Entregables electrodinámica clásica

Álvaro Méndez Rodriguez de Tembleque

November 26, 2024

1 Entregable 1

1.1 Se detectan luz y neutrinos muy energéticos/ ultrarrelativisticos después de un evento cósmico. Los neutrinos llegan con un retraso corto de entre 1·dt y 4·dt después de la luz. Asumiendo que todos salieron al mismo tiempo en la explosión, ¿Qué relación hay entre las energías de los primeros (1·dt) y últimos (4·dt) neutrinos?

Para realizar este problema vamos a asumir que nos encontramos en unn sistema S, es decir, no nos encontramos sobre ninguna de las partículas y además supondremos que todas recorren la misma trayectoría x, de esta forma tenemos que los fotones recorren una distancia x en un tiempo t, los primeros neutrinos (ν_1) en un tiempo $t_1 = t + dt$ y los segundos neutrinos (ν_2) en un tiempo $t_2 = t + 4dt$.

De esta forma tenemos que las trayectorias de las partículas son:

$$x = ct \qquad x = v_1(t + dt) \qquad x = v_2(t + 4dt)$$

De esta forma podemos obtener dt para cada una de las partículas como:

- Primeros neutrinos ν_1

  Despejando

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x}{c} \\ dt &= \frac{x}{v_1} - t \end{aligned}\right\} dt = x(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{c}) = \frac{x}{c}(\frac{1}{\beta_1} - 1)$$

  Dado que los neutrinos son partículas muy ligeras y rápidas, podemos asumir que nos encontramos en el caso ultrarelativista en donde podemos aproximar por serie de Taylor

$$\frac{1}{\beta} \sim 1 + \frac{1}{2\gamma^2}$$

  Entonces podemos definir dt como:

$$dt = \frac{x}{2c\gamma_1^2}$$

- Segundos neutrinos ν_2

  De forma completamente idéntica al caso anterior podemos despejar dt como

$$dt = \frac{1}{4}(\frac{x}{v_2} - t) = \frac{x}{4c}(\frac{1}{\beta_2} - 1)$$

  Por serie de taylor llegamos a

$$dt = \frac{x}{8c\gamma_2^2}$$

Una vez calculados los dt de cada grupo de neutrinos podemos relacionarlos entre si de la forma

$$\left.\begin{aligned} dt &= \frac{x}{2c\gamma_1^2} \\ dt &= \frac{x}{8c\gamma_2^2} \end{aligned}\right\} \frac{dt}{dt} = \frac{\frac{x}{2c\gamma_1^2}}{\frac{x}{8c\gamma_2^2}} \xrightarrow{\text{Despejando los } \gamma} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2$$

Una vez obtenido la relación entre los coeficientes γ entre ambas especies de neutrinos, comparamos la relación que hay entre sus energías, las cuales, dado el caso en el que nos encontramos, tendran la forma

$$E_i = \gamma_i mc^2$$

Entonces

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma_1 mc^2}{\gamma_2 mc^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2$$

1.2 Dos ondas planas electromagnéticas se propagan en la misma dirección y sentido, con la misma frecuencia y están circularmente polarizadas en el mismo sentido a la derecha, pero con intensidades promediadas de I y 4·I, respectivamente. Considerar dos casos: 1. están en fase; 2. hay un desfase de $\frac{\pi}{2}$. Calcular la intensidad promediada e indicar la polarización de la onda superpuesta (para ambos casos).

Las ondas descritas por el enunciado son ondas RHCP, asumiendo que se propagan en el eje $\hat{z}$ y con la misma frecuencia, que en fasores se pueden escribir como:

$$\vec{E} = E_0(\hat{x} - i\hat{y})\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}$$

La intensidad de una onda I se define como $I = \vec{E}^2$, obtenemos la intensidad de la primera onda de la siguiente forma, con $\vec{E_1} = \vec{E}$

$$I_1 \equiv I = \vec{E_1}^2 = \frac{E_0^2}{2}(\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1} + \overbrace{i\hat{x}\cdot\hat{y} - i\hat{x}\cdot\hat{y}}^{0} + \underbrace{\hat{y}\cdot\hat{y}}_{1}) = E_0^2$$

Para encontrar la relación que se nos da en el enunciado definimos la onda $\vec{E_2}$ como proporcional a la onda $\vec{E_1}$, de forma que $\vec{E_2} = a\vec{E_1}$ y obtenemos su intensidad como:

$$I_2 = \vec{E_2}^2 = a^2\vec{E_1}^2 = a^2 I$$

Por el enunciado sabemos que a tiene que ser igual a 2 para obtener la relacion $I_2 = 4I$.
Ahora calculamos las intensidades de la superposición de ambas ondas, tanto en fase como en desfase:

- Ondas en fase

  Sumaos las dos ondas ya que inicialmente las hemos considerado en fase:

$$\begin{aligned}\vec{E_f} = \vec{E_1} + \vec{E_2} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left[(\hat{x} - i\hat{y}) + 2(\hat{x} - i\hat{y})\right]e^{i\omega(t-\frac{z}{c})} \\ &= \frac{3E_0}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\omega(t-\frac{z}{c})} \\ &= 3\vec{E_1}\end{aligned}$$

  Como podemos observar la onda superpuesta tiene la misma polarización que la onda inicial $\vec{E}$

  Ahora calculamos $I_{fase} = \vec{E_f}^2$, que nos queda como

$$I_f = 9\vec{E_1}^2 = 9I$$

- Ondas desfasadas $\frac{\pi}{2}$

  Para tener en cuenta el desfase vamos a contruir una onda como $\vec{E_2}$ que este desfasada que llamaremos $\vec{E_2'}$ y procedemos de forma análoga a como lo hicimos para la onda en fase.

  Pero primero vamos a definir esta nueva onda desfasada, para ello añadimos un desfase $\phi = \frac{\pi}{2}$ a la onda, teniendo entonces

$$\vec{E_2'} = 2E_0(\hat{x} - i\hat{y})\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega(t-\frac{z}{c}+\frac{\phi}{\omega})}$$

$$= 2E_0(\hat{x} - i\hat{y})\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}e^{i\phi}$$

En este caso, como $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cancelto{0}{\cos(\frac{\pi}{2})} + i\cancelto{1}{\sin(\frac{\pi}{2})} = i$, obtenemos entonces que $\vec{E_2'} = i\vec{E_2} = i2\vec{E_1}$. Entonces la superposición de estas dos ondas es:

$$\vec{E_{df}} = \vec{E_1} + \vec{E_2'} = (1+2i)\vec{E_1}$$

Como podemos ver, en este caso la onda resultante queda tambien proporcional a $\vec{E}$ y por lo tanto con la misma polarización.

Y la intensidad en el desfase queda como:

$$I_{df} = \vec{E_{df}}^2 = (1+2i)^2\vec{E_1}^2 = 5I$$

1.3 Un mesón B^* de masa $m^* = 5325MeV/c^2$ decae en un fotón y un mesón B de masa m. La diferencia entre las masas de los dos mesones es $m^* - m = 45MeV/c^2$. Calcular la energía del fotón a.) en el sistema de referencia en el que B^* está en reposo, b.) en el sistema de referencia en el que B está en reposo.

$$B^* \longrightarrow B + \gamma$$

- Sistema de referencia en el que B^* está en reposo

  En este sistema de referencia tenemos que $v_{B^*} = 0$, podemos usar la conservación del cuadrimomento para obtener la velocidad del mesón B

$$P^{\mu}_{B^*} = P^{\mu}_B + P^{\mu}_{\gamma} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E_{B^*}}{c} \\ \vec{p}_{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_B}{c} \\ \vec{p}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}$$

  Sabemos que $\vec{p}_{B^*} = 0$, que la energía de las partículas tiene la forma $E = \sqrt{p^2c^2 + (mc^2)^2}$ podemos obtener 2 sistemas de ecuaciones separando el cuadrimomento en componetntes de energía y momento lineal:

$$m^*c^2 = \sqrt{p_B^2c^2 + (mc^2)^2} + E_\gamma$$

  y

$$0 = \vec{p}_B + \vec{p}_\gamma$$

  Sabemos que el momento de un fotón es $\vec{p}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ y que el momento de una partícula en movimiento es $\vec{p}_B = \gamma m v$, por lo que la energía del fotón queda [1]

$$E_\gamma = \gamma m v c$$

  y entonces volviendo a la relación de conservación de las energías tenemos

$$m^*c^2 = \sqrt{(\gamma m v)^2c^2 + (mc^2)^2} + \gamma m v c$$

$$m^*c^2 = mc(\sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v)$$

$$m^*c = m(\sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v)$$

$$\frac{m^*c}{m} = \sqrt{(\gamma v)^2 + c^2} + \gamma v$$

  Despejando γv obtenemos que

$$\gamma v = -c\frac{m^2 - m^{*2}}{2mm^*}$$

  Sustituyendo en la energía del fotón obtenemos que

$$E_\gamma = -c^2\frac{m^2 - m^{*2}}{2m^*} = 44,81\ [MeV]$$

[1] Asumiendo que se mueven en la misma dirección pero sentido opuesto

- Sistema de referencia en el que B está en reposo

  En este sistema de referencia tenemos que $v_B = 0$, podemos usar la conservación del cuadrimomento para obtener la velocidad del mesón B^*

  Utilizando el mismo sistema de ecuación del apartado anterior con la nueva condición obtenemos

$$P^\mu_{B^*} = P^\mu_B + P^\mu_\gamma \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E_{B^*}}{c} \\ \vec{p}_{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_B}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}$$

  Entonces obtenemos de forma directa que $E_\gamma = p_{B^*}c = \gamma m^* v^* c$.

  Ahora de igual manera que en el caso anterior vamos con las energías que nos quedan como

$$\sqrt{p^2_{B^*}c^2 + (m^*c^2)^2} = mc^2 + E_\gamma$$

$$\sqrt{(\gamma m^* v^*)^2 c^2 + (m^* c^2)^2} = mc^2 + \gamma m^* v^* c$$

$$\sqrt{(\gamma v^*)^2 + c^2} - \gamma v^* = \frac{m}{m^*}c$$

  Despejando γv^* obtenemos

$$\gamma v = c\frac{{m^*}^2 - m^2}{2mm^*}$$

  Sustituyendo en la energía del fotón obtenemos que

$$E_\gamma = -c^2\frac{{m^*}^2 - m^2}{2m} = 45,192\ [MeV]$$

2 Entregable 2

2.1 Describir cualitativamente el movimiento de un electrón, en un campo magnético inhomogéneo que está principalmente dirigido en la dirección $+\hat{x}$, en concreto:

$$\vec{B} = B_0 \left[\left(1 + \frac{x^2}{d^2} \right) \hat{x} - \frac{2xy}{d^2} \hat{y} \right]$$

El campo está descrito así para tener divergencia 0, pero este principalmente dirigido en la dirección x, con solo una ligera variación en el plano (y, z), en concreto en la dirección y, considerando el movimiento en una zona de espacio cómodamente alejado de la origen de coordenadas y ejes principales para que sea así.

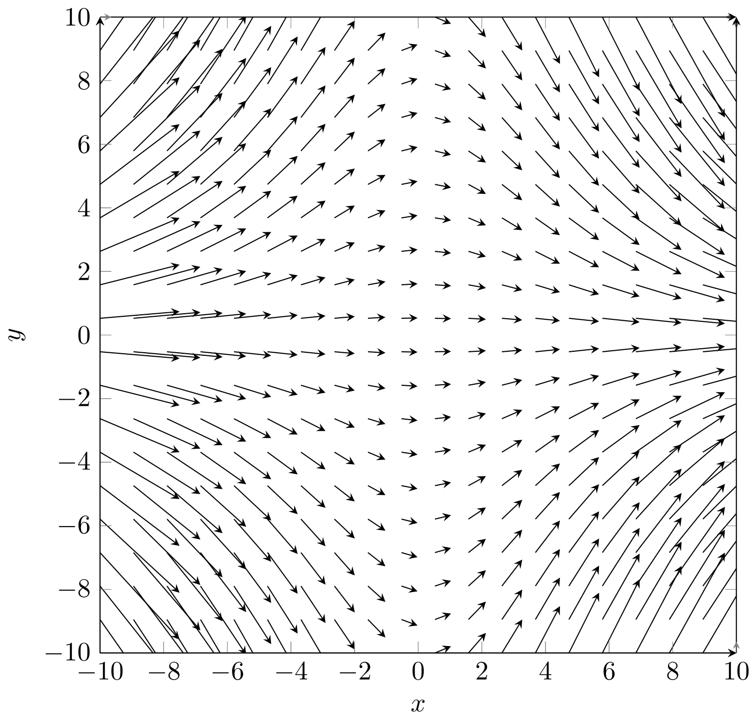

Figure 1: Campo magnético inhomogéneo para $B_0 = 1$ y $d = 5$.

2.2 Describir las reglas de transformación Lorentz de la energía radiada por una carga

2.3 Se considera una función tensiorial $B_{\mu\nu}$ completamente antisymétrica (campo de Kalb-Ramond) que es potencial del campo

$$H_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda}$$

.

a) Comprobar que $\partial_\sigma H^{*\sigma} = 0$, siendo H^* el tensor dual de H.

b) Dada la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6} H_{\lambda\mu\nu} H^{\lambda\mu\nu} - m^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

encontrar las ecuaciones de movimiento de $B_{\mu\nu}$.

En primer lugar debemos poner el Lagrangiano en función de $B_{\mu\nu}$ como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}\left(\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda}\right)\left(\partial^\lambda B^{\mu\nu} + \partial^\nu B^{\lambda\mu} + \partial^\mu B^{\nu\lambda}\right) - m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{6}\left(\partial_\lambda B_{\mu\nu}\partial^\lambda B^{\mu\nu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}\partial^\nu B^{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}\partial^\mu B^{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}\partial^\lambda B^{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}\partial^\nu B^{\lambda\mu} + \partial_\nu B_{\lambda\mu}\partial^\mu B^{\nu\lambda}\right.$$
$$\left. + \partial_\mu B_{\nu\lambda}\partial^\lambda B^{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda}\partial^\nu B^{\lambda\mu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda}\partial^\mu B^{\nu\lambda}\right) - m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu B_{\mu\nu}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_{\mu\nu}} = 0$$

c) Se considera la siguiente transformación tipo-gauge: $B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu\Psi_\nu - \partial_\nu\Psi_\mu$. Comprobar que el tensor H es invariante gauge, analizar para qué valores de m la lagrangiana $\mathcal{L}$ es invariante gauge.

Primero escribimos la transformada del tensor H:

$$H'_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda B'_{\mu\nu} + \partial_\nu B'_{\lambda\mu} + \partial_\mu B'_{\nu\lambda}$$

Y sustituimos la transformación Gauge para expresar H' en función de B:

$$H'_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda\left(B_{\mu\nu} + \partial_\mu\Psi_\nu - \partial_\nu\Psi_\mu\right) + \partial_\nu\left(B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\Psi_\mu - \partial_\mu\Psi_\lambda\right) + \partial_\mu\left(B_{\nu\lambda} + \partial_\nu\Psi_\lambda - \partial_\lambda\Psi_\nu\right)$$

Reagrupamos términos

$$H'_{\lambda\mu\nu} = H_{\lambda\mu\nu} + \partial_\lambda\partial_\mu\Psi_\nu - \partial_\lambda\partial_\nu\Psi_\mu + \partial_\nu\partial_\lambda\Psi_\mu - \partial_\nu\partial_\mu\Psi_\lambda + \partial_\mu\partial_\nu\Psi_\lambda - \partial_\mu\partial_\lambda\Psi_\nu$$

Como el orden de las derivadas no es relevante, los terminos de Ψ se cancelan y queda

$$H'_{\lambda\mu\nu} = H_{\lambda\mu\nu}$$

Por lo tanto, el tensor H es invariante gauge.

Ahora, para analizar para qué valores de m la lagrangiana $\mathcal{L}$ es invariante gauge, en donde el termino $-\frac{1}{6}H_{\lambda\mu\nu}H^{\lambda\mu\nu}$ es invariante por ser H invariente, y quedaría solo comprobar el término $m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$, escribimos el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{6}\underbrace{H_{\lambda\mu\nu}H^{\lambda\mu\nu}}_{\text{Invariante}} - m^2 B'_{\mu\nu}B'^{\mu\nu}$$

Entonces

$$B'_{\mu\nu}B'^{\mu\nu} = \left(B_{\mu\nu} + \partial_\mu\Psi_\nu - \partial_\nu\Psi_\mu\right)\left(B^{\mu\nu} + \partial^\mu\Psi^\nu - \partial^\nu\Psi^\mu\right)$$
$$B'_{\mu\nu}B'^{\mu\nu} = B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}\partial^\mu\Psi^\nu - B_{\mu\nu}\partial^\nu\Psi^\mu + \partial_\mu\Psi_\nu B^{\mu\nu} - \partial_\nu\Psi_\mu B^{\mu\nu} + \partial_\mu\Psi_\nu\partial^\nu\Psi^\mu - \partial_\nu\Psi_\mu\partial^\mu\Psi^\nu$$