

Mặc dù có tên gọi là mô tả động học, ta sẽ đề cập không chỉ về động lực học của lưu chất mà còn về sự biến dạng của lưu chất. Như đã đề cập, lưu chất là môi trường liên tục, do đó, tính chất rất quan trọng của chúng là sự biến dạng¹. Ở đây ta sẽ không tiếp cận như cách mà cơ học môi trường liên tục, tức là không nghiên cứu *độ dãn* của các phần tử lưu chất, mà sẽ chỉ nghiên cứu thông qua vận tốc của các hạt lưu chất².

0.0.1 Tốc độ biến dạng của một vecteur vật chất

Như đã đề cập, ta sẽ nghiên cứu sự biến dạng với trọng tâm là sự khảo sát trường vận tốc của lưu chất.

Đầu tiên, ở một thời điểm xác định t , ta chọn bên trong lưu chất hai điểm vật chất³, M_1 và M_2 , ở lân cận nhau. Ta kí hiệu vecteur nối hai điểm này là $\underline{dx} = \underline{M_1 M_2}$. Để nghiên cứu chúng, ta sẽ truy ngược về hình thái κ_0 , và ta sẽ tìm được hai vị trí \underline{X}_1 và \underline{X}_2 sao cho:

$$\underline{OM_1} = \underline{\phi}(\underline{X}_1, t) \quad \text{và} \quad \underline{OM_2} = \underline{\phi}(\underline{X}_2, t).$$

Ta kí hiệu vecteur vật chất trong hình thái κ_0 bởi $\underline{dX} = \underline{X}_2 - \underline{X}_1 = \underline{X_1 X_2}$. Như vậy, vecteur vật chất này chịu sự xử lý toán học dưới đây:

$$\begin{aligned} \underline{dx} &= \underline{\phi}(\underline{X}_2, t) - \underline{\phi}(\underline{X}_1, t) \\ &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}_1, t) \cdot \underline{dX}. \end{aligned}$$

Do đó, khi đưa vào khái niệm **gradient biến đổi** được định nghĩa như sau:

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla_X \phi}}(\underline{X}, t)} \quad (1)$$

(trong đó kí hiệu ∇_X muốn nhấn mạnh việc lấy gradient của một hàm vecteur trong hình thái tham chiếu), hệ thức trên được viết thành:

$$\underline{dx} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX}. \quad (2)$$

Ở một thời điểm $t + \delta t$ vô cùng bé sau đó, hai điểm này bị các hạt lưu chất tương ứng kéo đi và trở thành hai điểm vật chất mới mà ta kí hiệu tương ứng là M'_1 và M'_2 . Do đó:

$$\underline{OM'_1} = \underline{\phi}(\underline{X}_1, t + \delta t) \quad \text{và} \quad \underline{OM'_2} = \underline{\phi}(\underline{X}_2, t + \delta t).$$

¹Không phải sự dãn chỗ, ta sẽ nói kỹ hơn về sự phân biệt về sự biến dạng và sự dãn chỗ.

²Điều này là hiển nhiên, vì lưu chất rất linh động, chúng di chuyển dễ dàng và không có hình dạng xác định do đó việc nghiên cứu lưu chất qua biến dạng là không hợp lý.

³Tức là hai điểm nằm trên hai hạt lưu chất, ta muốn dùng từ này để nhấn mạnh lên tính chất của điểm này.

Vecteur vật chất mới này được xử lý toán học tương tự như ở phía trên:

$$\begin{aligned}\underline{dx}' &:= \underline{M'_1 M'_2} = \underline{\phi}(X_2, t + \delta t) - \underline{\phi}(X_1, t + \delta t) \\ &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X}(X_1, t + \delta t) \cdot \underline{dX}.\end{aligned}$$

Như vậy hai vecteur này có liên hệ với nhau bởi:

$$\begin{aligned}\underline{dx}' &= \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X}(X_1, t + \delta t) \cdot \underline{dX} \\ &= \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial X \partial t}(X_1, t) \cdot \underline{dX} \delta t \\ &= \underline{\nabla_X} \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right) (X_1, t) \cdot \underline{dX} \delta t\end{aligned}$$

Khi đưa vào định nghĩa gradient của trường vận tốc:

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla_X U}}(X, t) := \underline{\nabla_X} \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right) (X, t) \text{ khi } \underline{x} = \underline{\phi}(X, t).} \quad (3)$$

Ta có thể biểu diễn sự liên hệ giữa hai vecteur vật chất vô cùng bé bên trên:

$$\begin{aligned}\underline{dx}' &= \underline{\underline{\nabla_X U}}(X, t) \cdot \underline{dX} \delta t \\ &= \underline{\underline{\nabla_X U}}(X, t) \cdot (\underline{F}^{-1}(X, t) \cdot \underline{dx}) \delta t.\end{aligned}$$

Ta gọi đạo hàm vật chất của một vecteur vô cùng nhỏ đặt tại điểm \underline{M}_1 ở thời điểm t bởi:

$$\dot{\underline{dx}} := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{dx}' - \underline{dx}}{\delta t} = \boxed{(\underline{\underline{\nabla_X U}}(X, t) \cdot \underline{F}^{-1}(X, t)) \cdot \underline{dx}}.$$

Khi đó, đạo hàm vật chất của một vecteur vật chất vô cùng bé được viết lại khi định nghĩa gradient của trường vận tốc trong hình thái κ_t :

$$\boxed{\dot{\underline{dx}} = \underline{\underline{\nabla u}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}.} \quad (4)$$

trong đó:

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla u}}(\underline{x}, t) := \underline{\underline{\nabla_X U}}(X, t) \cdot \underline{F}^{-1}(X, t) \text{ khi } \underline{x} = \underline{\phi}(X, t).} \quad (5)$$

0.0.2 Tốc độ giãn nở của thể tích

Chọn một hệ tọa độ Descartes trực chuẩn $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ cố định trong không gian. Xét ba vecteur vật chất \underline{dx}_1 , \underline{dx}_2 và \underline{dx}_3 không đồng phẳng đặt tại điểm

\underline{x} trong hình thái κ_t . Thể tích của hình lăng trụ được tạo bởi ba vecteur này được tính thông qua sự hỗ trợ của hệ tọa độ vừa chọn ở bên trên. Đầu tiên, ta định nghĩa tensor thể tích⁴:

$$\underline{\underline{\mathcal{V}}} = \underline{dx}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{dx}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{dx}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Nhờ vào nó, ta tính được thể tích của hình lăng trụ bên trên:

$$d\Omega_t = \det \underline{\underline{\mathcal{V}}}. \quad (6)$$

Sau đó, ở thời điểm $t + \delta t$, các vecteur này lần lượt bị dịch chuyển thành ba vecteur vật chất mới \underline{dx}'_1 , \underline{dx}'_2 và \underline{dx}'_3 đặt tại vị trí \underline{x}' và ta tính tensor thể tích tương tự như bên trên:

$$\underline{\underline{\mathcal{V}}} = \underline{dx}'_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{dx}'_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{dx}'_3 \otimes \underline{e}_3$$

Nhờ vào nó, ta tính được thể tích của hình lăng trụ mới:

$$d\Omega_{t+\delta t} = \det \underline{\underline{\mathcal{V}}}. \quad (7)$$

Dựa vào công thức đạo hàm hạt của vecteur vật chất đã tìm ra ở bên trên, ta có thể biến đổi:

$$\begin{aligned} d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t &= \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}'_1 & \underline{dx}'_2 & \underline{dx}'_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{dx}_3 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}'_1 - \underline{dx}_1 & \underline{dx}'_2 & \underline{dx}'_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}'_2 - \underline{dx}_2 & \underline{dx}'_3 \end{array} \right| \\ &\quad + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{dx}'_3 - \underline{dx}_3 \end{array} \right| \\ &= \delta t \left(\left| \begin{array}{ccc} \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_1 & \underline{dx}'_2 & \underline{dx}'_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_2 & \underline{dx}'_3 \end{array} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_3 \end{array} \right| \right) \end{aligned}$$

Nếu như chỉ dừng lại ở các khai triển bậc một, ta có:

$$\begin{aligned} d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t &= \delta t \left(\left| \begin{array}{ccc} \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{dx}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_2 & \underline{dx}_3 \end{array} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_3 \end{array} \right| \right) \end{aligned}$$

Do đó tốc độ biến đổi thể tích

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{d\Omega_{t+\delta t} - d\Omega_t}{\delta t} &= \left| \begin{array}{ccc} \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{dx}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_2 & \underline{dx}_3 \end{array} \right| \\ &\quad + \left| \begin{array}{ccc} \underline{dx}_1 & \underline{dx}_2 & \underline{\nabla}u \cdot \underline{dx}_3 \end{array} \right| \\ &= \underline{\underline{\nabla}}u : \underline{\underline{\mathbb{1}}} d\Omega_t \end{aligned}$$

⁴Đơn giản là việc sắp xếp các vecteur thành một ma trận vuông mà lần lượt mỗi vecteur vật chất tạo thành một cột của ma trận này. Chúng tôi không viết đơn giản, vì ở đây, chúng tôi muốn nhấn mạnh đến quan điểm "thao tác".

Mà ta có thể viết gọn lại thành:

$$\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (8)$$

Công thức này cho ta thấy vai trò của *div* của trường vận tốc, nó đại diện cho mức độ giãn nở của lưu chất. Ta sẽ biểu diễn lại vai trò này thông qua tốc độ biến đổi thể tích tương đối:

$$\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_t}(\underline{x}, t) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) \quad (9)$$

0.0.3 Tốc độ xoay của lưu chất

Lấy lại phép đạo hàm vật chất của một vecteur vật chất vô cùng nhỏ đã thực hiện bên trên:

$$\dot{\underline{dx}} = \underline{\nabla u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx}$$

Phân tích phép tính này, khi phân tích thành phần của $\underline{\nabla u}$, ta thấy có tồn tại hai tenseur hạng hai đối xứng \underline{d} và phản đối xứng $\underline{\omega}$ sao cho:

$$\underline{\nabla u}(\underline{x}, t) = \underline{d}(\underline{x}, t) + \underline{\omega}(\underline{x}, t) \quad (10)$$

Ta gọi $\underline{d}(\underline{x}, t)$ là **tenseur tốc độ biến dạng** và $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ là **tenseur tốc độ xoay**. Hiển nhiên, vì là các thành phần đối xứng và phản đối xứng của trường vận tốc, định nghĩa của chúng như sau:

$$\underline{d}(\underline{x}, t) := \frac{1}{2} (\underline{\nabla u}(\underline{x}, t) + {}^t\underline{\nabla u}(\underline{x}, t)) \quad (11)$$

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) := \frac{1}{2} (\underline{\nabla u}(\underline{x}, t) - {}^t\underline{\nabla u}(\underline{x}, t)) \quad (12)$$

Khi phân tích phép nhân tenseur rút gọn của tenseur phản đối xứng với vecteur vật chất vô cùng nhỏ, theo những gì phát triển trong đại số, ta thấy tồn tại một giả-vecteur $\underline{\omega}$ mà ta gọi là **vecteur xoay**, sao cho:

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} = \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge \underline{dx}. \quad (13)$$

Kết hợp những điều này lại với nhau, ta thu được một công thức quan trọng về đạo hàm hạt một vecteur vật chất vô cùng nhỏ:

$$\boxed{\dot{\underline{dx}} = \underline{d}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} + \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge \underline{dx}}. \quad (14)$$

Đây là một công thức biểu thị sự biến dạng tổng quát của lưu chất. Nó thể hiện hai sự biến dạng điển hình của lưu chất là sự giãn nở của lưu chất và sự xoay của lưu chất một cách địa phương.

Bây giờ ta sẽ liên hệ nó với trường vận tốc. Khi khai triển công thức (13) trong hệ tọa độ Descartes trực chuẩn ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) ta có:

$$\begin{aligned}\underline{\omega}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{x} &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \right) \\ &\quad \cdot (dx_1 \underline{e}_1 + dx_2 \underline{e}_2 + dx_3 \underline{e}_3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) (dx_2 \underline{e}_1 - dx_1 \underline{e}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) (dx_3 \underline{e}_1 - dx_1 \underline{e}_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) (dx_3 \underline{e}_2 - dx_2 \underline{e}_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\omega} \wedge d\underline{x} &= (\omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3) \wedge (dx_1 \underline{e}_1 + dx_2 \underline{e}_2 + dx_3 \underline{e}_3) \\ &= (\omega_2 dx_3 - \omega_3 dx_2) \underline{e}_1 + (\omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3) \underline{e}_2 + (\omega_1 dx_2 - \omega_2 dx_1) \underline{e}_3.\end{aligned}$$

So sánh hai biểu thức này, ta thu được:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Các thành phần này không gì khác hơn chính là các thành phần của vecteur thu được khi lấy rota của trường vận tốc, do đó ta đã thiết lập được công thức quan trọng sau:

$$\boxed{\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \nabla \wedge \underline{u}(\underline{x}, t)}. \quad (15)$$

Như vậy bằng việc đưa vào vecteur xoay (địa phương) của lưu chất, ta có thể biểu diễn thành phần xoay của tốc độ biến dạng của một vecteur vật chất vô cùng bé bất kỳ bên trong lưu chất. Hơn nữa, việc liên hệ vecteur xoay này với rota của trường vận tốc cho ta thấy một kết luận quan trọng: ***chuyển động của lưu chất thể hiện sự xoay khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một điểm bên trong lòng lưu chất sao cho rota của trường vận tốc tại điểm này là khác không***. Nói cách khác, một lưu chất chuyển động không xoay khi và chỉ khi rota của trường vận tốc của lưu chất là triệt tiêu tại mọi điểm.

Nhận xét: Đối với một vật rắn hình trụ chuyển động xoay đều xung quanh trục \underline{e}_z cố định của nó, trường vận tốc của vật rắn này được viết:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \omega r \underline{e}_\theta. \quad (16)$$

trong đó \underline{e}_θ chính là vecteur trục xuyên tâm của hệ tọa độ trụ, ω là tốc độ góc của hình trụ và r là khoảng cách đến trục. Lấy rota của trường vận tốc này, ta có:

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{u}(\underline{x}, t) = 2\omega \underline{e}_z.$$

Điều này biện minh cho tên gọi vecteur xoay của thành phần rota của trường vận tốc.