right). \tag{1.7}$$

Hiệu ứng của lực ly tâm trong một lưu chất xoay

Lực ly tâm có thể cảm ứng nên một dòng chảy : ví dụ trường hợp giọt chất lỏng nằm trên đĩa quay. Áp dụng quan trọng cuả nó được thể hiện trong một bơm ly tâm, mà trong đó lưu chất được phun trên một trục và chuyển động về phía cực và sau đó thoát ra trên mặt mũi cánh do sự xoay của bánh công tác ly tâm. Hiệu ứng ly tâm cũng cực kỳ quan trọng trong sự hình thành của lốc xoáy và bão.

Đầu tiên, chúng ta bỏ qua dòng chảy được sinh ra do hiệu ứng ly tâm. Ví dụ, giả sử một thùng chứa nước quay với tốc độ không đổi: sau một thời gian đủ dài, chất lỏng nhận vận tốc góc của thành nếu không có nguồn nào tạo ra dòng chảy liên quan. Trong trường hợp này, hiệu ứng ly tâm chỉ tạo ra thêm một gradient áp suất phụ thêm vào theo phương bán kính.

Chuyển động của xoáy

Lấy rota, chúng ta được :

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \nu\Delta\underline{\omega} + \left(\left(\underline{\omega} + 2\underline{\Omega}\right) \cdot \underline{\nabla}\right) \underline{u}. \tag{1.8}$$

Bây giờ ta sẽ vô thứ nguyên hóa, nó :