Phần I

NỀN TẢNG CỦA CƠ HỌC LƯU CHẤT

Chương 1

MỞ ĐẦU VỀ CƠ LƯU CHẤT

1.1 Đối tượng nghiên cứu

Cơ học lưu chất có một ứng dụng rất rộng rãi trong rất nhiều hệ khác nhau như dòng khí chuyển động qua cánh máy bay, máu chảy trong mạch máu, hoặc là dòng dầu thô chảy trong các đường ống dài hàng ngàn km. Trong tác phẩm này, chúng ta sẽ đi vào nghiên cứu một loạt các hệ thống lưu chất khác nhau.

Trước tiên chúng ta nên thảo luận về hệ thống triết học nền tảng nhất của môn cơ học lưu chất. Như tên gọi của nó, môn học ***cơ học lưu chất*** là một môn học nghiên cứu về các ứng xử cơ học của các lưu chất. Lưu chất là một khái niệm để gọi chung cho chất lỏng và chất khí khi ta quan sát hệ lưu chất ở thang đo vĩ mô và thang đo trung mô[1].

Thang đo vĩ mô ở đây là thang đo mà chúng ta vẫn làm việc hằng ngày. Nước chảy trong một dòng sông, dòng khí đi qua cánh máy bay,... là các hệ lưu chất vĩ mô rất thường gặp. Kích cở đặc trưng của thang đo này là phụ thuộc vào kích thước của hệ được nghiên cứu, do đó ta sẽ nhấn mạnh ở đây lối nghiên cứu điển hình (études des cas). Các nghiên cứu điển hình sẽ được thực hiện song song với các nghiên cứu phổ quát, trong đó tùy từng đối tượng cụ thể mà chúng tôi sẽ giới thiệu các cách tiếp cận cùng với các tham số liên quan.

Ở thang đo vi mô, chất lỏng và chất khí là khác nhau một cách nền tảng. Đầu tiên mật độ phân tử của các phân tử không khí là vào cở $10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$, còn mật độ phân tử của nước chẳng hạn là vào cở $10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$. Mật độ phân tử của chất lỏng là lớn hơn rất nhiều so với chất khí, do đó lực hút giữa các phân tử chất lỏng là đáng kể. Tập tính của chất lỏng và chất khí do đó là khác nhau, chẳng hạn như khả năng tẩm ướt và khả năng hòa tan của chất lỏng; còn chất khí thì dể dàng bị nén hơn. Một điều cần phải nhấn mạnh là ở thang đo vi mô, lưu chất không được xem là các khối liên tục nữa và sự xử lý lúc này phải được thực hiện bằng các công cụ của cơ học thống kê.

Hiển nhiên, ta sẽ không làm phức tạp hóa vấn đề lên bằng các công cụ cơ học thống kê, do đó trong phần lớn các nghiên cứu, ta vẫn sẽ đứng trong cơ sở sự mô hình hóa ***cơ học môi trường liên tục***[2] và đưa vào thang đo trung mô. Với thang đo mới này, lưu chất được chia thành các khối có thể tích đủ nhỏ ở thang đo vĩ mô để xem các đại lượng cơ học liên kết với khối này là không đổi nhưng nó vẫn đủ lớn ở thang đo vi mô để xem khối này là liên tục.

Nếu gọi kích thước đặc trưng của hệ cơ học môi trường ở thang đo vĩ mô là L[3], kích thước đặc trưng của môi trường vi mô là l (thường chọn quảng đường tự do trung bình của phân tử lưu chất). Kích thước đặc trưng của một khối

[1] Ta sẽ không đưa vào đây các nghiên cứu về plasma.

[2] Một sự nghiên cứu đầy đủ cơ học môi trường liên tục là cần thiết trước khi bước vào đọc quyển sách này. Tuy nhiên, để tránh làm thất vọng quý độc giả, chúng tôi sẽ trình bày đầy đủ các kiến thức nền tảng của cơ học môi trường liên tục rồi mới chính thức đi vào cơ học lưu chất.

[3] Với một ống hình trụ, có thể chọn kích cở đặc trưng là đường kính ống.

trung mô được kí hiệu là δ phải thoả mãn:

$$l \ll \delta \ll L, \tag{1.1}$$

để sự mô hình hóa môi trường liên tục là khả dĩ.

Sự mô tả môi trường liên tục là tốt trong gần như mọi trường hợp, nhưng những sự không liên tục vẫn có thể diễn ra ở mức độ trung mô, ta đang đề cập đến trường hợp các ***sóng xung kích*** đối dòng khí đi qua cánh của các máy bay trên âm hoặc ***sự xâm thực*** đối với các chong chóng tàu thủy khi chúng xoay quá nhanh. Ta cũng sẽ tính đến các hiện tượng này trong sự mô tả môi trường liên tục và bây giờ ta sẽ mở rộng các khảo sát ra các đại lượng có sự liên tục từng khúc.

1.2 Mô tả chuyển động

1.2.1 Hình thức luận Lagrange

Đầu tiên ta sẽ giả thiết rằng sự mô hình hóa môi trường liên tục là hợp lệ. Tiếp theo ta sẽ trang bị một hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ có hệ tọa độ DESCARTES $\mathscr{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ liên kết làm hệ quy chiếu cho các khảo sát cơ học.

Mỗi thể tích trung mô sẽ được đánh dấu bằng một nhãn để phân biệt chúng và đối với mỗi hạt này, ta theo dõi quỹ đạo của nó theo thời gian tương tự như những gì đã làm trong môn cơ học chất điểm. Để có thể làm được điều này, ta sẽ chọn một thời điểm cố định t_0 mà ta gọi là thời điểm tham chiếu và thông tin của hệ cơ học, bao gồm vị trí các hạt lưu chất ở thời điểm này là ***hình thái tham chiếu***, kí hiệu là κ_0. Ở mọi thời điểm sau đó, ta sẽ so sánh các thông tin liên kết với hạt tương ứng, ta gọi nó là ***hình thái hiện tại*** và kí hiệu κ_t, với các thông tin tương ứng trong hình thái tham chiếu.

Để đánh dấu các hạt, ta sẽ sử dụng vị trí của hạt trong hình thái tham chiếu $\underline{X}$ để làm nhãn dán. Vị trí của hạt trong hình thái hiện tại được biểu diễn bởi vecteur $\underline{x}$ và quỹ đạo của hạt được biểu diễn bởi công thức:

$$\underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.2}$$

trong đó hàm vecteur $\underline{\phi}$ là một hàm đủ chính quy[4].

Vận tốc của hạt này đơn giản chính là đạo hàm riêng phần theo thời gian của biến thời gian t:

$$\underline{U}\left(\underline{X}, t\right) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}\left(\underline{X}, t\right) \tag{1.3}$$

[4]"Đủ chính quy"ở đây là một từ dường như mang đến một sự nhập nhằng, tuy nhiên, chúng tôi sử dụng nó để tránh chủ nghĩa hình thức toán học nặng nề. Nói cho đơn giản, đó là một hàm số liên tục từng khúc và không có vô hạn số miền gián đoạn.

điều này là hiển nhiên vì $\underline{X}$ không phụ thuộc vào thời gian (do là vị trí của hạt ở thời điểm tham chiếu). Tương tự, ta định nghĩa gia tốc của hạt:

$$\underline{A}\left(\underline{X}, t\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\left(\underline{X}, t\right) \tag{1.4}$$

1.2.1.1 Giả thiết liên tục theo quan điểm Lagrange

1.2.2 Hình thức luận Euler

Xét một hệ lưu chất trong hình thái hiện tại κ_t. Việc thu thập "toàn bộ"[5] thông tin về các đại lượng cơ học của hệ trong thời điểm t ở mỗi điểm $\underline{x}$ trong không gian sẽ tương ứng với cách mô tả Euler.

Theo cách tiếp cận này, ta không phân biệt từng hạt lưu chất với nhau mà chuyển trọng tâm chú ý sang các điểm trong không gian mà các điểm này là cố định, hiển nhiên là độc lập với thời gian. Lúc này ta không thể tìm được quỹ đạo của các hạt vì ta không còn phân biệt được các hạt lưu chất nữa và các đại lượng liên kết lúc này không còn gắn với duy nhất một hạt lưu chất nữa mà sẽ gắn với điểm đang xét. Do đó để mô tả lưu chất trong hình thức luận Euler, ta sẽ đưa vào một công cụ toán học quan trọng là ***trường vecteur*** (hoặc là các trường tenseur, hoặc bất kỳ cấu trúc đại số nào đó gắn với từng điểm của không gian).

Trước khi hình thức hóa hình thức luận Euler, ta sẽ đi vào khái niệm trường vecteur.

1.2.2.1 Trường vecteur

Trường vecteur được định nghĩa sau đây sẽ hoàn toàn toán học và mang một chủ nghĩa hình thức nặng nề, tuy nhiên, quý độc giả sẽ dần dà nhận ra được tác dụng của chúng. Ta định nghĩa:

> *Cho một tập hợp $\mathscr{E}$ được gọi là không gian nền. Một trường vecteur là không gian vecteur E đẳng cấu với $\mathbb{R}^3$ sao cho tồn tại một ánh xạ $\mathscr{V}$ được định nghĩa như sau:*
>
> $$\begin{aligned} \mathscr{V} : \mathscr{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \mathscr{V}(P) \end{aligned}$$
>
> *Ta gọi ánh xạ $\mathscr{V}$ là **ánh xạ vecteur liên kết** và $\mathscr{V}(P)$ là một vecteur. Một trường vecteur như thế là một cặp $(\mathscr{E}, E)$.*

Trong trường hợp không sợ hiểu lầm, ta có thể bỏ qua kí hiệu tập nền $\mathscr{E}$ và kí hiệu trường vecteur bởi E.

[5]Toàn bộ ở đây là một con số khổng lồ nếu không muốn nói là không thể trong thực tế. Khi sử dụng từ này, chúng tôi muốn nhấn mạnh đến khả năng về mặt lý thuyết và qua đó sử dụng tư duy phổ quát cho sự nghiên cứu.

Nhận xét 1: Nói cho đơn giản, một trường vecteur là một không gian vecteur mà mỗi vecteur được liên kết với một điểm của không gian nền. Ở đây, vecteur có và phải luôn luôn có một điểm đặt xác định.

Nhận xét 2: Định nghĩa này có thể được mở rộng ra cho một trường tenseur hoặc một trường vô hướng nào đó bất kỳ (bằng cách thay đổi định nghĩa của không gian vecteur E).

1.2.2.2 Vận tốc trong hình thức luận Euler

Như đã đề cập, ta có thể định nghĩa trường vận tốc tại mọi điểm của không gian trong hình thái κ_t bởi:

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t). \tag{1.5}$$

trong đó không có bất kỳ liên hệ nào giữa $\underline{x}$ và t.

Ta có thể nhận thấy rằng, việc chồng chất các mô tả Euler ở vô hạn các thời điểm rất gần nhau t và $t + dt$ liên tiếp, ta sẽ thu được hình ảnh của sự mô tả Lagrange.

1.2.3 Sự duy nhất của vận tốc

Đối với một lưu chất đang chuyển động, sự khảo sát vận tốc của dòng chảy trong cùng một hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ chỉ cho ta một giá trị vận tốc dù cho có sử dụng hình thức luận Lagrange hay hình thức luận Euler. Do đó phải có sự đồng nhất giữa vận tốc trong hai hình thức này.

Như vậy, nếu một hạt lưu chất ban đầu ở vị trí $\underline{X}$ đi qua điểm $\underline{x}$ ở thời điểm t, vận tốc đo được trong hình thức luận Euler tại điểm $\underline{x}$ sẽ chính là vận tốc của hạt lưu chất này trong hình thức luận Lagrange, tức là:

$$\underline{u}\left(\underline{x}, t\right) = \underline{U}\left(\underline{X}, t\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t\right) \tag{1.6}$$

Mặc dù là cùng một vận tốc nhưng việc xử lý toán học các vận tốc này là khác nhau tùy theo hình thức luận.

Nhận xét: Mặc dù có vẻ là hình thức luận Euler đơn giản hơn về sự mô tả, ta sẽ không từ bỏ hình thức luận Euler. Lý do cho việc này là do mỗi hình thức luận có các điểm mạnh và các điểm yếu của chúng. Đối với hình thức luận Lagrange, ta phải theo dõi từng hạt một (chắc chắn số lượng hạt là khổng lồ)và điều này là rất khó để thực hiện được về mặt thực nghiệm.

Chú ý (kí hiệu): Trong các nghiên cứu từ đây về sau, ta thông nhất với nhau là dùng kí hiệu in hoa, ví dụ như $\underline{U}$, để chỉ các đại lượng trong hình thức luận Lagrange và dùng kí hiệu viết thường $\underline{u}$, để chỉ đại lượng tương ứng trong hình thức luận Euler. Vecteur vị trí được kí hiệu bởi $\underline{X}$ được dùng để ám chỉ vị trí của nó trong hình thái tham chiếu, còn $\underline{x}$ để ám chỉ vị trí của nó trong hình thái hiện tại.

1.2.4 Thể hiện các dòng chảy

Sau khi đã đề cập đến hai hình thức luận để mô tả sự chuyển động của lưu chất, ta sẽ tiến hành mô tả các hệ đường cong liên kết với các vận tốc đã được mô tả. Mục tiêu của chúng ta là sẽ hình ảnh hóa các vận tốc cho.

1.2.4.1 Quỹ đạo hạt

Đúng như tên gọi của nó, sự mô tả hạt bằng quỹ đạo hạt là một cách mô tả trong hình thức luận Lagrange. Theo đó, quỹ đạo của mỗi hạt mà trong hình thái κ_0 nó có vị trí $\underline{X}$ sẽ được mô tả bởi:

$$\underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.7}$$

1.2.4.2 Đường dòng

Hình dạng của trường, như mọi khi, vẫn được thể hiện thông qua các đường sức trường. Như vậy, ở một thời điểm t_1 nào đó cố định, các đường dòng sẽ thể hiện trong hình thức luận Euler các sức trường. Chúng là các đường tiếp tuyến với trường vận tốc. Khi đó, gọi $\underline{dx}$ là vecteur độ dời vô cùng bé dọc theo đường dòng, ta có:

$$\underline{dx} \wedge \underline{u}\left(\underline{x}, t_1\right) = \underline{0}. \tag{1.8}$$

1.2.4.3 Đường phát xạ - tiếp cận thực nghiệm

Khi muốn nghiên cứu chuyển động của một lưu chất, lý tưởng nhất là ta có thể đánh dấu từng hạt để nghiên cứu quỹ đạo của nó hoặc hiện thực hóa các đường dòng của nó ở một thời điểm nào đó. Tuy nhiên điều này là không khả thi, đặc biệt là khi nghiên cứu chuyển động của lưu chất quanh một cố thể.

Để có thể giải quyết được vấn đề này, ta sẽ dùng đến chất đánh dấu. Tại những điểm riêng biệt của lưu chất, ta thêm vào một ít chất đánh dấu để chúng được lưu chất kéo theo (lưu ý là càng ít làm nhiễu loạn dòng lưu chất càng tốt). Như vậy, tại một điểm cố định trong không gian ở một thời điểm cho trước, tất cả các hạt đi qua điểm này đều được đánh dấu và theo dõi. Quỹ đạo được chất đánh dấu vạch ra được gọi là ***đường phát xạ***. Do đó:

> *Các đường phát xạ ở thời điểm t_1 nào đó là tập hợp các điểm trong không gian bị các hạt lưu chất chiếm mà trước đây các hạt này cùng đi qua một điểm M_0 nào đó đã biết.*

Nếu ở thời điểm t' nào đó ($t_0 \leq t' \leq t_1$), có một hạt lưu chất đi qua điểm M_0 (với $\underline{X}_0 = \underline{OM_0}$), thì phương trình quỹ đạo của hạt này thỏa:

$$\underline{X}_0 = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t'\right), \tag{1.9}$$

trong đó $\underline{X}$ là vị trí ban đầu của hạt lưu chất này mà nó được tính bởi:

$$\underline{X} = \underline{\phi}^{-1}\left(\underline{X}_0, t'\right). \tag{1.10}$$

Ở thời điểm t_1, vị trí của hạt này được tính bởi:

$$\underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{\phi}^{-1}\left(\underline{X}_0, t'\right), t_1\right) \tag{1.11}$$

Do đó đường phát xạ là tập hợp các đường cong có phương trình:

$$\boxed{\underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{\phi}^{-1}\left(\underline{X}_0, t'\right), t_1\right) \quad (t_0 \leq t' \leq t_1)}. \tag{1.12}$$

Chú ý: Trong công thức (1.12), chúng ta đã sử dụng định nghĩa hàm nghịch đảo của quỹ đạo $\underline{\phi}$. Điều này ngụ ý rằng $\underline{\phi}$ phải là song ánh và ta đã làm rõ điều này trong phần đề cập về giả thiết liên tục [.......]. Điều này một lần nữa nhấn mạnh lại khuôn khổ môi trường liên tục của chúng ta.

1.3 Mô tả động học lưu chất

1.3.1 Mô tả biến dạng của lưu chất

Mặc dù có tên gọi là mô tả động học, ta sẽ đề cập không chỉ về động lực học của lưu chất mà còn về sự biến dạng của lưu chất. Như đã đề cập, lưu chất là môi trường liên tục, do đó, tính chất rất quan trọng của chúng là sự biến dạng[6]. Ở đây ta sẽ không tiếp cận như cách mà cơ học môi trường liên tục, tức là không nghiên cứu *độ dời* của các phần tử lưu chất, mà sẽ chỉ nghiên cứu thông qua vận tốc của các hạt lưu chất[7].

1.3.1.1 Tốc độ biến dạng của một vecteur vật chất

Như đã đề cập, ta sẽ nghiên cứu sự biến dạng với trọng tâm là sự khảo sát trường vận tốc của lưu chất.

Đầu tiên, ở một thời điểm xác định t, ta chọn bên trong lưu chất hai điểm vật chất[8], M_1 và M_2, ở lân cận nhau. Ta kí hiệu vecteur nối hai điểm này là $\underline{dx} = \underline{M_1M_2}$. Để nghiên cứu chúng, ta sẽ truy ngược về hình thái κ_0, và ta sẽ tìm được hai vị trí $\underline{X}_1$ và $\underline{X}_2$ sao cho:

$$\underline{OM_1} = \underline{\phi}\left(\underline{X}_1, t\right) \quad \text{và} \quad \underline{OM_2} = \underline{\phi}\left(\underline{X}_2, t\right).$$

[6]Không phải sự dời chổ, ta sẽ nói kỹ hơn về sự phân biệt về sự biến dạng và sự dời chổ.

[7]Điều này là hiển nhiên, vì lưu chất rất linh động, chúng di chuyển dể dàng và không có hình dạng xác định do đó việc nghiên cứu lưu chất qua biến dạng là không hợp lý.

[8]Tức là hai điểm nằm trên hai hạt lưu chất, ta muốn dùng từ này để nhấn mạnh lên tính chất của điểm này.

Ta kí hiệu vecteur vật chất trong hình thái κ_0 bởi $\underline{dX} = \underline{X_2} - \underline{X_1} = \underline{X_1X_2}$. Như vậy, vecteur vật chất này chịu sự xử lý toán học dưới đây:

$$\begin{aligned} \underline{dx} &= \underline{\phi}\left(\underline{X}_2, t\right) - \underline{\phi}\left(\underline{X}_1, t\right) \\ &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}\left(\underline{X}_1, t\right) \cdot \underline{dX}. \end{aligned}$$

Do đó, khi đưa vào khái niệm ***gradient biến đổi*** được định nghĩa như sau:

$$\boxed{\underline{\underline{F}}\left(\underline{X}, t\right) = \underline{\underline{\nabla_X \phi}}\left(\underline{X}, t\right)} \tag{1.13}$$

(trong đó kí hiệu ∇_X muốn nhấn mạnh việc lấy gradient của một hàm vecteur trong hình thái tham chiếu), hệ thức trên được viết thành:

$$\underline{dx} = \underline{\underline{F}}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \underline{dX}. \tag{1.14}$$

Ở một thời điểm $t + \delta t$ vô cùng bé sau đó, hai điểm này bị các hạt lưu chất tương ứng kéo đi và trở thành hai điểm vật chất mới mà ta kí hiệu tương ứng là M_1' và M_2'. Do đó:

$$\underline{OM_1'} = \underline{\phi}\left(\underline{X}_1, t + \delta t\right) \quad \text{và} \quad \underline{OM_2'} = \underline{\phi}\left(\underline{X}_2, t + \delta t\right).$$

Vecteur vật chất mới này được xử lý toán học tương tự như ở phía trên:

$$\begin{aligned} \underline{dx'} := \underline{M_1'M_2'} &= \underline{\phi}\left(\underline{X}_2, t + \delta t\right) - \underline{\phi}\left(\underline{X}_1, t + \delta t\right) \\ &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}\left(\underline{X}_1, t + \delta t\right) \cdot \underline{dX}. \end{aligned}$$

Như vậy hai vecteur này có liên hệ với nhau bởi:

$$\begin{aligned} \underline{dx'} &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}\left(\underline{X}_1, t + \delta t\right) \cdot \underline{dX} \\ &= \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial \underline{X} \partial t}\left(\underline{X}_1, t\right) \cdot \underline{dX}\delta t \\ &= \underline{\nabla_X}\left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}\right)\left(\underline{X}_1, t\right) \cdot \underline{dX}\delta t \end{aligned}$$

Khi đưa vào định nghĩa gradient của trường vận tốc:

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla_X U}}\left(\underline{X}, t\right) := \underline{\nabla_X}\left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}\right)\left(\underline{X}, t\right)} \text{ khi } \underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.15}$$

Ta có thể biểu diễn sự liên hệ giữa hai vecteur vật chất vô cùng bé bên trên:

$$\begin{aligned} \underline{dx'} &= \underline{\underline{\nabla_X U}}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \underline{dX}\delta t \\ &= \underline{\underline{\nabla_X U}}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \underline{dx}\right)\delta t. \end{aligned}$$

Ta gọi đạo hàm vật chất của một vecteur vô cùng nhỏ đặt tại điểm $\underline{M}_1$ ở thời điểm t bởi:

$$\dot{\widehat{\underline{dx}}} := \lim_{\delta t \to 0} \frac{\underline{dx}' - \underline{dx}}{\delta t} = \boxed{\left(\underline{\underline{\nabla_X U}}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}\left(\underline{X}, t\right)\right) \cdot \underline{dx}}.$$

Khi đó, đạo hàm vật chất của một vecteur vật chất vô cùng bé được viết lại khi định nghĩa gradient của trường vận tốc trong hình thái κ_t:

$$\boxed{\dot{\widehat{\underline{dx}}} = \underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{dx}}. \tag{1.16}$$

trong đó:

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) := \underline{\underline{\nabla_X U}}\left(\underline{X}, t\right) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}\left(\underline{X}, t\right)} \text{ khi } \underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.17}$$

1.3.1.2 Tốc độ giản nở của thể tích

Chọn một hệ tọa độ Descartes trực chuẩn $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ cố định trong không gian. Xét ba vecteur vật chất $\underline{dx}_1$, $\underline{dx}_2$ và $\underline{dx}_3$ không đồng phẳng đặt tại điểm $\underline{x}$ trong hình thái κ_t. Thể tích của hình lăng trụ được tạo bởi ba vecteur này được tính thông qua sự hỗ trợ của hệ tọa độ vừa chọn ở bên trên. Đầu tiên, ta định nghĩa tenseur thể tích[9]:

$$\underline{\underline{\mathscr{V}}} = \underline{dx}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{dx}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{dx}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Nhờ vào nó, ta tính được thể tích của hình lăng trụ bên trên:

$$d\Omega_t = \det \underline{\underline{\mathscr{V}}}. \tag{1.18}$$

Sau đó, ở thời điểm $t + \delta t$, các vecteur này lần lượt bị dịch chuyển thành ba vecteur vật chất mới $\underline{dx}'_1$, $\underline{dx}'_2$ và $\underline{dx}'_3$ đặt tại vị trí $\underline{x}'$ và ta tính tenseur thể tích tương tự như bên trên:

$$\underline{\underline{v}} = \underline{dx}'_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{dx}'_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{dx}'_3 \otimes \underline{e}_3$$

Nhờ vào nó, ta tính được thể tích của hình lăng trụ mới:

$$d\Omega_{t+\delta t} = \det \underline{\underline{v}}. \tag{1.19}$$

[9]Đơn giản là việc sắp xếp các vecteur thành một ma trận vuông mà lần lượt mỗi vecteur vật chất tạo thành một cột của ma trận này. Chúng tôi không viết đơn giản, vì ở đây, chúng tôi muốn nhấn mạnh đếp quan điểm "thao tác".

Dựa vào công thức đạo hàm hạt của vecteur vật chất đã tìm ra ở bên trên, ta có thể biến đổi:

$$\begin{aligned}
d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t &= |\ \underline{dx}'_1 \quad \underline{dx}'_2 \quad \underline{dx}'_3\ | - |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}_3\ | \\
&= |\ \underline{dx}'_1 - \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}'_2 \quad \underline{dx}'_3\ | - |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}'_2 - \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}'_3\ | \\
&\qquad + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}'_3 - \underline{dx}_3\ | \\
&= \delta t \Big(|\ \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}'_2 \quad \underline{dx}'_3\ | + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}'_3\ | \\
&\qquad + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_3\ | \Big)
\end{aligned}$$

Nếu như chỉ dừng lại ở các khai triển bậc một, ta có:

$$\begin{aligned}
d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t = \delta t \Big(&|\ \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}_3\ | + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}_3\ | \\
&+ |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_3\ | \Big)
\end{aligned}$$

Do đó tốc độ biến đổi thể tích

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta t \to 0} \frac{d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t}{\delta t} &= |\ \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}_3\ | + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_2 \quad \underline{dx}_3\ | \\
&\qquad + |\ \underline{dx}_1 \quad \underline{dx}_2 \quad \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dx}_3\ | \\
&= \underline{\underline{\nabla u}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} d\Omega_t
\end{aligned}$$

Mà ta có thể viết gọn lại thành:

$$\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}\,(\underline{x}, t)\, d\Omega_t \tag{1.20}$$

Công thức này cho ta thấy vai trò của dive của trường vận tốc, nó đại diện cho mức độ giản nở của lưu chất. Ta sẽ biểu diễn lại vai trò này thông qua tóc độ biến đổi thể tích tương đối:

$$\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_t}\,(\underline{x}, t) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}\,(\underline{x}, t) \tag{1.21}$$

Như vậy, khi đưa vào dive của trường vận tốc, ta đã có thể diễn giản sự giản nở của một thể tích vi mô lưu chất. Ta thu được một hệ quả quan trọng về dòng chảy không nén được: một dòng chảy không nén được khi và chỉ khi đối với một thể tích vi mô của lưu chất cho trước, thể tích của nó là không đổi. Do đó, ***một lưu chất không nén được nếu và chỉ nếu dive của trường vận tốc bị triệt tiêu ở mọi điểm***. Điều này được diễn giải thành:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}\,(\underline{x}, t) \equiv 0. \tag{1.22}$$

1.3.1.3 Tốc độ xoay của lưu chất

Lấy lại phép đạo hàm vật chất của một vecteur vật chất vô cùng nhỏ đã thực hiện bên trên:

$$\dot{\widehat{\underline{dx}}} = \underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{dx}$$

Phân tích phép tính này, khi phân tích thành phần của $\underline{\underline{\nabla u}}$, ta thấy có tồn tại hai tenseur hạng hai đối xứng $\underline{\underline{d}}$ và phản đối xứng $\underline{\underline{\omega}}$ sao cho:

$$\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) = \underline{\underline{d}}\left(\underline{x}, t\right) + \underline{\underline{\omega}}\left(\underline{x}, t\right) \tag{1.23}$$

Ta gọi $\underline{\underline{d}}\left(\underline{x}, t\right)$ là ***tenseur tốc độ biến dạng*** và $\underline{\underline{\omega}}\left(\underline{x}, t\right)$ là ***tenseur tốc độ xoay***. Hiển nhiên, vì là các thành phần đối xứng và phản đối xứng của trường vận tốc, định nghĩa của chúng như sau:

$$\underline{\underline{d}}\left(\underline{x}, t\right) := \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) + {}^{t}\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right)\right) \tag{1.24}$$

$$\underline{\underline{\omega}}\left(\underline{x}, t\right) := \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right) - {}^{t}\underline{\underline{\nabla u}}\left(\underline{x}, t\right)\right) \tag{1.25}$$

Khi phân tích phép nhân tenseur rút gọn của tenseur phản đối xứng với vecteur vật chất vô cùng nhỏ, theo những gì phát triển trong đại số, ta thấy tồn tại một giả-vecteur $\underline{\omega}$ mà ta gọi là ***vecteur xoay***, sao cho:

$$\underline{\underline{\omega}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{dx} = \underline{\omega}\left(\underline{x}, t\right) \wedge \underline{dx}. \tag{1.26}$$

Kết hợp những điều này lại với nhau, ta thu được một công thức quan trọng về đạo hàm hạt một vecteur vật chất vô cùng nhỏ:

$$\boxed{\dot{\widehat{\underline{dx}}} = \underline{\underline{d}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{dx} + \underline{\omega}\left(\underline{x}, t\right) \wedge \underline{dx}}. \tag{1.27}$$

Đây là một công thức biểu thị sự biến dạng tổng quát của lưu chất. Nó thể hiện hai sự biến dạng điển hình của lưu chất là sự giản nở của lưu chất và sự xoay của lưu chất một cách địa phương.

Bây giờ ta sẽ liên hệ nó với trường vận tốc. Khi khai triển công thức (1.26) trong hệ tọa độ Descartes trực chuẩn $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ta có:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} = & \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)\right. \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \\
& \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)\right) \\
& \cdot (dx_1\underline{e}_1 + dx_2\underline{e}_2 + dx_3\underline{e}_3) \\
= & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(dx_2\underline{e}_1 - dx_1\underline{e}_2) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)(dx_3\underline{e}_1 - dx_1\underline{e}_3) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)(dx_3\underline{e}_2 - dx_2\underline{e}_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\omega} \wedge \underline{dx} &= (\omega_1\underline{e}_1 + \omega_2\underline{e}_2 + \omega_3\underline{e}_3) \wedge (dx_1\underline{e}_1 + dx_2\underline{e}_2 + dx_3\underline{e}_3) \\
&= (\omega_2 dx_3 - \omega_3 dx_2)\,\underline{e}_1 + (\omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3)\,\underline{e}_2 + (\omega_1 dx_2 - \omega_2 dx_1)\,\underline{e}_3.
\end{aligned}$$

So sánh hai biểu thức này, ta thu được:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

Các thành phần này không gì khác hơn chính là các thành phần của vecteur thu được khi lấy rota của trường vận tốc, do đó ta đã thiết lập được công thức quan trọng sau:

$$\boxed{\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\underline{\nabla} \wedge \underline{u}(\underline{x}, t)}. \tag{1.28}$$

Như vậy bằng việc đưa vào vecteur xoay (địa phương) của lưu chất, ta có thể biểu diễn thành phần xoay của tốc độ biến dạng của một vecteur vật chất vô cùng bé bất kỳ bên trong lưu chất. Hơn nữa, việc liên hệ vecteur xoay này với rota của trường vận tốc cho ta thấy một kết luận quan trọng: ***chuyển động của lưu chất thể hiện sự xoay khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một điểm bên trong lòng lưu chất sao cho rota của trường vận tốc tại điểm này là khác không***. Nói cách khác, một lưu chất chuyển động không xoay khi và chỉ khi rota của trường vận tốc của lưu chất là triệt tiêu tại mọi điểm.

Nhận xét: Đối với một vât rắn hình trụ chuyển động xoay đều xung quanh trục $\underline{e}_z$ cố định của nó, trường vận tốc của vật rắn này được viết:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \omega r \underline{e}_\theta. \tag{1.29}$$

trong đó $\underline{e}_\theta$ chính là vecteur trực xuyên tâm của hệ tọa độ trụ, ω là tốc độ góc của hình trụ và r là khoảng cách đến trục. Lấy rota của trường vận tốc này, ta có:

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{u}\left(\underline{x}, t\right) = 2\omega \underline{e}_z.$$

Điều này biện minh cho tên gọi vecteur xoay của thành phần rota của trường vận tốc.

1.3.2 Các dòng lưu chất điển hình

Sau khi đã nghiên cứu sự biến dạng của lưu chất, bây giờ ta sẽ tiến hành mô tả một vài loại dòng chảy điển hình. Mục tiêu của chúng ta là tìm ra một vài khuôn mẫu dòng chảy đặc biệt, để có thể sử dụng về sau trong các nghiên cứu điển hình về sau.

1.3.2.1 Dòng chảy không nén được

Một dòng chảy phẳng không nén được là một dòng chảy có $\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại một trường vecteur $\underline{A}$ sao cho:

$$\underline{u}\left(\underline{x}, t\right) = \underline{\nabla} \wedge \underline{\Psi}\left(\underline{x}, t\right). \tag{1.30}$$

Ta vừa mới chuyển từ một trường vecteur sang một trường vecteur khác. Nói một cách trực diện hơn, ta đã chuyển từ một sự phức tạp sang một sự phức tạp khác. Do đó, công thức này chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết.

Nếu dòng chảy này nằm trong mặt phẳng có pháp tuyến là $\underline{e}_z$ thì tồn tại một hàm vecteur $\underline{\Psi} = \Psi \underline{e}_z$ sao cho:

Bằng các công thức đã thực hiện trong giải tích vecteur, ta có:

$$\underline{u}\left(\underline{x}, t\right) = \underline{\nabla \Psi}\left(\underline{x}, t\right) \wedge \underline{e}_z. \tag{1.31}$$

Do đó ta gọi hàm số Ψ là ***hàm dòng***. Ta sẽ trở lại các nghiên cứu sâu hơn về dòng chảy này về sau.

1.3.2.2 Dòng chảy xoay

1.4 Mô tả các đại lượng vật lý

1.4.1 Trong hình thức luận Lagrange

Theo hình thức luận Lagrange, ta sẽ đi theo từng hạt lưu chất. Do đó khi muốn khảo sát một đại lượng nào đó, ta sẽ gắn nó với một hạt lưu chất và theo dõi sự biến thiên của nó. Cụ thể hơn, đối với một đại lượng vật lý $\mathscr{B}$, ta sẽ hình thức hóa nó bởi:

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.32}$$

Như vậy, sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian đơn giản chỉ là đạo hàm riêng theo thời gian:

$$\frac{d\mathscr{B}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.33}$$

Phép đạo hàm này được gọi là ***đạo hàm hạt***. Để phân biệt nó về mặt kí hiệu, ta viết:

$$\boxed{\frac{D\mathscr{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}\left(\underline{X}, t\right)}. \tag{1.34}$$

1.4.2 Trong hình thức luận Euler

Theo hình thức luận Euler, ta sẽ đứng yêu tại một điểm trong không gian và khảo sát một đại lượng nào đó. Do đó, ta chỉ còn có thể khảo sát sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian và việc sử dụng khái niệm trường là không thể tránh khỏi. Cụ thể hơn, với một đại lượng vật lý $\mathscr{B}$, ta sẽ hình thức hóa nó bởi:

$$\mathscr{B} = \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right). \tag{1.35}$$

Sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian không dể để khảo sát như lúc trước nữa vì giá trị của nó không còn là một giá trị nội tại của riêng từng lưu chất nữa. Bây giờ, giá trị đo được của nó tại một điểm cho trước là một giá trị mang tính tập hợp, có nghĩa là tùy theo hạt lưu chất đi qua điểm khảo sát.

Tương tự như sự duy nhất của vận tốc, giá trị của đại lượng này chỉ có một bất chấp là hình thức luận nào đang được dùng để khảo sát. Do đó, giá trị đo được của đại lượng đó tại một thời điểm t ở điểm $\underline{x}$ cố định chính là giá trị của đại lượng tương ứng của hạt lưu chất có mặt tại thời điểm đó, tức là:

$$\mathscr{B} = \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right) = \mathscr{B}\left(\underline{\phi}^{-1}\left(\underline{x}, t\right), t\right). \tag{1.36}$$

1.4.3 Phép đạo hàm hạt

Sau khi đã nêu ra sự khó khăn của việc khảo sát các đại lượng vật lý bằng hình thức luận Euler, ta thấy được điều ngược lại xảy ra đối với hình thức luận Lagrange. Tuy nhiên, hình thức luận Lagragne lại rất khó triển khai trong thực tế. Do đó bây giờ ta sẽ liên kết hai hình thức luận này lại với nhau để khảo sát sự biến thiên theo thời gian của đại lượng vật lý $\mathscr{B}$.

Đầu tiên, ta sẽ cố định tại một vị trí $\underline{x}$ trong không gian và thực hiện đo đại lượng vật lý này ở thời điểm t, thu được:

$$\mathscr{B} = \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right) \tag{1.37}$$

Ta hãy tưởng tượng có một người khác đang đi theo hạt lưu chất nào đó mà ở thời điểm t, hạt lưu chất và cả người này đến tại vị trí $\underline{x}$. Người này đo được giá trị:

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}\left(\underline{X}, t\right). \tag{1.38}$$

Ở thời điểm gặp nhau, hai người đồng ý với nhau rằng họ cùng đo được một giá trị cho đại lượng $\mathscr{B}$. Sau đó họ đi xa khỏi nhau,. Sau một khoảng thời gian vô cùng nhỏ δt, người trên hạt lưu chất sẽ dời đi một lượng $\underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t$. Như vậy, người này đo được giá trị là:

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}\left(\underline{X}, t + \delta t\right). \tag{1.39}$$

Ở vị trí mới này, giá trị đại lượng này được một người cố định ở đó đo được:

$$\mathscr{B} = \mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t + \delta t\right). \tag{1.40}$$

Sự biến thiên của đại lượng này theo thời gian sẽ được tính bởi:

$$\boxed{\frac{D\mathscr{B}}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left(\mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t + \delta t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right)\right)}. \tag{1.41}$$

1.4.3.1 Tính toán cho đại lượng điểm

Đại lượng điểm, tức là các đại lượng xác định tại mỗi điểm trong không gian. Nói cách khác, đó chính là các trường, bao gồm các trường vô hướng, vecteur và tenseur. Bây giờ triển khai định nghĩa (1.41), ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathscr{B}}{Dt} &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left(\mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t + \delta t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right)\right) \\
&= \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left[\left(\mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t + \delta t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t\right)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\mathscr{b}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right)\right)\right] \\
&= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial t}\left(\underline{x} + \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)\delta t, t\right) + \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial \underline{x}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{u}\left(\underline{x}, t\right) \\
&= \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial t}\left(\underline{x}, t\right) + \nabla \mathscr{b}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)
\end{aligned}$$

Đối với đại lượng vô hướng, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\mathscr{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial t}\left(\underline{x}, t\right) + \underline{\nabla \mathscr{b}}\left(\underline{x}, t\right) \cdot \underline{u}\left(\underline{x}, t\right)}, \tag{1.42}$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu $\mathscr{b}$ vào bên trong dấu vecteur thành $\underline{\nabla \mathscr{b}}$ để nhấn mạnh rằng gphép lấy gradient cho ta một vecteur.

Đối với một đại lượng vecteur, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\underline{\mathscr{B}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\mathscr{b}}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\nabla \cdot \mathscr{b}}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)}, \tag{1.43}$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu $\mathscr{b}$ vào bên trong dấu tenseur hạng hai để nhấn mạnh rằng phép lấy gradient cho ta một tenseur hạng hai.

Đối với một đại lượng tenseur hạng hai, phép đạo hàm này được diễn giải thành:

$$\boxed{\frac{D\underline{\underline{\mathscr{B}}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathscr{b}}}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\underline{\nabla \cdot \mathscr{b}}}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)}, \tag{1.44}$$

trong đó ta đã đưa kí hiệu $\mathscr{b}$ vào bên trong dấu tenseur hạng ba để nhấn mạnh rằng phép lấy gradient cho ta một tenseur hạng ba.

1.4.3.2 Tính toán cho đại lượng thể tích

Đối với một đại lượng thể tích, người ta sẽ quan tâm đến mật độ thể tích của đại lượng này, $\mathscr{b}(\underline{x}, t)$. Với sự hỗ trợ của phép tính tích phân ba lớp, ta có:

$$\mathscr{B} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathscr{b}(\underline{x}, t)\, d\tau. \tag{1.45}$$

trong đó $d\tau$ là thể tích vi mô của thể tích $\mathscr{V}$. Để giải quyết phép đạo hàm hạt của thể tích này, chúng ta sẽ đưa vào hai khái niệm quan trọng sau:

- ***Thể tích kiểm soát:*** đây là một thể tích mà nó được giới hạn bởi một bề mặt sao cho thể tích này cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Đây là một thể tích được liên kết với hình thức luận Euler.
- ***Thể tích vật chất:*** đây là một thể tích mà nó được giới hạn bởi một ***mặt vật chất***, có nghĩa là một bề mặt được tạo ra bởi sự sắp xếp của các hạt lưu chất trên đó[10]. Đây là một thể tích được liên kết với hình thức luận Lagrange.

Hiển nhiên, đối với một thể tích kiểm soát thì có các hạt lưu chất đi vào và đi ra nó, còn thể tích vật chất bị vận chuyển đi cùng với lưu chất. Điều này chứng tỏ không có hạt vật chất nào vận chuyển vào hoặc vận chuyển ra khỏi thể tích vật chất.

Bây giờ ta sẽ thực hiện đạo hàm tích phân (1.45). Đương nhiên là thể tích $\mathscr{V}$ được khảo sát phải là thể tích vật chất, nó bị kéo đi trong lưu chất và ta sẽ liên kết nó với các thể tích kiểm soát tại từng vị trí mà nó đi qua. Do đó:

$$\frac{D\mathscr{B}}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \left(\iiint_{\mathscr{V}(t+\delta t)} \mathscr{b}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t)\,\delta t, t + \delta t)\, d\tau - \iiint_{\mathscr{V}(t)} \mathscr{b}(\underline{x}, t)\, d\tau \right)$$

[10] Ta đã đề cập đến các tính chất của nó trong phần giả thiết liên tục theo hình thức luận Lagrange.

Khi sử dụng đến các thể tích được mô tả trong Hình. 1.1, hai số hạng trong ngoặc được biến đổi thành:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x}+\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\delta t, t+\delta t\right) d\tau + \iiint_{\mathscr{V}^+} \mathscr{b}\left(\underline{x}+\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\delta t, t+\delta t\right) d\tau \\
&\quad - \iiint_{\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right) d\tau - \iiint_{\mathscr{V}^-} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right) d\tau \\
&= \iiint_{\mathscr{V}^p} \left(\mathscr{b}\left(\underline{x}+\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\delta t, t+\delta t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\right) d\tau \\
&\quad + \iiint_{\mathscr{V}^+} \mathscr{b}\left(\underline{x}+\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\delta t, t+\delta t\right) d\tau - \iiint_{\mathscr{V}^-} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right) d\tau
\end{aligned}$$

Vì thể tích $\mathscr{V}^p$ là một thể tích "cố định"tức thời ở thời điểm đang xét, các điểm được tính tích phân sẽ không ra khỏi thể tích này, ta sẽ kí hiệu đơn giản các điểm trong thể tích bởi đơn giản một vecteur vị trí $\underline{x}$ và do đó:

$$\iiint_{\mathscr{V}^p} \left(\mathscr{b}\left(\underline{x},t+\delta t\right) - \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\right) d\tau = \delta t \iiint_{\mathscr{V}^p} \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial t}\left(\underline{x},t\right) d\tau$$

Tích phân trên hai thể tích $\mathscr{V}^\pm$ được tính dựa vào sự vận chuyển của thể tích $\mathscr{V}$, sau đó dựa vào phần tử diện tích :

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathscr{V}^+} \mathscr{b}\left(\underline{x}+\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\delta t, t+\delta t\right) d\tau - \iiint_{\mathscr{V}^-} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right) d\tau = \\
&= \delta t \iint_{\partial\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\cdot d\underline{S} - \delta t \iint_{\partial\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\cdot d\underline{S} \\
&= \delta t \oiint_{\partial\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\cdot d\underline{S}
\end{aligned}$$

Như vậy, đạo hàm hạt của tích phân của đại lượng thể tích được tính:

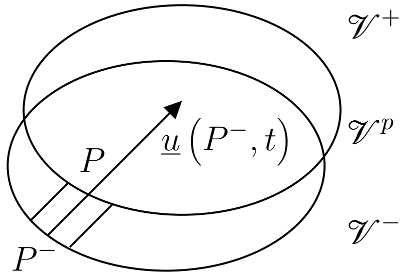
$$\boxed{\frac{D\mathscr{B}}{Dt} = \iiint_{\mathscr{V}^p} \frac{\partial \mathscr{b}}{\partial t}\left(\underline{x},t\right) d\tau + \oiint_{\partial\mathscr{V}^p} \mathscr{b}\left(\underline{x},t\right)\underline{u}\left(\underline{x},t\right)\cdot d\underline{S}}. \tag{1.46}$$

Biểu thức này là tổng quát cho các đại lượng vô hướng, vecteur và tenseur hạng hai.

Khi chỉ cần tính đến các tích phân thể tích, ta có thể viết dựa vào divergence của đại lượng:

1.4.3.3 Tính toán cho đại lượng mặt

Đối với đại lượng mặt, thực hiện phép đạo hàm tương tự như đối với trường hợp đại lượng thể tích, ta thu được công thức quan trọng sau:



Hình 1.1: Thể tích vật chất được xem xét để tính đạo hàm hạt là thể tích $\mathscr{V}$, ở thời điểm t nó là phần hình bao ở phía dưới, ở thời điểm $t + \delta t$ nó là phần hình bao ở phía trên. Phần giao nhau giữa hai hình bao, $\mathscr{V}^p$, chính là phần thể tích cố định giữa hai thời điểm khảo sát; còn hai phần hình bán nguyệt là phần thể tích lưu chất đã bị dịch chuyển mà ta kí hiệu là $\mathscr{V}^+$ và $\mathscr{V}^-$. Điểm P^- nằm trên bề mặt có vận tốc ở thời điểm t là $\underline{u}(P^-, t)$ đã bị dịch chuyển thành điểm P cũng nằm trên bề mặt.

1.4.3.4 Tính toán cho đại lượng đường

1.5 Mô tả động lực học lưu chất

1.5.1 Động

Chương 2

THỦY TĨNH HỌC

Chương 3

ĐỘNG HỌC LƯU CHẤT

Chương 4

ĐỘNG LỰC HỌC LƯU CHẤT

Chương 5

LƯU CHẤT LÝ TƯỞNG

Chương 6

LƯU CHẤT THỰC

Chương 7

LƯU BIẾN HỌC

Chương 8

ĐỘNG HỌC XOÁY