

Entregables electrodinámica clásica

Álvaro Méndez Rodríguez de Tembleque

October 20, 2024

1 Entregable 1

1.1 Se detectan luz y neutrinos muy energéticos/ ultrarrelativísticos después de un evento cósmico. Los neutrinos llegan con un retraso corto de entre $1 \cdot dt$ y $4 \cdot dt$ después de la luz. Asumiendo que todos salieron al mismo tiempo en la explosión, ¿Qué relación hay entre las energías de los primeros ($1 \cdot dt$) y últimos ($4 \cdot dt$) neutrinos?

Para realizar este problema vamos a asumir que nos encontramos en un sistema S , es decir, no nos encontramos sobre ninguna de las partículas y además supondremos que todas recorren la misma trayectoria x , de esta forma tenemos que los fotones recorren una distancia x en un tiempo t , los primeros neutrinos (ν_1) en un tiempo $t_1 = t + dt$ y los segundos neutrinos (ν_2) en un tiempo $t_2 = t + 4dt$.

De esta forma tenemos que las trayectorias de las partículas son:

$$x = ct \quad x = v_1(t + dt) \quad x = v_2(t + 4dt)$$

De esta forma podemos obtener dt para cada una de las partículas como:

- Primeros neutrinos ν_1

Despejando

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{x}{c} \\ dt &= \frac{x}{v_1} - t \end{aligned} \right\} dt = x \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{c} \right) = \frac{x}{c} \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 \right)$$

Dado que los neutrinos son partículas muy ligeras y rápidas, podemos asumir que nos encontramos en el caso ultrarelativista en donde podemos aproximar por serie de Taylor

$$\frac{1}{\beta} \sim 1 + \frac{1}{2\gamma^2}$$

Entonces podemos definir dt como:

$$dt = \frac{x}{2c\gamma_1^2}$$

- Segundos neutrinos ν_2

De forma completamente idéntica al caso anterior podemos despejar dt como

$$dt = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{v_2} - t \right) = \frac{x}{4c} \left(\frac{1}{\beta_2} - 1 \right)$$

Por serie de Taylor llegamos a

$$dt = \frac{x}{8c\gamma_2^2}$$

Una vez calculados los dt de cada grupo de neutrinos podemos relacionarlos entre sí de la forma

$$\left. \begin{aligned} dt &= \frac{x}{2c\gamma_1^2} \\ dt &= \frac{x}{8c\gamma_2^2} \end{aligned} \right\} \frac{dt}{dt} = \frac{\frac{x}{2c\gamma_1^2}}{\frac{x}{8c\gamma_2^2}} \xrightarrow{\text{Despejando los } \gamma} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2$$

Una vez obtenido la relación entre los coeficientes γ entre ambas especies de neutrinos, comparamos la relación que hay entre sus energías, las cuales, dado el caso en el que nos encontramos, tendrán la forma

$$E_i = \gamma_i mc^2$$

Entonces

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma_1 mc^2}{\gamma_2 mc^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2$$

1.2 Dos ondas planas electromagnéticas se propagan en la misma dirección y sentido, con la misma frecuencia y están circularmente polarizadas en el mismo sentido a la derecha, pero con intensidades promediadas de I y $4I$, respectivamente. Considerar dos casos: 1. están en fase; 2. hay un desfase de $\frac{\pi}{2}$. Calcular la intensidad promediada e indicar la polarización de la onda superpuesta (para ambos casos).

Las ondas descritas por el enunciado son ondas RHCP, asumiendo que se propagan en el eje \hat{z} y con la misma frecuencia, que en fasores se pueden escribir como:

$$\vec{E} = E_0(\hat{x} - i\hat{y}) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}$$

La intensidad de una onda I se define como $I = \vec{E}^2$, obtenemos la intensidad de la primera onda de la siguiente forma, con $\vec{E}_1 = \vec{E}$

$$I_1 \equiv I = \vec{E}_1^2 = \frac{E_0^2}{2} (\underbrace{\hat{x} \cdot \hat{x}}_1 + \overbrace{i\hat{x} \cdot \hat{y} - i\hat{x} \cdot \hat{y}}^0 + \underbrace{\hat{y} \cdot \hat{y}}_1) = E_0^2$$

Para encontrar la relación que se nos da en el enunciado definimos la onda \vec{E}_2 como proporcional a la onda \vec{E}_1 , de forma que $\vec{E}_2 = a\vec{E}_1$ y obtenemos su intensidad como:

$$I_2 = \vec{E}_2^2 = a^2 \vec{E}_1^2 = a^2 I$$

Por el enunciado sabemos que a tiene que ser igual a 2 para obtener la relación $I_2 = 4I$.

Ahora calculamos las intensidades de la superposición de ambas ondas, tanto en fase como en desfase:

- Ondas en fase

Sumamos las dos ondas ya que inicialmente las hemos considerado en fase:

$$\begin{aligned} \vec{E}_f &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [(\hat{x} - i\hat{y}) + 2(\hat{x} - i\hat{y})] e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \\ &= \frac{3E_0}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \\ &= 3\vec{E}_1 \end{aligned}$$

Como podemos observar la onda superpuesta tiene la misma polarización que la onda inicial \vec{E}

Ahora calculamos $I_{fase} = \vec{E}_f^2$, que nos queda como

$$I_f = 9\vec{E}_1^2 = 9I$$

- Ondas desfasadas $\frac{\pi}{2}$

Para tener en cuenta el desfase vamos a contruir una onda como \vec{E}'_2 que este desfasada que llamaremos \vec{E}'_2 y procedemos de forma análoga a como lo hicimos para la onda en fase.

Pero primero vamos a definir esta nueva onda desfasada, para ello añadimos un desfase $\phi = \frac{\pi}{2}$ a la onda, teniendo entonces

$$\vec{E}'_2 = 2E_0(\hat{x} - i\hat{y}) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega(t - \frac{z}{c} + \frac{\phi}{\omega})}$$

$$= 2E_0(\hat{x} - i\hat{y}) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} e^{i\phi}$$

En este caso, como $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$, obtenemos entonces que $\vec{E}'_2 = i\vec{E}_2 = i2\vec{E}_1$. Entonces la superposición de estas dos ondas es:

$$\vec{E}_{df} = \vec{E}_1 + \vec{E}'_2 = (1 + 2i)\vec{E}_1$$

Como podemos ver, en este caso la onda resultante queda también proporcional a \vec{E} y por lo tanto con la misma polarización.

Y la intensidad en el desfase queda como:

$$I_{df} = \vec{E}_{df}^2 = (1 + 2i)^2 \vec{E}_1^2 = 5I$$

1.3 Un mesón B^* de masa $m^* = 5325 MeV/c^2$ decae en un fotón y un mesón B de masa m . La diferencia entre las masas de los dos mesones es $m^* - m = 45 MeV/c^2$. Calcular la energía del fotón a.) en el sistema de referencia en el que B^* está en reposo, b.) en el sistema de referencia en el que B está en reposo.

$$B^* \longrightarrow B + \gamma$$

- Sistema de referencia en el que B^* está en reposo

En este sistema de referencia tenemos que $v_{B^*} = 0$, podemos usar la conservación del cuadrimomento para obtener la velocidad del mesón B

$$P_{B^*}^\mu = P_B^\mu + P_\gamma^\mu \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E_{B^*}}{c} \\ \vec{p}_{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_B}{c} \\ \vec{p}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\vec{p}_{B^*} = 0$, que la energía de las partículas tiene la forma $E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2}$ podemos obtener 2 sistemas de ecuaciones separando el cuadrimomento en componentes de energía y momento lineal:

$$m^* c^2 = \sqrt{p_B^2 c^2 + (mc^2)^2} + E_\gamma$$

y

$$0 = \vec{p}_B + \vec{p}_\gamma$$

Sabemos que el momento de un fotón es $\vec{p}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ y que el momento de una partícula en movimiento es $\vec{p}_B = \gamma m v$, por lo que la energía del fotón queda ¹

$$E_\gamma = \gamma m v c$$

y entonces volviendo a la relación de conservación de las energías tenemos

$$m^* c^2 = \sqrt{(\gamma m v)^2 c^2 + (mc^2)^2} + \gamma m v c$$

$$m^* c^2 = mc(\sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v)$$

$$m^* c = m(\sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v)$$

$$\frac{m^* c}{m} = \sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v$$

Despejando γv obtenemos que

$$\gamma v = -c \frac{m^2 - m^{*2}}{2mm^*}$$

Sustituyendo en la energía del fotón obtenemos que

$$E_\gamma = -c^2 \frac{m^2 - m^{*2}}{2m^*} = 44,81 \text{ [MeV]}$$

¹ Asumiendo que se mueven en la misma dirección pero sentido opuesto

- Sistema de referencia en el que B está en reposo

En este sistema de referencia tenemos que $v_B = 0$, podemos usar la conservación del cuadrimomento para obtener la velocidad del mesón B^*

Utilizando el mismo sistema de ecuación del apartado anterior con la nueva condición obtenemos

$$P_{B^*}^\mu = P_B^\mu + P_\gamma^\mu \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E_{B^*}}{c} \\ \vec{p}_{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_B}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}$$

Entonces obtenemos de forma directa que $E_\gamma = p_{B^*} c = \gamma m^* v^* c$.

Ahora de igual manera que en el caso anterior vamos con las energías que nos quedan como

$$\begin{aligned} \sqrt{p_{B^*}^2 c^2 + (m^* c^2)^2} &= m c^2 + E_\gamma \\ \sqrt{(\gamma m^* v^*)^2 c^2 + (m^* c^2)^2} &= m c^2 + \gamma m^* v^* c \\ \sqrt{(\gamma v^*)^2 + c^2} - \gamma v^* &= \frac{m}{m^*} c \end{aligned}$$

Despejando γv^* obtenemos

$$\gamma v = c \frac{m^{*2} - m^2}{2mm^*}$$

Sustituyendo en la energía del fotón obtenemos que

$$E_\gamma = -c^2 \frac{m^{*2} - m^2}{2m} = 45,192 \text{ [MeV]}$$

2 Entregable 2

- 2.1 Describir cualitativamente el movimiento de un electrón, en un campo magnético inhomogéneo que está principalmente dirigido en la dirección $+\hat{x}$, en concreto:**

$$\vec{B} = B_0 \left(1 + \frac{z^2}{d^2} \right) \hat{x} - \frac{2xy}{d^2} \hat{y}$$

El campo está descrito así para tener divergencia 0, pero este principalmente dirigido en la dirección x , con solo una ligera variación en el plano (y, z) , en concreto en la dirección y , considerando el movimiento en una zona de espacio cómodamente alejado de la origen de coordenadas y ejes principales para que sea así.

- 2.2 Describir las reglas de transformación Lorentz de la energía radiada por una carga**
- 2.3 Se considera una función tensorial $B_{\mu\nu}$ completamente antisimétrica (campo de Kalb-Ramond) que es potencial del campo**

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

.

- a) Comprobar que $\partial_\rho H^{\rho\sigma} = 0$, siendo H el tensor dual de H .

- b) Dada la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} - m^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

encontrar las ecuaciones de movimiento de $B_{\mu\nu}$.

- c) Se considera la siguiente transformación tipo-gauge: $B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu$. Comprobar que el tensor H es invariante gauge, analizar para qué valores de m la lagrangiana \mathcal{L} es invariante gauge.