TOÁN RỜI RẠC

Giảng viên: Nguyễn Văn Sơn

Đề cương môn học

Chương 1: Logic toán học
Chương 2: Các phương pháp đếm
Chương 3: Cấu trúc đại số
Chương 4: Một số vấn đề về lý thuyết đồ thị

Tài liệu tham khảo

- Kenneth H. Rosen- Người dịch: Phan Văn Thiều, Đặng Hữu Thịnh , "Toán học rời rạc và ứng dụng tin học", Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

- Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành, "Toán rời rạc", Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, 2010.

- Đỗ Đức Giáo, "Toán rời rạc ứng dụng trong tin học ", Nhà xuất bản giáo dục Việt Nam, 2011.

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LÔGIC

- Mệnh đề
- Biểu thức logic (Dạng mệnh đề)
- Qui tắc suy diễn
- Vị từ, lượng từ
- Quy nạp toán học

"Toan tính của chiến lược gia 44 tuổi đã suýt thành công nếu ông không tính tới đột biến từ những ngôi sao đối phương".

Nguồn:

http://thethao.vnexpress.net

Mệnh đề

Định nghĩa: Mệnh đề là một khẳng định có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.

Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh… không là mệnh đề.

Ví dụ:

- Học viện KTMM trực thuộc Ban Cơ yếu CP.
- 1+7 =8.
- Hôm nay em đẹp quá! (không là mệnh đề)
- Hôm nay em ăn cơm chưa? (không là mệnh đề)

Mệnh đề

- Ký hiệu: người ta dùng các ký hiệu P, Q, R… (p,q,r,…) để chỉ mệnh đề.
- Chân trị của mệnh đề: Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.
- Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1(hay Đ,T) và 0(hay S,F)

Mệnh đề

Phân loại: gồm 2 loại

- Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, khi và chỉ khi,…) hoặc trạng từ “không”
- Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ “không”

Mệnh đề

Ví dụ:

- 2 là số nguyên tố.
- 2 không là số nguyên tố.
- 2 là số nguyên tố và là số lẻ.
- An đang xem ti vi hay đang học bài.

Mệnh đề

Các phép toán: có 5 phép toán

1. Phép phủ định: phủ định của mệnh đề P là một mệnh đề, ký hiệu là $\neg P$ hay $\overline{P}$ (đọc là "không" P hay "phủ định của" P).

Bảng chân trị :

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Ví dụ:

- 2 là số nguyên tố.

Phủ định: 2 không là số nguyên tố

- 15 > 5 Phủ định: 15 ≤ 5

Mệnh đề

2. Phép hội (nối liền, giao): của hai mệnh đề P, Q là một mệnh đề, kí hiệu P ∧ Q (đọc là "P và Q)

Bảng chân trị:

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NX: P∧Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

Ví dụ:

P: "Hôm nay là chủ nhật"

Q: "Hôm nay trời mưa"

P ∧ Q: " Hôm nay là chủ nhật và trời mưa"

Mệnh đề

3. Phép tuyển (nối rời, hợp): của hai mệnh đề P, Q là một mệnh đề, kí hiệu P $\vee$ Q (đọc là “P hay Q”).

Bảng chân trị:

P	Q	P$\vee$Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NX: P $\vee$ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Ví dụ:

- e > 4 hay e > 5 (S)
- 2 là số nguyên tố hay là số lẻ (Đ)

Mệnh đề

4. Phép kéo theo: Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q là một mệnh đề, kí hiệu $P \to Q$ (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P").

Bảng chân trị:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

NX: $P \to Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Ví dụ:

e >4 kéo theo 5>6

Mệnh đề

5. Phép kéo theo hai chiều (phép tương đương): Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q và ngược lại (mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q) là một mệnh đề, ký hiệu $P \leftrightarrow Q$ (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q").

Bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NX: $P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Ví dụ: 6 chia hết cho 3 khi và chỉ khi 6 chia hết cho 2

Biểu thức logic (Dạng mệnh đề)

Định nghĩa: Biểu thức logic được cấu tạo từ:

- Các mệnh đề (các hằng mệnh đề)

- Các biến mệnh đề p, q, r, …, tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó

- Các phép toán logic $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc () để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

Ví dụ:

E(p,q) = $\overline{(\bar{p} \vee q)}$

F(p,q,r) = $(p \wedge q) \rightarrow \overline{(q \vee r)}$

Biểu thức logic

Độ ưu tiên của các toán tử logic:

- Ưu tiên mức 1: ()
- Ưu tiên mức 2: $\overline{\quad}$
- Ưu tiên mức 3: $\wedge$, $\vee$
- Ưu tiên mức 4: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Bảng chân trị của một biểu thức logic: là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

Biểu thức logic

Bảng chân trị của một biểu thức logic.

Ví dụ:

Với một biến mệnh đề, ta có hai trường hợp là 0 hoặc 1.

Với hai biến mệnh đề p,q ta có bốn trường hợp chân trị của bộ biến (p,q) là các bộ giá trị (0,0), (0,1), (1,0) và (1,1).

NX: Trong trường hợp tổng quát, nếu có n biến mệnh đề thì ta có 2^n trường hợp chân trị cho bộ n biến.

Biểu thức logic

Ví dụ: Cho $E(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow r$.

Ta có bảng chân trị sau:

p	**q**	**r**	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Biểu thức logic

Tương đương logic: Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu: E ≡ F (E tương đương với F).

Ví dụ: $\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

Biểu thức logic E được gọi là hằng đúng nếu chân trị của E luôn bằng 1(đúng) trong mọi trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề có trong E. Nói cách khác, E là hằng đúng khi ta có E ≡ 1.

Biểu thức logic

Tương tự, E là một hằng sai khi ta có E ≡ 0.

Ví dụ: $E(p,q) = p \wedge \bar{p}$ là hằng sai.

$F(p,q) = (p \to q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ là hằng đúng.

Định lý: Hai biểu thức logic E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là hằng đúng.

Ví dụ: $(p \to q) \equiv (\bar{p} \vee q)$

Hệ quả logic: F được gọi là hệ quả logic của E nếu $E \to F$ là hằng đúng.

Ký hiệu: $E \Rightarrow F$

Ví dụ: $\overline{(p \wedge q)} \Rightarrow \bar{p}$

Biểu thức logic

Dịch câu:

- Xác định các toán tử logic (các liên từ)
- Xác định các mệnh đề thành phần

Ví dụ: “Bạn không được đi xe máy nếu bạn dưới 16 tuổi trừ phi đó là xe phân khối nhỏ hoặc khi bạn có giấy phép đặc biệt”

Các mệnh đề:

Bạn được đi xe máy (p) Xe máy có phân khối nhỏ (r)

Bạn dưới 16 tuổi (q) Bạn có giấy phép đặc biệt (s)

Ta suy ra:

$$(q \wedge (\overline{r \vee s})) \rightarrow \overline{p}$$

Các luật logic

1. Phủ định của phủ định: $\overline{\overline{p}} \equiv p$
2. Qui tắc De Morgan: $\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

   $\overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$
3. Luật giao hoán: $p \vee q \equiv q \vee p$

   $p \wedge q \equiv q \wedge p$
4. Luật kết hợp: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Các luật logic

5. Luật phân phối: $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

   $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

6. Luật lũy đẳng: $p \land p \equiv p$

   $p \lor p \equiv p$

7. Luật trung hòa: $p \lor 0 \equiv p$

   $p \land 1 \equiv p$

8. Luật về phần tử bù: $p \land \overline{p} \equiv 0$

   $p \lor \overline{p} \equiv 1$

Các luật logic

9. Luật thống trị: $p \wedge 0 \equiv 0$

$p \vee 1 \equiv 1$

10. Luật hấp thu: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

11. Luật về phép kéo theo: $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$

$\equiv \overline{q} \to \overline{p}$

Ví dụ: Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng: $(\overline{p} \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \to q) \to r$

Các luật logic

VD: Dùng bảng chân trị chứng minh qui tắc De Morgan

Qui tắc De Morgan: $\overline{(p \vee q)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{(p \wedge q)} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

Các luật logic

Ví dụ: Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng: $(\bar{p} \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$.

Giải:

$$
\begin{aligned}
& (\bar{p} \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \\
\equiv\ & (p \vee r) \wedge (\bar{q} \vee r) \\
\equiv\ & (p \wedge \bar{q}) \vee r \\
\equiv\ & \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee r \\
\equiv\ & \overline{(p \rightarrow q)} \vee r \\
\equiv\ & (p \rightarrow q) \rightarrow r
\end{aligned}
$$

Điều kiện đồng nhất đúng(sai)

Cho p, q là các biến mệnh đề.

$p \wedge \bar{p} \equiv 0$ (hằng sai)

$p \vee \bar{p} \equiv 1$ (hằng đúng)

- **Tuyển sơ cấp**: biểu thức logic chỉ chứa các phép $\vee$ và phủ định.
- **Hội sơ cấp:** biểu thức logic chỉ chứa các phép $\wedge$ và phủ định.

Ví dụ:

$p \wedge q \wedge \bar{p}$ (HSC)

$p \vee \bar{q} \vee p$ (TSC)

Dạng chuẩn tắc

Dạng chuẩn tắc tuyển: tuyển của các HSC

ví dụ: $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$

Dạng chuẩn tắc hội: hội của các TSC

ví dụ: $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$

Mọi biểu thức logic đều đưa được về DCTT và DCTH bằng các phép biến đổi sau:

1: $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$

2: $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

3: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Qui tắc suy diễn

Định nghĩa:

Trong các chứng minh toán học, ta thường thấy những lý luận dẫn xuất có dạng: nếu p_1 và p_2 và p_n thì q.

Dạng lý luận này là đúng khi ta có biểu thức $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ là hằng đúng.

Ta gọi dạng lý luận trên là một quy tắc suy diễn và thường được viết theo các cách sau đây:

Cách 1: Biểu thức hằng đúng

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q] \Leftrightarrow 1$$

Qui tắc suy diễn

Định nghĩa:

Cách 2: Dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Cách 3: Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Các biểu thức logic $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là giả thiết (hay tiên đề), biểu thức q được gọi là kết luận.

Qui tắc suy diễn

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens):

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

$p \rightarrow q$
p

$\therefore q$

Ví dụ:

- Học tốt thi đậu
- SV A học tốt

Suy ra: SV A thi đậu

- Nếu chuồn chuồn bay thấp thì mưa
- Thấy chuồn chuồn bay thấp

Suy ra: trời mưa

Qui tắc suy diễn

2. Qui tắc phủ định (Modus Tollens):

$[(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$

$p \rightarrow q$
$\overline{q}$
$\therefore \overline{p}$

Ví dụ:

- Nếu A đi học đầy đủ thì A đậu toán rời rạc.
- A không đậu toán rời rạc.

Suy ra: A không đi học đầy đủ.

Qui tắc suy diễn

3. Qui tắc tam đoạn luận:

$$[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Ví dụ:

- Nếu trời mưa thì đường ướt
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra: nếu trời mưa thì đường trơn.

Qui tắc suy diễn

Quy tắc tam đoạn luận rời

$p \vee q$ $\overline{q}$	$p \vee q$ $\overline{p}$
$\therefore p$	$\therefore q$

Ý nghĩa: nếu trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp sai thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ đúng

Qui tắc suy diễn

4. Qui tắc phản chứng:

$$\frac{p}{\therefore q} \Rightarrow \frac{\begin{matrix} p \\ \overline{q} \end{matrix}}{\therefore 0}$$

* Tổng quát:

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \overline{q}) \to 0]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng, ta chứng minh nếu thêm phủ định của q vào các tiên đề thì được một mâu thuẫn.

Qui tắc suy diễn

4. Qui tắc phản chứng:

Ví dụ:

Chứng minh suy luận:
$p \rightarrow r$
$\bar{p} \rightarrow q$
$q \rightarrow s$
$\therefore \bar{r} \rightarrow s$

Giải: CM bằng phản chứng
$p \rightarrow r$
$\bar{p} \rightarrow q$
$q \rightarrow s$
$\bar{r}$
$\bar{s}$
$\therefore 0$

Qui tắc suy diễn

5. Qui tắc chứng minh theo trường hợp :

$$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \Rightarrow [(p \vee q) \to r]$$

* Tổng quát:

$$[(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$
$$\Rightarrow [(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q]$$

$$\begin{array}{c} p \to r \\ q \to r \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

6. Qui tắc cộng :

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ p \lor q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

7. Quy tắc rút gọn:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

6.Phản ví dụ:

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay không là một hằng đúng, ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Để tìm một phản ví dụ ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các tiên đề trong phép suy luận là đúng còn kết luận là sai.

Qui tắc suy diễn

6.Phản ví dụ:

Ví dụ: Hãy kiểm tra suy luận:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \\ \overline{r} \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

NX: Ta sẽ tìm p,q,r thỏa

$$\begin{array}{l} p \to r = 1, \\ p = 1 \\ \overline{r} \to q = 1 \\ \hline \therefore q = 0 \end{array}$$

Dễ dàng tìm thấy một phản ví dụ: p=1,q=0,r=1.

Vậy suy luận đã cho là không đúng

Qui tắc suy diễn

6. Phản ví dụ

Ví dụ: Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe.Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

p: ông Minh được tăng lương.

q: ông Minh nghỉ việc.

r: vợ ông Minh mất việc.

s: gia đình phải bán xe.

t: vợ ông hay đi làm trể.

$$\begin{array}{l} \overline{p} \rightarrow q \\ q \wedge r \rightarrow s \\ t \rightarrow r \\ p \\ \hline \therefore \overline{s} \rightarrow \overline{t} \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

Ví dụ:Suy luận sau đúng hay sai

$$\begin{array}{c} \overline{p} \to q \\ q \wedge r \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \overline{s} \to \overline{t} \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

Ví dụ:Suy luận sau đúng hay sai

$$
\begin{array}{c}
\overline{p} \to q \\
q \wedge r \to s \\
t \to r \\
p \\
\hline
\therefore \overline{s} \to \overline{t}
\end{array}
$$

HD: Dùng phản ví dụ: Chọn

p=1, q=0, r=1, s=0, t=1

Suy luận (lập luận) sau đúng hay sai?

Ví dụ:

- Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn.
- Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiền vé phải trả lại cho người xem.
- Nhưng tiền vé đã không trả lại cho người xem.

Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn?

Suy luận (lập luận) sau đúng hay sai?

p: Nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn.
q: số vé bán ra ít hơn 100
r: đêm diễn bị hủy bỏ
s: ông bầu buồn

Type equation here.

t: trả lại tiền vé cho người xem
Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn

$$\begin{array}{l} \overline{p} \vee q \rightarrow r \wedge s \\ r \rightarrow t \\ \overline{t} \\ \hline \therefore p \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{p} \vee q \rightarrow r \wedge s \\ \overline{r} \\ \hline \therefore p \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{\overline{p} \vee q} \vee (r \wedge s) \\ \overline{r} \\ \hline \therefore p \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p \\ \overline{q} \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

- VD1

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

Giải

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

1)	$\overline{s}$	(Tiền đề)
2)	$p \vee s$	(Tiền đề)
3)	p	(Tam đoạn luận rời)
4)	$p \to (q \to r)$	(Tiền đề)
5)	$q \to r$	(Qui tắc khẳng định)
6)	$t \to q$	(Tiền đề)
7)	$t \to r$	(Tam đoạn luận)
	$\therefore \overline{r} \to \overline{t}$	(Luật phản đảo)

Vậy suy luận trên là đúng.

Vị từ - Lượng từ

Định nghĩa:

Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,.. cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề
- Nếu thay x,y,.. thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ:

- p(n) = "n +1 là số nguyên tố"
- q(x,y) = "x + y = 1"

Vị từ - Lượng từ

Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

- Phủ định: $\overline{p(x)}$
- Phép nối liền (hội, giao): $p(x) \wedge q(x)$
- Phép nối rời (tuyển, hợp): $p(x) \vee q(x)$
- Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$
- Phép kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Vị từ - Lượng từ

Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) được định nghĩa như sau:

- Mệnh đề "Với mọi x thuộc A, p(x) ", kí hiệu: "$\forall x \in A$, p(x)" là mđ đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$. $\forall$ đgl lượng từ phổ dụng

- Mệnh đề "Tồn tại (có ít nhất một) x thuộc A, p(x)" kí hiệu "$\exists x \in A$, p(x)" là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x= a'$\in$ A nào đó sao cho mệnh đề p(a') đúng. $\exists$ đgl lượng từ tồn tại

Ví dụ 15. Xét các câu sau, trong đó ba câu đầu là tiền đề và câu thứ tư là kết luận đúng.

"Tất cả chim ruồi đều có màu sặc sỡ"

"Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong"

"Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám"

"Chim ruồi là nhỏ".

Gọi $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ là các câu "x là chim ruồi" ; "x là lớn", "x sống bằng mật ong", và "x có màu sặc sỡ", tương ứng. Giả sử rằng không gian là tất cả các loại chim, hãy diễn đạt các câu trong suy lí trên bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ và các lượng từ.

Ví dụ 15. Xét các câu sau, trong đó ba câu đầu là tiền đề và câu thứ tư là kết luận đúng.

"Tất cả chim ruồi đều có màu sặc sỡ"

"Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong"

"Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám"

"Chim ruồi là nhỏ".

Gọi $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ là các câu "x là chim ruồi" ; "x là lớn", "x sống bằng mật ong", và "x có màu sặc sỡ", tương ứng. Giả sử rằng không gian là tất cả các loại chim, hãy diễn đạt các câu trong suy lí trên bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ và các lượng từ.

Giải : Ta có thể biểu diễn các câu trong suy lí trên như sau :

$$\forall x\ (P(x) \to S(x))$$

$$\neg \exists x\ (Q(x) \land R(x))$$

$$\forall x\ (\neg R(x) \to \neg S(x))$$

$$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$$

Vị từ - Lượng từ

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\equiv$ "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Vị từ - Lượng từ

Ví dụ: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- "$\forall x \in R, x^2 + 6x + 5 \leq 0$"
- "$\exists x \in R, x^2 + 6x + 5 \leq 0$"
- "$\forall x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\forall x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\exists x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$"
- "$\exists x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$"

Ví dụ 16. Cho $P(x,y)$ là câu "$x + y = y + x$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\forall x \; \forall y \; P(x,y)$.

Ví dụ 16. Cho $P(x,y)$ là câu "$x + y = y + x$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$.

Giải : Lượng từ

$$\forall x \forall y\ P(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Với mọi số thực x và với mọi số thực y,
$x + y = y + x$ là đúng".

Vì $P(x,y)$ đúng với mọi số thực x và y, nên mệnh đề $\forall x \forall y\ P(x,y)$ là đúng

Ví dụ 17. Cho $Q(x,y)$ là câu "$x + y = 0$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ và $\forall x \exists y\ Q(x,y)$.

Ví dụ 17. Cho $Q(x,y)$ là câu "$x + y = 0$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ và $\forall x \exists y\ Q(x,y)$.

Giải : Lượng từ

$$\exists y \forall x\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Tồn tại một số thực y sao cho với mọi số thực x,

$Q(x,y)$ là đúng".

Bất kể số y được chọn là bao nhiêu, chỉ có một giá trị của x thoả mãn $x + y = 0$. Vì không có một số thực y sao cho $x + y = 0$ đúng với mọi số thực x, nên mệnh đề $\exists y \forall x\ Q(x,y)$ là sai.

Lượng từ

$$\forall x \exists y\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của câu

"Với mọi số thực x, tồn tại một số thực y sao cho $Q(x,y)$ là đúng".

Với số thực x đã cho, luôn có một số thực y sao cho $x + y = 0$, cụ thể là $y = -x$. Từ đó suy ra mệnh đề $\forall x \exists y\ Q(x,y)$ là đúng.

Vị từ - Lượng từ

Định lý

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

- "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng cách: thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$, và p(x,y,..) thành $\overline{p(x,y,..)}$.

Vị từ - Lượng từ

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \equiv \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \equiv \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Với vị từ theo 2 biến

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,\ y)} \equiv \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,\ y)} \equiv \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,\ y)} \equiv \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,\ y)} \equiv \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

Vị từ - Lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- “$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$”

- “$\forall \varepsilon>0, \exists \delta > 0:(\forall x \in R: |x - a|<\delta \rightarrow |f(x) - f(a)|<\varepsilon)$”

Ví dụ 20. Diễn đạt định nghĩa giới hạn bằng cách dùng các lượng từ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

là : "Với mọi số thực $\varepsilon > 0$ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - L| < \varepsilon$ khi $0 < |x - a| < \delta$" .

Định nghĩa này của giới hạn có thể được diễn đạt bằng cách dùng các lượng từ như sau :

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

ở đây không gian đối với các biến δ và ε là tập các số thực dương, còn đối với x là tập các số thực.

Vị từ - Lượng từ

Dạng rút gọn: Một công thức mà chỉ chứa các phép toán $\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$ trong đó $\overline{\ }$ chỉ liên quan trực tiếp tới từng biến mệnh đề và biến vị từ.

Ví dụ:

$$(\forall x)(A(\mathrm{x}) \wedge (\exists y)\overline{B(y)})$$

Dạng chuẩn tắc: Cho B là dạng rút gọn của công thức nào đó, nếu mọi ký hiệu ∀, ∃ đều đứng trước các phép logic khác thì B được gọi là công thức dạng chuẩn tắc.

Ví dụ: $(\forall x)(\exists y)\ (A(\mathrm{x}) \wedge \overline{B(y)})$

Vị từ - Lượng từ

DCTT (DCTH): Nếu trong dạng chuẩn tắc của B mà phần công thức đứng đằng sau các lượng từ đều có DCTT (DCTH) thì B được gọi là DCTT (DCTH)

Ví dụ:

$(\forall x)(\exists y)\ (A(\mathrm{x}) \wedge \overline{B(y)}) \vee (A(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{B(y)})$

Vị từ - Lượng từ

Đưa về DCTT (DCTH):

Thuật toán:

Bước 1: Khử tất cả các phép kéo theo ($\rightarrow$) trong A bằng cách dùng công thức $X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$ ta được công thức $A_1 \equiv A$.

Bước 2: Đưa phép toán phủ định trong A_1 về trực tiếp liên quan tới từng biến mệnh đề và biến vị từ có trong A_1 bằng cách áp dụng các công thức

$$\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y},\quad \overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y},\quad \overline{(\forall x)B} \equiv (\exists x)\overline{B}$$

và $\overline{(\exists x)B} \equiv (\forall x)\overline{B}$ ta được công thức $A_2 \equiv A_1 \equiv A$.

Vị từ - Lượng từ

Đưa về DCTT (DCTH):

Bước 3. Đưa các ký hiệu lượng từ ∀, ∃ trong A_2 lên trước mọi phép toán lôgic khác bằng cách áp dụng các công thức:

$$(\forall x)\, A \vee H \equiv (\forall x)\,(A \vee H)$$

$$(\forall x)\, A \wedge H \equiv (\forall x)\,(A \wedge H)$$

$$(\exists x)\, A \vee H \equiv (\exists x)\,(A \vee H)$$

$$(\exists x)\, A \wedge H \equiv (\exists x)\,(A \wedge H)$$

$$(\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \equiv (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) \equiv (\exists x)\,(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\forall x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \equiv (\forall x)\,(\forall y)\,(P(x) \vee Q(y))$$

$$(\exists x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \equiv (\exists x)\,(\forall y)\,(P(x) \wedge Q(y))$$

$$(\forall x)\, P(x) \wedge (\exists x)\, Q(x) \equiv (\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \wedge Q(y))$$

$$(\exists x)\, P(x) \vee (\forall x)\, Q(x) \equiv (\exists x)\,(\forall y)\,(P(x) \vee Q(y))$$

$$(\forall x)\, P(x) \vee (\exists x)\, Q(x) \equiv (\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \vee Q(y))$$

Vị từ - Lượng từ

Đưa về DCTT (DCTH):

Bước 4: a) Trong A_0 nếu ta áp dụng công thức

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

ta được $A^* \equiv A_0$ mà A^* là DCTH của A_0, hay $A \equiv (\forall, \exists)\ A^*$ là DCTH của A.

b) Trong A_0 nếu ta áp dụng công thức

$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

ta được $A^{**} \equiv A_0$ mà A^{**} là DCTT của A_0, hay $A \equiv (\forall, \exists)\ A^{**}$ là DCTT của A.

Vị từ - Lượng từ

Quy tắc suy diễn:

1. Đổi thứ tự lượng từ hai biến

- $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

2. Nếu $\forall x \in A, P(x) \equiv 1$ thì $P(a) \equiv 1$ $(a \in A)$

Vị từ - Lượng từ

Quy tắc suy diễn:

3.

$\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$

P(a)

$\therefore Q(a)$

4.

$\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$

$\forall x\, Q(x) \rightarrow R(x)$

$\therefore \forall x\, P(x) \rightarrow R(x)$

Vị từ - Lượng từ

Quy tắc suy diễn:

5.

$\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$
$\therefore \exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

6.

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_2}$, **P(x)**
$\therefore \forall x \in \boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2}, \mathbf{P}(\mathbf{x})$

Bài 1. Dùng các quy tắc suy diễn, hãy kiểm tra tính đồng nhất đúng của các công thức sau:

a. $\mathcal{D} = (A \to B) \wedge (A \vee C) \wedge (\overline{C} \vee D) \to (B \vee D)$.

b. $\mathcal{D} = ((X_1 \to X_2) \wedge (X_3 \to X_4) \wedge (\overline{X_1} \to X_3)) \to (X_2 \vee X_4)$.

c. $\mathcal{D} = (((\overline{A} \vee B) \to (C \wedge D)) \wedge (C \to E) \wedge \overline{E}) \to A$.

d. $\mathcal{D} = ((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (B \vee D \to E) \wedge \overline{E}) \to (\overline{A} \wedge \overline{C})$.

e. $\mathcal{D} = ((X_2 \vee \overline{X_1}) \wedge (X_4 \vee \overline{X_3}) \wedge (\overline{X_2 \vee X_4} \vee X_5) \wedge \overline{X_5}) \to \overline{X_1 \vee X_3}$.

f. $\mathcal{D} = (\overline{Y} \to \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \to X) \wedge (\overline{Z_1} \to \overline{Z}) \to (\overline{Z_1} \to Y)$.

g. $\mathcal{D} = (X_1 \wedge (\overline{X_2} \to \overline{X_1}) \wedge (\overline{X_4} \to X_3) \wedge (X_4 \to X_5) \wedge (X_5 \to \overline{X_2})) \to (X_3 \vee X_5)$.

h. $\mathcal{D} = ((X_1 \to X_2) \to X_3) \wedge (X_3 \to (\overline{X_4} \to X_5)) \wedge (\overline{X_4 \vee X_6} \wedge (X_5 \to X_6)) \to X_1$.

i. $\mathcal{D} = (X \wedge (X \to Y) \wedge (Z \vee M) \wedge (M \to \overline{Y})) \to Z \vee N$.

k. $\mathcal{D} = (((\overline{X_2} \to \overline{X_1}) \wedge (\overline{X_4} \to \overline{X_3}) \wedge (\overline{X_1 \wedge X_5} \to \overline{X_4 \wedge X_2}) \wedge (\overline{X_5} \vee \overline{X_1})) \to (X_3 \to \overline{X_1})$.

Bài 3. Cho $p(x, y, z)$ là phát biểu "$x + y = z$" phụ thuộc vào ba biến x, y, z lấy giá trị trên tập các số thực $\mathbb{R}$. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề:

a. $\forall x \forall y \exists z : p(x, y, z)$.

b. $\exists z \forall x \forall y : p(x, y, z)$.

Bài 4. Cho các vị từ hai biến:

$P(x, y) =$ "$x^2 \geq y$"

$Q(x, y) =$ "$x + 1 < y$", trong đó x, y là các biến thực.

Cho biết giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

a. $P(2, 4)$

b. $Q(2, \pi)$

c. $(P(-3, 7) \wedge Q(1, 2)) \rightarrow (P(-2, 1) \wedge \overline{Q}(-1, -1))$

d. $(Q(1, 1) \rightarrow P(1, 1)) \wedge (P(1, 1) \rightarrow Q(1, 1))$

e. $P(2, 5) = \overline{Q}(2, 5)$

Qui nạp

Cho $n_0 \in N$ và p(n) là một vị từ theo biến tự nhiên $n \geq n_0$.

Để chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề:

$$\forall n \geq n_0, p(n)$$

ta có thể dùng các dạng nguyên lý quy nạp như sau:

*Nguyên lý quy nạp yếu (giả thiết đúng với k)

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{ll} \text{(cơ sở)} & p(n_0) \\ \text{(GTQN)} & \forall k \geq n_0, p(k) \rightarrow p(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq n_0, p(n) \end{array}$$

Qui nạp

*Nguyên lý quy nạp mạnh (giả thiết đúng đến k)

Mô hình suy diễn:

(cơ sở) $p(n_0)$

(GTQN) $\forall k \geq n_0, p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k) \rightarrow p(k+1)$

$$\frac{\begin{array}{l} p(n_0) \\ \forall k \geq n_0, p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k) \rightarrow p(k+1) \end{array}}{\therefore \forall n \geq n_0, p(n)}$$

Qui nạp

Ví dụ :

Chứng minh $1 + 3 + 5 + \ldots + \left(2\mathrm{n} - 1\right) = \mathrm{n}^2$

Ví dụ :

Chứng minh $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập

1) Đề thi ĐHBK2000

Kiểm tra lại dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

2) Đề thi KHTN 2001

Kiểm tra lại tính đúng đắn của suy luận sau

p

$q \rightarrow r$

$p \rightarrow \neg r$

____

$\therefore \neg q$

Bài tập

3. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh các dạng mệnh đề sau là các hằng đúng:

a) $((p \to q) \wedge p) \to q$.

b) $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.

c) $((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$.

d) $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to 0)$.

e) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

f) $((p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$.

g) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

Bài tập

4. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh:

a) $((p \to r) \vee (q \to r)) \to (p \to r) \Leftrightarrow p \to (q \vee r)$

b) $((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \to \neg q) \to (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$.

c) $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to (p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee \neg r$

d) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to (q \wedge r)$.

5. Hãy kiểm tra các suy luận sau:

- a)

$$
\begin{array}{l}
p \to q \\
\overline{q} \\
\overline{r} \\
\hline
\therefore \overline{p \vee r}
\end{array}
$$

- b)

$$
\begin{array}{l}
p \wedge q \\
p \to (r \wedge q) \\
r \to (s \vee t) \\
\overline{s} \\
\hline
\therefore t
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
p \to (q \to r) \\
\overline{q} \to \overline{p} \\
p \\
\hline
\therefore r
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{l}
p \leftrightarrow q \\
q \to r \\
r \vee \overline{s} \\
\overline{s} \to \overline{q} \\
\hline
\therefore s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
p \\
\overline{p} \to q \\
(q \wedge r) \to s \\
t \to r \\
\hline
\therefore \overline{s} \to \overline{t}
\end{array}
$$

Ba anh em An, Bình, Vinh ngồi làm bài xung quanh một cái bàn được trải khăn mới. Khi phát hiện có vết mực, bà các cháu hỏi thì lần lượt các em trả lời như sau:

An nói: “Em Vinh không làm đổ mực, đấy là do em Bình”.

Bình nói: “Em Vinh làm đổ mực, anh An không làm đổ mực”.

Vinh nói: “Theo cháu, Bình không làm đổ mực, còn cháu hôm nay không chuẩn bị bài”.

Biết rằng trong 3 em thì có 2 em nói cả hai ý của mỗi em nói ra đều đúng, còn 1 em nói cả 2 ý đều sai.

Hỏi ai làm đổ mực?

Giải

1. Chọn biến mệnh đề:

Mệnh đề a: “An làmđổ mực” ⇒ $\bar{a}$:” An không làm đổ mực”

Mệnh đề b: “Bình làmđổ mực” ⇒ $\bar{b}$:” Bình không làm đổ mực”

Mệnh đề c: “Vinh làmđổ mực” ⇒ $\bar{c}$:” Vinh không làm đổ mực”

2. Diễn đạt phát biểu của từng em bằng công thức logic mệnh đề:

Câu nói của An: $A = \bar{c} \wedge b$

Câu nói của Bình: $B = c \wedge \bar{a}$

Câu nói của Vinh: $C = \bar{b} \wedge c \vee \bar{b} \wedge \bar{c} = \bar{b} \wedge (c \vee \bar{c}) = \bar{b}$

3. Sử dụng điều kiện: Hai trong 3 em nói đúng:

Đặt:

$T = A \vee B$ =>Giá trị $T = 1$

$H = A \vee C$ =>Giá trị $H = 1$

$K = B \vee C$ =>Giá trị $K = 1$

Suy ra:

$T = A \vee B = \bar{c} \wedge b \vee c \wedge \bar{a}$

$K = B \vee C = c \wedge \bar{a} \vee \bar{b}$

4. Do T, H, K luôn đúng nên T & H & K luôn đúng. Suy ra:

$$T \wedge H \wedge K = 1$$

Vậy: Ving đổ mực, Anh không đổ mực, Bình không đổ mực

Chứng minh biểu thức sau hằng sai:

$$((\overline{(r \vee q) \wedge q} \vee \overline{p}) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{q}) \to (p \wedge q \wedge r))$$

$$(\overline{(r \vee q) \wedge q} \vee \overline{p}) \equiv \overline{q} \vee \overline{p} \equiv \overline{p \wedge q}$$

$$((\overline{p} \vee \overline{q}) \to (p \wedge q \wedge r) \equiv \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\equiv (p \wedge q)$$

Chứng minh biểu thức mệnh đề sau là hằng sai

$$\overline{p} \wedge \overline{(p \wedge q)} \wedge \overline{(p \wedge \overline{r})} \wedge (((\overline{q} \to r) \vee \overline{(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \overline{s}))}) \wedge p)$$

$$\overline{p} \wedge \neg\overline{(p \wedge q)} \wedge \neg\overline{(p \wedge \neg\overline{r})} \equiv \neg\overline{(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg\overline{r}))}$$

$$\equiv \neg\overline{\mathbf{p}}$$

$$((\overline{q} \to r) \vee \overline{(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \overline{s}))}) \wedge p$$

$$\equiv ((q \vee r) \vee \overline{(q \vee (r \wedge (s \vee \neg\overline{s})))}) \wedge p$$

$$\equiv ((q \vee r) \vee \overline{(q \vee r)}) \wedge p \equiv \mathbf{p}$$

$$\overline{(p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{r}))} \vee (p \wedge ((\overline{q} \to r) \vee \overline{(q \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge \overline{s}))}))$$

$$\equiv \overline{p} \wedge p \equiv F$$

- Chứng minh biểu thức mệnh đề sau là hằng sai

$$(((p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})) \vee q \vee (\overline{r} \wedge q)) \wedge ((p \rightarrow q) \wedge (\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})))$$

$$((p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})) \vee q \vee (\overline{r} \wedge q) \equiv (p \vee (q \wedge \overline{q})) \vee q$$
$$\equiv \mathbf{p \vee q}$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})) \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$$
$$\equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{q})$$
$$\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \equiv \overline{\mathbf{(p \vee q)}}$$

$$(((p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})) \vee q) \wedge ((p \rightarrow q) \vee (\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})))$$
$$\equiv \mathbf{(p \vee q) \wedge \overline{(p \vee q)} \equiv F}$$

Chứng minh biểu thức mệnh đề $\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) \wedge \overline{q}$ tương đương với biểu thức $(p \to q) \wedge (\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q}))$

$$\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) \wedge \overline{q} \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \wedge \overline{q}$$

$$\equiv (\overline{p} \wedge (\overline{q} \vee q)) \wedge \overline{q}$$

$$\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \quad \textbf{(1)}$$

$$(p \to q) \wedge (\overline{q} \wedge (r \vee \overline{q})) \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}$$

$$\equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{q})$$

$$\equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee F \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \quad \textbf{(2)}$$

(1) & (2) $\Rightarrow \neg\overline{(p \vee q)} \vee (\neg\overline{p} \wedge q) \wedge \neg\overline{q}$ tương đương $(p \to q) \wedge (\neg\overline{q} \wedge (r \vee \neg\overline{q}))$

Dùng các quy tắc suy luận chứng minh rằng

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (Q \vee \overline{P}) \wedge P \Rightarrow R$$

$1. P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

$2. Q \vee \overline{P}$

$3. P$

$\therefore R$

$1. (Q \rightarrow R)$

$2. Q \vee \overline{P}$

$\therefore R$

$1. (Q \rightarrow R)$

$2. Q$

$\therefore R$

$1. R$

$\therefore R$

Dùng quy tắc suy luận chứng minh rằng

$$((p \wedge q) \to \overline{r}) \wedge s \wedge t \wedge p \wedge (p \to (u \to q)) \wedge (s \to (r \vee \overline{t})) \Rightarrow \overline{u}$$

1. $(p \wedge q) \to \overline{r}$
2. s
3. t
4. p
5. $p \to (u \to q)$
6. $s \to (r \vee \overline{t})$
7. $u \to q$ modus ponens của 4. & 5.
8. $r \vee \neg t$ modus ponens của 2. & 6.
9. r tam đoạn luận tuyển của 8. & 3.
10. $\neg(p \wedge q)$ modus tollens của 9. & 1.
11. $\neg p \vee \neg q$ de Morgan của 10.
12. $\neg q$ tam đoạn luận tuyển của 4. & 11.
13. $\neg u$ modus tollens của 12. & 7.

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \overline{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \overline{q} \rightarrow s \end{array}$$

Ta có:

1)	Giả sử $\overline{\overline{q} \rightarrow s}$	(Giả thiết phản chứng)
2)	$\overline{q} \wedge \overline{s}$	(Luật phủ định De Morgan)
3)	$\overline{q}$ và $\overline{s}$	(Luật đơn giản)
4)	$p \rightarrow q$	(Tiền đề)
5)	$\overline{p}$	(Qui tắc phủ định)
6)	$\overline{r} \vee s$	(Tiền đề)
7)	$\overline{r}$	(Từ 3, 6, do tam đoạn luận rời)
8)	$\overline{p} \wedge \overline{r}$	(Định nghĩa phép nối liền)
9)	$\overline{p \vee r}$	(Luật phủ định De Morgan)
10)	$p \vee r$	(Tiền đề)
11)	**0**	(Luật phần tử bù)

1) a) Cho các biến mệnh đề p, q, r cùng các dạng mệnh đề $A = [\,(p \to q) \vee r\,] \to (\bar{q} \to r)$

và $B = \bar{q} \to (p \vee r)$. Chứng minh $A \Leftrightarrow B$.

b) Viết mệnh đề phủ định cho mệnh đề C dưới đây

C = " Tất cả học sinh lớp X đi xem kịch và có ít nhất một học sinh của lớp Y không đi xem xiếc "

2) Lấy phủ định của mệnh đề sau:

P: Nếu trời mưa và bạn không đến đón thì tôi không đi học.

3) a) Cho A = " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ 4x^2 + 8x < 2^y$ ".

Xét chân trị của A và viết mệnh đề phủ định $\bar{A}$.

b) Cho các biến mệnh đề p, q, r và dạng mệnh đề $B = [\,p \to (p \wedge r)\,] \vee \overline{(q \vee r) \to q}$.

Hãy rút gọn B thành một dạng mệnh đề C sao cho trong C chỉ hiện diện 2 trong 3 biến mệnh đề p, q, r đã cho.

4) Hãy kiểm tra suy luận sau

$$\begin{array}{l} t \to u \\ r \to (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) \to r \\ \neg(s \vee u) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

1) a) A $\Leftrightarrow \overline{(p \rightarrow q) \vee r} \vee (q \vee r) \Leftrightarrow [\,(p \wedge \bar{q}\,) \wedge \bar{r}\,] \vee (q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \bar{u}\,) \vee u\,[$ với $u = (q \vee r)$ và $\bar{u} \Leftrightarrow (\bar{q} \wedge \bar{r}\,)\,] \Leftrightarrow (p \vee u) \wedge (\bar{u} \vee u)$

$\Leftrightarrow (p \vee u) \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow (p \vee u)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee p \vee r) \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow (p \vee r) = B.$

b) $\overline{C}$ = ‘‘ Có học sinh nào đó của lớp X không đi xem kịch hay tất cả học sinh lớp Y đi xem xiếc ’’

2) Sử dụng $\neg((p \wedge q) \rightarrow r) = p \wedge q \wedge \neg r$, ta có

$\overline{P}$: Trời mưa và bạn không đến đón mà tôi vẫn đi học.

3)

a) $\overline{A}$ = “ $\exists x \in \mathbf{Q}, \forall y \in \mathbf{R}$, (0,25 đ), $4x^2 + 8x \geq 2^y$ ” .

$\overline{A}$ sai (x cố định nên $4x^2 + 8x$ cố định và cho $y \rightarrow +\infty$ thì $2^y \rightarrow +\infty$, nghĩa là không thể xảy ra $4x^2 + 8x \geq 2^y$) và suy ra A đúng .

4)

$$t \to u \qquad (1)$$

$$r \to (s \vee t) \qquad (2)$$

$$\overline{(p \vee q)} \to r \qquad (3)$$

$$\overline{(s \vee u)} \qquad (4)$$

$$\therefore p$$

$\bar{s} \wedge \bar{u}$ (Do tiền đề (4) và luật đối ngẫu) (5)

$\bar{u}$ (Do (5) và luật đơn giản nối liền) (6)

$\bar{t}$ (Do (1),(6) và luật phủ định) (7)

$\bar{s}$ (Do (5) và luật đơn giản nối liền) (8)

$\bar{t} \wedge \bar{s}$ (Do (7), (8) và phép tóan nối liền) (9)

$(t \vee s)$ (Do (9) và luật đối ngẫu) (10)

$\bar{r}$ (Do (2), (10) và luật phủ định) (11)

$\bar{p} \vee q$ (Do (3), (11) và luật phủ định) (12)

$p \wedge \bar{q}$ (Do (12) và luật đối ngẫu) (13)

p (Do (13) và luật đơn giản nối liền).

7) 1) $\neg(q \vee s)$ (tiền đề)

2) $\neg q \wedge \neg s$ (luật De Morgan)

3) $\neg q$ và $\neg s$ (luật đơn giản)

4) $p \to q$ (tiền đề)

5) $\neg$p (PP phủ định)

6) $\neg p \wedge \neg s$ (Từ 3, 5 và định nghĩa phép nối liền)

7) $\neg(p \vee s)$ (luật De Morgan)

8) r $\to$ (p $\vee$s) tiền đề)

9) $\neg$r (PP phủ định)

10) (t $\to$ p) $\to$ r (tiền đề)

11) $\neg$(t $\to$ p) (PP phủ định)

12) t $\wedge\neg$p (luật De Morgan)

13) t (luật đơn giản)

Vậy suy luận đã cho là đúng.

8) Kiểm tra tính đúng của suy luận sau:

$$\forall x \in R(P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in R(\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\overline{}$$

$$\therefore \forall x \in R(\neg R(x) \rightarrow P(x))$$

9) Cho mệnh đề

$P = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 6 \leq 0 \rightarrow x > 0"$

Xác định chân trị của P và viết mệnh đề phủ định của P dưới dạng mệnh đề lượng từ.

10) Cho $A =$ “ $\exists k \in \mathbb{Z}$,$\forall q \in \mathbb{Q}$, $q^2 - 6q \geq k$ ”.

Xét chân trị của A và viết mệnh đề phủ định $\overline{A}$.

8) 1) $\forall x \in R(\overline{P(x)} \wedge Q(x) \to R(x))$ (Tiền đề)

2) $\overline{P(a)} \wedge Q(a) \to R(a)$ (Qui tắc đặc biệt phổ dụng với a bất kỳ)

3) $P(a) \vee \overline{Q(a)} \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

4) $Q(a) \to P(a) \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

5) $\forall x \in R(P(x) \vee Q(x)$ (Tiền đề)

6) $P(a) \vee Q(a)$ (Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng với a bất kỳ)

7) $\overline{P(a)} \to Q(a)$ (Luật kéo theo)

8) $\overline{P(a)} \to P(a) \vee R(a)$ (Từ 4 và 7, Tam đọan luận)

9) $P(a) \vee P(a) \vee R(a)$ (Luật kéo theo)

10) $P(a) \vee R(a)$ (Luật lũy đẳng)

11) $\overline{R(a)} \to P(a)$ (Luật kéo theo)

12) $\forall x \in R(\overline{R(x)} \to P(x))$ (Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng).

9) Ta có $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ kéo theo x > 0. Do đó P đúng.

Phủ định của P là $\bar{P} =$ "$\exists x \in R, x^2 - 5x + 6 \leq 0 \wedge x \leq 0$".

10) A đúng vì $\exists(-9) \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Q}, q^2 - 6q = (q-3)^2 - 9 \geq -9$.

$\overline{A}$ = ‘’ $\forall k \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{Q}, \quad q^2 - 6q < k$ ’’