	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 1
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

หน่วยที่ 2 พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

1. พิชคณิตบูลีน

พิชคณิตแบบบูลีน เป็นคณิตศาสตร์แบบหนึ่งที่ใช้ในการลดรูปสมการลอจิกของวงจรดิจิทัล ซึ่งพิชคณิตบูลีนจะใช้ตัวอักษร A,B,C หรือตัวอักษรอื่น ๆ แทนตัวแปรค่า 2 สภาวะ ได้แก่ 0 หรือ 1 โดยความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวจะใช้เครื่องหมายทางเลขคณิตแทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรค่านั้น เครื่องหมายทางเลขคณิตดังกล่าวได้แก่

- เครื่องหมาย . (จุด) แทนความหมายการ AND ลอจิก
- เครื่องหมาย + (บวก) แทนความหมายการ OR ลอจิก
- เครื่องหมาย $\bar{}$ (บาร์) แทนความหมายการ NOT ลอจิก

พิชคณิตแบบบูลีน ใช้แสดงค่าของเลขฐานสองและการคำนวณทางตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์ตัวแปรที่ใช้จะแทนด้วยตัวอักษรเช่น A, B, x และ y เป็นต้น ค่าทางตรรกศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณได้แก่ AND, OR และ Complement ซึ่งจุดประสงค์ของพิชคณิตแบบบูลีน คือ ช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์และออกแบบวงจรดิจิทัลโดยวิธีดังต่อไปนี้

1. แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพิชคณิตและตารางค่าความจริง (Truth Table) ระหว่างตัวแปรแต่ละตัว

2. แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพิชคณิต บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต-เอาต์พุต ของวงจรดิจิทัล

3. แสดงในรูปแบบของวงจรลดรูปสำหรับฟังก์ชันนั้น ๆ

ซึ่งพิชคณิตบูลีนมีข้อที่จะต้องนำไปพิจารณาในการใช้งานเพื่อลดรูปสมการลอจิกอยู่ด้วยกัน 2 ส่วน ได้แก่ กฎพิชคณิตของบูลีน และข้อบังคับของพิชคณิตบูลีน ดังนี้

1.1 กฎของพิชคณิตบูลีน

กฎของพิชคณิตบูลีนที่สำคัญที่จะต้องนำไปใช้งานเพื่อช่วยในการลดรูปสมการลอจิกมี 3 ข้อได้แก่

1.1.1 กฎการเปลี่ยน (Commutative Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการสลับที่ ซึ่งจะมีลักษณะการเขียนและความหมายเช่นเดียวกับกฎการสลับที่ของคณิตศาสตร์ทั่วไปดังนี้


$$A + B = B + A$$

และ $A.B = B.A$ หรือ $AB = BA$

1.1.2 กฎการจัดหมู่ (Associative Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการจัดกลุ่ม ซึ่งจะมีลักษณะการเขียน และความหมายเช่นเดียวกับกฎการจัดหมู่ของคณิตศาสตร์ทั่วไปดังนี้

$$A + (B + C) = (A+B) + C$$

และ $A.(B.C) = (A.B).C$ หรือ $A(BC) = (AB)C$

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 2
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

1.1.3 กฎการกระจาย (Distributive Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการแตกตัว ซึ่งจะมีลักษณะการเขียน และความหมายเช่นเดียวกับกฎการกระจายของคณิตศาสตร์ทั่วไปดังนี้

$$A(B + C) = AB + AC$$

หรือ $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

1.2 ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน

พีชคณิตบูลีน นอกจากจะมีกฎในการกำหนดค่าการเปลี่ยนแปลงรูปแบบสมการแล้ว ยังมีข้อบังคับที่ใช้บังคับสำหรับการออร์และการแอนด์ข้อมูลของพีชคณิตบูลีน เพื่อช่วยในการแก้สมการลอจิกง่ายขึ้น ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน (Rules for Boolean Algebra) ประกอบไปด้วยข้อบังคับทั้งหมด 12 ข้อ ซึ่งแสดงในตารางที่ 1.1 ข้อบังคับข้อที่ 1 ถึง 9 เป็นข้อบังคับสำหรับการยุบรวมสมการลอจิก ส่วนข้อยังบังคับที่ 10 ถึง 12 เป็นข้อบังคับที่เกิดจากการวิเคราะห์กฎของพีชคณิตบูลีน

ตารางที่ 1.1 ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน


ข้อบังคับที่	รูปแบบของข้อบังคับ
1	$A + 0 = A$
2	$A + 1 = 1$
3	$A \cdot 0 = 0$
4	$A \cdot 1 = A$
5	$A + A = A$
6	$A + \bar{A} = 1$
7	$A \cdot A = A$
8	$A \cdot \bar{A} = 0$
9	$\bar{\bar{A}} = A$
10	$A + AB = A$
11	$A + \bar{A}B = A + B$
12	$(A + B)(A + C) = A + BC$

2. ทฤษฎีของดีมอร์แกน

ทฤษฎีของดีมอร์แกน เป็นทฤษฎีที่นำมาช่วยในการแก้สมการลอจิกให้ง่ายขึ้น ด้วยวิธีการเปลี่ยนรูปแบบการกระทำของลอจิกที่สมการถูกคอมพลิเมนต์อยู่ และพิสูจน์ความถูกต้องของทฤษฎีด้วยตารางความจริง ซึ่งจะมีด้วยกัน 2 รูปแบบ ดังนี้

ข้อบังคับที่ 1 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

ข้อบังคับที่ 2 $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 3
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ
--

3. การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกน

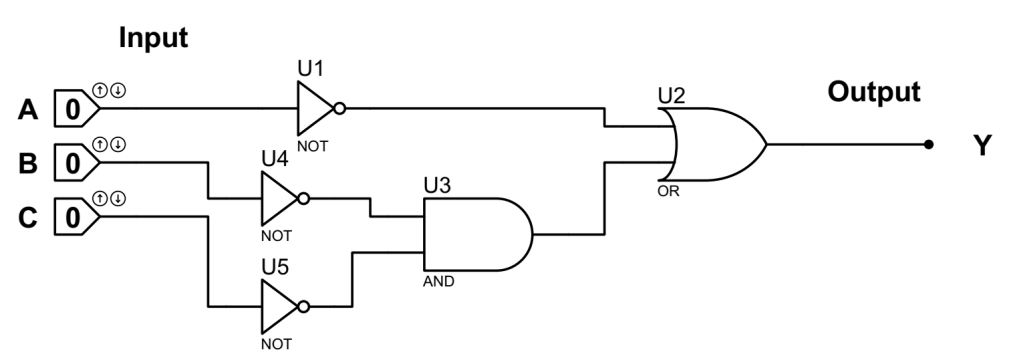
การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกน เป็นการนำทฤษฎีของพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนมาใช้ในการลดรูปสมการลอจิกให้สั้นลงเพื่อความสะดวกในการใช้งานลอจิกเกตรวมถึงความเร็วในการทำงานของวงจร ซึ่งส่วนใหญ่สมการลอจิกจะมาจากปัญหาที่เกิดจากความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณเอาต์พุต แล้วนำความสัมพันธ์ของสัญญาณนั้นมาสร้างเป็นตารางความจริงเพื่อให้ได้สมการลอจิกของสัญญาณเอาต์พุตที่ต้องในสถานะของสัญญาณอินพุตในช่วงเวลาต่าง ๆ โดยเอาต์พุตที่เราต้องการอาจจะอยู่ในรูปของสัญญาณลอจิก '1' ซึ่งเราจะเรียกสมการลอจิกนี้ว่า ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product) ส่วนเอาต์พุตที่เราต้องการรูปของสัญญาณลอจิก '0' เราจะเรียกสมการลอจิกนี้ว่า ผลคูณของผลบวก (Products of Sum)

ตัวอย่างที่ 1 การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกน

$$\begin{aligned} Y &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{ABC} \\ &= (\overline{AB})(\overline{AC}) + \overline{ABC} \\ &= (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C}) + \overline{ABC} \\ &= \overline{A}\overline{A} + \overline{A}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{ABC} \\ &= \overline{A} + \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{ABC} \\ &= \overline{A}(1 + \overline{C}) + \overline{A}\overline{B}(1 + C) + \overline{B}\overline{C} \\ &= \overline{A}(1) + \overline{A}\overline{B}(1) + \overline{B}\overline{C} \\ &= \overline{A} + \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} \\ &= \overline{A}(1 + \overline{B}) + \overline{B}\overline{C} \\ &= \overline{A}(1) + \overline{B}\overline{C} \\ &= \overline{A} + \overline{B}\overline{C} \end{aligned}$$


ตอบ

Input



Output Y

รูปที่ 1.1 แสดงวงจรลอจิกเกตที่ลดรูปด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนตามตัวอย่างที่ 1

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 4
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พืชมณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พืชมณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

3.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ Σm)

ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ Σm) คือสมการลอจิกที่เกิดจากความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณเอาต์พุต โดยจะเลือกเฉพาะสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นลอจิก ‘1’ เท่านั้นมาพิจารณาเขียนเป็นสมการลอจิกของเอาต์พุต โดยสมการลอจิกจะประกอบด้วยนิพจน์ของสัญญาณอินพุตที่มีเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘1’ ที่นำมาเอนด์กัน แล้วนำไปรวมกับนิพจน์อื่นของสัญญาณอินพุตที่มีเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘1’ ด้วยวิธีการออร์กัน ซึ่งจะพิจารณาร่วมกับตารางความจริงดังตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 2 การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยพืชมณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนแบบผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ Σm) ที่มีอินพุต 3 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.2

ตารางที่ 1.2 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C) = \Sigma m(2,3,6,7)$

ลำดับของสัญญาณ	Input			Output
	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1


Σm พิจารณาที่สภาวะของสัญญาณอินพุตลำดับที่ 2,3,6 และ 7 มีเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘1’ ดังนั้น


- ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 2 จะได้สมการลอจิกเป็น $\bar{A}B\bar{C}$
- ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 3 จะได้สมการลอจิกเป็น $\bar{A}BC$
- ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 6 จะได้สมการลอจิกเป็น $AB\bar{C}$
- ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 7 จะได้สมการลอจิกเป็น ABC

เพราะฉะนั้น $f(A,B,C) = \Sigma m(2,3,6,7)$

$$\begin{aligned} &= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC \\ &= \bar{A}B(\bar{C} + C) + AB(\bar{C} + C) \\ &= \bar{A}B(1) + AB(1) \\ &= \bar{A}B + AB \\ &= B(\bar{A} + A) \\ &= B(1) \\ &= B \end{aligned}$$

ตอบ

	ใบเนื้อหา				หน้าที่ 5																																																																																																											
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004				หน่วยที่ 2																																																																																																											
	ชื่อหน่วย พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ																																																																																																															
ชื่อเรื่อง พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ																																																																																																																
<div><div>InputOutput</div><div><div>A000</div><div>B000</div><div>C000</div></div><div>Y</div></div> <p>รูปที่ 1.2 แสดงวงจรลอจิกเกตที่ลดรูปด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนตามตัวอย่างที่ 2</p> <h3>3.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ πm)</h3> <p>ผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ πm) คือสมการลอจิกที่เกิดจากความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณเอาต์พุต โดยจะเลือกเฉพาะสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นลอจิก ‘0’ เท่านั้นมาพิจารณาเขียนเป็นสมการลอจิกของเอาต์พุต โดยสมการลอจิกจะประกอบด้วยนิพจน์ของสัญญาณอินพุตที่มีเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘0’ ที่นำมาออร์กัน แล้วนำไปรวมกับนิพจน์อื่นของสัญญาณอินพุตที่มีเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘0’ ด้วยวิธีการแอนด์กัน ซึ่งจะพิจารณาร่วมกับตารางความจริงดังตัวอย่างที่ 3</p> <p>ตัวอย่างที่ 3 การแก้ปัญหสมการลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนแบบผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ πm) ที่มีอินพุต 4 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.3</p> <p>ตารางที่ 1.3 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3)$</p> <table><tr><th rowspan="2">ลำดับของสัญญาณ</th><th colspan="4">Input</th><th>Output</th></tr><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>11</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>12</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>13</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>14</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>15</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>						ลำดับของสัญญาณ	Input				Output	A	B	C	D	Y	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0	1	3	0	0	1	1	0	4	0	1	0	0	1	5	0	1	0	1	1	6	0	1	1	0	1	7	0	1	1	1	1	8	1	0	0	0	1	9	1	0	0	1	1	10	1	0	1	0	1	11	1	0	1	1	1	12	1	1	0	0	1	13	1	1	0	1	1	14	1	1	1	0	1	15	1	1	1	1	1
ลำดับของสัญญาณ	Input				Output																																																																																																											
	A	B	C	D	Y																																																																																																											
0	0	0	0	0	1																																																																																																											
1	0	0	0	1	0																																																																																																											
2	0	0	1	0	1																																																																																																											
3	0	0	1	1	0																																																																																																											
4	0	1	0	0	1																																																																																																											
5	0	1	0	1	1																																																																																																											
6	0	1	1	0	1																																																																																																											
7	0	1	1	1	1																																																																																																											
8	1	0	0	0	1																																																																																																											
9	1	0	0	1	1																																																																																																											
10	1	0	1	0	1																																																																																																											
11	1	0	1	1	1																																																																																																											
12	1	1	0	0	1																																																																																																											
13	1	1	0	1	1																																																																																																											
14	1	1	1	0	1																																																																																																											
15	1	1	1	1	1																																																																																																											

	ใบเนื้อหา		หน้าที่ 6
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004		หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ		

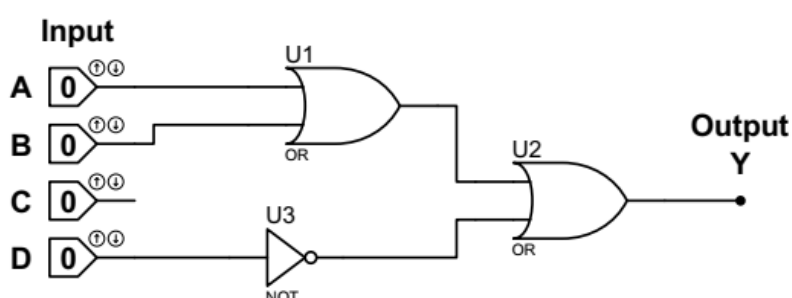
ชื่อเรื่อง พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ

πm พิจารณาที่สภาวะของสัญญาณอินพุตลำดับที่ 1 และ 3 มีเอาต์พุตเป็นลอจิก '0' ดังนั้น

1. ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 1 จะได้สมการลอจิกเป็น $A + B + C + \bar{D}$
2. ลำดับของสัญญาณอินพุตที่ 3 จะได้สมการลอจิกเป็น $A + B + \bar{C} + \bar{D}$

เพราะฉะนั้น $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3)$


$$\begin{aligned}
 &= (A + B + C + \bar{D}) \cdot (A + B + \bar{C} + \bar{D}) \\
 &= AA + AB + A\bar{C} + A\bar{D} + AB + BB + B\bar{C} + B\bar{D} + AC + BC + C\bar{C} + C\bar{D} + \\
 &\quad A\bar{D} + B\bar{D} + \bar{C}\bar{D} + \bar{D}\bar{D} \\
 &= A + AB + A\bar{C} + A\bar{D} + AB + B + B\bar{C} + B\bar{D} + AC + BC + 0 + C\bar{D} + A\bar{D} + B\bar{D} + \bar{C}\bar{D} + \bar{D} \\
 &= A(1 + B + \bar{C} + \bar{D} + B + C + \bar{D}) + B(1 + \bar{C} + \bar{D} + C + \bar{D}) + \bar{D}(1 + C + \bar{C}) \\
 &= A(1) + B(1) + \bar{D}(1) \\
 &= A + B + \bar{D}
 \end{aligned}$$



รูปที่ 1.3 แสดงวงจรลอจิกเกตที่ลดรูปด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกนตามตัวอย่างที่ 3

4. แผนผังคาร์โนห์ (Karnaugh Maps)

แผนผังคาร์โนห์ เป็นรูปแบบหนึ่งของตารางความจริง แต่เขียนเป็นแผนภาพประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสหลายช่อง (แต่ละช่องเรียกว่า เซล (Cell)) โดยมีจำนวนช่องเท่ากับ 2^n ช่อง โดย n คือจำนวนตัวแปรของอินพุตที่ใช้ในตารางความจริง และสี่เหลี่ยมแต่ละช่องจะแทนตารางความจริงในหนึ่งแถว ส่วนค่าที่ปรากฏในช่องสี่เหลี่ยม คือเอาต์พุตของตารางความจริงในแถวนั้น ๆ ซึ่งแผนผังคาร์โนห์ถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการลดรูปสมการลอจิกด้วยวิธีการจัดกลุ่มในตารางให้มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการจัดกลุ่มนี้ต้องพิจารณากลุ่มของเอาต์พุตที่เป็นลอจิก '1' หรือ '0' ที่อยู่ใกล้กันเท่านั้น ถ้าเลือกการจัดกลุ่มที่ของเอาต์พุตเป็นลอจิก '1' จะพิจารณาสมการลอจิกในรูปแบบผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ $\sum m$) แต่ถ้าเลือกการจัดกลุ่มที่ของเอาต์พุตเป็นลอจิก '0' จะพิจารณาสมการลอจิกในรูปแบบผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ πm) เป็นต้น เพราะฉะนั้น

	ใบเนื้อหา		หน้าที่ 7
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004		หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ		

ชื่อเรื่อง พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ

แผนผังคาร์โนห์ 2 ตัวแปรจะมีจำนวนช่อง $2^2=4$ ช่อง

A

B

	0	1
0	0	2
1	1	3

รูปที่ 1.4 แสดงแผนผังคาร์โนห์ 2 ตัวแปร

แผนผังคาร์โนห์ 3 ตัวแปรจะมีจำนวนช่อง $2^3=8$ ช่อง

AB

C

	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

รูปที่ 1.5 แสดงแผนผังคาร์โนห์ 3 ตัวแปร


แผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปรจะมีจำนวนช่อง $2^4=16$ ช่อง


AB

CD

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

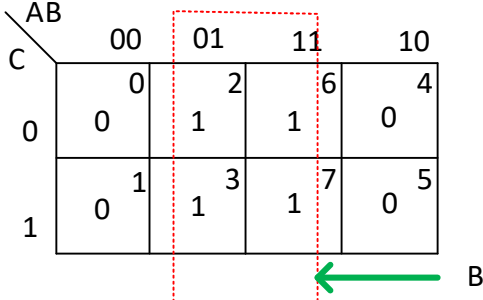
รูปที่ 1.6 แสดงแผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปร

	ใบเนื้อหา			หน้าที่ 8																																																	
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004			หน่วยที่ 2																																																	
	ชื่อหน่วย พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ																																																				
ชื่อเรื่อง พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ																																																					
<p>5. การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนห์</p> <p>การใช้แผนผังคาร์โนห์ในการลดรูปสมการบูลีนมีหลักสำคัญดังนี้</p> <ol style="list-style-type: none">เขียนตารางของคาร์โนห์ตามจำนวนของตัวแปรตัดสินใจเลือกจะใช้เทอมในลักษณะของ minterm (SOP) หรือ maxterm (POS)ใส่ค่าของเอาต์พุตลงในช่องต่าง ๆ ของแผนผังคาร์โนห์จับกลุ่มช่องที่อยู่ติดกันในลักษณะประชิด (Looping) เฉพาะช่องที่เราสนใจ โดยในแต่ละกลุ่มจะต้องมีสมาชิกในกลุ่มที่ติดกันจำนวน 2^n ช่อง คือ 1 , 2 , 4 , 8 , 16 ช่อง โดยพยายามให้ในแต่ละกลุ่มมีสมาชิกมากที่สุดดำเนินการหาผลลัพธ์ของในแต่ละกลุ่ม โดยในแต่ละกลุ่มให้พิจารณาตัวแปรของแต่ละช่องของสมาชิกว่ามีค่าของตัวแปรที่ซ้ำกันทุกช่องหรือไม่ ถ้าตัวแปรใดที่มีค่าซ้ำกันทุกช่องก็จะเป็นคำตอบของกลุ่มนั้น ๆ โดยกลุ่มยิ่งใหญ่ก็จะเหลือตัวแปรน้อย ซึ่งพิจารณาจากจำนวน 2^n ช่อง ตัวแปรจะถูกตัดไป n ตัว <p>จากหลักการแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนห์สรุปได้ว่า การใช้แผนผังคาร์โนห์เพื่อลดรูปสมการนั้น จะถูกนำมาลดรูปสมการเพื่อหาสมการลอจิกเอาต์พุตของผลบวกของผลคูณ (Sum of Product) หรือผลคูณของผลบวก (Products of Sum)</p> <p>5.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product)</p> <p>การใช้แผนผังคาร์โนห์เพื่อลดรูปสมการลอจิกของผลบวกของผลคูณ (Sum of Product) เราจะพิจารณาเฉพาะช่องที่ใส่ค่าเอาต์พุตของตารางความจริงที่มีค่าข้อมูลของเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘1’ ดังตัวอย่างที่ 4</p> <p>ตัวอย่างที่ 4 การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนห์แบบผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ Σm) ที่มีอินพุต 3 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.4</p> <p>ตารางที่ 1.4 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C) = \Sigma m(2,3,6,7)$</p> <table><tr><th rowspan="2">ลำดับของสัญญาณ</th><th colspan="3">Input</th><th>Output</th></tr><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>Y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>					ลำดับของสัญญาณ	Input			Output	A	B	C	Y	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	1	0	1	3	0	1	1	1	4	1	0	0	0	5	1	0	1	0	6	1	1	0	1	7	1	1	1	1
ลำดับของสัญญาณ	Input			Output																																																	
	A	B	C	Y																																																	
0	0	0	0	0																																																	
1	0	0	1	0																																																	
2	0	1	0	1																																																	
3	0	1	1	1																																																	
4	1	0	0	0																																																	
5	1	0	1	0																																																	
6	1	1	0	1																																																	
7	1	1	1	1																																																	

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 9
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

จากตารางความจริงดังตารางที่ 1.4 นำมาเขียนเป็นแผนผังคาร์โนห์และจัดกลุ่มแบบ SOP เพื่อทำการลดรูปสมการลอจิกได้ดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 แสดงการใช้งานแผนผังคาร์โนห์ 3 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.4

จากรูปที่ 1.7 ใช้แผนผังคาร์โนห์ 3 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.4 จะได้เอาต์ของฟังก์ชัน $f(A,B,C) = \sum m(2,3,6,7)$ คือ


$$f(A,B,C) = \sum m(2,3,6,7)$$

$= B$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5 การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนห์แบบผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ $\sum m$) ที่มีอินพุต 3 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.5

ตารางที่ 1.5 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C) = \sum m(0,2,4,5,6)$

ลำดับของสัญญาณ	Input			Output
	A	B	C	Y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 10
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ

จากตารางความจริงดังตารางที่ 1.5 นำมาเขียนเป็นแผนผังคาร์โนท์และจัดกลุ่มแบบ SOP เพื่อทำการลดรูปสมการลอจิกได้ดังรูปที่ 1.8

		AB			
		00	01	11	10
C	0	0	2	6	4
	1	0	1	3	5

รูปที่ 1.8 แสดงการใช้งานแผนผังคาร์โนท์ 3 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.5

จากรูปที่ 1.8 ใช้แผนผังคาร์โนท์ 3 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.5 จะได้เอาต์ของฟังก์ชัน $f(A,B,C) = \sum m(0,2,4,5,6)$ คือ


$$f(A,B,C) = \sum m(0,2,4,5,6)$$
$$= A\bar{B} + \bar{C}$$

ตอบ

5.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum)

การใช้แผนผังคาร์โนท์เพื่อลดรูปสมการลอจิกของผลคูณของผลบวก (Product of Sum) เราจะพิจารณาเฉพาะช่องที่ใส่ค่าเอาต์พุตของตารางความจริงที่มีค่าข้อมูลของเอาต์พุตเป็นลอจิก ‘0’ ดังตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 6 การแก้ปัญหาสมการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนท์แบบผลบวกของผลคูณ (Product of Sum หรือ POS หรือ πm) ที่มีอินพุต 4 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.6

	ใบเนื้อหา		หน้าที่ 11
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004		หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ		

ชื่อเรื่อง พิชณนิตบูลีน และการลดรูปสมการ

ตารางที่ 1.6 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3)$


ลำดับของ สัญญาณ	Input				Output
	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

จากตารางความจริงดังตารางที่ 1.6 นำมาเขียนเป็นแผนผังคาร์โนห์และจัดกลุ่มแบบ POS เพื่อทำการลดรูปสมการลอจิกได้ดังรูปที่ 1.9

$A + B + \bar{D}$

CD \ AB	AB			
	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 1	8 1
01	1 0	5 1	13 1	9 1
11	3 0	7 1	15 1	11 1
10	2 1	6 1	14 1	10 1

รูปที่ 1.9 แสดงการใช้งานแผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.6

	ใบเนื้อหา				หน้าที่ 12
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004				หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ				

ชื่อเรื่อง พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

จากรูปที่ 1.9 ใช้งานแผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.6 จะได้เอาต์ของฟังก์ชัน $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3)$ คือ


$$f(A,B,C,D) = \pi m(1,3)$$
$$= A + B + \overline{D} \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 7 การแก้ปัญหามการลอจิกด้วยแผนผังคาร์โนห์แบบผลบวกของผลคูณ (Product of Sum หรือ POS หรือ πm) ที่มีอินพุต 4 อินพุต และ 1 เอาต์พุต ดังตารางที่ 1.7

ตารางที่ 1.7 แสดงตารางความจริงของ $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3,5,7,8,9,10,11)$

ลำดับของ สัญญาณ	Input				Output
	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

จากตารางความจริงดังตารางที่ 1.7 นำมาเขียนเป็นแผนผังคาร์โนห์และจัดกลุ่มแบบ POS เพื่อทำการลดรูปสมการลอจิกได้ดังรูปที่ 1.10

	ใบเนื้อหา	หน้าที่ 13
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง ฟิชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

AB	00	01	11	10
CD	00	01	11	10
00	0 1	4 1	12 1	8 0
01	1 0	5 0	13 1	9 0
11	3 0	7 0	15 1	11 0
10	2 1	6 1	14 1	10 0

$A + \bar{D}$
→


←
 $\bar{A} + B$

รูปที่ 1.10 แสดงการใช้งานแผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.7

จากรูปที่ 1.10 ใช้แผนผังคาร์โนห์ 4 ตัวแปรเพื่อลดรูปสมการลอจิกตามตารางที่ 1.7 จะได้เอาต์พุตของฟังก์ชัน $f(A,B,C,D) = \pi m(1,3,5,7,8,9,10,11)$ คือ

$$f(A,B,C,D) = \pi m(1,3,5,7,8,9,10,11)$$


$$= (A + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + B) \quad \text{ตอบ}$$

	แบบฝึกหัด	หน้าที่ 1
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	

ชื่อเรื่อง พิชชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

คำสั่ง จงตอบคำถามต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

- ข้อบังคับของพิชชคณิตบูลีนมีกี่ข้ออะไรบ้าง
.....
.....
.....
- กฎของพิชชคณิตบูลีนมีกี่ข้ออะไรบ้าง
.....
.....
.....
- ข้อบังคับของทฤษฎีดีมอร์แกนมีกี่ข้ออะไรบ้าง
.....
.....
.....
- การใช้แผนผังคาร์โนห์ในการลดรูปสมการบูลีนมีหลักการอย่างไร
.....
.....
.....
- จงลดรูปสมการ $Y = (\overline{AB} + \overline{AC}) + \overline{A}BC$ พร้อมทั้งเขียนวงจรลอจิกของสมการเอาต์พุตที่ลดรูป
.....
.....
.....
- จงลดรูปสมการ $Y = \overline{A + AC + BD}$ พร้อมทั้งเขียนวงจรลอจิกของสมการเอาต์พุตที่ลดรูป
.....
.....
.....
- จงลดรูปสมการ $Y = \overline{ABD} + \overline{ABC} + \overline{AB}C + \overline{ABC}$ พร้อมทั้งเขียนวงจรลอจิกของสมการเอาต์พุตที่ลดรูป
.....
.....
.....
.....
.....

	แบบฝึกหัด	หน้าที่ 2
	ชื่อวิชา ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์ รหัสวิชา 30127-2004	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย พิชชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ	
ชื่อเรื่อง พิชชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ		
<p>8. จงเขียนตารางความจริงของฟังก์ชัน $f(A,B,C,D) = \sum m(1,3,5,7,8,9,10,11)$</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>9. จงใช้แผนผังคาร์โนห์เพื่อลดรูปของฟังก์ชัน $f(A,B,C,D) = \sum m(1,3,5,7,8,9,10,11)$ พร้อมทั้งเขียนวงจรลอจิกของสมการเอาต์พุตที่ลดรูป</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>10. จงใช้แผนผังคาร์โนห์เพื่อลดรูปของฟังก์ชัน $f(A,B,C,D) = \prod m(4,5,6,7,8,9,10,11)$ พร้อมทั้งเขียนวงจรลอจิกของสมการเอาต์พุตที่ลดรูป</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>		