BÀI TOÁN ĐẾM

CHƯƠNG 2

Tập hợp

<u>1.Các phép toán trên tập hợp</u>.

Phép hợp: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

Phép giao : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

Hiệu : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

Hiệu đối xứng

$x \in A \oplus B \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$.

Phần bù :Cho $A \subset E$ thì

$$\overline{A} = E \setminus A$$

Tập hợp

Tích Descartes:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$

$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i , i = 1,2,\ldots,n\}$

Tập hợp

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \middle| \forall i \in I \,,\, x_i \in A_i \right\}$$

Tập hợp

2.Tính chất của phép toán trên tập hợp

2.1) Tính luỹ đẳng:

$A \cap A = A$ và $A \cup A = A$

2.2) Tính giao hoán:

$A \cap B = B \cap A$ và $A \cup B = B \cup A$.

2.3) Tính kết hợp:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

và $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Tập hợp

2.4) Tính phân phối:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

và $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2.5) Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \;,\; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Suy ra:

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

và $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Tập hợp

Mở rộng

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

$$\boxed{\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$$

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

Tập hợp

3.Số phần tử của tập hợp hữu hạn.

Cho A là tập hợp hữu hạn.Số phần tử của tập A ký hiệu là $|A|$.Ta có:

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2) $|A \times B| = |A|\,|B|$
3) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, $\mathcal{P}(A)$ là tập các tập con của A

Bài toán đếm

- Giới thiệu bài toán đếm.
- Các nguyên lý đếm cơ bản.
- Nguyên lý bù trừ.
- Nguyên lý Dirichlet.
- Hoán vị.
- Chỉnh hợp.
- Tổ hợp.

1. Giới thiệu bài toán đếm

- Việc đếm các đối tượng có những tính chất nào đó là một bài toán quan trọng trong Toán Rời Rạc.

- Giải quyết tốt bài toán đếm giúp ta giải nhiều bài toán khác nhau trong đánh giá độ phức tạp tính toán của các thuật toán và tìm xác suất rời rạc của các biến cố.

1. Giới thiệu bài toán đếm

- **Phương pháp chung để giải bài toán đếm được dựa trên các nguyên lý đếm cơ bản (nguyên lý cộng, nguyên lý nhân).**
- **Một số bài toán đếm phức tạp hơn được giải bằng cách qui về các bài toán con để sử dụng được các nguyên lý đếm cơ bản.**
- **Vấn đề ta quan tâm là sự phân bố của các phần tử vào một tập hợp hữu hạn.**

2. Các nguyên lý đếm cơ bản

- Nguyên lý cộng
- Nguyên lý nhân

2.1. Nguyên lý cộng

- **Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp hoàn toàn độc lập nhau:**

- Phương pháp thứ nhất có n cách làm

- Phương pháp thứ hai có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n + m

2.1. Nguyên lý cộng

- **Ví dụ 1: Xét việc chọn nhân sự đi dự họp:**

  Giả sử cần chọn hoặc một cán bộ hoặc một SV tham gia buổi họp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhân sự nếu có 37 cán bộ và 63 SV ?

  Giải:

  Gọi cách chọn thứ nhất là chọn một cán bộ từ tập cán bộ → ta có 37 cách.

  Gọi cách chọn thứ hai là chọn một SV từ tập SV → ta có 63 cách.

  Vì tập cán bộ và tập SV là rời nhau nên theo nguyên lý cộng, ta có số cách chọn nhân sự là 37 + 63 = 100 cách

2.1. Nguyên lý cộng

- **Ví dụ 2: Xét quá trình chọn bài thực hành:**

Một sinh viên có thể chọn bài thực hành từ 1 trong 3 danh sách có số bài tương ứng là: 23, 15 và 19 bài.
Vì 3 danh sách này rời nhau nên theo nguyên lý cộng, sinh viên có tổng cộng 23+15+19=57 cách chọn bài thực hành.

- **Ví dụ 3: An có 3 áo tay dài và 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo thì An có mấy cách ?**

2.2. Nguyên lý nhân

- **Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước:**

- Bước 1 có n cách làm

- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n x m

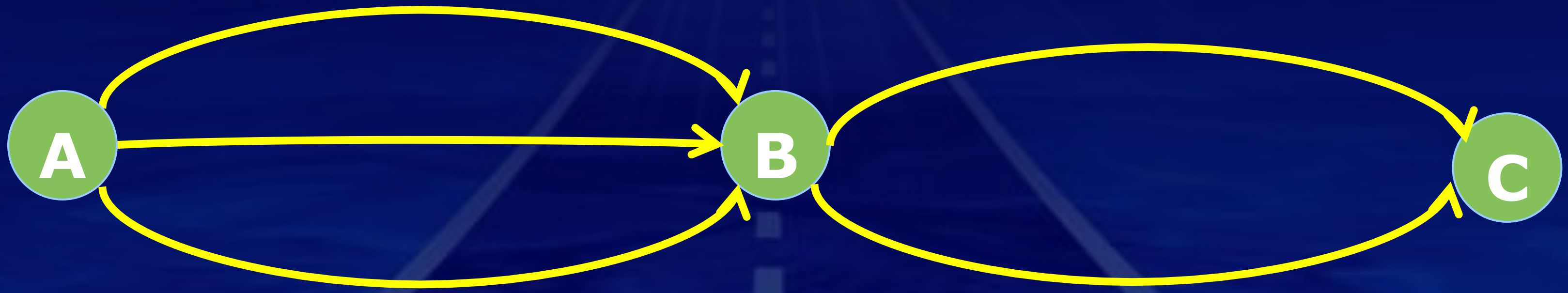
2.2. Nguyên lý nhân

❖ Ví dụ 1: Cho sơ đồ đường đi sau:

Từ A đến B có 3 đường đi

Từ B đến C có 2 đường đi

Vậy từ A đến C có bao nhiêu đường đi ?



❖ Có 3x2 = 6 con đường đi từ A đến C

2.2. Nguyên lý nhân

- Ví dụ 2: Người ta ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái (trong 26 chữ cái) và một số nguyên dương không vượt quá 100. Có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?
- Quy tắc nhân chỉ ra rằng có 26x100=2600 cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế.
- Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

2.2. Nguyên lý nhân

- **Ví dụ 3: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài n ?**

Mỗi 1 bit trong n bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách: hoặc bằng 0 hoặc bằng 1.

Bởi vậy theo quy tắc nhân có tổng cộng 2^n xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng n

2.2. Nguyên lý nhân

- **Ví dụ 4: Giá trị của biến k bằng bao nhiêu sau khi chương trình sau được thực hiện?**

```
k := 0
for i := 1 to n
  for j := 1 to m
     for e := 1 to p
          k := k+1
```

Kết quả: k = n x m x p

2.2. Nguyên lý nhân

- Ví dụ 5: . Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8

2.2. Nguyên lý nhân

- **Đáp án:** 2^8

2.2. Nguyên lý nhân

- **Ví dụ 6: . Cho tập X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà chia hết cho 2?**

2.2. Nguyên lý nhân

❖ Giải:

Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$.

❖ TH1: c = 0. Khi đó

+ c có 1 cách chọn

+ a có 5 cách chọn (a = X \ {0})

+ b có 4 cách chọn (b = X \ {a, 0})

TH1 có 1 × 4 × 5 = 20 số.

❖ TH2: c khác 0. Khi đó

+ c có 2 cách chọn

+ a có 4 cách chọn (a = X \ {c, 0})

+ b có 4 cách chọn (b = X \ {a, c})

TH2 có 2 × 4 × 4 = 32 số.

Như vậy có 20 + 32 = 52 số

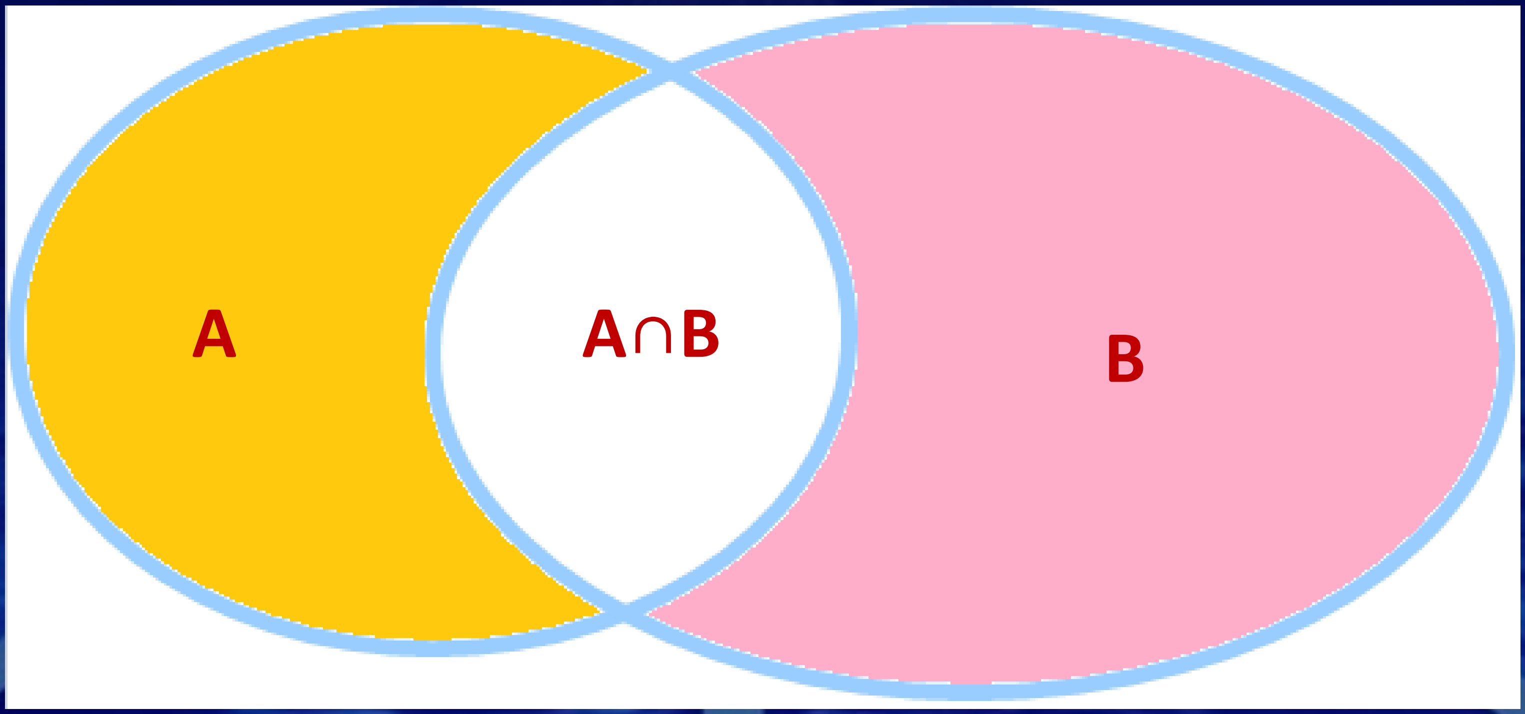
3. Nguyên lý bù trừ

- Trong một số bài toán đếm phức tạp hơn, các giải pháp tiến hành thường không độc lập nhau, nghĩa là có thể có vài cách làm áp dụng được cho các giải pháp.
- Khi đó, ta áp dụng nguyên lý bù trừ.

3. Nguyên lý bù trừ

- **Nguyên lý bù trừ:**
  Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



3. Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 1: Lớp có 25 SV giỏi tin học, 13 SV giỏi toán và 8 SV giỏi cả toán và tin học. Hỏi lớp có bao nhiêu SV ?**

- **Giải:**
  Gọi A tập là tập các SV giỏi Tin học, B là tập các SV giỏi toán. Khi đó $A \cap B$ là tập SV giỏi cả toán và tin học.
  Do vậy ta có: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  Hay Số SV của lớp = 25 + 13 – 8 = 30

3. Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 2. Có bao nhiêu số nguyên <= 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.**

- **Giải:**
  Gọi A là tập các số nguyên <= 1000 chia hết cho 7 và B là tập các số nguyên <= 1000 chia hết cho 11.
  Khi đó tập số nguyên <= 1000 hoặc chia hết cho 7 hoặc chia hết cho 11 là $|A \cup B|$.
  Theo công thức ta có:
  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  $|A \cup B| = 1000/7 + 1000/11 - 1000/7x11$
  $|A \cup B| = 142 + 90 - 12 = 220$

3. Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 3. Mỗi người sử dụng máy tính đều có mật khẩu dài từ 6 đến 8 ký tự. Trong đó mỗi ký tự là một chữ hay một chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có thể lập được bao nhiêu mật khẩu?**

3. Nguyên lý bù trừ

❖ **Giải:**

Gọi P là tổng số mật khẩu: P_6**,** P_7, P_8 **là mật khẩu có độ dài 6, 7, 8 tương ứng. Theo quy tắc cộng ta có:**

$$\mathbf{P} = P_6 + P_7 + P_8$$

Theo quy tắc nhân:

$$P_6 = (26+10)^6 - 26^6$$
$$P_7 = (26+10)^7 - 26^7$$
$$P_8 = (26+10)^8 - 26^8$$

3. Nguyên lý bù trừ

- Ví dụ 4: Trong một trường ĐH có 18 sinh viên xuất sắc về Toán và 325 sinh viên xuất sắc về CNTT
- A. Có bao nhiêu các chọn hai đại diện, một là sinh viên Toán, còn người kia là sinh viên CNTT.
- B. Có bao nhiêu các chọn một đại diện là sinh viên Toán hoặc là sinh viên CNTT.

3. Nguyên lý bù trừ

- **Giải:**
- **A. Có 325.18 = 5850 cách**
- **B. Có 325 + 18 = 343 cách**

3. Nguyên lý bù trừ

- **Ví dụ 5:**

Ở một trường trung học có 14 học sinh chơi bóng đá, 17 học sinh chơi bóng rổ, 18 học sinh chơi bóng bầu dục. Trong đó có 4 học sinh chơi cả bóng đá và bóng rổ, 3 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bầu dục, 5 học sinh chơi cả bóng rổ và bóng bầu dục, và có 1 học sinh chơi cả 3 môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chơi ít nhất một trong những môn thể thao trên?

3. Nguyên lý bù trừ

❖ **Giải:**

Áp dụng công thức

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|$

Gọi A là tập hợp những học sinh chơi bóng đá, B là tập hợp những học sinh chơi bóng rổ, và C là tập hợp những học sinh chơi bóng bầu dục. Số học sinh chơi ít nhất một trong những môn thể thao trên là: $14 + 17 + 18 - 4 - 3 - 5 + 1 = 38$

4. Nguyên lý Dirichlet

- **Tên gọi khác: Nguyên lý chuồng bồ câu.**

Gọi [x] là số nguyên nhỏ nhất >= x

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng
Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ [n/k] bồ câu trở lên.

4. Nguyên lý Dirichlet

- **Ví dụ:**
- **Có 10 chim bồ câu ở trong 3 cái chuồng.**
- **Khi đó, có ít nhất 1 chuồng có [10/3] = 4 con chim bồ câu trở lên.**
- **Phản chứng: tất cả các chuồng đều có số bồ câu nhỏ hơn hoặc bằng 3**
- **Trong 1 nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày**

4. Nguyên lý Dirichlet

- Ví dụ. Cho tập X ={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Lấy A là tập hợp con của X gồm 6 phần tử. Khi đó trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.
- Giải.

Ta lập các chuồng như sau:

{1,9} {2,8} {3,7} {4,6} {5}

Do A có 6 phần tử nên trong 6 phần tử đó sẽ có 2 phần tử trong 1 chuồng.

→ đpcm

4. Nguyên lý Dirichlet

- Ví dụ. Cần tạo ít nhất bao nhiêu mã vùng để đảm bảo cho 84 triệu máy điện thoại mỗi máy 1 số thuê bao biết rằng mỗi thuê bao gồm 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0?

4. Nguyên lý Dirichlet

- **Giải.**

Theo nguyên lý nhân, có 9.10.10...10 = 9 triệu số thuê bao có 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 84 triệu máy có ít nhất là:

$$\lceil 84/9 \rceil = 10$$

Máy có cùng 1 số thuê bao. Do đó để đảm bảo mỗi máy một số thuê bao cần tạo ra ít nhất 10 mã vùng.

4. Nguyên lý Dirichlet

- Ví dụ: giả sử trong 1 nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có 3 người là bạn của nhau hoặc có 3 người là kẻ thù của nhau.

4. Nguyên lý Dirichlet

❖ **Giải:**

Gọi là A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất 3 người là bạn của A hoặc có ít nhất 3 người là kẻ thù của A. Điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát vì $\lceil 5/2 \rceil$ = 3. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. Nếu trong 3 người này có 2 người là bạn thì họ cùng với A lập thành nhóm 3 người bạn, ngược lại, nếu trong B, C, D ko có ai là bạn thì họ lập thành nhóm 3 người là kẻ thù lẫn nhau.

4. Nguyên lý Dirichlet

- **Ví dụ: Chứng minh rằng trong 10 số tự nhiên bất kỳ có thể chọn hai số có hiệu chia hết cho 9.**

Giải:

Khi chia 10 số bất kỳ cho 9 ta sẽ có mỗi số có một số dư trong 9 số dư: 0, 1, 2, . . . , 7, 8. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư. Hiệu của hai số đó sẽ chia hết cho 9.

4. Nguyên lý Dirichlet

- **Ví dụ: Trong một lớp học phải có ít nhất bao nhiêu học sinh để cho có ít nhất 6 học sinh có cùng thứ bậc học tập, biết rằng có 5 loại thứ bậc A, B, C, D và E?**
- **Giải:**

Gọi số học sinh của lớp là N. Theo nguyên lý Derichlet ta có $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$. Khi đó:

$$25 < N \leq 30$$

5. Hoán vị

❖ **Định nghĩa:**

Cho tập hợp A gồm n phần tử.

Mỗi cách **sắp đặt có thứ tự** n phần tử của A được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n

$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)...1$

Quy ước $0! = 1$

5. Hoán vị

- Ví dụ. Cho A = {a,b,c}.

Vì |A| = 3! = 3.2.1 = 6 → A có 6 hoán vị

Các hoán vị của A là:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

- Ví dụ: Cho X ={1,2,3,4,5}.
  Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X ?

Các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau là: 5! = 5.4.3.2.1 = 120

5. Hoán vị

❖ Ví dụ. Cần sắp xếp 5 học sinh A, B, C, D, E thành một dãy hàng dọc

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai học sinh A và B luôn đứng ở hai đầu hàng ?

5. Hoán vị

❖ **Giải:**

a) **Để xếp 5 học sinh theo một dãy hàng dọc ta chỉ cần xếp 5 học sinh theo thứ tự. Vậy có P5 = 5! = 120 cách.**

b) **Do 2 bạn A, B đứng đầu hàng nên có 2! = 2 cách xếp 2 bạn đứng đầu. Ba vị trí còn lại ta chọn 3 học sinh còn lại và xếp theo thứ tự nên có 3! = 6 cách. Vậy theo nguyên lý nhân ta có: 2! × 3! = 2 × 6 = 12 cách.**

5. Hoán vị

- **Ví dụ: Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ? bao nhiêu số không chia hết cho 5?**

5. Hoán vị

❖ **Giải:**

Để có số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau ta chọn sắp xếp 6 chữ số đã cho theo thứ tự. Nên có $P_6 = 6! = 720$ số. Gọi x = $\overline{abcdef}$ là số có 6 chữ số khác nhau.

+ Nếu x là số lẻ thì f ∈ {1, 3, 5} nên f có 3 cách chọn. Năm số còn lại a b c d e là hoán vị của 5 chữ số còn lại (vì đã loại đi số f). Nên có 5! cách chọn. Vậy theo qui tắc nhân ta có 3 × 5! = 360 số lẻ.

+ Tương tự như lý luận trên, ta có 5! số chia hết cho 5. Như vậy số không chia hết cho 5 là 6! – 5! = 600.

6. Chỉnh hợp

- **Định nghĩa:**
  Cho A là tập hợp gồm n phần tử.
  Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \le k \le n$) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu

là: A_n^k

Công thức:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

6. Chỉnh hợp

- **Ví dụ. Cho X ={abc}**
  Số chỉnh hợp chập 2 của 3 là:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1!} = 6$$

Khi đó các chỉnh hợp chập 2 của 3 là: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

6. Chỉnh hợp

- **Ví dụ:**
  Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 1,2,3,4,5,6.

- **Trả lời:**

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = 120$$

5. Hoán vị

❖ **Ví dụ:**

Một lớp có 15 học sinh nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

a) **Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?**

b) **Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam.**

c) **Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ.**

5. Hoán vị

- **Giải:**

a) A_{35}^{3}

b) $15 \times A_{34}^{2}$

c) $A_{35}^{3} - A_{15}^{3}$

7. Tổ hợp

- **Định nghĩa:**

  Cho tập hợp A gồm n phần tử, $1 \leq k \leq n$

  Mỗi tập con gồm k phần tử (không thứ tự) của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

  Số tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là: C_n^k

  Công thức:
  $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

7. Tổ hợp

- **Tính chất:**

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

7. Tổ hợp

- **Ví dụ: Cho X = {1,2,3,4}.**
  Tìm tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X ?

  Số tổ hợp chập 3 của 4 phần tử là:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$

  Tìm được 4 tổ hợp là:
  {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4} , {2,3,4}

7. Tổ hợp

- **Ví dụ: Cho X = {1,2,3,4}.**
  Tìm tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X ?

  Số tổ hợp chập 3 của 4 phần tử là:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$

  Tìm được 4 tổ hợp là:

  {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4} , {2,3,4}

7. Tổ hợp

❖ **Ví dụ:**

Cho 20 điểm khác nhau nằm trên mặt phẳng. Không có bất cứ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác, tứ giác có đỉnh là một trong các điểm đã cho.

7. Tổ hợp

- **Đáp án:**

C_{20}^{3} **tam giác**

C_{20}^{4} **tứ giác**

7. Tổ hợp

❖ **Ví dụ:**

Một lớp có 40 sinh viên gồm 25 nam và 15 nữ. Ta cần chọn ra 6 sinh viên tham gia hội nghị của trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) **Không phân biệt nam nữ ?**

b) **Có 4 nam và 2 nữ ?**

c) **Có ít nhất là 4 sinh viên nam ?**

7. Tổ hợp

❖ **Đáp án:**

a) C_{40}^{6}

b) $C_{25}^{4}.\ C_{15}^{2}$

c) $C_{25}^{4}.\ C_{15}^{2} + C_{25}^{5}.\ C_{15}^{1} + C_{25}^{6}.\ C_{15}^{0}$

7. Tổ hợp

❖ Ví dụ:

Một lớp có 30 học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn. Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30: C_{30}^{10}