

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

### รหัสวิชา 30127-2004 (2-3-3) ดิจิทัลและไมโครคอนโทรลเลอร์

Digital And Microcontroller

1

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

1. พีชคณิตบูลีน
  - 1.1 กฎของพีชคณิตบูลีน
  - 1.2 ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน
2. ทฤษฎีของดีมอร์แกน
3. การแก้ปัญหาลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกน
  - 3.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product)
  - 3.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum)
4. แผนที่คาร์โนห์ (Karnaugh Maps)
5. การแก้ปัญหาลอจิกด้วยแผนที่คาร์โนห์
  - 5.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product)
  - 5.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum)

Digital And Microcontroller

2

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

### 1. พีชคณิตบูลีน

พีชคณิตแบบบูลีน เป็นคณิตศาสตร์แบบหนึ่งที่ใช้ในการลดรูปสมการลอจิกของวงจรดิจิทัล โดยความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวจะใช้เครื่องหมายทางเลขคณิตแทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรค่านั้น เครื่องหมายทางเลขคณิตดังกล่าวได้แก่

- เครื่องหมาย  $\cdot$  (จุด) แทนความหมายการ AND ลอจิก
- เครื่องหมาย  $+$  (บวก) แทนความหมายการ OR ลอจิก
- เครื่องหมาย  $-$  (บาร์) แทนความหมายการ NOT ลอจิก

จุดประสงค์ของพีชคณิตแบบบูลีน คือ ช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์และออกแบบวงจรดิจิทัลโดยวิธีดังต่อไปนี้

1. แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิตและตารางค่าความจริง (Truth Table) ระหว่างตัวแปรแต่ละตัว
2. แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิต บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต-เอาต์พุต ของวงจรดิจิทัล
3. แสดงในรูปแบบของวงจรรูปสำหรับฟังก์ชันนั้น ๆ

Digital And Microcontroller

3

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

### 1.1 กฎของพีชคณิตบูลีน

กฎของพีชคณิตบูลีนที่สำคัญที่จะต้องนำไปใช้งานเพื่อช่วยในการลดรูปสมการลอจิกมี 3 ข้อได้แก่

1. กฎการเปลี่ยน (Commutative Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการสลับที่

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ หรือ } AB = BA$$

2. กฎการจัดหมู่ (Associative Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการจัดกลุ่ม

$$A + (B + C) = (A+B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \text{ หรือ } A(BC) = (AB)C$$

3. กฎการกระจาย (Distributive Law) หรืออาจเรียกว่ากฎการแตกตัว

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

Digital And Microcontroller

4

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

### 1.2 ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน

ข้อบังคับของพีชคณิตบูลีน (Rules for Boolean Algebra) ประกอบไปด้วยข้อบังคับทั้งหมด 12 ข้อ ซึ่งแสดงในตาราง โดยข้อบังคับข้อที่ 1 ถึง 9 เป็นข้อบังคับสำหรับการบูรณสมการลอจิก ส่วนข้อบังคับข้อที่ 10 ถึง 12 เป็นข้อบังคับที่เกิดจากการวิเคราะห์กฎของพีชคณิตบูลีน

ข้อบังคับที่	รูปแบบของข้อบังคับ
1	$A + 0 = A$
2	$A + 1 = 1$
3	$A \cdot 0 = 0$
4	$A \cdot 1 = A$
5	$A + A = A$
6	$A + \bar{A} = 1$
7	$A \cdot A = A$
8	$A \cdot \bar{A} = 0$
9	$\bar{\bar{A}} = A$
10	$A + \bar{A}B = A + B$
11	$A + \bar{A}B = A + B$
12	$(A + B)(A + C) = A + BC$

Digital And Microcontroller

5

## พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

### 2. ทฤษฎีของดีมอร์แกน

ทฤษฎีของดีมอร์แกน เป็นทฤษฎีที่นำมาช่วยในการแก้สมการลอจิกให้ง่ายขึ้น ด้วยวิธีการเปลี่ยนรูปแบบการกระทำของลอจิกที่สมการถูกคอมไพล์มาอยู่ และพิสูจน์ความถูกต้องของทฤษฎีด้วยตารางความจริง ซึ่งจะมีด้วยกัน 2 รูปแบบ ดังนี้

ข้อบังคับที่ 1  $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

ข้อบังคับที่ 2  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

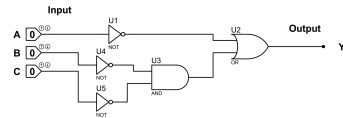
Digital And Microcontroller

6

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 3. การแก้ปัญหาลอจิกด้วยพีชคณิตบูลีนและทฤษฎีของดีมอร์แกน

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{ABC} \\
 &= (\overline{AB})(\overline{AC}) + \overline{ABC} \\
 &= (\overline{A+B})(\overline{A+C}) + \overline{ABC} \\
 &= \overline{AA} + \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{ABC} \\
 &= \overline{A} + \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{ABC} \\
 &= \overline{A}(1+C) + \overline{AB}(1+C) + \overline{BC} \\
 &= \overline{A}(1) + \overline{AB}(1) + \overline{BC} \\
 &= \overline{A} + \overline{AB} + \overline{BC} \\
 &= \overline{A}(1+B) + \overline{BC} \\
 &= \overline{A}(1) + \overline{BC} \\
 &= \overline{A} + \overline{BC}
 \end{aligned}$$



Digital And Microcontroller

7

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 3.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ $\Sigma m$ )

ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product หรือ SOP หรือ  $\Sigma m$ ) คือสมการลอจิกที่เกิดจากความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณเอาต์พุต โดยจะเลือกเฉพาะสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นลอจิก '1' เท่านั้นมาพิจารณา

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C) &= \Sigma m(2,3,6,7) \\
 &= \overline{A}BC + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC
 \end{aligned}$$

#### 3.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ $\Pi m$ )

ผลคูณของผลบวก (Products of Sum หรือ POS หรือ  $\Pi m$ ) คือสมการลอจิกที่เกิดจากความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณเอาต์พุต โดยจะเลือกเฉพาะสัญญาณเอาต์พุตที่เป็นลอจิก '0' เท่านั้นมาพิจารณา

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D) &= \Pi m(1,3) \\
 &= (A+B+C+\overline{D}) \cdot (A+B+\overline{C}+\overline{D})
 \end{aligned}$$

Digital And Microcontroller

8

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 4. แผนที่ผังคาร์โนห์ (Karnaugh Maps)

แผนที่ผังคาร์โนห์ เป็นรูปแบบหนึ่งของตารางความจริง แต่เขียนเป็นแผนภาพประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสหลายช่อง (แต่ละช่องเรียกว่า เซล (Cell)) โดยมีจำนวนช่องเท่ากับ  $2^n$  ช่อง โดย n คือจำนวนตัวแปรของอินพุตที่ใช้ในตารางความจริง

A	B	
	0	1
0	0	2
1	1	3

AB	C			
	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

AB	CD			
	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Digital And Microcontroller

9

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 5. การแก้ปัญหาลอจิกด้วยแผนที่ผังคาร์โนห์

การใช้แผนที่ผังคาร์โนห์ในการลดรูปสมการบูลีนมีหลักสำคัญดังนี้

- เขียนตารางของคาร์โนห์ตามจำนวนของตัวแปร
- ตัดสินใจเลือกใช้เทอมในลักษณะของ minterm (SOP) หรือ maxterm (POS)
- ใส่ค่าของเอาต์พุตลงในช่องต่าง ๆ ของแผนที่ผังคาร์โนห์

4. จับกลุ่มช่องที่อยู่ติดกันในลักษณะประชิด (Looping) เฉพาะช่องที่เราสนใจ โดยในแต่ละกลุ่มจะต้องมีสมาชิกในกลุ่มที่ติดกันจำนวน  $2^n$  ช่อง คือ 1, 2, 4, 8, 16 ช่อง โดยพยายามให้ในแต่ละกลุ่มมีสมาชิกมากที่สุด

5. ดำเนินการหาผลลัพธ์ของแต่ละกลุ่ม โดยในแต่ละกลุ่มให้พิจารณาตัวแปรของแต่ละช่องของสมาชิกว่ามีค่าของตัวแปรที่ซ้ำกันทุกช่องหรือไม่ ถ้าตัวแปรใดที่มีค่าซ้ำกันทุกช่องก็จะเป็นค่าตอบของกลุ่มนั้น ๆ โดยกลุ่มยิ่งใหญ่มากก็เหลือตัวแปรน้อย ซึ่งพิจารณาจากจำนวน  $2^n$  ช่อง ตัวแปรจะถูกตัดไป n ตัว

Digital And Microcontroller

10

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 5.1 ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product)

$$f(A,B,C) = \Sigma m(2,3,6,7)$$

AB	C			
	00	01	11	10
0	0	2	1	0
1	0	1	3	0

Digital And Microcontroller

11

### พีชคณิตบูลีน และการลดรูปสมการ

#### 5.2 ผลคูณของผลบวก (Products of Sum)

$$f(A,B,C,D) = \Pi m(1,3)$$

AB	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	4	12
01	1	0	5	13
11	0	3	7	15
10	2	6	14	10

Digital And Microcontroller

12