Chương 1

DÒNG CHẢY NÉN ĐƯỢC DƯỚI ÂM QUA BIÊN DẠNG CÁNH

Các nghiên cứu về biên dạng cánh mà chúng ta đã thực hiện được thực hiện trong khuôn khổ dòng chảy không nén được. Tuy nhiên, một máy bay hiện đại không bao giờ bay ở số Mach thấp (dưới 0.3, mà ứng với nó vận tốc máy bay vào cở $400\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$), thực tế các máy bay dân sự thường bay ở vận tốc cận âm. Như vậy, các đặc tính của biên dạng cánh đã nghiên cứu có thể không còn phù hợp, do đó chương này sẽ thực hiện nghiên cứu lại các đặc tính khí động của biên dạng cánh trong trường hợp dòng chảy cận âm (đương nhiên là không thể bỏ qua đặc tính nén được).

1.1 Phương trình thế vận tốc

Ta vẫn đặc mình trong khuôn khổ dòng chuyển động không nhớt, dừng. Như vậy, dòng chuyển động này không có bất kỳ cơ chế nào để sinh ra các nguồn xoáy, và do đó ta sẽ xem dòng chuyển động như là ***dòng chuyển động thế*** .

Phương trình bảo toàn lưu lượng đối với dòng chảy hai chiều được viết:

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0. \tag{1.1}$$

Khai triển biểu diễn dive của phương trình này ra, ta thu được:

$$\rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{\nabla} \rho \cdot \underline{u} = 0. \tag{1.2}$$

Nếu kí hiệu vận tốc dòng là $\boxed{\underline{u} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y}$, tiếp tục khai triển phương trình vô hướng này:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

Dòng chuyển động là không nhớt, sử dụng phương trình Euler ta có:

$$\rho\left(\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)\underline{u} = -\underline{\nabla}p. \tag{1.4}$$

Biến đổi vế trái của (1.4) nhờ các phép biến đổi sau, trong đó đại lượng độ xoáy của trường vecteur là bằng không do các khuôn khổ khảo sát của chúng ta:

$$\rho\left(\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right)\underline{u} = \rho\nabla\cdot\left(\frac{\underline{u}^2}{2}\right) + \rho\underbrace{\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{u}\right)\wedge\underline{u}}_{=\underline{0}} = \frac{\rho}{2}\nabla\cdot\left(\underline{u}^2\right) = -\underline{\nabla}p.$$

Chiếu phương trình này theo các phương, ta có:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2\right) \tag{1.6}$$

Để tiếp tục biến đổi, ta sẽ đưa vào vận tốc âm thanh địa phương được định nghĩa bởi:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cte} \tag{1.7}$$

Điều kiện này được áp dụng đúng cho mọi điểm của lưu chất bởi vì dòng chuyển động là đẳng entropy, do đó khi sử dụng định nghĩa này, theo phương x, ta có:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right) = c^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Tức là đối với cả hai phương x và y, ta có:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{2c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{2c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2\right) \tag{1.9}$$

Thay thế biểu thức này vào phương trình liên tục (1.3), ta biến đổi:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\rho u}{2c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right) + \frac{\rho v}{2c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2\right)$$

Dòng chuyển động là dòng chuyển động thế, tức là tồn tại một thế vô hướng ϕ xác định tại mọi điểm của dòng chuyển động, thay thế biểu thức vận tốc thông qua thế vận tốc vô hướng, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right)+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2\right)\\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Biếu đổi tiếp tục các biểu thức trong dấu ngoặc vuông rồi nhóm các số hạng lại với nhau tùy theo thừa số chung, ta thu được phương trình quan trọng sau:

$$\boxed{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{2}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=0} \tag{1.10}$$

Phương trình này tuy có dạng khá tốt, nó vẫn chưa đầy đủ vì vận tốc âm thanh cục bộ là phụ thuộc vào số Mach, ta có từ các chương trước:

$$c^2=c_0^2+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \tag{1.11}$$

trong đó số Mach được tính:

$$M^2=\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{1.12}$$

Như vậy, ta đã thu được hệ ba phương trình (mà thực ra là một phương trình mà chúng ta không muốn viết chúng quá cồng kềnh) mà nó chỉ có một ẩn chưa biết, đó là thế vận tốc ϕ. Việc tìm được ϕ sẽ được thực hiện bằng việc giải hệ phương trình này kết hợp với điều kiện biên sẽ giúp ta tính được mọi đặc điểm của dòng chuyển động nén được qua biên dạng cánh.

Nhận xét 1 : Khi đưa vào vận tốc âm thanh địa phương, chúng ta đã rút gọn các định luật cơ học dạng vecteur thành một phương trình vô hướng của duy nhất một đại lượng vô hướng là thế vận tốc và điều này giúp cho phương trình dể giải hơn. Đây là một lợi tốt khi chúng ta đặc mình trong khuôn khổ dòng chuyển động không xoay, đẳng entropy và dừng.

Nhận xét 2: Mặc dù đơn giản là thế, hệ ba phương trình này là phi tuyến. Việc tìm kiếm nghiệm giải tích của các phương trình vi phân đạo hàm riêng phi tuyến là gần như bất khả thi, do đó ta sẽ không bao giờ tìm nghiệm giải tích của hệ phương trình này. Để triển khai các phương trình này, người ta chủ yếu sử dụng các phương pháp số thông qua máy tính hơn là tìm kiếm các nghiệm giải tích.

1.2 Tuyến tính hóa phương trình thế vận tốc vô hướng

Như đã thảo luận ở trên, hệ ba phương trình này là phi tuyến. Bây giờ ta sẽ áp đặt các giả thiết phù hợp để tuyến tính hóa các phương trình này để thao tác các phương trình này đơn giản hơn.

Giả thiết dòng chuyển động tự do chỉ chuyển động theo một chiều, tức là $\boxed{\underline{V}_\infty = V_\infty \underline{e}_x}$. Lúc này, áp dụng giả thiết dòng đi qua biên dạng cánh là nhiễu loạn nhỏ, ta có:

$$\underline{u} = (V_\infty + \widehat{u})\underline{e}_x + \widehat{v}\underline{e}_x, \tag{1.13}$$

trong đó $\widehat{u}, \widehat{v} \ll V_\infty$. Thế vận tốc như vậy sẽ có một số hạng nhiễu loạn chồng chập với số hạng thế vận tốc dòng tự do:

$$\phi = V_\infty x + \widehat{\phi}. \tag{1.14}$$

Trong đó, vận tốc nhiễu loạn được tính:

$$\widehat{u} = \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x} \quad \text{và} \quad \widehat{v} = \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial y} \tag{1.15}$$

Tính toán các đạo hàm bậc một và bậc hai của ϕ theo x và y rồi thay thế vào phương trình (1.10), tiếp theo nhân hai vế của nó với c^2, ta có:

$$\left[c^2 - \left(V_\infty + \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial x^2} + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2} - 2\left(V_\infty + \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x}\right) \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Phương trình này được gọi là ***phương trình thế vận tốc nhiễu loạn***. Tiếp theo để tính đến sự biến đổi của vận tốc lan truyền âm thanh địa phương theo phương trình năng lượng được viết khi tính đến các vận tốc nhiễu loạn:

$$\frac{c_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{(V_\infty + \widehat{u})^2 + \widehat{v}^2}{2} \tag{1.16}$$

Thay thế phương trình này vào phương trình thế nhiễu loạn, ta có số hạng trong dấu ngoặc vuông được biến đổi:

$$c^2 - \left(V_\infty + \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial x}\right)^2 = c_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}V_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}\left[(V_\infty + \widehat{u})^2 + \widehat{v}^2\right] - \left(V_\infty + \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial x}\right)^2$$
$$\approx c_\infty^2\left(1 - M_\infty^2\right).$$

Trong đó ta đã bỏ đi các số hạng có bậc cao hơn bậc một, tức là đã bỏ qua các số hạng $\widehat{u}^2$ và $\widehat{v}^2$. Tương tự, số hạng trong ngoặc vuông thứ hai được rút gọn thành c_∞^2. Số hạng thứ ba được biến đổi thành:

$$\left(V_\infty + \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial x}\right)\frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial y}\frac{\partial^2\widehat{\phi}}{\partial x\partial y} =$$

của phương trình có bậc hai theo số Mach của dòng tự do. Do đó ta đơn giản được phương trình này thành:

$$\boxed{\left(1 - M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\widehat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widehat{\phi}}{\partial y^2} = 0}. \tag{1.17}$$

Như vậy ta thu được một phương trình vi phân đạo hàm riêng tuyến tính, dạng của nó đã đơn giản hơn.

1.3 Sử dụng phương trình thế vận tốc đã tuyến tính hóa