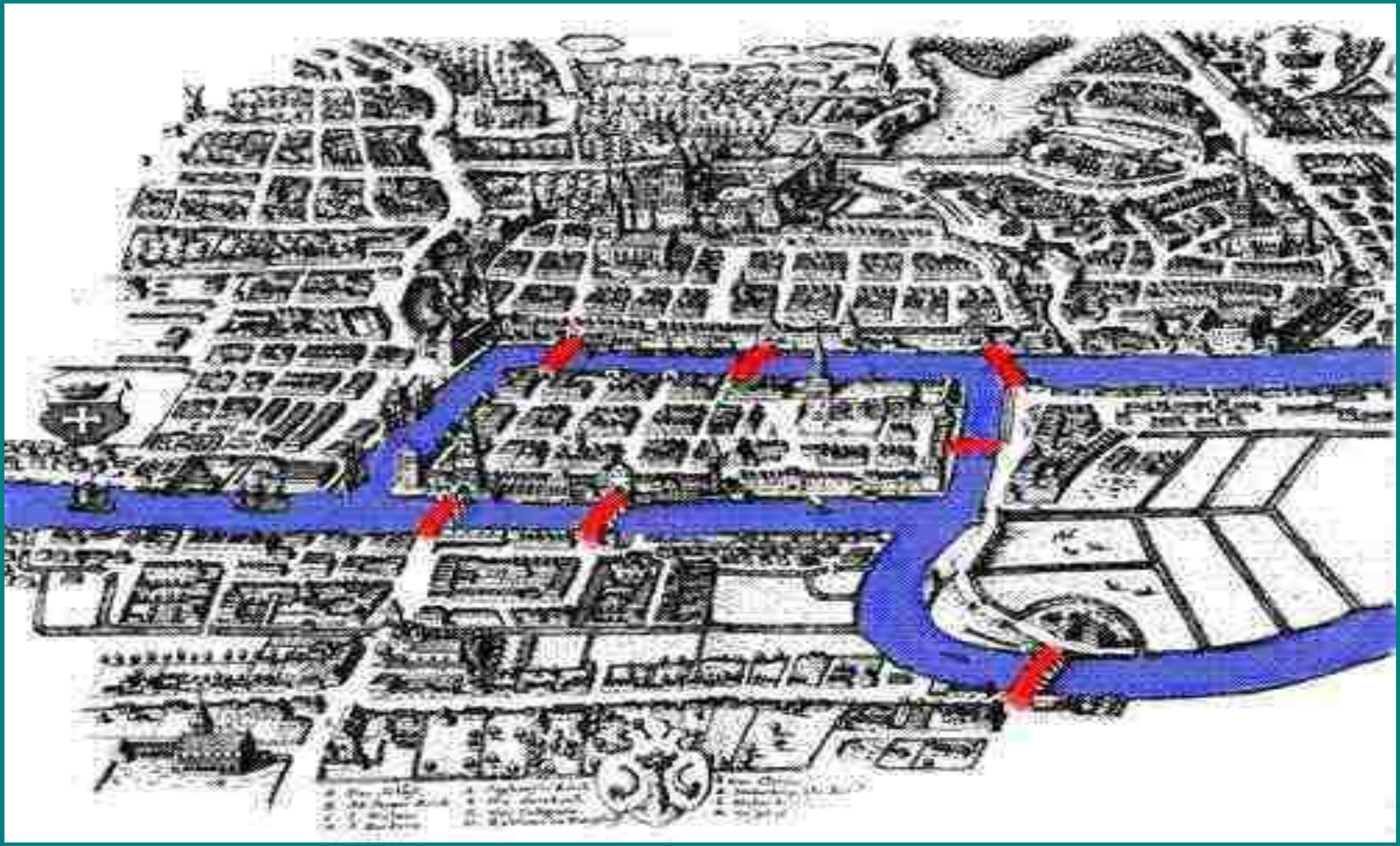
Đồ thị

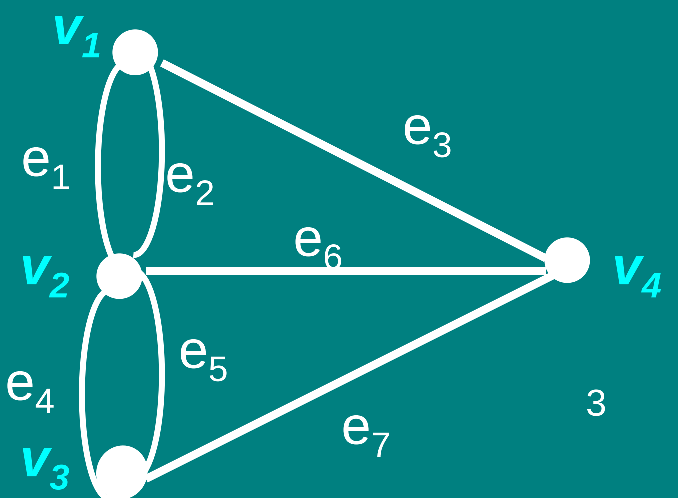
Những khái niệm và tính chất cơ bản



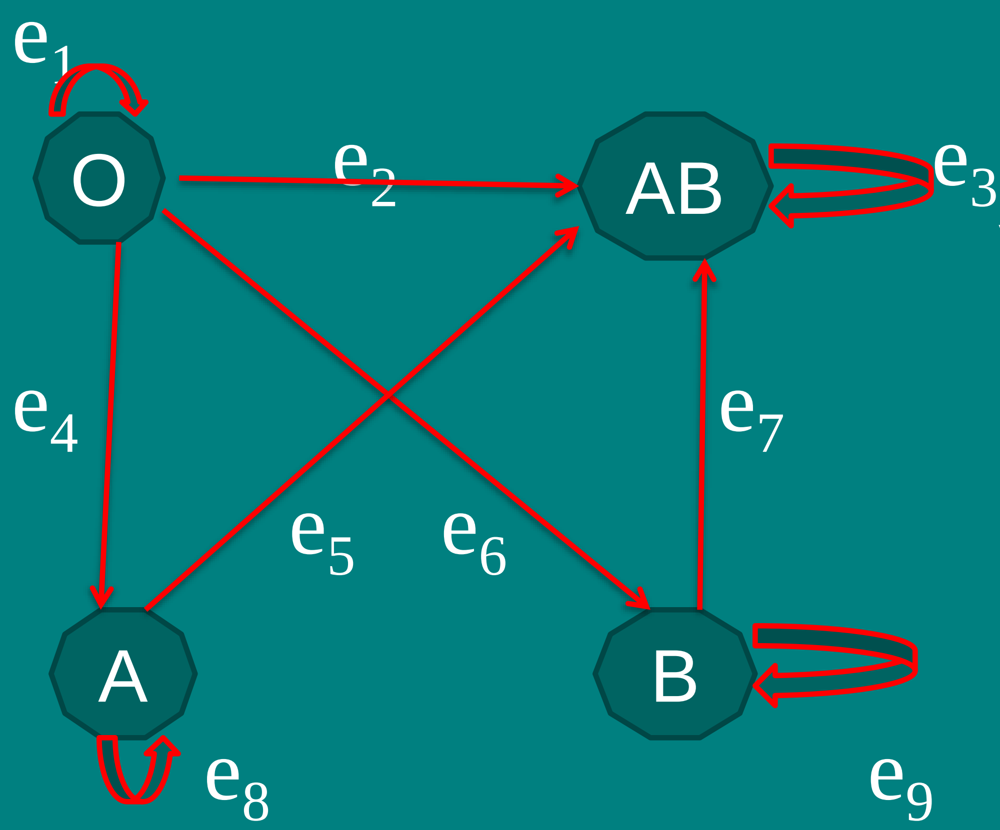
Những khái niệm và tính chất cơ bản

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_1 v_2$,
$e_3 = v_1 v_4$, $e_4 = v_2 v_3$,
$e_5 = v_2 v_3$, $e_6 = v_2 v_4$,
$e_7 = v_3 v_4$



Những khái niệm và tính chất cơ bản



V= {O, A, B, AB}

E ={e_1,e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9}

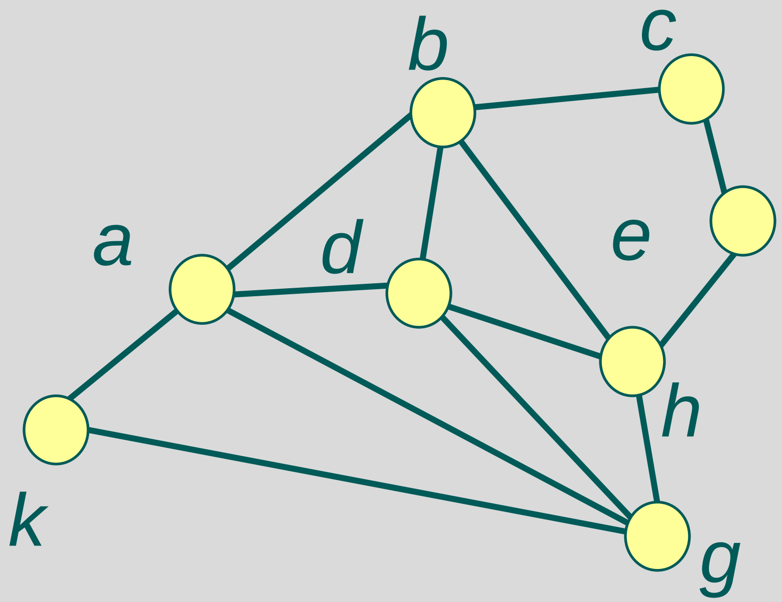
-
-

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa đồ thị

Định nghĩa1.Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *đỉnh*(vertex) của G.
ii) E là đa tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một *cạnh*(edge) của G. Ký hiệu uv.

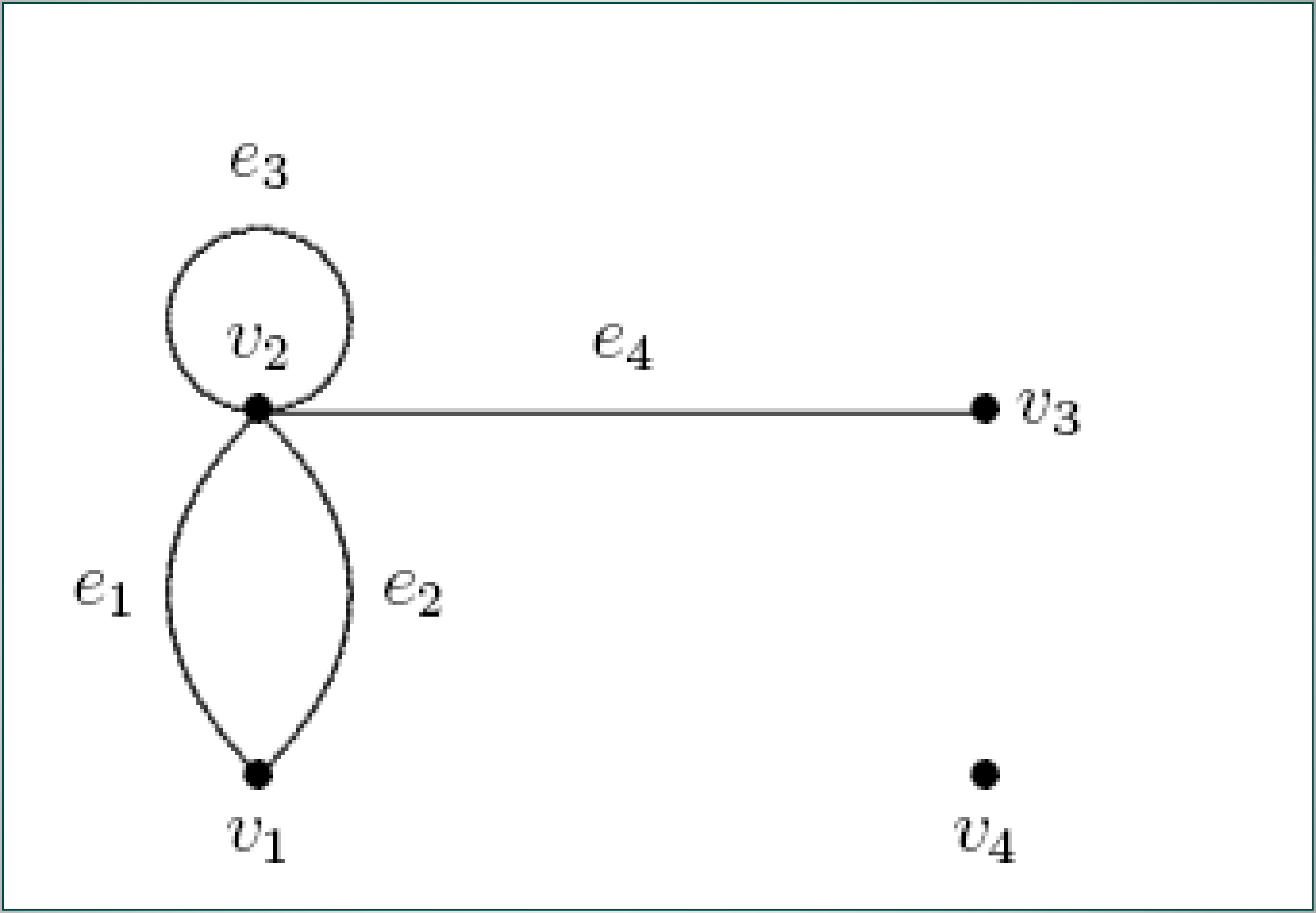


b
c
a
d
e
h
k
g

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Chú ý

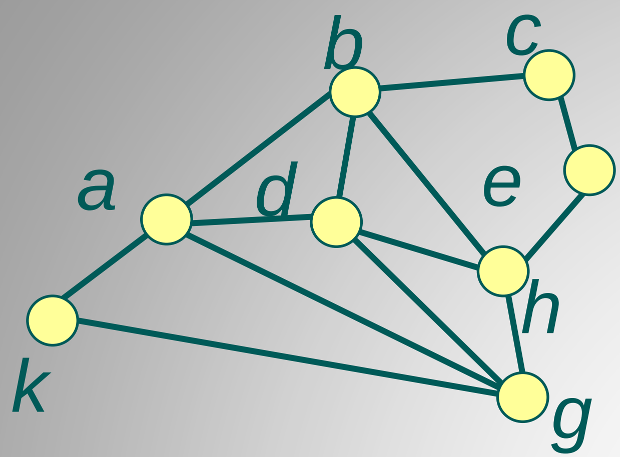
- Ta nói cạnh uv nối u với v, cạnh uv *kề* với u,v.
- Nếu uv $\in$E thì ta nói đỉnh u *kề* đỉnh v.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song*.
- Cạnh uu có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.

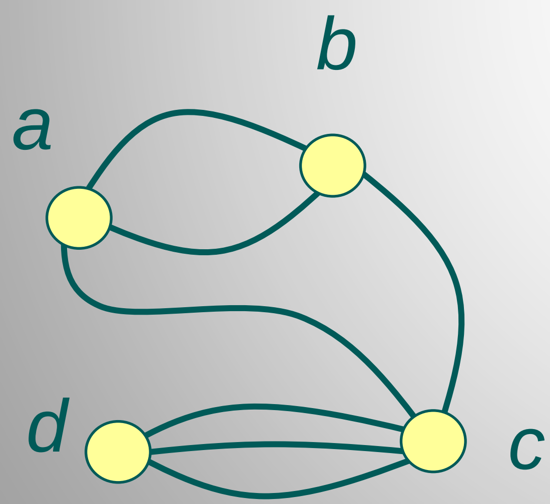


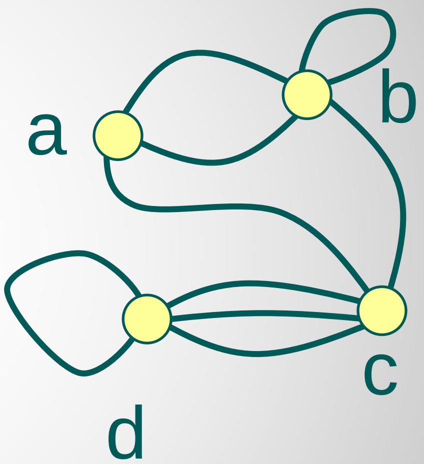
e_3
v_2
e_4
v_3
e_1
e_2
v_1
v_4

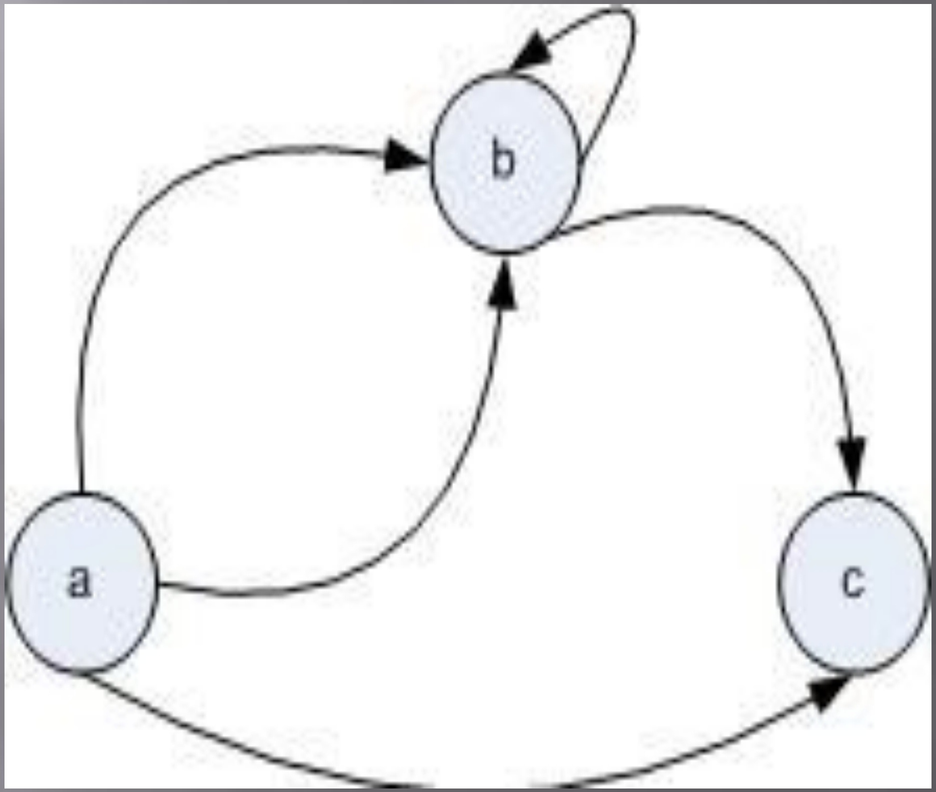
Những khái niệm và tính chất cơ bản

- **Định nghĩa 2.** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là *đơn đồ thị vô hướng*.
- **Định nghĩa 3.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là *đa đồ thị* vô hướng.
- **Định nghĩa 4.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song và có khuyên gọi là *giả đồ thị*


a
b
c
d
e
h
k
g

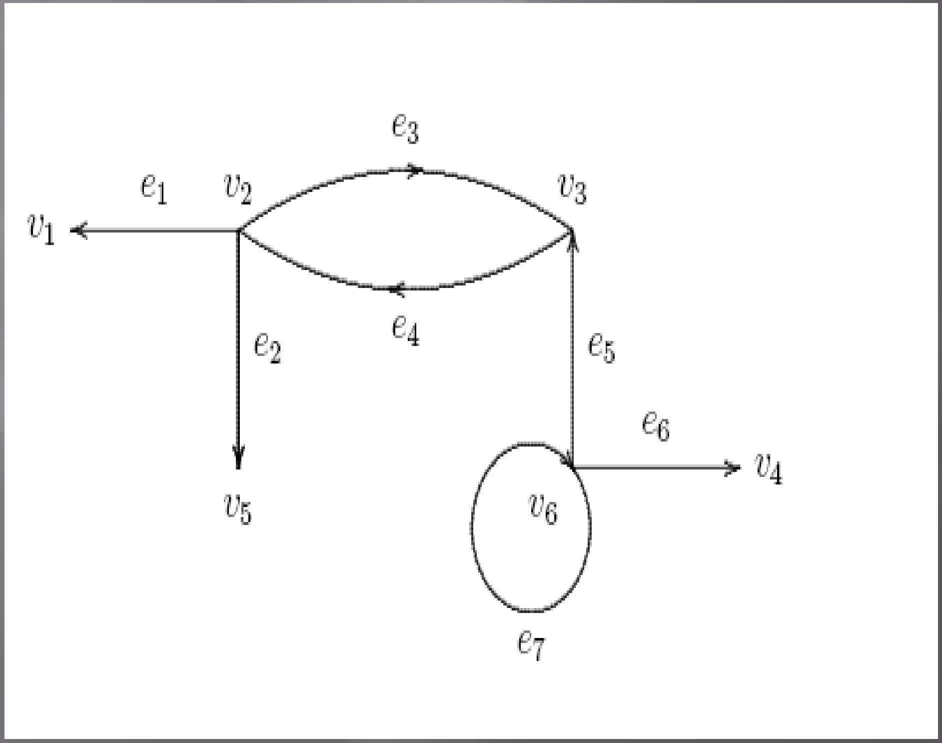

a
b
c
d


a
b
c
d


b
a
c

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa 6: Đồ thị có hướng không chứa các cạnh song song gọi là *đồ thị có hướng*



Những khái niệm và tính chất cơ bản

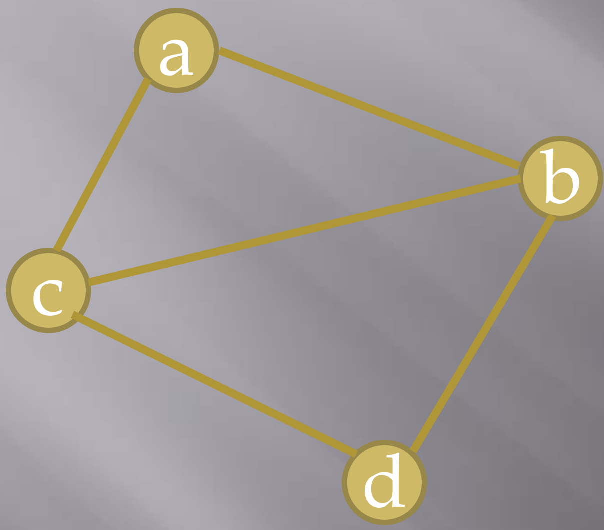
Biểu diễn ma trận của đồ thị:

Ta sử dụng **ma trận kề**.

Cho G = (V,E) với V={1,2,…,n}.
Ma trận kề của G là ma trận $A = (a_{ij})_n$ xác định như sau:

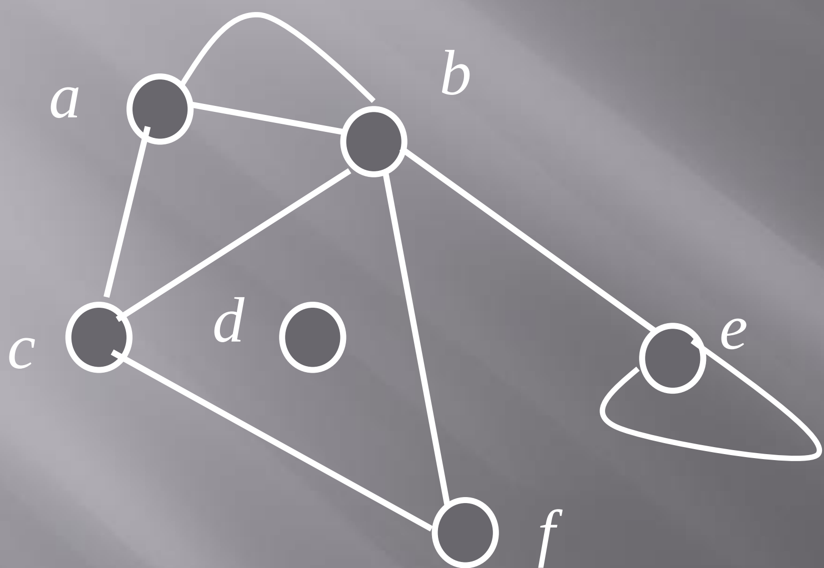
a_{ij} = số cạnh(số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j

Tìm ma trận kề



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Tìm ma trận kề



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

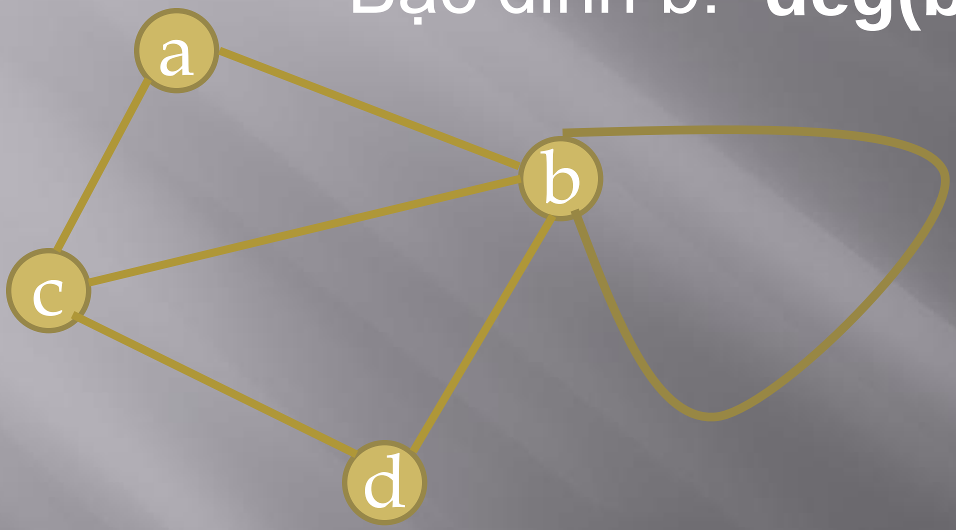
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Bậc của đỉnh

- Cho đồ thị vô hướng G = (V,E). *Bậc* của đỉnh v, ký hiệu **deg(v)**, là số cạnh kề với v , trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

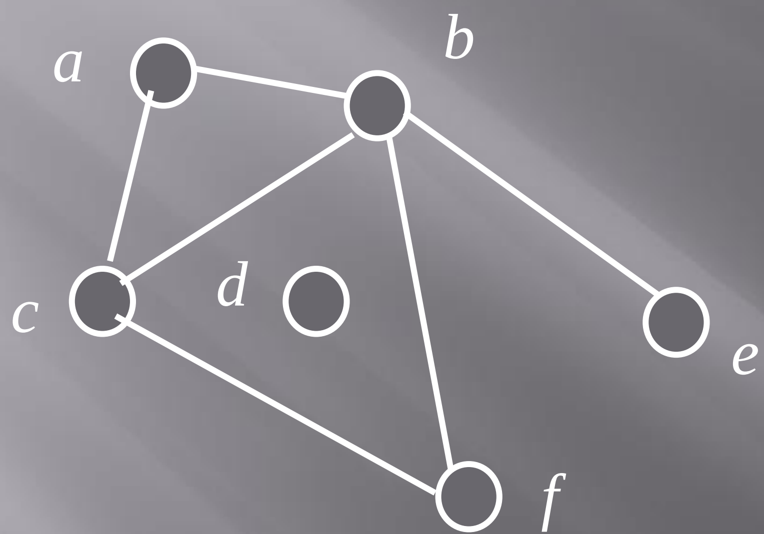
Bậc đỉnh a: **deg(a)** = 2

Bậc đỉnh b: **deg(b)** = 5



Bậc đỉnh c: **deg(c)** = 3

Bậc đỉnh d: **deg(d)** = 2



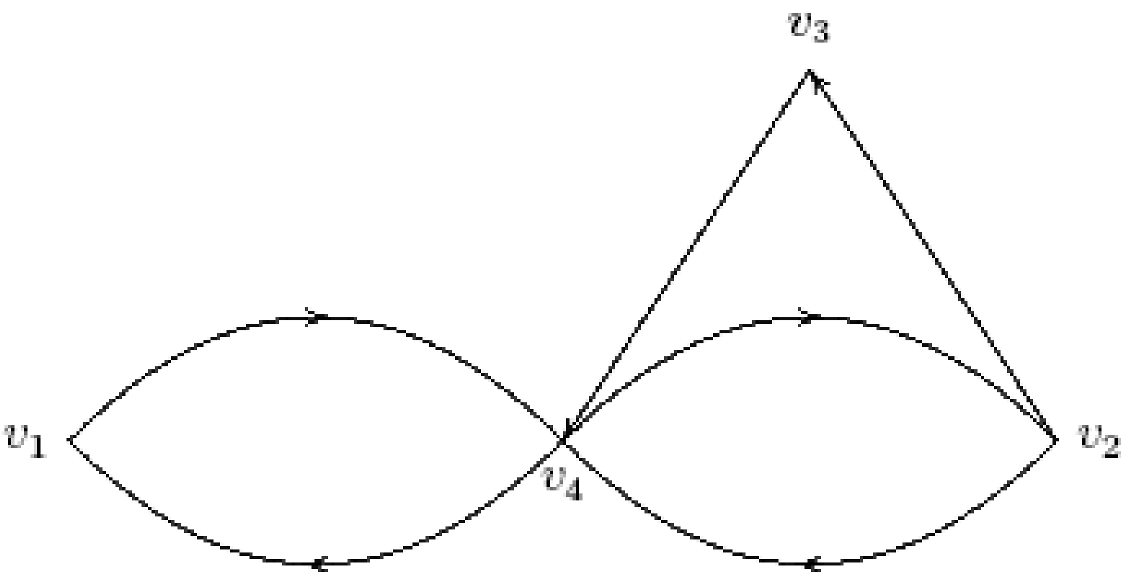
Bậc của các đỉnh?

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Cho đồ thị có hướng G = (V, E), $v \in V$

1) **deg $^{-}$(v)**:= số cung có đỉnh cuối là v, gọi là *bậc vào* của v.
2) **deg $^{+}$(v)**:= số cung có đỉnh đầu là v, gọi là *bậc ra* của v
3) **deg(v):**= deg^{-}(v) + deg^{+}(v)

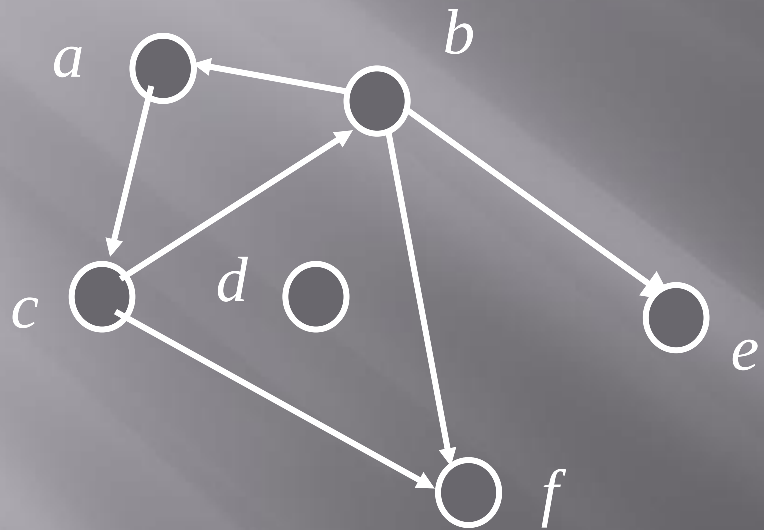
- Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*



$$
\begin{aligned}
d^+(v_1) &= d^-(v_1) = 1, & d^+(v_2) &= 2, d^-(v_2) = 1, \\
d^+(v_3) &= d^-(v_3) = 1, & d^+(v_4) &= 2, d^-(v_4) = 3.
\end{aligned}
$$

Bậc đỉnh a: **deg$^-$(a)=** 1 ; **deg$^+$(a)=**1

Bậc đỉnh b: **deg$^-$(b)=** 1 ; **deg$^+$(b)=**3



Bậc đỉnh c: **deg$^-$(c)=** 1 ; **deg$^+$(c)=**2

Bậc đỉnh d: **deg$^-$(d)=** 0 ; **deg$^+$(d)=**0

Bậc đỉnh e: **deg$^-$(e)=** 1 ; **deg$^+$(e)=**0

Bậc đỉnh f: **deg$^-$(f)=** 2 ; **deg$^+$(f)=**0

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định lí

Cho đồ thị G = (V,E), m là số cạnh (cung)

1) $\boxed{2m = \sum_{v \in V} \deg(v)}$

2) Nếu G có hướng thì:

$$\boxed{m = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)}$$

3) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đẳng cấu

Định nghĩa

Cho hai đơn đồ thị G = (V,E) và G’= (V’,E’).

Ta nói rằng G *đẳng cấu* G’, ký hiệu G ≅ G’, nếu tồn tại song ánh f :V→ V’sao cho:

uv là cạnh của G ⇔ f(u)f(v) là cạnh của G’

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Chú ý

- Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:
  - Cùng số đỉnh
  - Cùng số cạnh
  - Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn(vd: số đỉnh bậc 2 của G và G' bằng nhau)
  - deg v = deg f(v)

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đồ thị con

Cho hai đồ thị G = (V,E) và G’ = (V’,E’) (cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).

- G’ được gọi là *đồ thị con* của G, ký hiệu G’$\leq$ G nếu V’ $\subseteq$ V và E’ $\subseteq$ E
- Nếu ***V’ = V*** và E’ $\subseteq$ E thì G’ được gọi là *đồ thị con khung* của G.

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng $u,v \in V$

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho:

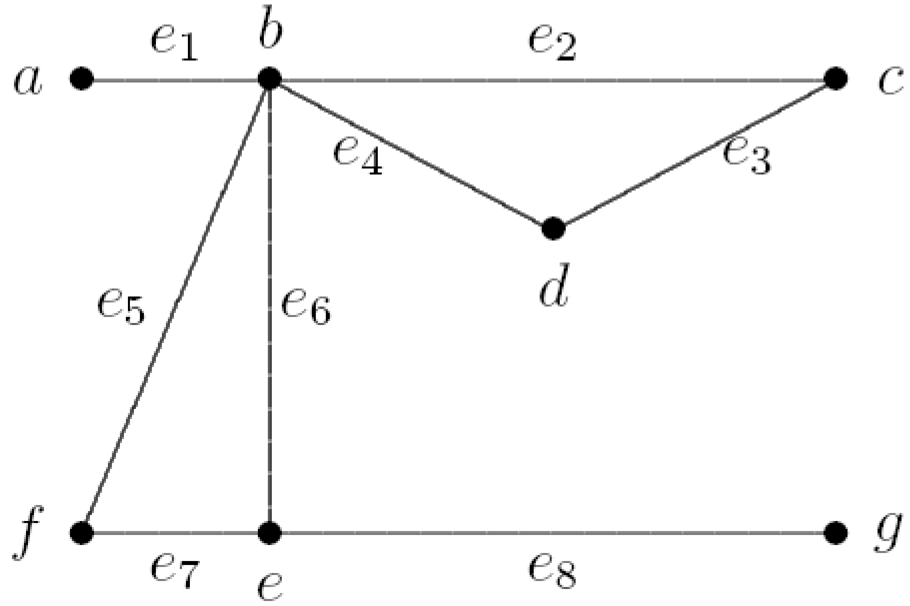
$$v_0=u, v_k = v, e_i=v_{i-1}v_i, i=1,2,\ldots,k$$

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

b) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

d) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh



Chu trình sơ cấp nào không?

- (a, e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,b)là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4. Tuy nhiên, trong trường hợp này, đồ thị của chúng ta là đơn đồ thị, do vậy có thể gọi đường đi này bằng 1 cách ngắn gọn như sau: (a,b,c,d,b)

- Chu trình sơ cấp:
  - (b,c,d,b)
  - (b,f,e,b)

Một số đồ thị vô hướng đặc biệt

1. Đồ thị đủ cấp n: K_n là đơn đồ thị cấp n mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có một cạnh.

2. Đồ thị k-đều : là đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau và bằng k.

3. Đồ thị phân đôi:

$G = (V,E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Mọi cạnh của G đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2

Một số đồ thị đặc biệt

4. *Đồ thị phân đôi đầy đủ:* là đồ thị đơn, lưỡng phân, mỗi đỉnh trong V_1 đều kề với mọi đỉnh trong V_2.

5. *Đồ thị bù*

Cho $K_n = (V,E)$, $G\ (V,E_1) \leq K_n$, $\overline{G} = \left(V, E \setminus E_1\right)$

$\overline{G}$ gọi là *đồ thị bù* của G. Đồ thị G đươc gọi là *tự bù* nếu G đẳng cấu với đồ thị bù của nó

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

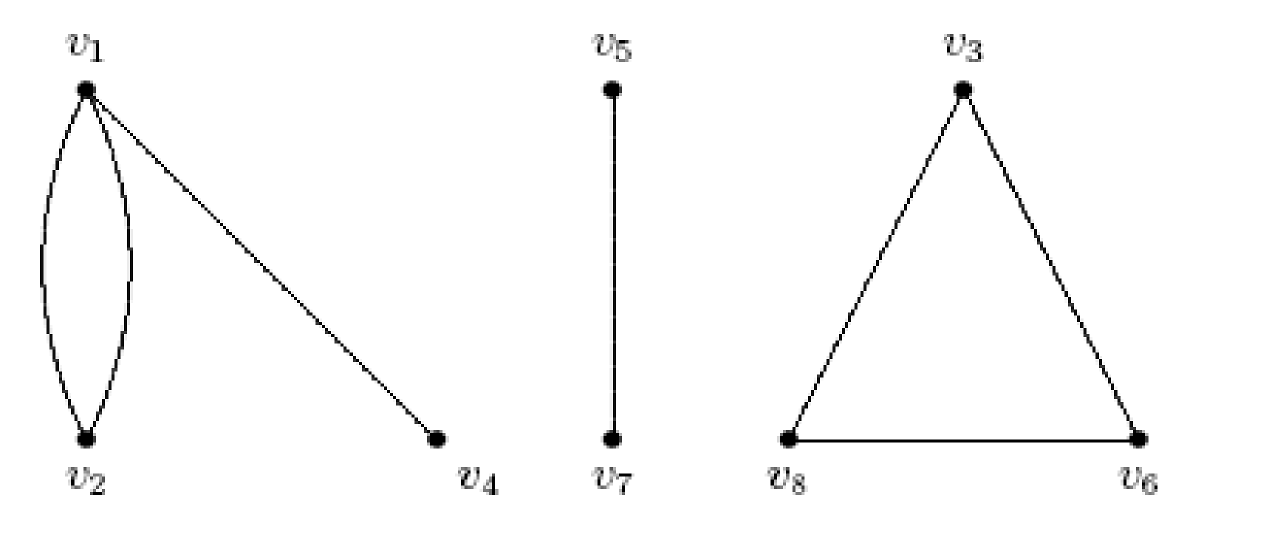
Định nghĩa. Cho G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

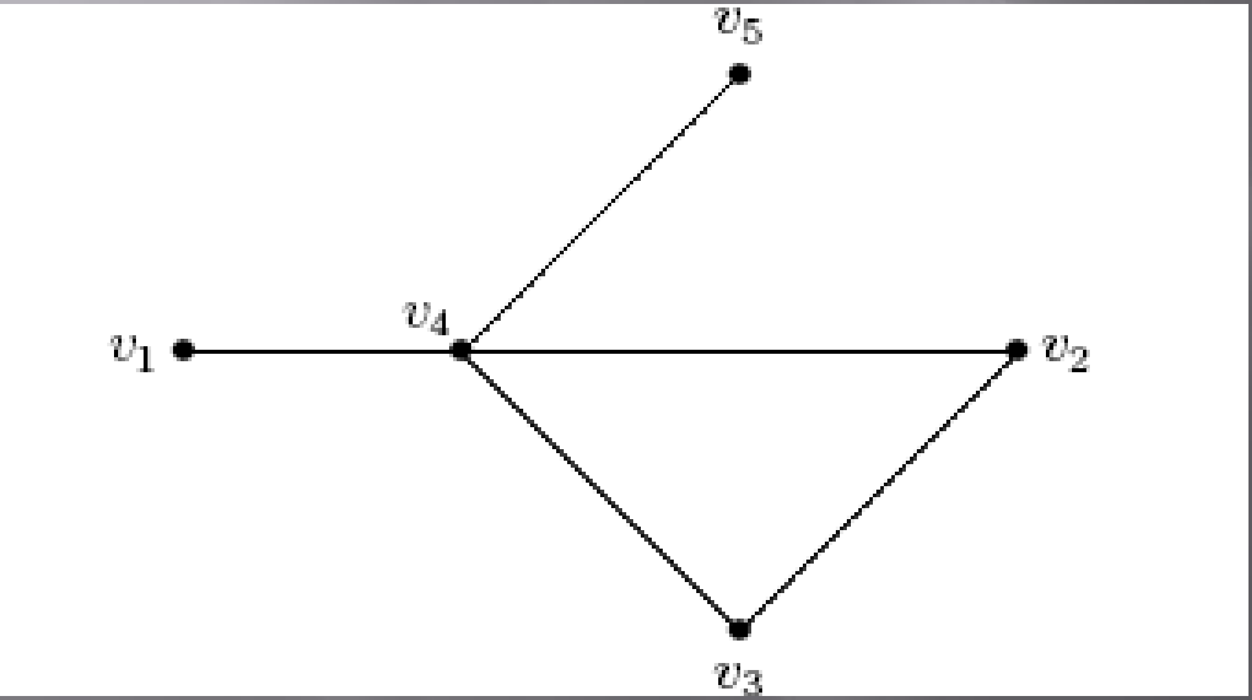
u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông* với nhau

b) Nếu mọi cặp đỉnh u, v ∈ V đều liên thông thì ta nói G là đồ thị liên thông.

c) Nếu $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ là 2 đồ thị liên thông và $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Khi đó ta nói đồ thị G = (V, E) trong đó V = $V_1 \cup V_2$ và $E = E_1 \cup E_2$ có 2 thành phần liên thông G_1, G_2.


v_1
v_5
v_3
v_2
v_4
v_7
v_8
v_6

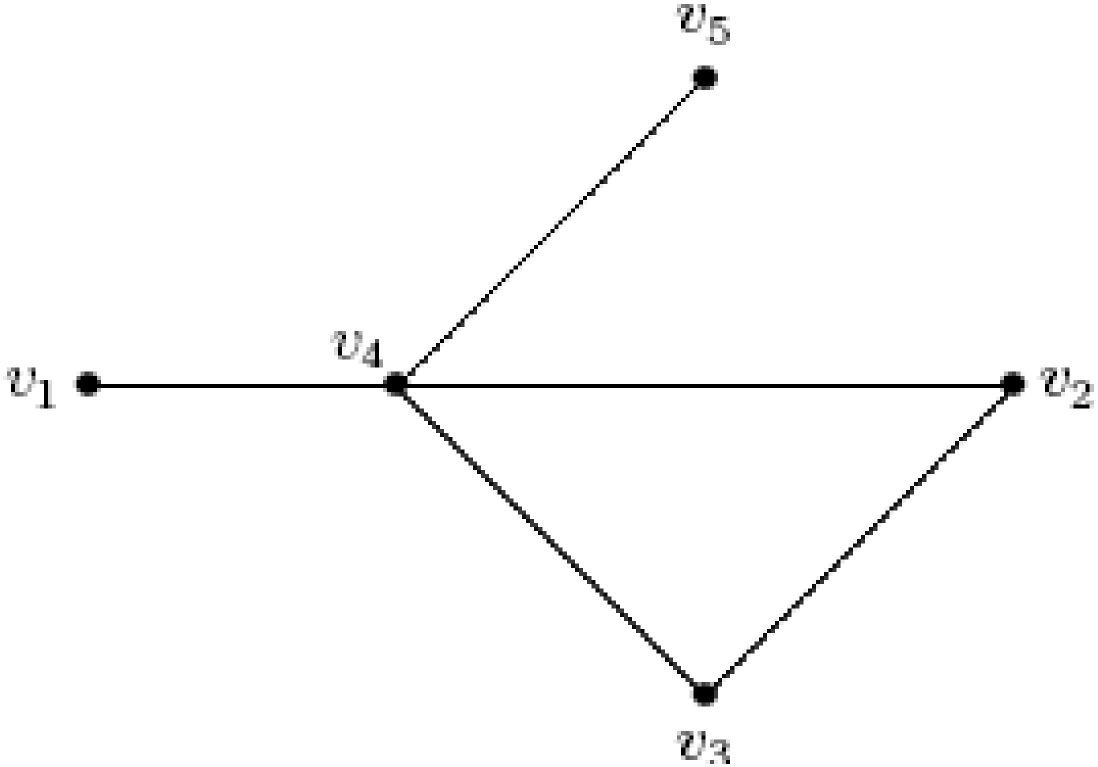

v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

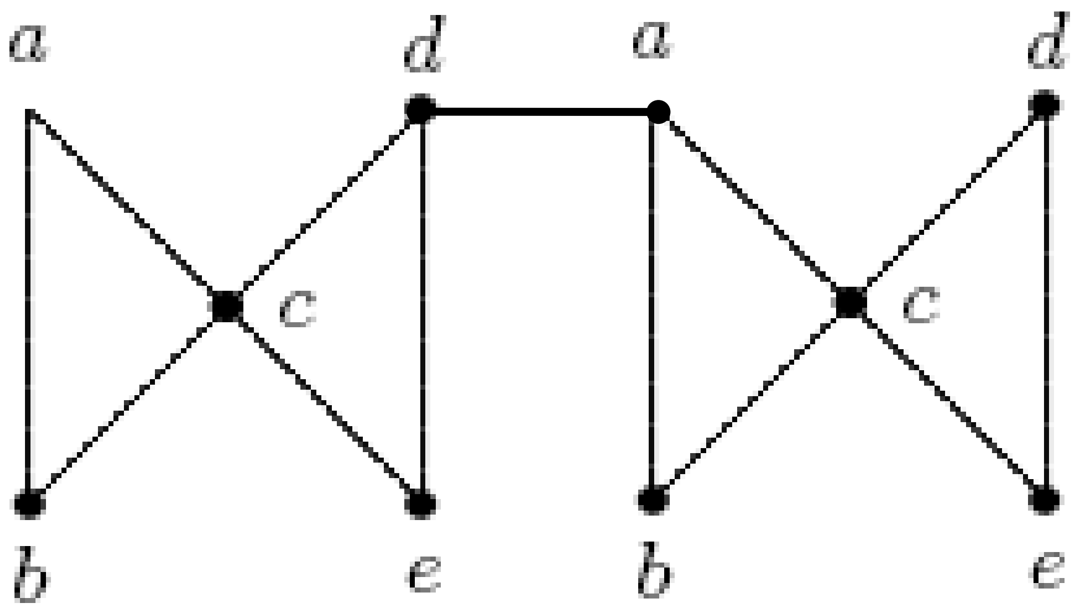
Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là *đỉnh khớp* nếu G – v không liên thông (G – v là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)

b) Cạnh e được gọi là *cầu* nếu G- e không liên thông(G-e là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e).


v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

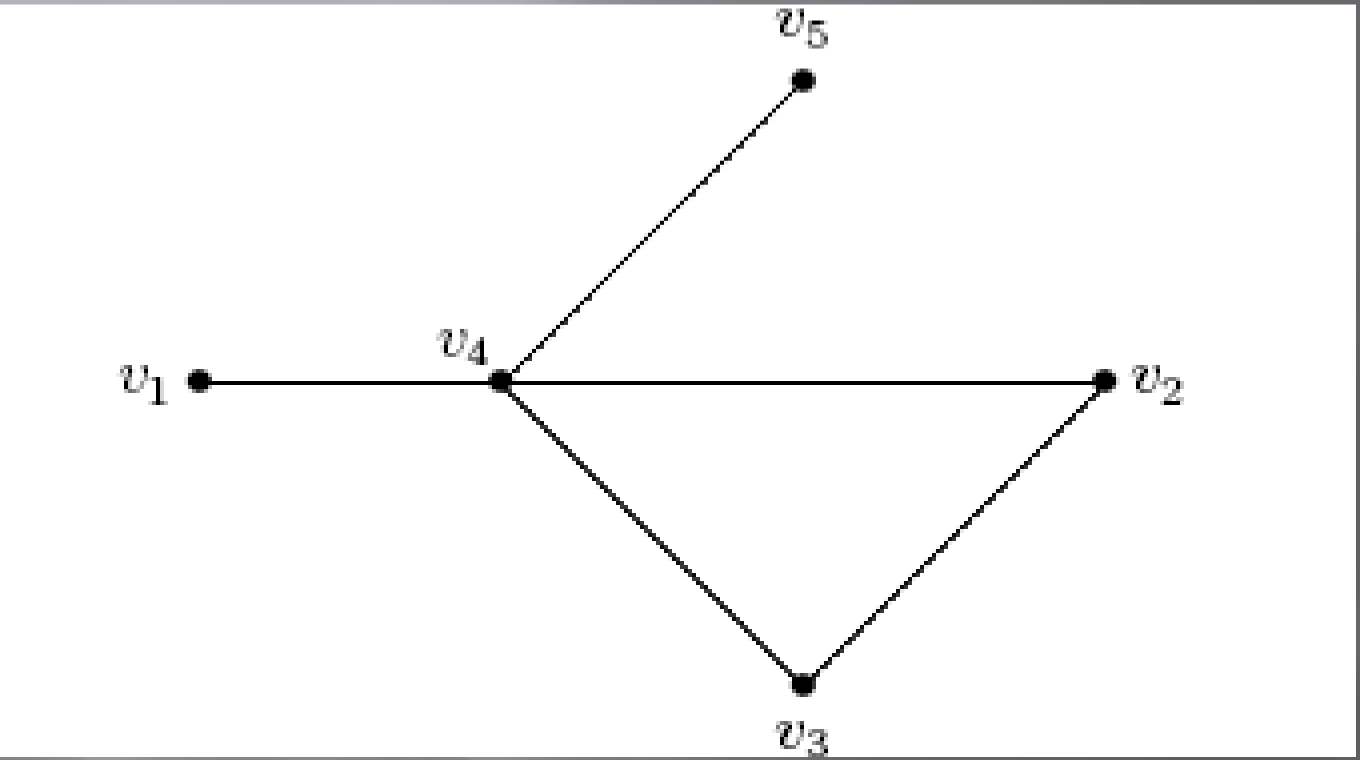

a
d
a
d
c
c
b
e
b
e

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho G = (V,E) vô hướng liên thông, không phải K_n, n>2.

a) *Số liên thông cạnh* của G, ký hiệu e(G) là số cạnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

b) *Số liên thông đỉnh* của G, ký hiệu v(G) là số đỉnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.


v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng $u,v \in V$

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cung liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots.v_{k-1}e_k\ v_k$sao cho:

$$v_0 = u,\ v_k = v$$

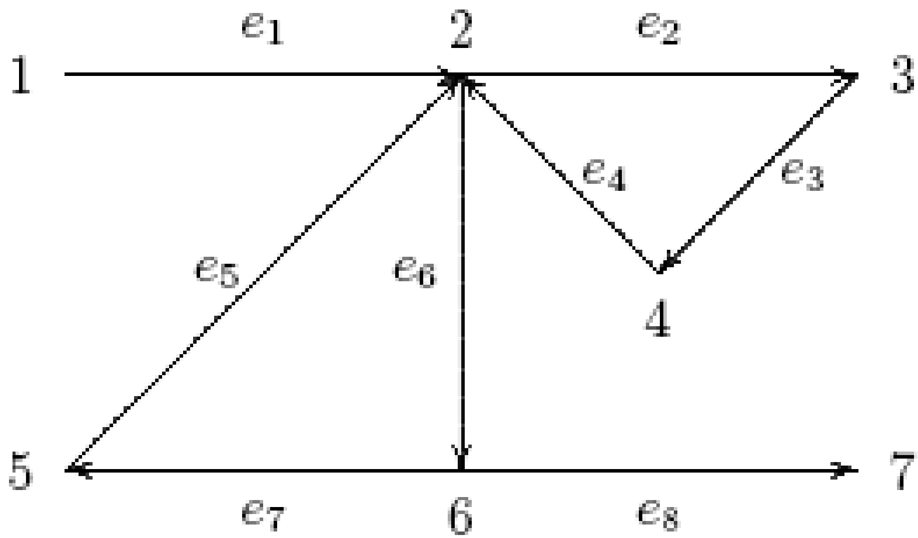
$$e_i = v_{i-1}v_i\ ,\ i = 1,2,,\ldots,k.$$

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

b) Đường đi không có *cung* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*.

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*.

d) Đường đi được gọi là *mạch(chu trình)* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.



Đường đi có độ dài 4 từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 là : (1,2,3,4,2)

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho đồ thị có hướng G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u .

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông mạnh với nhau* .
b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một *thành phần liên thông mạnh* của G .
c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông mạnh thì G gọi là *liên thông mạnh* .

Đề thi

1)2000. ĐHBK

Cho đồ thị vô hướng , đơn G có 7 đỉnh trong đó có một đỉnh bậc 6. Hỏi G có liên thông không?

Giải. Đỉnh bậc 6 nối với 6 đỉnh còn lại. Do đó hai đỉnh bất kỳ đều có một đường đi qua đỉnh bậc 6

Đề thi

4)2005, ĐHKHTN.

Vẽ đơn đồ thị vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2,2,3,3,3,5

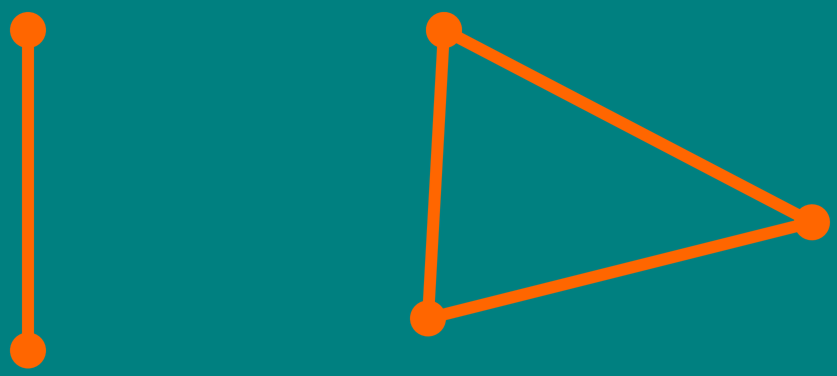
Đề thi

Giải .

- Nhận xét . Đỉnh bậc 5 nối với 5 đỉnh còn lại. Do đó ta chỉ phải quan tâm đến 5 đỉnh còn lại. Ta xét đơn đồ thị với 5 đỉnh và các bậc là 1,1,2,2,2.

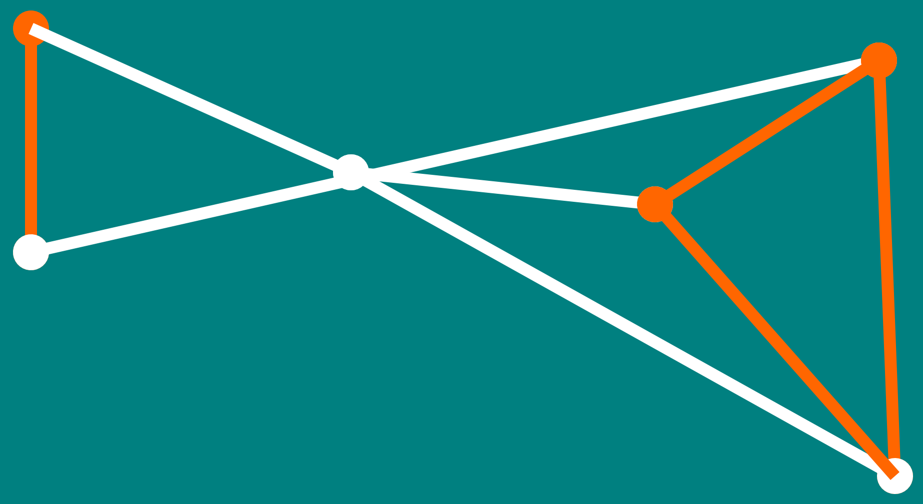
- TH1. Hai đỉnh bậc 1 nối với nhau, 3 đỉnh bậc 2 nối với nhau tạo thành chu trình

Đề thi



Đề thi

Suy ra đồ thị cần tìm là

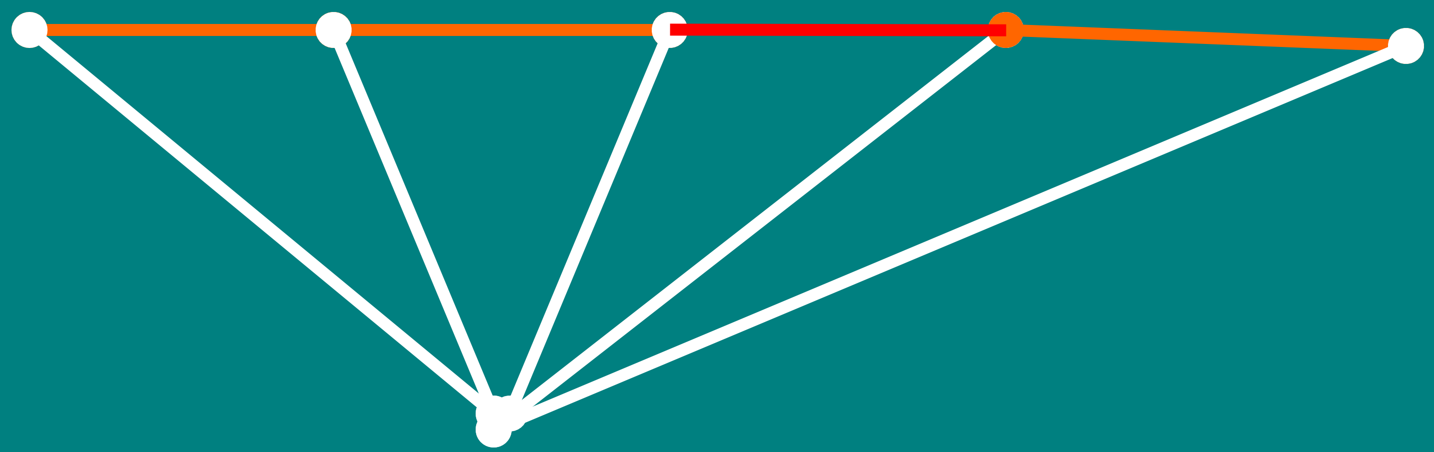


Đề thi

- TH2. Hai đỉnh bậc 1 không nối với nhau. Khi đó hai đỉnh bậc 1 phải nối với hai đỉnh bậc 2 khác nhau và đỉnh bậc hai còn lại phải nối với hai đỉnh bậc hai ấy

Đề thi

- Suy ra đồ thị cần tìm là:



Sắc số của đồ thị

Khái niệm

Sắc số của đồ thị là số màu tối thiểu cần dùng để tô màu các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau. Kí hiệu là s(G).

Sắc số của đồ thị

1. Đồ thị đầy đủ: Giả sử G = (V,E) là đồ thị đầy đủ thì *sắc số* của đồ thị bằng số đỉnh của đồ thị (s(G) = |V|)
2. Đồ thị không có chu trình độ dài lẻ: Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng, s(G) = 2 khi và chỉ khi trong G không có chu trình độ dài lẻ.
3. Đồ thị có chu trình: một chu trình có độ dài lẻ (chẵn) luôn có sắc số bằng 3 (sắc số bằng 2).
4. Đồ thị phân đôi: s(G) = 2 khi và chỉ khi G là đồ thị phân đôi và liên thông.

Sắc số của đồ thị

5. Đồ thị đơn: ta có thuật toán tô màu đồ thị như sau:

B1: sắp xếp bậc của các đỉnh theo thứ tự giảm dần

$$\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \deg(v_3) \ldots \geq \deg(v_n)$$

B2: Tô màu 1 cho đỉnh v_1 và một đỉnh không kề với v_1.

Sau đó lại tiếp tục gán màu 1 cho các đỉnh không kề với các đỉnh đã gán màu 1.

B3: Tô màu 2 cho các đỉnh chưa được gán màu 1 (theo thứ tự bậc đã sắp xếp ở B1)

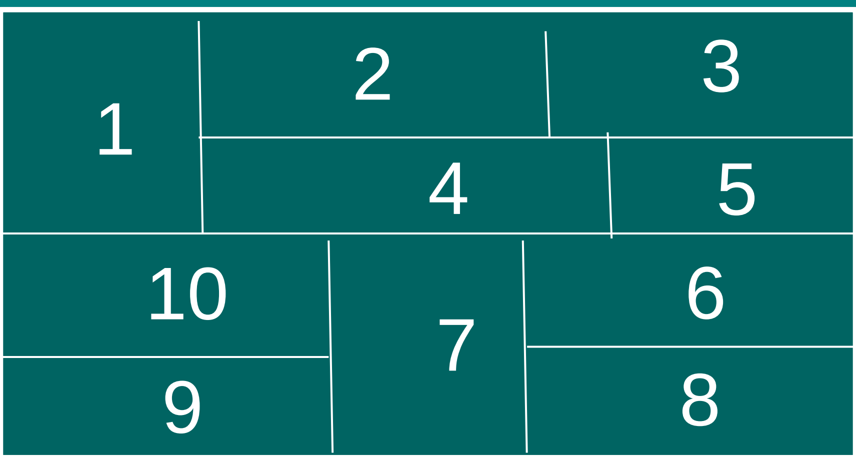
Thuật toán dừng khi đã tô màu hết các đỉnh.

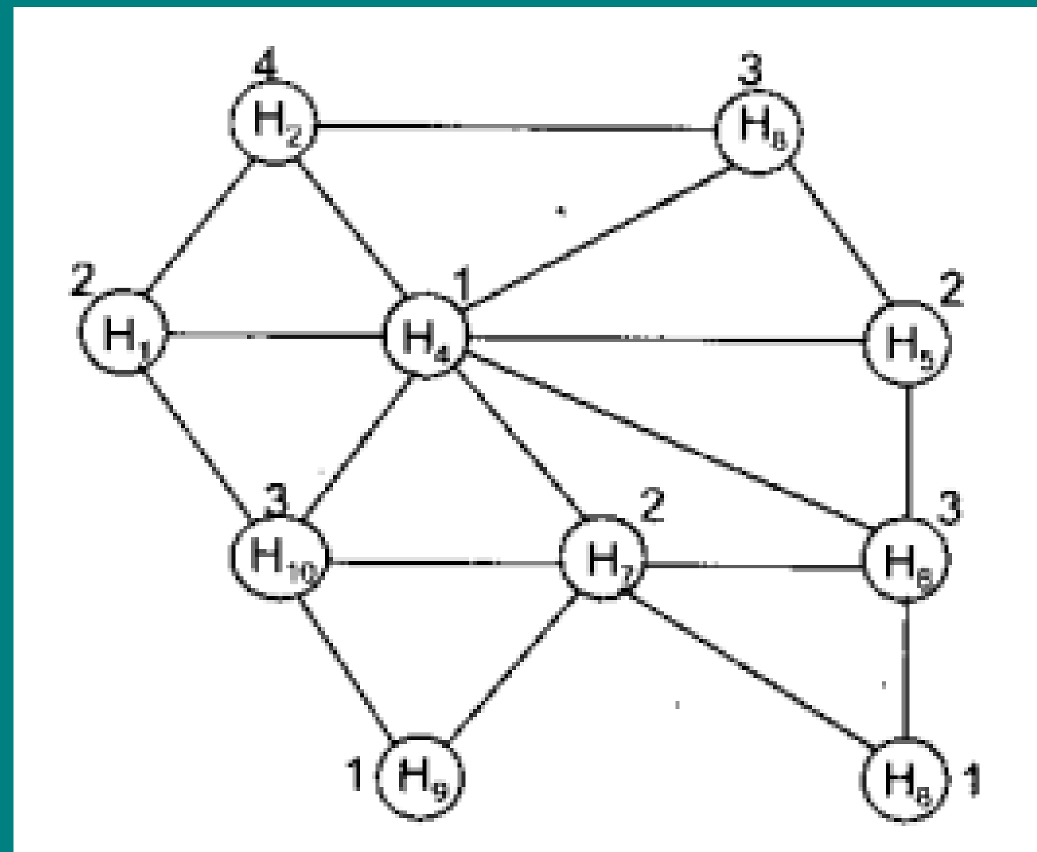
Bài toán tô màu bản đồ

Một bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bởi một đồ thị theo quy tắc sau:

- Mỗi miền được biểu diễn bởi 1 đỉnh
- Hai đỉnh nối với nhau bởi 1 cạnh nếu hai miền tương ứng có đường biên giới chung
- Hai miền chỉ có chung 1 điểm không được xem là có biên giới chung

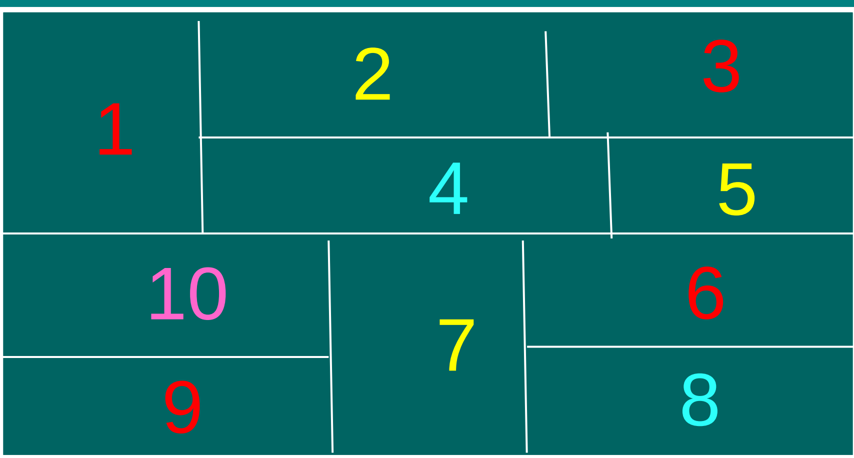
Bài toán tô màu bản đồ

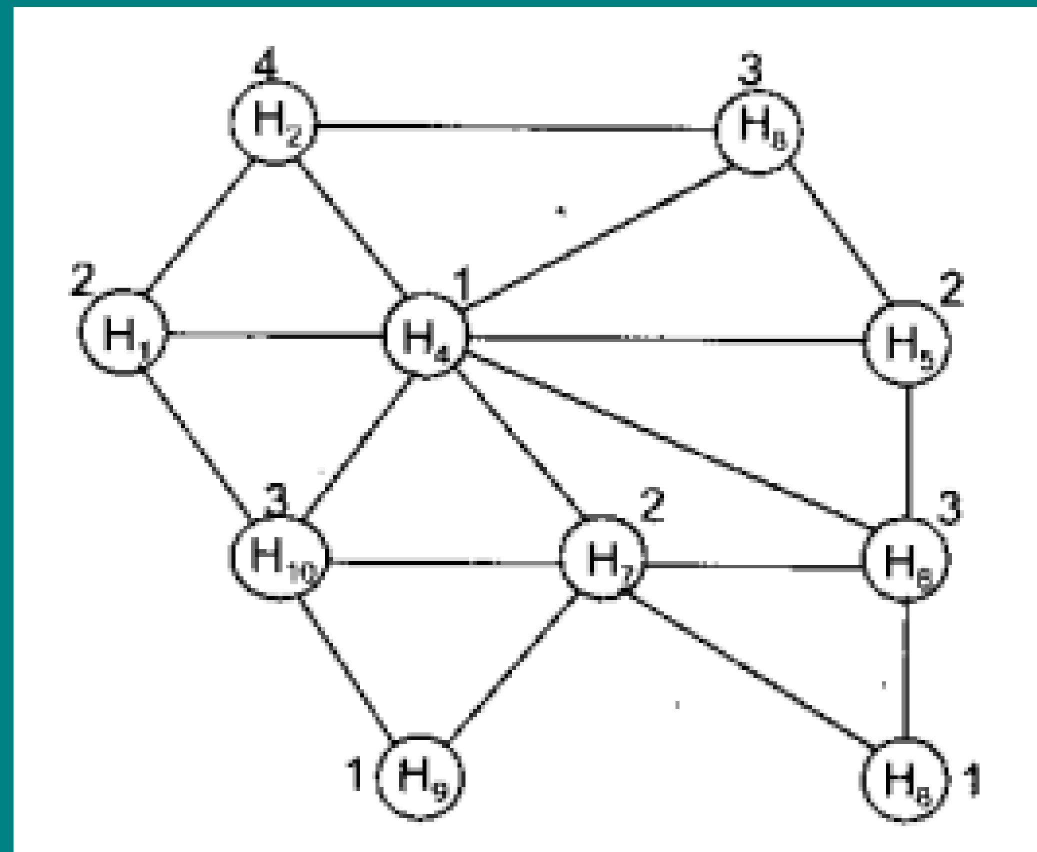




Định lý:
Sắc số của 1 đồ thị phẳng không lớn hơn 4

Bài toán tô màu bản đồ





Định lý:
Sắc số của 1 đồ thị phẳng không lớn hơn 4

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

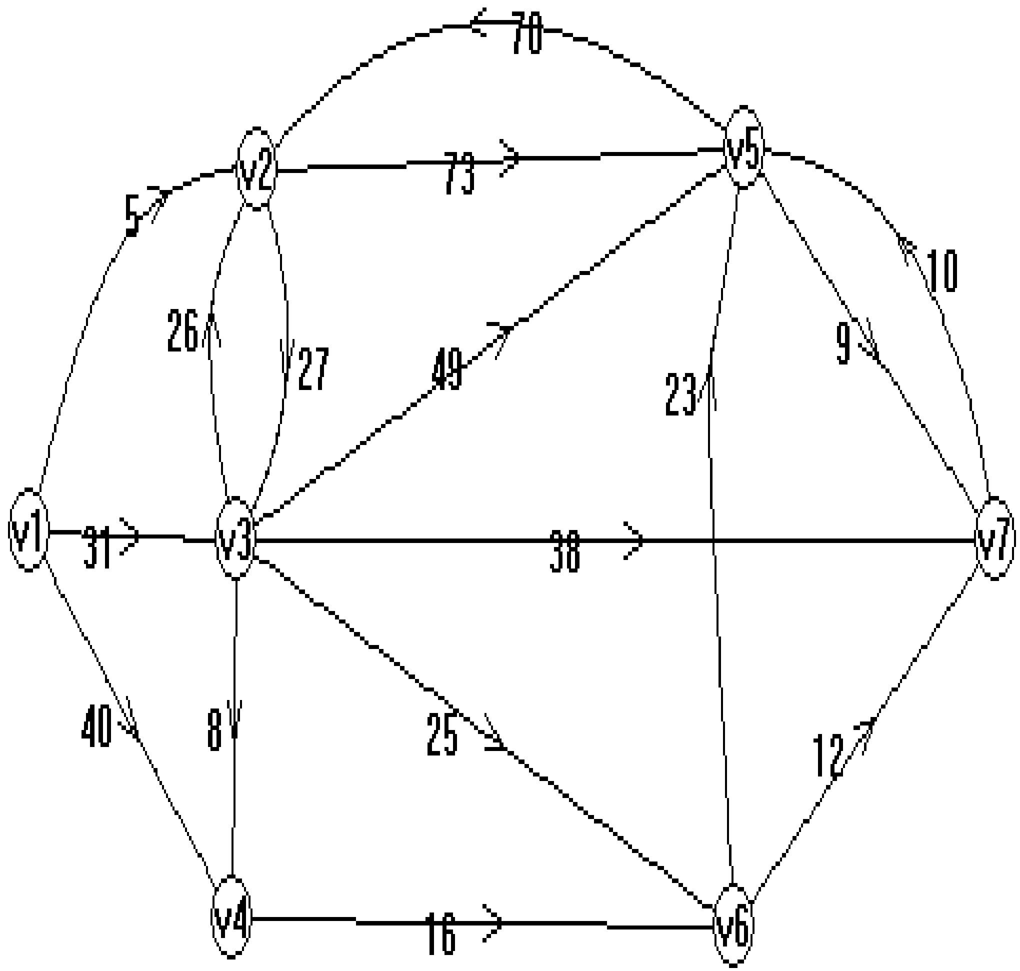
1. Đồ thị G = (V,E) gọi là đồ thị có *trọng số* (hay chiều dài, trọng lượng) nếu mỗi cạnh(cung) e được gán với một số thực w(e).Ta gọi w(e) là *trọng lượng* của e.
2. *Độ dài* của đường đi từ u đến v bằng tổng độ dài các cạnh mà đường đi qua
3. *Khoảng cách* giữa 2 đỉnh u,v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v.

Bài toán đường đi ngắn nhất

Ma trận khoảng cách(trọng số)

Cho G = (V, E), V = {$v_1, v_2, \ldots, v_n$} là đơn đồ thị có trọng số. Ma trận khoảng cách của G là ma trận D= (d_{ij}) xác định như sau:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi\ i = j \\ w(v_i v_j) & khi\ v_i v_j \in E \\ \infty & khi\ v_i v_j \notin E \end{cases}$$



$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra

Bài toán.

Cho G = (V, E) đơn, liên thông, có trọng số dương (w(uv) > 0 với mọi u khác v). Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v và tính khoảng cách $d(u_0,v)$.

Bài toán đường đi ngắn nhất

Phương pháp

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

1. Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến u_0 là u_0.
2. Trong $V \backslash \{u_0\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0) giả sử đó là u_1

Bài toán đường đi ngắn nhất

3. Trong $V\setminus\{u_0,u_1\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất(đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc u_1)giả sử đó là u_2
4. Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ u_0 đến mọi đỉnh .

Nếu G có n đỉnh thì:

$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \leq d(u_0,u_2) \leq \ldots \leq d(u_0,u_{n-1})$

Thuật toán Dijkstra

Bước1. i:=0, $S:=V\setminus\{u_0\}$, $L(u_0):=0$, $L(v):= \infty$ với mọi $v \in S$ và đánh dấu đỉnh v bởi$(\infty,-)$. Nếu n=1 thì xuất $d(u_0,u_0)=0=L(u_0)$

Bước2. Với mọi $v \in S$ và kề với u_i(nếu đồ thị có hướng thì v là đỉnh sau của u_i), đặt $L(v):= \min\{L(v),L(u_i)+w(u_i ,v)\}$.

Xác định $k = \min L(v)$,$v\in S$.

Nếu $k= L(v_j)$ thì xuất $d(u_0,v_j)= k$ và đánh dấu v_j bởi $(L(v_j);u_i)$.
$u_{i+1}:= v_j$ $S:=S\setminus\{u_{i+1}\}$

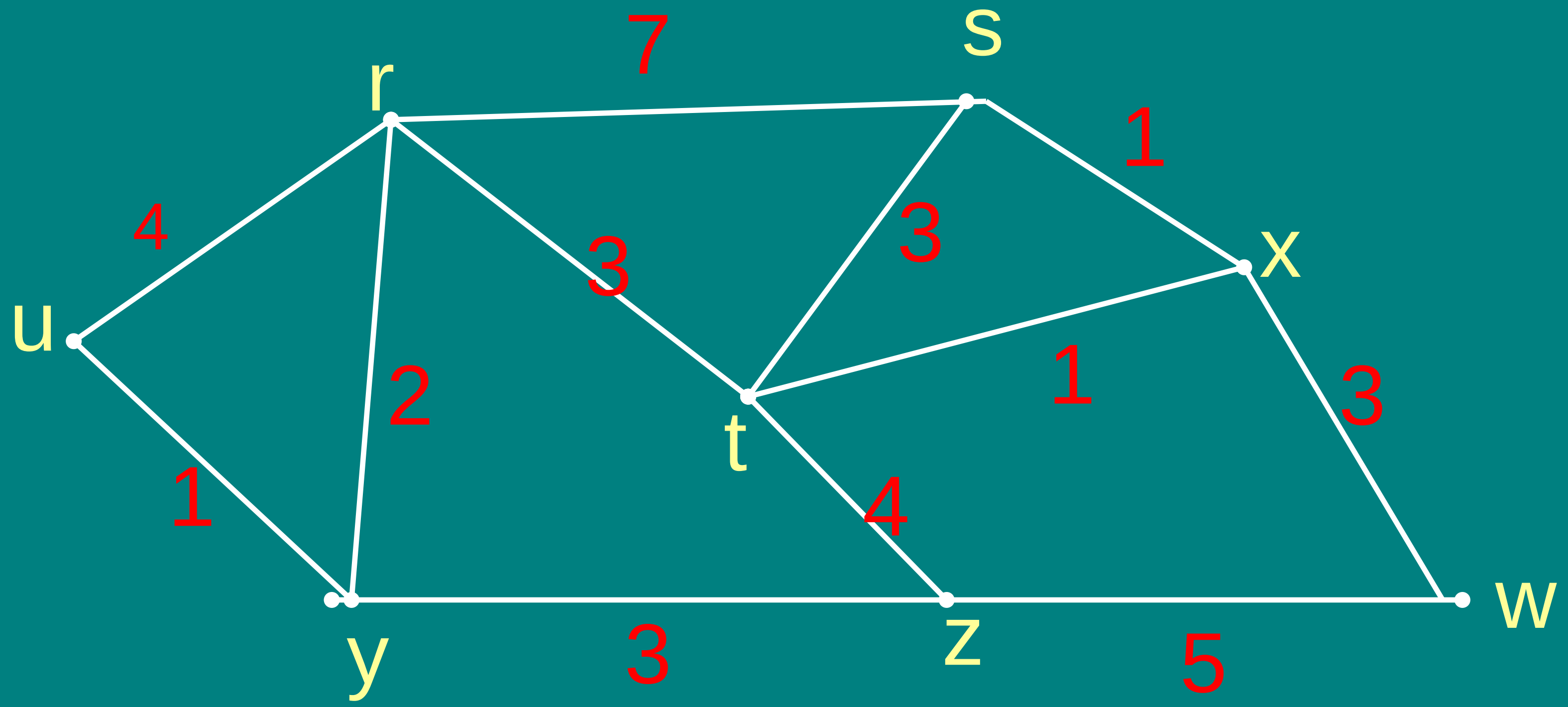
Bước3 i:=i+1

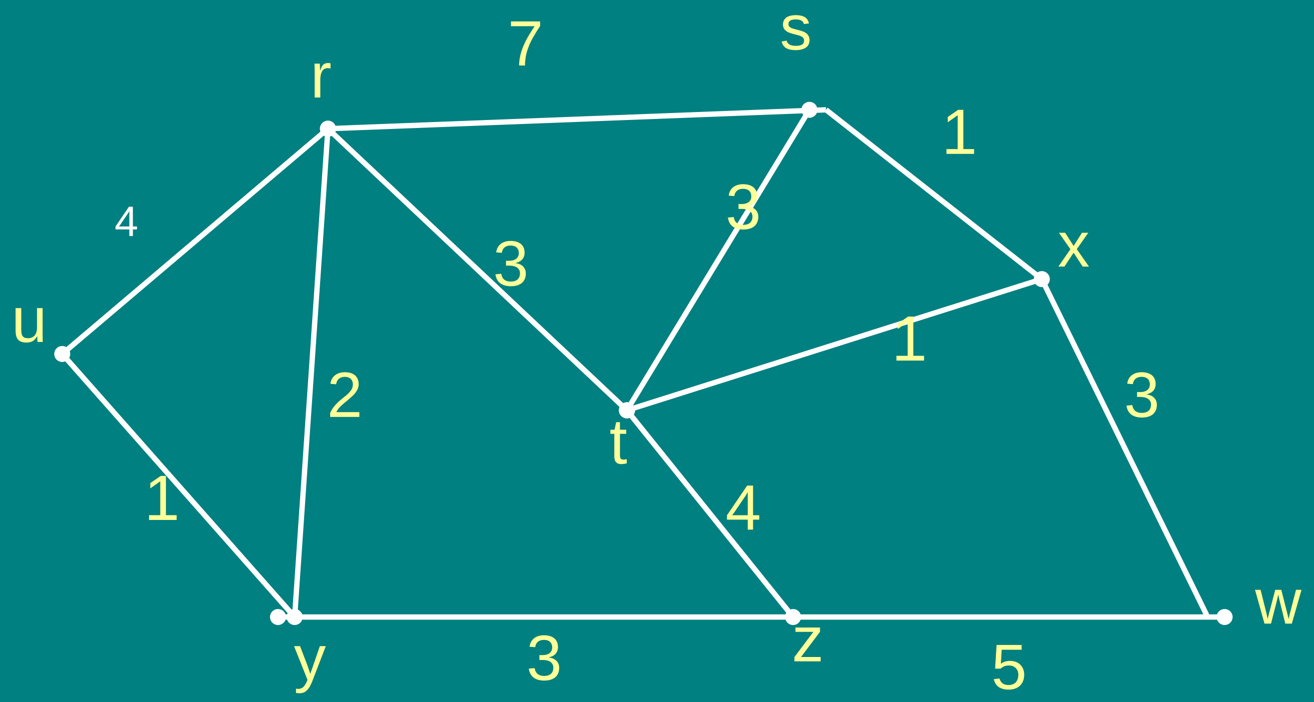
Nếu i = n-1 thì kết thúc

Nếu không thì quay lại Bước 2

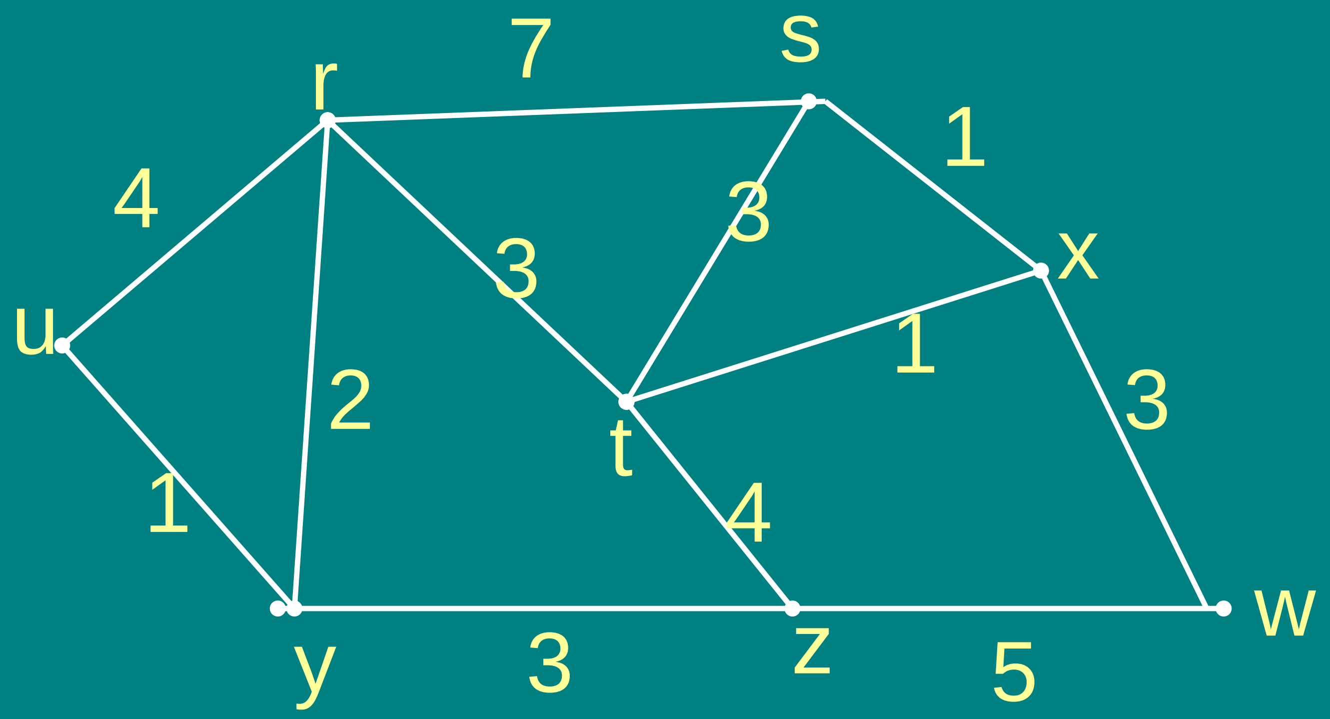
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh còn lại

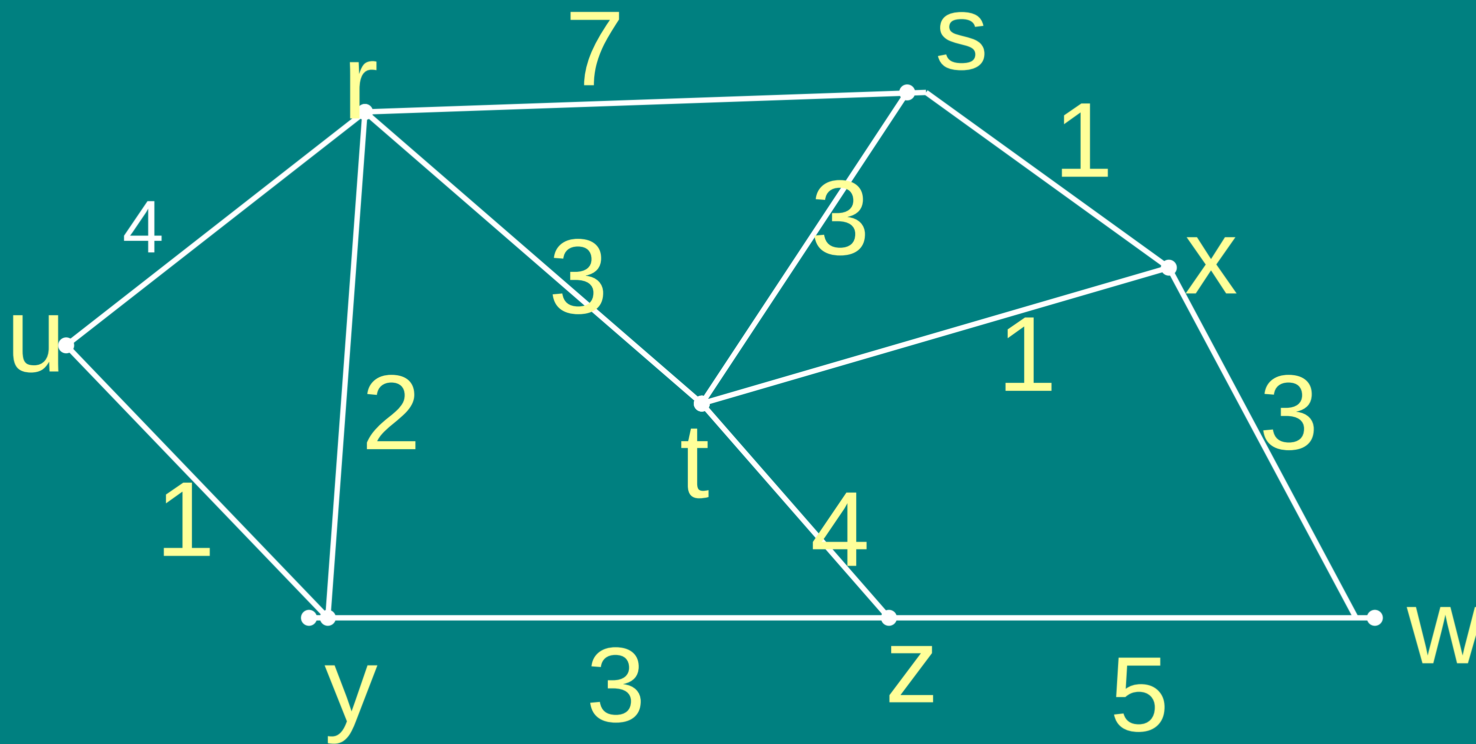




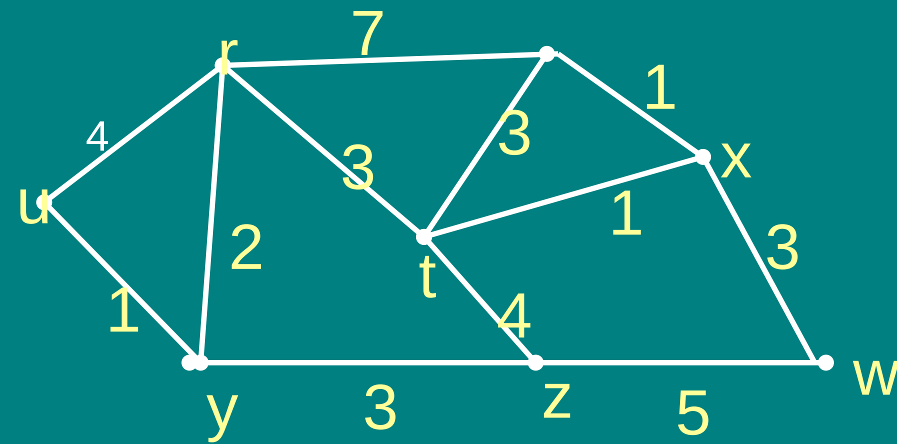
u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1,u_0)$*	(∞,-)	(∞,-)



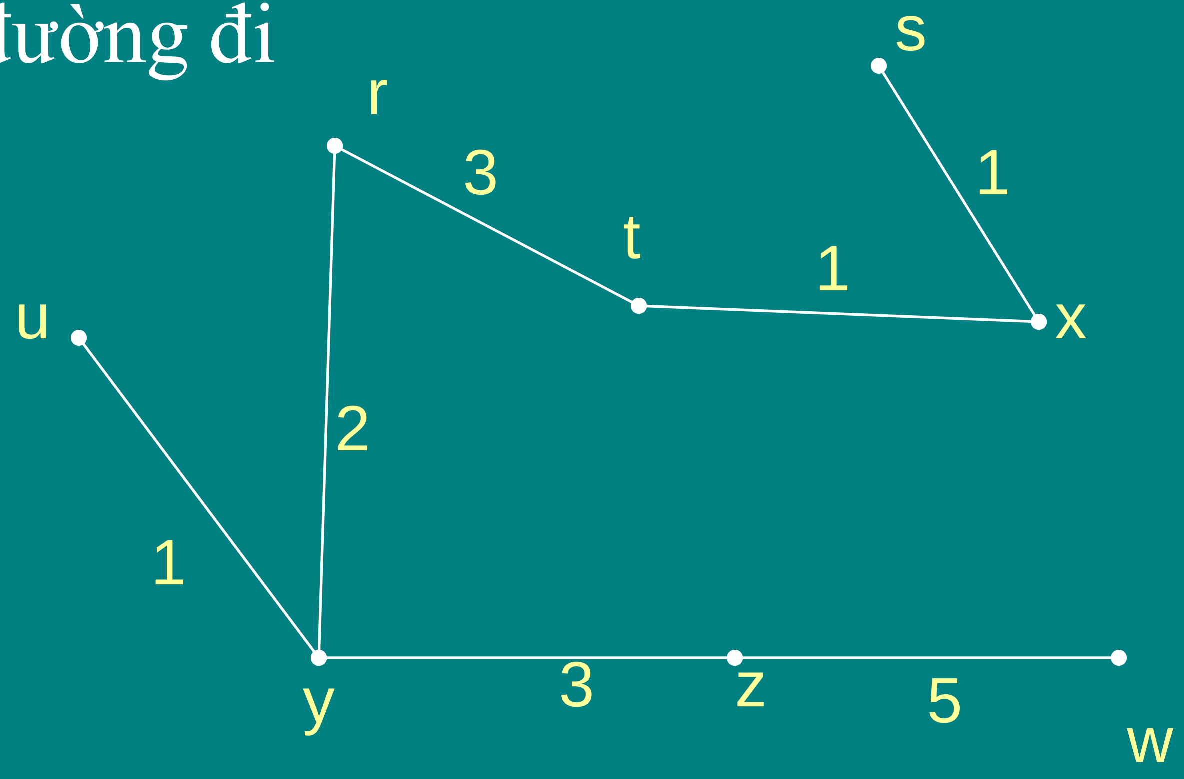
u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1u_0)$*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,u_0)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(1u_0)*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)	(∞,-)	-	(4,y)*	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)*	(∞,-)	-	-	(9,z)
-	-	(9,t)	-	(7,t)*	-	-	(9,z)
-	-	(8,x)*	-	-	-	-	(9,z)
-	-	-	-	-	-	-	(9,z)*

Bài toán đường đi ngắn nhất

Cây đường đi



Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 2(ĐHKHTN,2006).

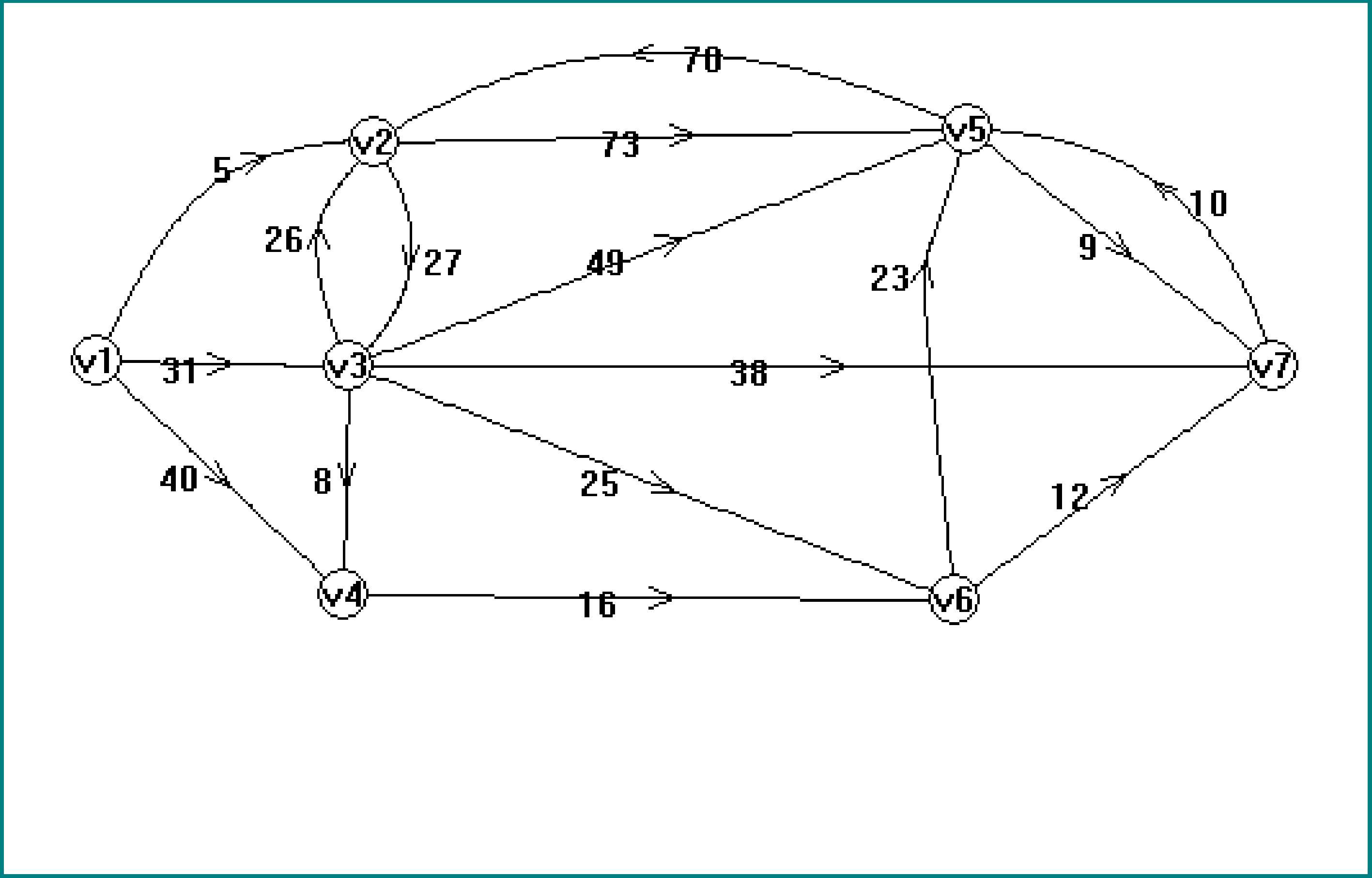
<u>Câu 5.</u> Cho đồ thị có trọng số G = (V, E) ,

V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7}xác định bởi ma trận trọng số D. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2,v_3,$v_{4,}$ v_5, v_6,v_7

Bài toán đường đi ngắn nhất

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

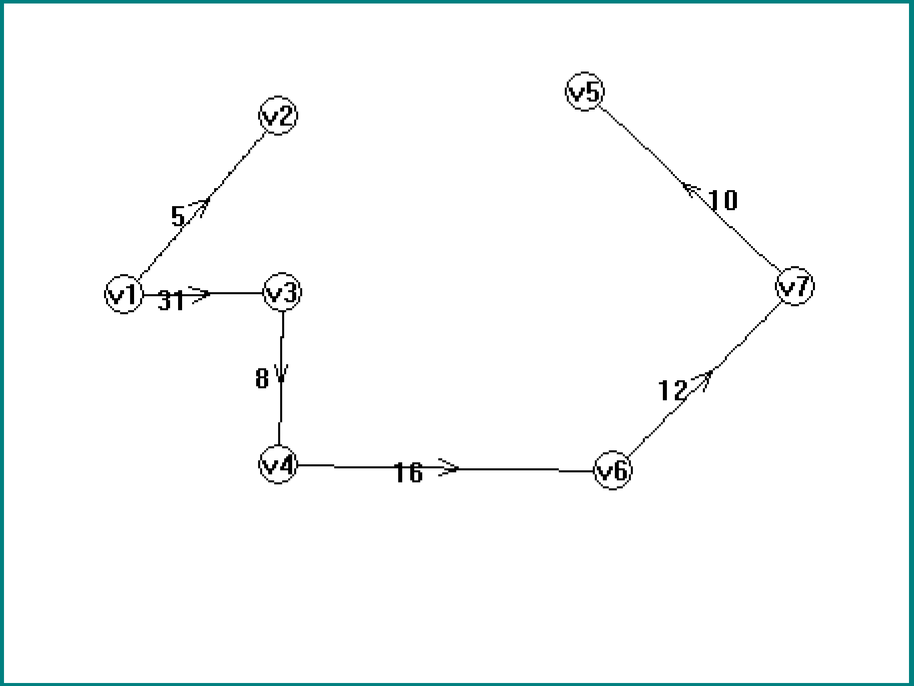
Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(5,v_1)$*	$(31,v_1)$	$(40,v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	$(31,v_1)$*	$(40,v_1)$	$(78,v_2)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	$(39,v_3)$*	$(78,v_2)$	$(56,v_3)$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	$(55,v_4)$*	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	-	$(67,v_6)$*
-	-	-	-	$(77,v_7)$	-	-

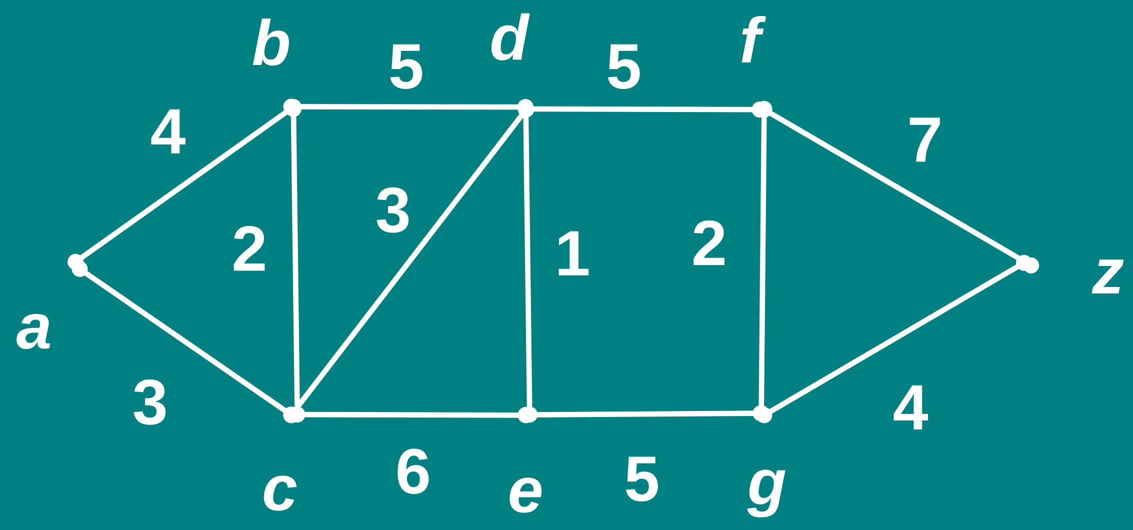
Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

BÀI 4(Đề2007)

Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến đỉnh *z* và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng số sau:



a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***z***
0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	(3.*a*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	(7.*d*)	(11.*d*)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	(11.*d*)	(12,*e*)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	(12,*e*)	(18,*f*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	(16,*g*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	**(16,*g*)**

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Ford – Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

<u>Bước 1</u>. $L_0(u_0) = 0$ và $L_0(v) = \infty$ $\forall v \neq u_0$. Đánh dấu đỉnh v bằng $(\infty, -)$; k=1.

<u>Bước 2</u>. $L_k(u_0) = 0$ và

$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(u)+w(uv)/u$ là đỉnh trước của v$\}$

Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(y)+w(yv)$ thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_k(v),y)$

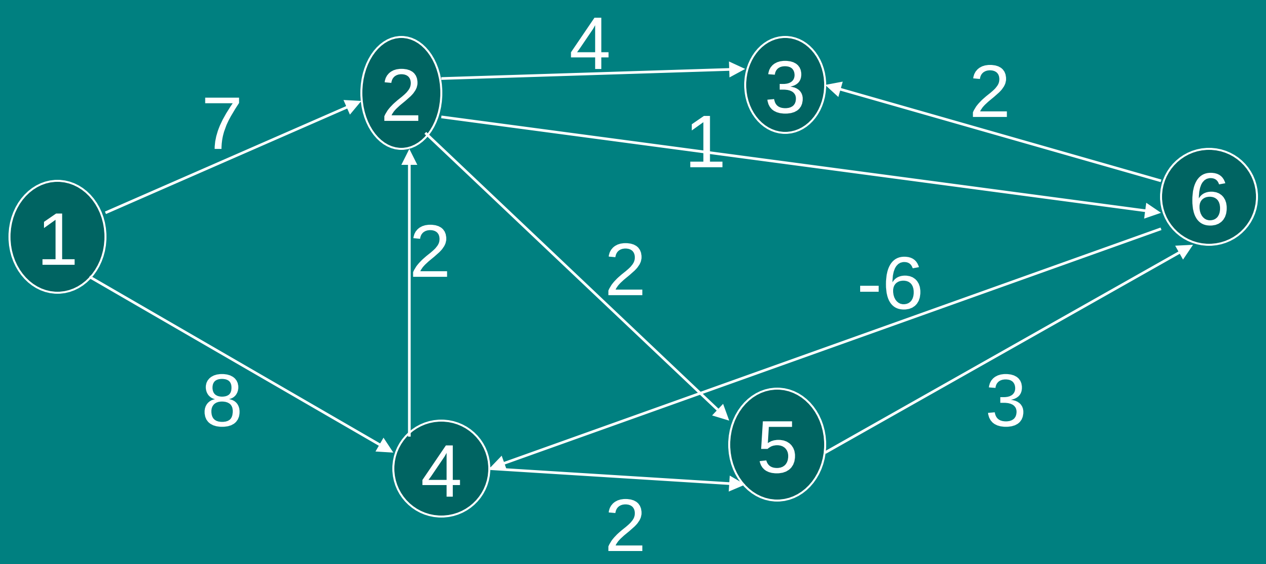
Bài toán đường đi ngắn nhất

<u>Bước 3</u>. Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(v)$ với mọi v, tức $L_k(v)$ ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

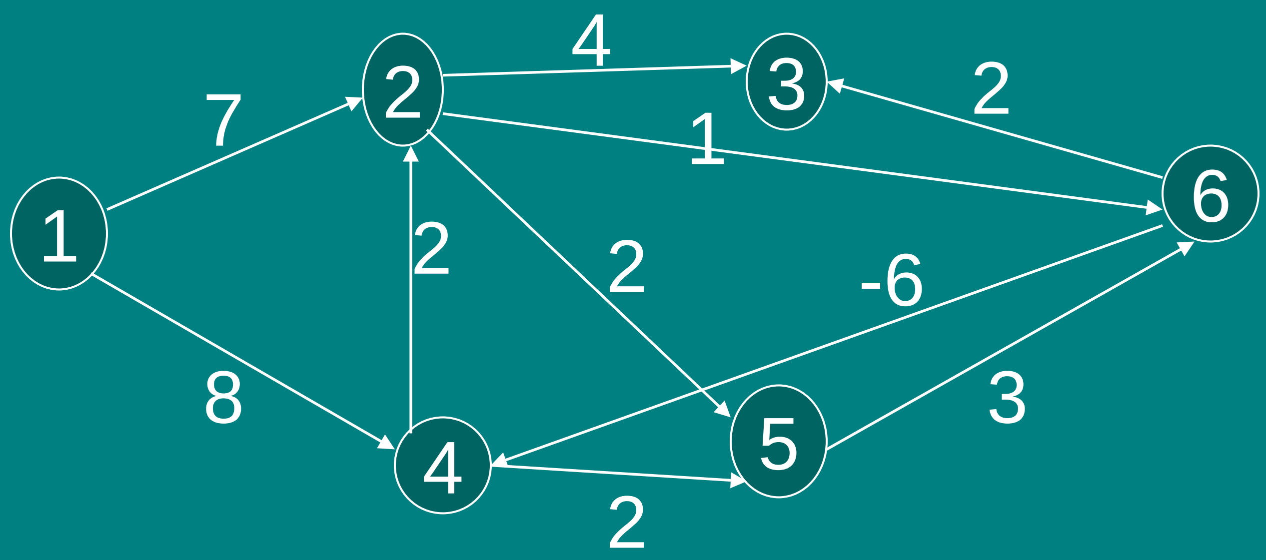
<u>Bước 4</u>. Nếu k = n thì dừng. G có mạch âm. Nếu $k \le n-1$ thì trở về bước 2 với $k:=k+1$

Bài toán đường đi ngắn nhất

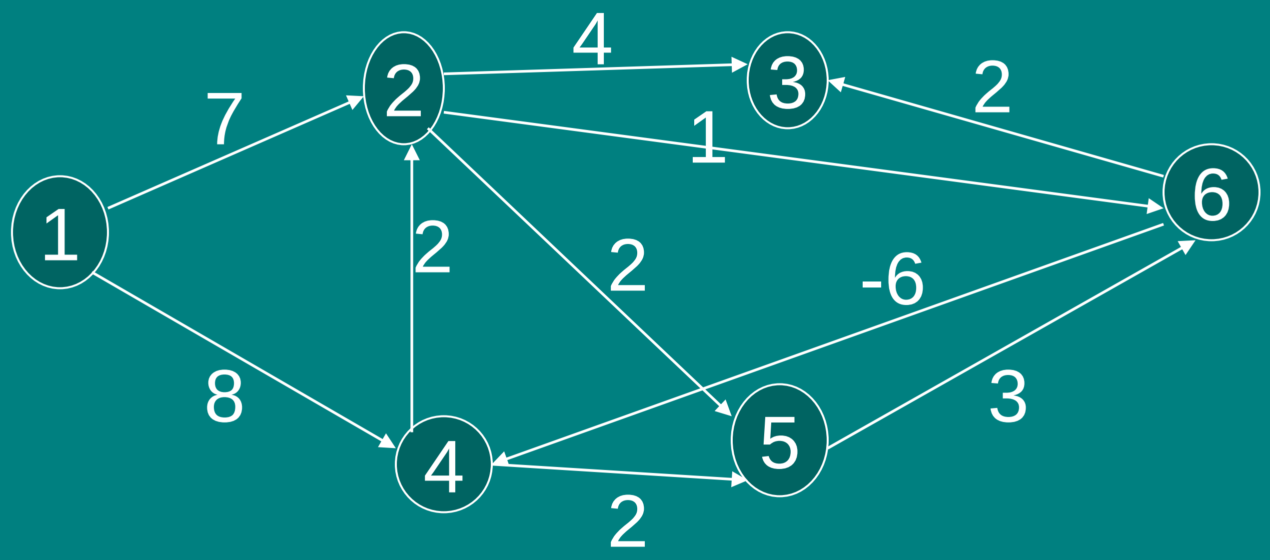
- BT1.



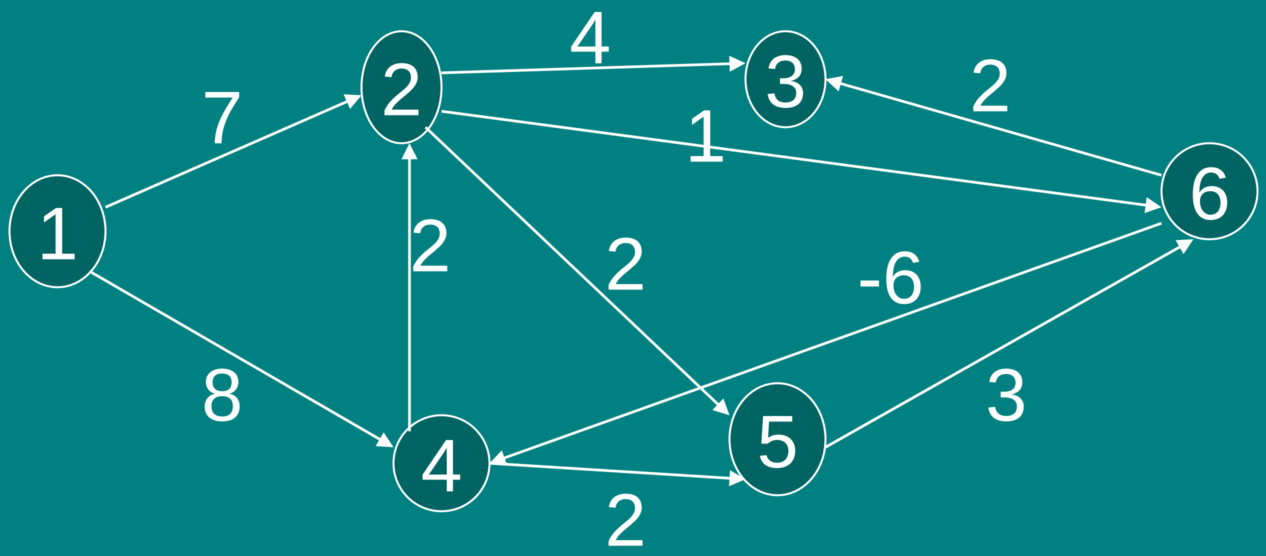
Bài toán đường đi ngắn nhất



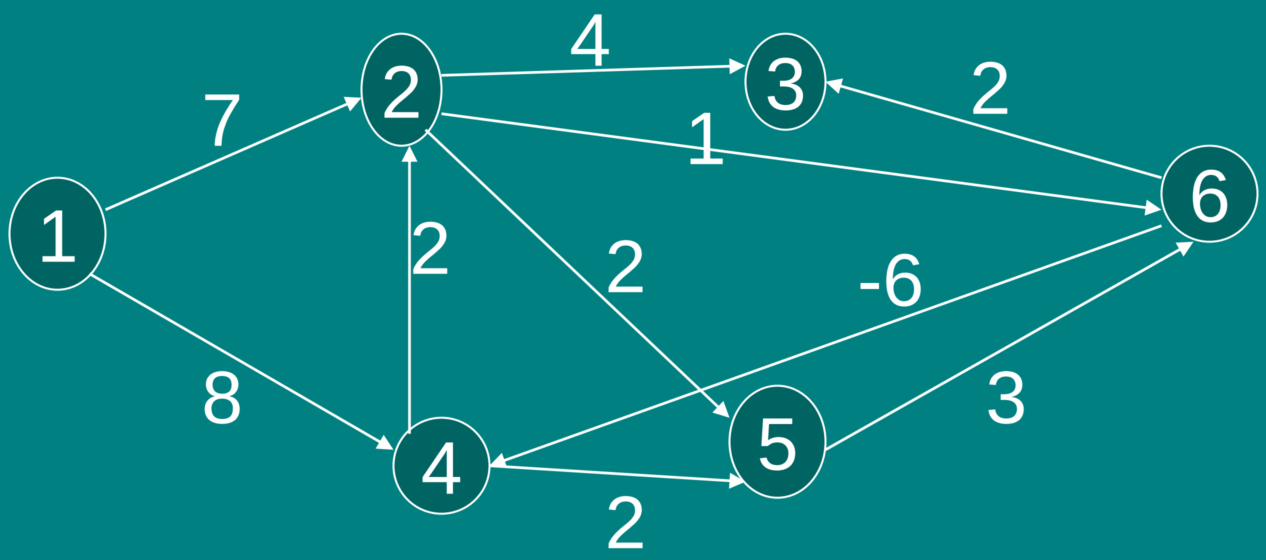
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



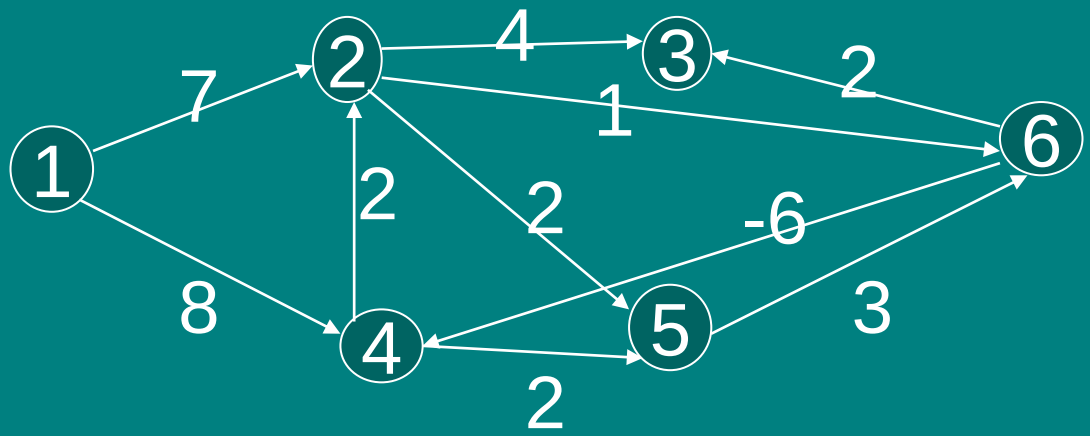
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)



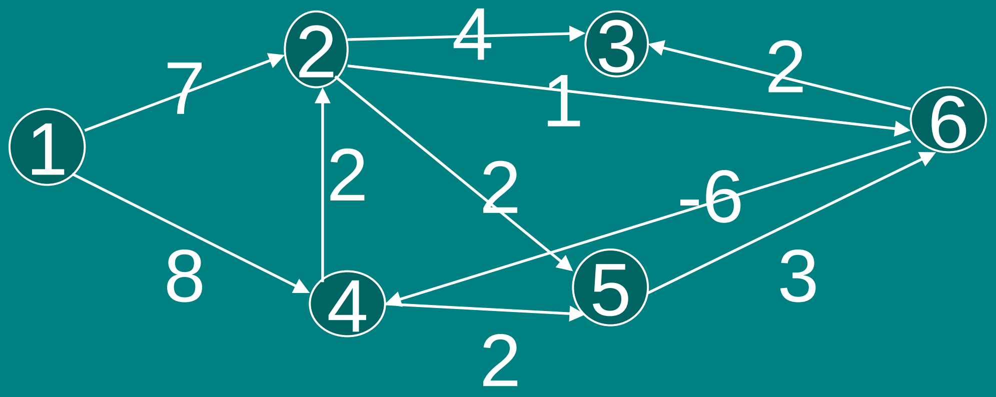
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)



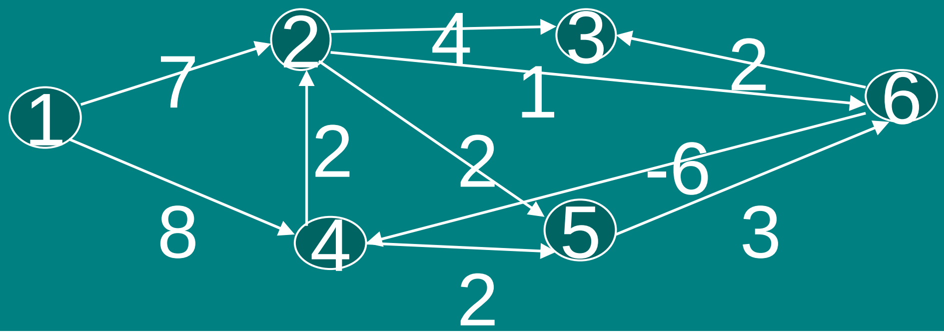
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất

k = n = 6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ có độ dài -3

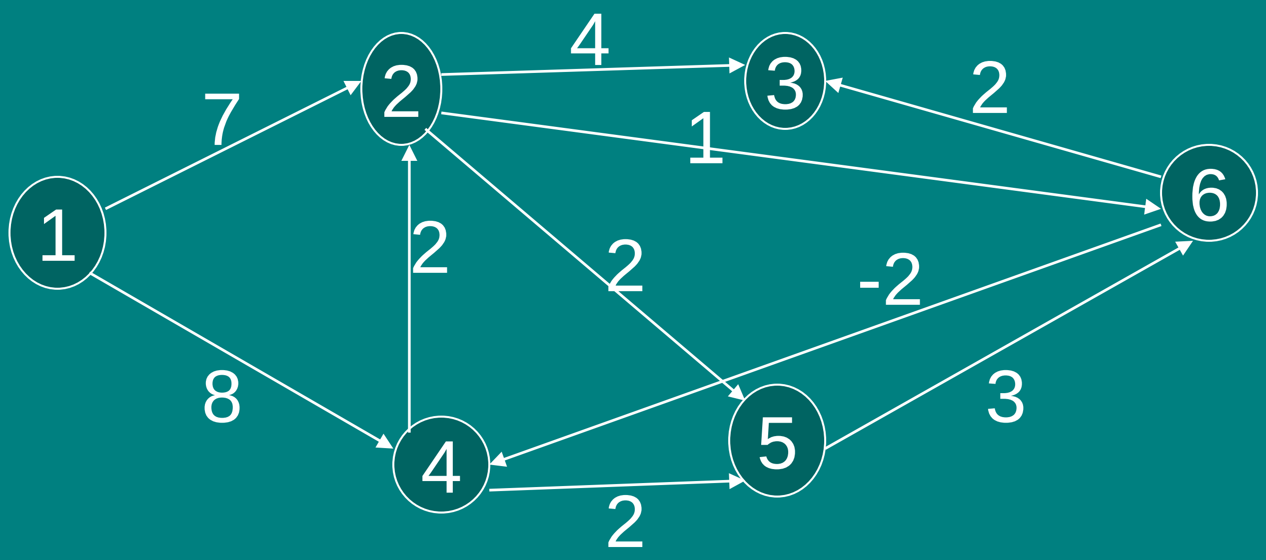
Bài toán đường đi ngắn nhất

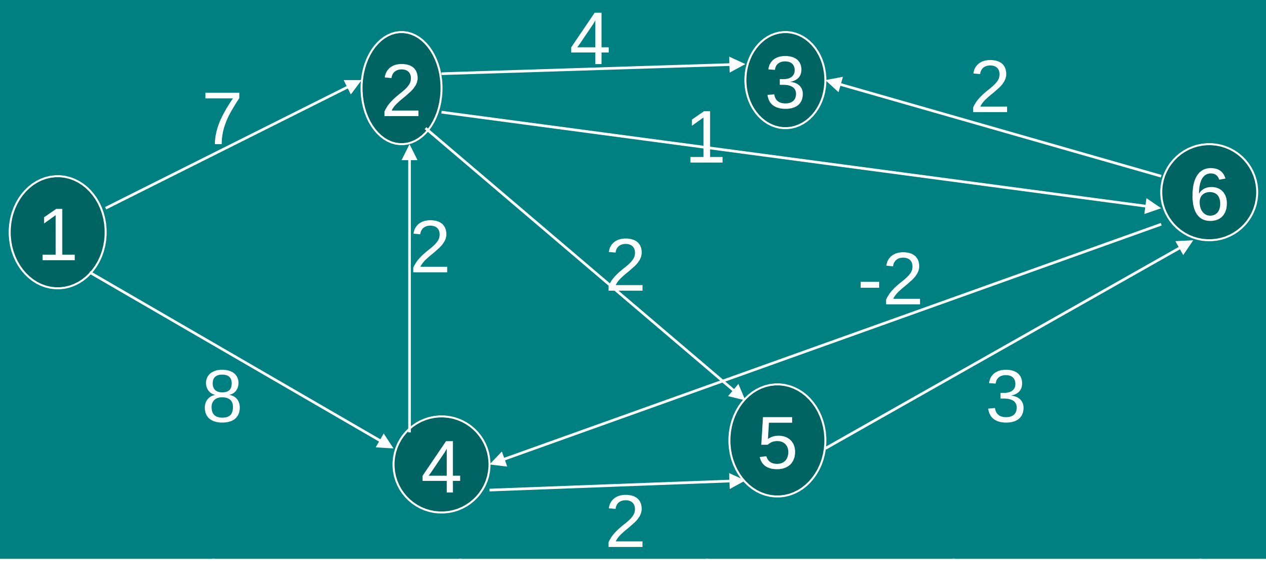
$k = n = 6$. $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ có độ dài -3

Bài toán đường đi ngắn nhất

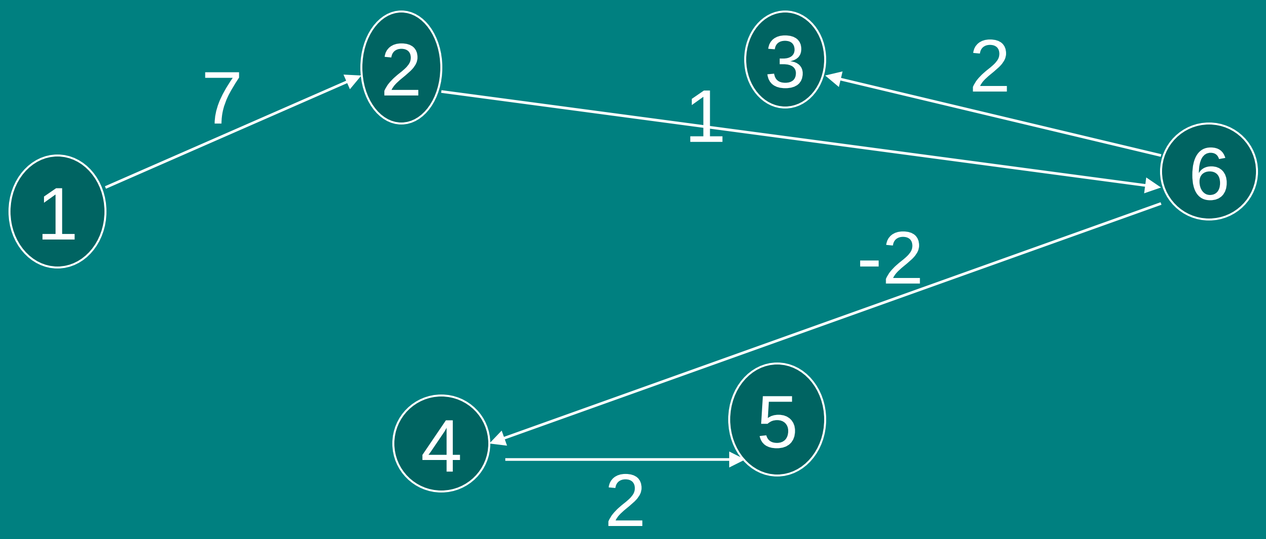
- BT2.





k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Floyd.

Tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm. Ngoài ma trận khoảng cách D ta còn dùng ma trận Q = (Q_{ij}), trong đó

$$Q_{ij} = \begin{cases} j \ khi \ ij \in E \\ 0 \ \ khi \, ij \notin E \end{cases}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 1. $D_0 = D$, $Q_0 = Q$, k = 1.

Bước 2. Với i = 1 đến n, với j =1 đến n. Đặt

$$D_k(i,j) = \begin{cases} D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j) > D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \\ D_{k-1}(i,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j) \le D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \end{cases}$$

$$Q_k(i,j) = \begin{cases} Q_{k-1}(i,k) & \text{if } D_{k-1}(i,j) > D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \\ Q_{k-1}(i,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j) \le D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \end{cases}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Bước 3. Nếu k = n thì dừng. Nếu k < n thì trở lại Bước 2 với k := k + 1

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Cho đồ thị G có ma trận khoảng cách là

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	10	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	∞	∞	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Khi đó ma trận Q sẽ là

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	0	0	0
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	4	0	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	0	0	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Ta có $D_1 = D$, $Q_1 = Q$ và

$D_2 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	9	7	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	7	5	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_2 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	2	2	0
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	2	2	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_3 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	7	5	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_3 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	∞
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	2	2	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_4 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	17
2	∞	0	∞	5	3	14
3	∞	2	0	7	5	16
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_4 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	4
3	0	2	0	2	2	2
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_5 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	13
2	∞	0	∞	5	3	10
3	∞	2	0	7	5	12
4	∞	15	∞	0	∞	9
5	∞	13	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_5 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	5
3	0	2	0	2	2	2
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_6 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	13
2	∞	0	∞	5	3	10
3	∞	2	0	7	5	12
4	∞	15	∞	0	18	9
5	∞	13	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_6 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	5
3	0	2	0	2	2	2
4	0	6	0	0	6	6
5	0	6	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 6 là

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ vì

$Q_6(1,6) = 3, Q_6(3,6) = 2, Q_6(2,6) = 5, Q_6(5, 6) = 6.$

- Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 4 đến đỉnh 5 là

$4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ vì

$Q_6(4,5) = 6, Q_6(6,5) = 2, Q_6(2,5) = 5.$

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Euler

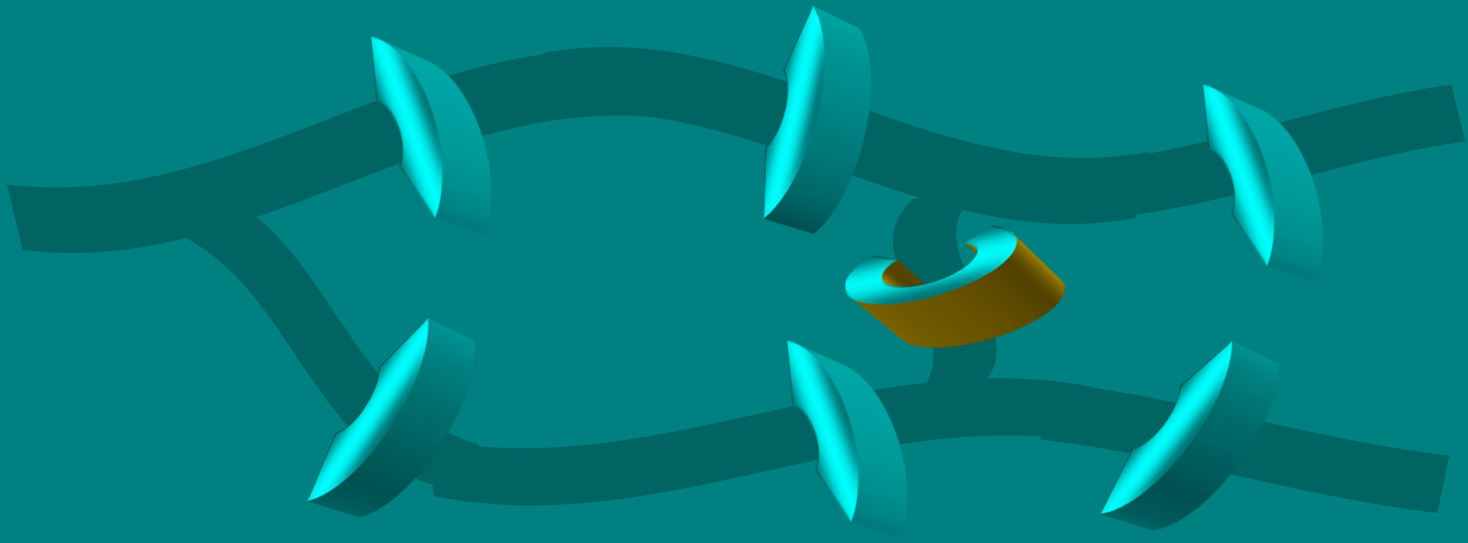
(1707-1783)

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

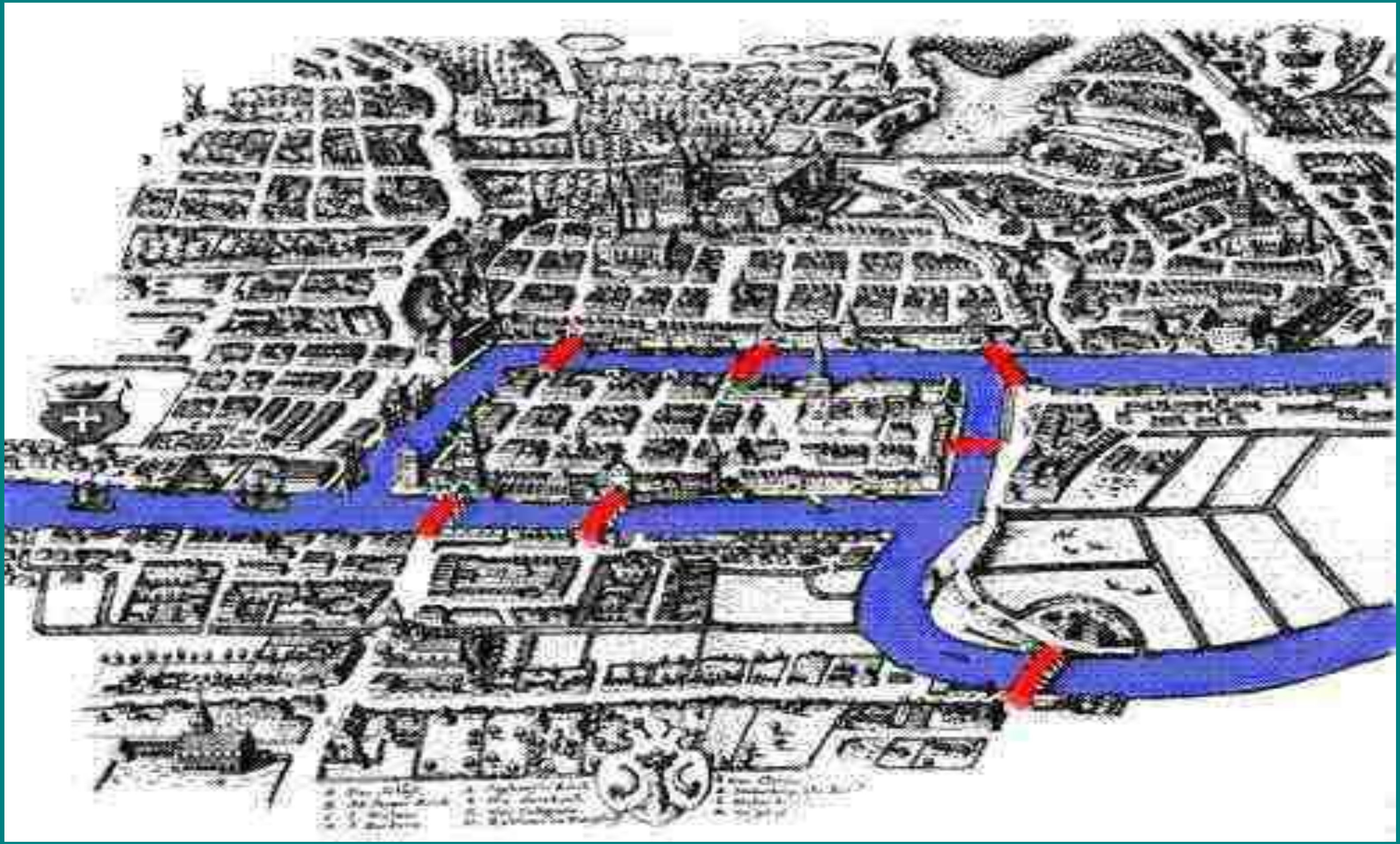
Hamilton
(1755-1804)

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Problem. The town of Königsberg was divided into four sections by the branch of the Pregel River



These four sections are connected by seven bridges



Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Định nghĩa.

i. *Đường đi Euler* là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần.*Chu trình Euler là* chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

ii. Đồ thị được gọi là *đồ thị Euler* nếu nó có chu trình Euler

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện cần và đủ.

i. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông. G là đồ thị Euler ⇔ Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Nếu G có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì G có đường đi Euler

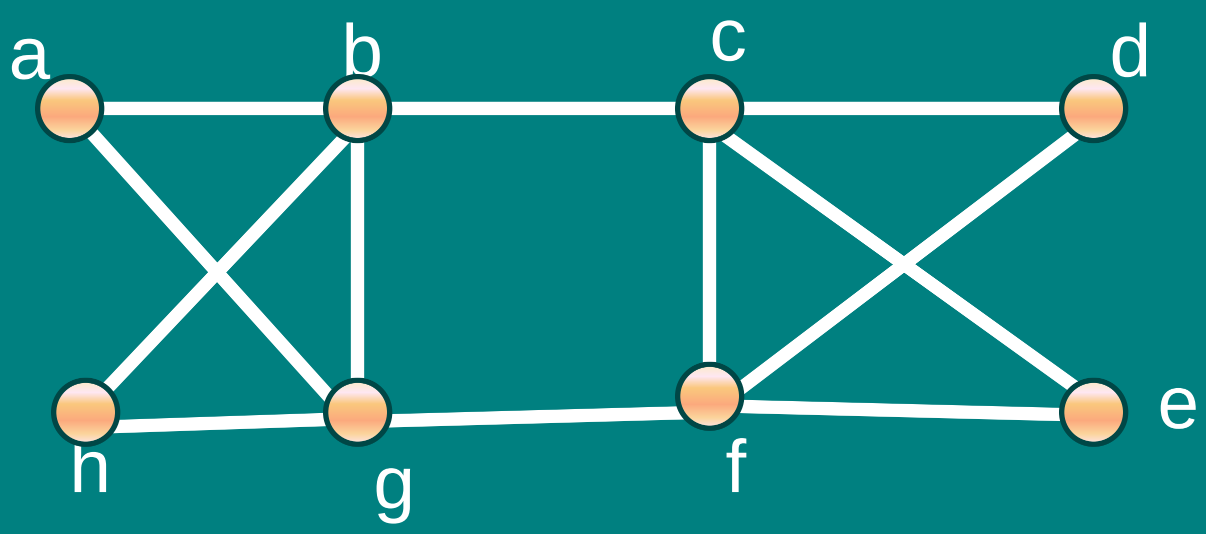
ii. Cho G là đồ thị có hướng liên thông. G là đồ thị Euler ⇔ G cân bằng.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

1. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo qui tắc sau: Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.
2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton



abcfdcefghbga

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Hamilton.

Định nghĩa. *Đường đi Hamilton* là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

- Định nghĩa tương tự cho chu trình Hamilton (mạch Hamilton).
- Đồ thi gọi là *đồ thị Hamilton* nếu nó có chu trình Hamilton

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ (cho đồ thị đơn vô hướng).

i. Định lý Ore(1960). Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i)+deg(j) $\geq n \geq 3$ với i và j là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.

ii. Định lý Dirac (1952) Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i) $\geq n/2$ với i tuỳ ý thì G là Hamilton

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton

Qui tắc 1. Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H

Qui tắc 2. Không có chu trình con(chu trình có chiều dài <n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc 3. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng(vì không được dùng đến nữa). Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng qui tăc1.

Qui tắc 4. Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng qui tắc 3.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ cho đồ thị có hướng , đơn(không có khuyên và không có cạnh song song cùng chiều)

ĐK Meyniel. ij và ji $\notin E \Rightarrow deg(i)+deg(j) \geq 2n-1$ với i, j tùy ý.

ĐLMeyniel(1973). Nếu G là đồ thị đơn, liên thông mạnh và thoả ĐK Meyniel thì G là đồ thị Hamilton.

ĐL Camion(1959). Nếu G là đơn đồ thị đủ, liên thông mạnh thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

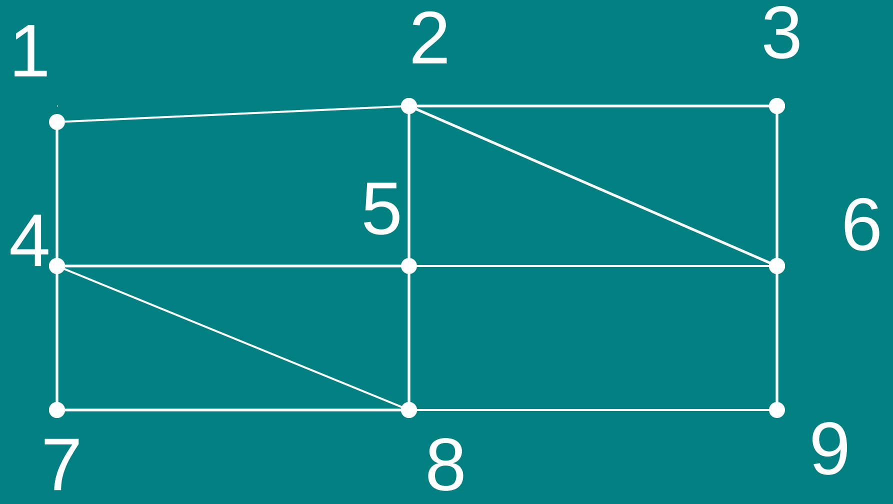
ĐLGhouila-Houri(1960) Nếu G là đơn đồ thị liên thông mạnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn n thì G Hamilton.

ĐL Woodall(1972). Cho G là đơn đồ thị thoả $ij \notin E \Rightarrow deg^{+}(i)+deg^{-}(j) \geq n$, với mọi i,j thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Đề thi2004(ĐHKHTN)

Đồ thi sau đây có Hamilton không?



Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giả sử G có chu trình Hamilton H, theo qui tăc1,tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều ở trong H:12,14,23,36,47,78,69,89. Ta có chu trình con là 1,2,3,6,9,8,7,4,1.

Vậy G không là đồ thị Hamilton.

Đề thi 2005(ĐHKHTN).Cho G là đồ thị không hướng, đơn, n≥ 3(n là số đỉnh), deg(i)+deg(j)≥n-1. Chứng minh rằng G có đường đi Hamilton.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giải:

Ta thêm vào đồ thị G một đỉnh z và nối z với mỗi đỉnh của G bởi một cạnh, ta thu được đồ thị G’ có n+1 đỉnh.Bậc của mọi đỉnh trong G’ đều lớn hơn bậc cũ của nó một đơn vị(trừz), còn bậc của z bằng n.

Do đó trong G’thì

deg’(i)+deg’(j)=deg(i)+1+deg(j) +1≥ n-1+1+1 = n+1, khi i và j khác z .

deg’ (i) + deg ’(z) = deg (i) + 1 + n ≥ n+1 ,với i khác z

Theo ĐL Ore thì G’ là đồ thị Hamilton,suy ra G có đường đi Hamilton