

Apuntes de campos cuánticos

Asignatura

Apuntes de campos cuánticos

Profesor Antonio Dobado

11 de diciembre de 2024

An Awesome Publisher

Disclaimer

En estos apuntes algunos los he sacado de libros que ha seguido Dobado pero quitando las partes que no usa y otros son de dobado haciendo freestyle en clase.

No copyright

© This book is released into the public domain using the CC0 code. To the extent possible under law, I waive all copyright and related or neighbouring rights to this work.

To view a copy of the CC0 code, visit:

<http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>

Colophon

This document was typeset with the help of KOMA-Script and L^AT_EX using the kaobook class.

The source code of this book is available at:

<https://github.com/fmarotta/kaobook>

(You are welcome to contribute!)

Publisher

2024 by An Awesome Publisher

Índice general

Índice general	iii
PRELIMINARES	1
1 Algebra	3
1.1 Algebra de Lie. Grupo de Lie	3
1.2 Grupo de Lorentz	6
1.2.1 Algebra de Lorentz	8
1.3 Representación tensorial	10
1.4 Representación espinorial	11
1.4.1 No relativista	11
1.4.2 Relativista	13
Representaciones de 1 dimensión	14
Representaciones de 2 dimensiones	14
Espinores de Weyl	14
Espinores de Dirac	15
1.5 Grupo de Poincare	15
1.5.1 Representación en estados de una partícula	16
Representación masiva	17
Representación no masiva	18
CAMPOS CLÁSICOS	21
2 Ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac	23
2.1 Ecuación de Klein Gordon	23
2.2 Ecuación de Klein-Gordon en presencia de campos electromagnéticos	24
2.3 Ecuación de Dirac	25
2.3.1 Partículas cargadas en un campo electromagnético	27
2.4 El límite no relativista de la ecuación de Dirac	28
2.5 Soluciones a la ecuación de Dirac	28
2.5.1 Ondas con energía positiva	29
2.5.2 Ondas con energía negativa	32
2.5.3 Interpretación física. Mar de Dirac	33
2.6 Fermiones quirales	33
2.6.1 Proyectores de Weyl	34
3 Teoría clásica de campos	35
3.1 Campos clásicos relativistas	35
3.1.1 Casos simples	36
Transformaciones de Lorentz	36
3.2 Dinámica de los campos clásicos	37
3.2.1 Formalismo Lagrangiano	37
Las ecuaciones de Euler-Lagrange	38
3.2.2 Formalismo Hamiltoniano	39
3.2.3 Ejemplos	39
3.3 Teorema de Noether	41
3.3.1 Corrientes	41

3.3.2	Cargas	43
3.4	Transformaciones de simetría espacio-temporales	43
3.4.1	Traslaciones	43
3.4.2	Transformaciones de Lorentz	44
CAMPOS CUÁNTICOS		47
4	Cuantización canónica del campo escalar libre	49
4.1	Cuantización canónica del campo bosónico libre	49
4.1.1	Cuantización en teoría de campos	50
4.1.2	Solución general de la ecuación de Klein-Gordon	51
4.1.3	Soluciones en el formalismo de campo cuántico	52
	Resumen de los operadores de campo $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$	52
4.1.4	Espacio de Fock	53
	Operadores en el espacio de Fock	55
	Operador Energía	55
	Operador momento lineal	56
	Operador campo	57
4.1.5	Propagador del campo escalar libre	57
4.2	Cuantización del campo escalar complejo	58
	Estados de Fock y sus operadores en el campo complejo	60
	Operador Energía	61
	Operador Carga	61
4.3	¿Porque estos campos?	62
5	Cuantización canónica del campo fermiónico libre	63
5.1	Campos fermionicos libres	63
5.2	Cuantización canónica	64
5.2.1	Operadores de creación y destrucción	65
5.2.2	Hamiltoniano del campo fermiónico libre	65
5.2.3	Estados de Fock	66
5.3	Propagador fermiónico	67
6	Procesos de interacción: Matriz S, secciones eficaces y vidas medias	69
6.1	Imágen de interacción	69
6.1.1	Imagen de Schrödinger	70
6.1.2	Imagen de Heisenberg	70
6.1.3	Imagen de Interacción (Dirac)	70
6.2	Propiedades de la Matriz S	71
6.3	Probabilidad de interacción	72
6.3.1	Desintegraciones	73
	Vida media	73
	Desintegración a 2 partículas	73
6.4	Secciones eficaces	73
6.4.1	Secciones eficaces polarizadas	73
6.5	Espacio de fases de 2 cuerpos	73
6.5.1	Desintegraciones	73
6.5.2	Sección eficaz a 2 cuerpos	73
	Caso inelástico	74
	Caso elástico	74
6.5.3	Ejemplos	75

6.6	Diagramas de Feynman	75
7	Cuantización del campo escalar libre	77
7.1	EL campo electromagnético clásico	77
7.2	Invariancia Gauge	77
7.2.1	Tensor energía-momento	79
7.3	Cuantización del Gauge de radiación	80
7.4	Cuantización covariante	82
8	Electrodinámica cuántica	87
8.1	Lagrangiano clásico e invariancia Gauge	87
8.2	Cuantización, teoría de perturbaciones y reglas de Feynmann	87
8.3	Reglas de Feynman	87
8.3.1	Partículas en el estado inicial	87
8.3.2	Partículas en el estado final	88
8.3.3	Vértice	88
8.3.4	Líneas internas	88
8.3.5	Alguna fórmulas útiles	89
8.4	Procesos en electrodinámica cuántica	90
8.4.1	Dispersión Möller	90
	Canal t	90
	Canal u	93
	Términos cruzados	94
	Sección eficaz diferencial	96
8.4.2	Dispersión Blhaba	98
	Canal t	100
	Canal s	101
	Términos cruzados	102
	Sección eficaz diferencial	105
8.4.3	Dispersión Compton	106
8.4.4	Sección eficaz de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	107
	Bibliography	111

Índice de figuras

2.1	Mar de Dirac	33
2.2	Antipartículas	33
8.1	Diagramas de Feymann de la dispersión Möller	90
8.2	Diagramas de Feymann de la dispersión Bhabha	98

Índice de cuadros

PRELIMINARES

Todo esto lo he sacado del [1]

1.1. Algebra de Lie. Grupo de Lie

Los grupos de Lie desempeñan un papel fundamental en física, y en esta sección recordamos algunas de sus principales propiedades. En las secciones siguientes aplicaremos estos conceptos al estudio de los grupos de Lorentz y Poincaré.

Un grupo de Lie es un grupo cuyos elementos g dependen de forma continua y diferenciable de un conjunto de parámetros reales θ^a , $a = 1, \dots, N$. Por tanto, un grupo de Lie es al mismo tiempo un grupo y una variedad diferenciable. Escribimos un elemento genérico como $g(\theta)$ y sin pérdida de generalidad elegimos las coordenadas θ^a tales que el elemento identidad e del grupo corresponde a $\theta^a = 0$, es decir $g(0) = e$.

Una representación (lineal) R de un grupo es una operación que asigna a un elemento genérico y abstracto g de un grupo un operador lineal $D_R(g)$ definido sobre un espacio lineal,

$$g \mapsto D_R(g) \quad (1.1)$$

con las propiedades de que

- $D_R(e) = 1$, donde 1 es el operador identidad,
- $D_R(g_1) D_R(g_2) = D_R(g_1 g_2)$, de modo que el mapeo preserve la estructura de grupo.

El espacio sobre el que actúan los operadores D_R se denomina base de la representación R . Un ejemplo típico de representación es una representación matricial. En este caso la base es un espacio vectorial de dimensión finita n , y un elemento de grupo abstracto g se representa por una matriz $n \times n$ $(D_R(g))^i_j$, con $i, j = 1, \dots, n$. La dimensión de la representación se define como la dimensión n del espacio base. Escribiendo un elemento genérico del espacio base como (ϕ^1, \dots, ϕ^n) , un elemento de grupo g induce una transformación del espacio vectorial

$$\phi^i \rightarrow (D_R(g))^i_j \phi^j \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) nos permite atribuir un significado físico a un elemento de grupo: antes de introducir el concepto de representación, un elemento de grupo g es sólo un objeto matemático abstracto, definido por sus reglas de composición con los demás miembros del grupo. En cambio, elegir una representación específica nos permite interpretar g como una transformación en un espacio determinado; por ejemplo, tomando como grupo $SO(3)$ y como espacio base los vectores espaciales \mathbf{v} , un elemento $g \in SO(3)$ puede interpretarse físicamente como una rotación en un

1.1	Algebra de Lie. Grupo de Lie	3
1.2	Grupo de Lorentz	6
1.2.1	Algebra de Lorentz	8
1.3	Representación tensorial	10
1.4	Representación espinorial	11
1.4.1	No relativista	11
1.4.2	Relativista	13
1.5	Grupo de Poincare	15
1.5.1	Representación en estados de una partícula	16

espacio tridimensional. Una representación R se llama reducible si tiene un subespacio invariante, es decir, si la acción de cualquier $D_R(g)$ sobre los vectores del subespacio da otro vector del subespacio. Por el contrario, una representación sin subespacio invariante se llama irreducible. Una representación es completamente reducible si, para todos los elementos g , las matrices $D_R(g)$ se pueden escribir, con una elección adecuada de base, en forma diagonal de bloque. En otras palabras, en una representación completamente reducible los vectores base ϕ^i pueden elegirse de modo que se dividan en subconjuntos que no se mezclen entre sí en virtud de la ec. (2.2). Esto significa que una representación completamente reducible puede escribirse, con una elección adecuada de la base, como la suma directa de representaciones irreducibles. Dos representaciones R, R^{prime} se llaman equivalentes si existe una matriz S , independiente de g , tal que para todo g tenemos $D_R(g) = S^{-1}D_{R'}(g)S$. Comparando con la ec. (2.2), vemos que las representaciones equivalentes corresponden a un cambio de base en el espacio vectorial abarcado por el ϕ^i . Cuando cambiamos la representación, en general la forma explícita e incluso las dimensiones de las matrices $D_R(g)$ cambiarán. Sin embargo, hay una propiedad importante de un grupo de Lie que es independiente de la representación. Se trata de su álgebra de Lie, que presentamos a continuación. Por el supuesto de suavidad, para θ^a infinitesimal, es decir, en la vecindad del elemento identidad, tenemos

$$D_R(\theta) \simeq 1 + i\theta_a T_R^a \quad (2.3)$$

con

$$T_R^a \equiv -i \left. \frac{\partial D_R}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0} \quad (2.4)$$

Los T_R^a se llaman los generadores del grupo en la representación R . Se puede demostrar que, con una elección adecuada de la parametrización alejada de la identidad, los elementos genéricos del grupo $g(\theta)$ siempre se pueden representar por

$$D_R(g(\theta)) = e^{i\theta_a T_R^a} \quad (2.5)$$

cuya forma infinitesimal reproduce la ec. (2.3). El factor i en la definición (2.4) se elige de modo que, si en la representación R los generadores son hermitianos, entonces las matrices $D_R(g)$ son unitarias. En este caso R es una representación unitaria.

Dadas dos matrices $D_R(g_1) = \exp(i\alpha_a T_R^a)$ y $D_R(g_2) = \exp(i\beta_a T_R^a)$, su producto es igual a $D_R(g_1 g_2)$ y por lo tanto debe ser de la forma $\exp(i\delta_a T_R^a)$, para algunos $\delta_a(\alpha, \beta)$,

$$e^{i\alpha_a T_R^a} e^{i\beta_a T_R^a} = e^{i\delta_a T_R^a} \quad (2.6)$$

Obsérvese que T_R^a es una matriz. Si A, B son matrices, en general $e^A e^B \neq e^{A+B}$, por lo que en general $\delta_a \neq \alpha_a + \beta_a$. Tomando el logaritmo y expandiendo hasta segundo orden en α y β obtenemos

$$\begin{aligned}
i\delta_a T_R^a &= \log \left\{ \left[1 + i\alpha_a T_R^a + \frac{1}{2} (i\alpha_a T_R^a)^2 \right] \left[1 + i\beta_a T_R^a + \frac{1}{2} (i\beta_a T_R^a)^2 \right] \right\} \\
&= \log \left[1 + i(\alpha_a + \beta_a) T_R^a - \frac{1}{2} (\alpha_a T_R^a)^2 - \frac{1}{2} (\beta_a T_R^a)^2 - \alpha_a \beta_b T_R^a T_R^b \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Expandiendo el logaritmo, $\log(1+x) \simeq x - x^2/2$, y teniendo en cuenta que los T_R^a no conmutan obtenemos

$$\alpha_a \beta_b [T_R^a, T_R^b] = i\gamma_c(\alpha, \beta) T_R^c \tag{2.8}$$

con $\gamma_c(\alpha, \beta) = -2(\delta_c(\alpha, \beta) - \alpha_c - \beta_c)$. Dado que esto debe ser cierto para todos los α y β , γ_c debe ser lineal en α_a y en β_a , por lo que la relación entre γ y α, β debe ser de la forma general $\gamma_c = \alpha_a \beta_b f^{ab}_c$ para algunas constantes f^{ab}_c . Por lo tanto

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c \tag{2.9}$$

Se denomina álgebra de Lie del grupo considerado. Aquí hay que señalar dos puntos importantes. La primera es que, aunque la forma explícita de los generadores T^a depende de la representación utilizada, las constantes de estructura f^{ab}_c son independientes de la representación. De hecho, si f^{ab}_c dependiera de la representación, γ^a y por tanto δ^a también dependería de R , por lo que sería de la forma $\delta_R^a(\alpha, \beta)$. Entonces de la ec. (2.6) concluiríamos que el producto de los elementos del grupo g_1 y g_2 da un resultado que depende de la representación. Esto es imposible, ya que el resultado de la multiplicación de dos elementos de grupo abstracto $g_1 g_2$ es una propiedad del grupo, definida a nivel de grupo abstracto sin ninguna referencia a las representaciones. Por lo tanto, concluimos que f^{ab}_c son independientes de la representación.² El segundo punto importante es que esta ecuación se ha derivado requiriendo la consistencia de la ec. (2.6) hasta el segundo orden; sin embargo, una vez satisfecho esto, se puede demostrar que no surge ningún otro requisito de la expansión en órdenes superiores.

Así, las constantes de estructura definen el álgebra de Lie, y el problema de encontrar todas las representaciones matriciales de un álgebra de Lie equivale al problema algebraico de encontrar todas las posibles soluciones matriciales T_R^a de la ec. (2.9). En realidad, los generadores de un grupo de Lie pueden definirse incluso sin hacer referencia a una representación concreta. Se aprovecha el hecho de que un grupo de Lie es también un múltiple, parametrizado por las coordenadas θ^a y se definen los generadores como una base del espacio tangente al origen. A continuación, se demuestra que su conmutador (definido como un soporte de Lie) es de nuevo un vector tangente, y por lo tanto debe ser una combinación lineal del vector base. En este enfoque nunca se menciona una representación específica, por lo que resulta obvio que las constantes de estructura son independientes de la representación. Véase, por ejemplo, Nakahara (1990), apartado 5.6.

Un grupo se denomina abeliano si todos sus elementos conmutan entre sí; en caso contrario, el grupo no es abeliano. Para un grupo de Lie

abeliano las constantes de estructura desaparecen, ya que en este caso en la ec. (2.6) tenemos $\delta_a = \alpha_a + \beta_a$. La teoría de representación de las álgebras de Lie abelianas es muy sencilla: cualquier álgebra de Lie abeliana d -dimensional es isomorfa a la suma directa de d álgebras de Lie abelianas unidimensionales. En otras palabras, todas las representaciones irreducibles de grupos abelianos son unidimensionales. La parte no trivial de la teoría de representaciones de las álgebras de Lie está relacionada con la estructura no abeliana. En el estudio de las representaciones, un papel importante lo desempeñan los operadores de Casimir. Se trata de operadores contruidos a partir de los T^a que conmutan con todos los T^a . En cada representación irreducible, los operadores de Casimir son proporcionales a la matriz identidad, y la constante de proporcionalidad etiqueta la representación. Por ejemplo, el álgebra del momento angular es $[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k$ y el operador de Casimir es J^2 . En una representación irreducible, J^2 es igual a $j(j+1)$ veces la matriz identidad, con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

Un grupo de Lie que, considerado como colector, es un colector compacto se denomina grupo compacto. Las rotaciones espaciales son un ejemplo de grupo de Lie compacto, mientras que veremos que el grupo de Lorentz es no compacto. Un teorema afirma que los grupos no compactos no tienen representaciones unitarias de dimensión finita, excepto las representaciones en las que los generadores no compactos se representan trivialmente, es decir, como cero. La relevancia física de este teorema se debe a que en una representación unitaria los generadores son operadores hermitianos y, según las reglas de la mecánica cuántica, sólo los operadores hermitianos pueden identificarse con observables. Si un grupo no es compacto, para identificar sus generadores con observables físicos necesitamos una representación de dimensión infinita. Veremos en este capítulo que los grupos de Lorentz y Poincaré son no compactos, y que las representaciones de dimensión infinita se obtienen introduciendo el espacio de Hilbert de estados de una partícula.

1.2. Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz se define como el grupo de transformaciones lineales de coordenadas,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.10)$$

que dejan invariante la cantidad

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.11)$$

El grupo de transformaciones de un espacio con coordenadas $(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$, que deja invariante la forma cuadrática $(y_1^2 + \dots + y_m^2) - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$ se llama grupo ortogonal $O(n, m)$, por lo que el grupo de Lorentz es $O(3, 1)$. La condición que debe satisfacer la matriz Λ para dejar invariante la forma cuadrática (2.11) es

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \left(\Lambda^\mu_\rho x^\rho \right) \left(\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma \right) = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \quad (2.12)$$

Dado que esto debe mantenerse para x genérico, debemos tener

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \quad (2.13)$$

En notación matricial, esto se puede reescribir como $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$. Tomando el determinante de ambos lados, tenemos $(\det \Lambda)^2 = 1$ o $\det \Lambda = \pm 1$. Transformaciones con *operatornamedet* $\Lambda = -1$ pueden escribirse siempre como el producto de una transformación con $\det \Lambda = 1$ y de una transformación discreta que invierte el signo de un número impar de coordenadas, por ejemplo una transformación de paridad $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$, o una reflexión alrededor de un único eje espacial $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, y, z)$, o una transformación de inversión temporal, $(t, x, y, z) \rightarrow (-t, x, y, z)$. Transformaciones con $\det \Lambda = +1$ se llaman transformaciones propias de Lorentz. El subgrupo de $O(3, 1)$ con $\det \Lambda = 1$ se denomina $SO(3, 1)$.

Escribiendo explícitamente la componente 00 de la ec. (2.13) encontramos

$$1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2 \quad (2.14)$$

lo que implica que $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$. Por tanto, el grupo Lorentz propio tiene dos componentes desconectadas, una con $\Lambda_0^0 \geq 1$ y otra con $\Lambda_0^0 \leq -1$, denominadas ortocrona y no ortocrona, respectivamente. Cualquier transformación no ortocrona puede escribirse como el producto de una transformación ortocrona y una inversión discreta del tipo $(t, x, y, z) \rightarrow (-t, -x, -y, -z)$, o $(t, x, y, z) \rightarrow (-t, -x, y, z)$, etc. Es conveniente factorizar todas estas transformaciones discretas y redefinir el grupo de Lorentz como el componente de $SO(3, 1)$ para el que $\Lambda_0^0 \geq 1$.

Si consideramos una transformación infinitesimal

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad (2.15)$$

la ecuación (2.13) nos da

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (2.16)$$

Una matriz antisimétrica de 4×4 tiene seis elementos independientes, por lo que el grupo de Lorentz tiene seis parámetros. Estos se identifican fácilmente: en primer lugar tenemos las transformaciones que dejan t invariante. Se trata simplemente del grupo de rotaciones $SO(3)$, generado por las tres rotaciones en los planos (x, y) , (x, z) e (y, z) . Además, tenemos tres transformaciones en los planos (t, x) , (t, y) y (t, z) que dejan invariante $t^2 - x^2$, etc. Una transformación que deja $t^2 - x^2$ invariante se llama un impulso a lo largo del eje x , y se puede escribir como

$$t \rightarrow \gamma(t + vx), \quad x \rightarrow \gamma(x + vt) \quad (2.17)$$

con $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ y $-1 < v < 1$. Su significado físico se entiende mirando el límite v pequeño, donde se reduce a la transformación de velocidad de la mecánica clásica. Es, por tanto, la generalización relativista

de una transformación de velocidad. Los seis parámetros independientes del grupo de Lorentz pueden tomarse, por tanto, como los tres ángulos de rotación y las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} .

Como $-1 < v < 1$, podemos escribir $v = \tanh \eta$, con $-\infty < \eta < +\infty$. Entonces $\gamma = \cosh \eta$ y la ec. (2.17) puede escribirse como una rotación hiperbólica,

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (\cosh \eta)t + (\sinh \eta)x \\ x &\rightarrow (\sinh \eta)t + (\cosh \eta)x \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

La variable η se denomina rapidez. Vemos que el grupo de Lorentz está parametrizado de forma continua y diferenciable por seis parámetros, por lo que es un grupo de Lie. Sin embargo, en el grupo de Lorentz uno de los parámetros es el módulo de la velocidad de aceleración, $|\mathbf{v}|$, que abarca el intervalo no compacto $0 \leq |\mathbf{v}| < 1$. Por lo tanto, el grupo de Lorentz es no compacto.

1.2.1. Algebra de Lorentz

Hemos visto que el grupo de Lorentz tiene seis parámetros, los seis elementos independientes de la matriz antisimétrica $\omega_{\mu\nu}$, a los que corresponden seis generadores. Es conveniente etiquetar los generadores como $J^{\mu\nu}$, con un par de índices antisimétricos (μ, ν) , de modo que $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$. Por tanto, un elemento genérico Λ del grupo de Lorentz se escribe como

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \quad (2.19)$$

El factor $1/2$ en el exponente compensa el hecho de que estamos sumando sobre todos los μ, ν en lugar de sobre los pares independientes con $\mu < \nu$, y por lo tanto cada generador se cuenta dos veces. Por definición un conjunto de objetos ϕ^i , con $i = 1, \dots, n$, se transforma en una representación R de dimensión n del grupo de Lorentz si, bajo una transformación de Lorentz,

$$\phi^i \rightarrow \left[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}} \right]_j^i \phi^j \quad (2.20)$$

donde $\exp \{-(i/2)\omega_{\mu\nu}J_R^{\mu\nu}\}$ es una representación matricial de dimensión n del elemento abstracto (2.19) del grupo de Lorentz; $J_R^{\mu\nu}$ son los generadores de Lorentz en la representación R , y son matrices $n \times n$. Bajo una transformación infinitesimal con parámetros infinitesimales $\omega_{\mu\nu}$, la variación de ϕ^i es

$$\delta\phi^i = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} (J_R^{\mu\nu})^i_j \phi^j \quad (2.21)$$

En $(J_R^{\mu\nu})^i_j$ el par de índices μ, ν identifican el generador mientras que los índices i, j son los índices matriciales de la representación que estamos considerando. Todas las magnitudes físicas pueden clasificarse según sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz. Un escalar es una magnitud invariante bajo la transformación. Un escalar Lorentz típico en física de partículas es la masa en reposo de una partícula. Un

cuatro-vector contravariante V^μ se define como un objeto que satisface la ley de transformación

$$V^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad (2.22)$$

con Λ^μ_ν definido por la condición (2.13). Un cuatro vector covariante V_μ se transforma como $V_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu V_\nu$, con $\Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda^\rho_\sigma$. Se comprueba inmediatamente que, si V^μ es un cuatro vector contravariante, entonces $V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu$ es un cuatro vector covariante. Nos referimos genéricamente a los cuatro vectores covariantes y contravariantes simplemente como cuatro vectores. Las coordenadas espacio-temporales x^{μ} son el ejemplo más sencillo de cuatro vectores. Otro ejemplo particularmente importante viene dado por el cuatromomento $p^\mu = (E, \mathbf{p})$.

La forma explícita de los generadores $(J_R^{\mu\nu})^i_j$ como matrices $n \times n$ depende de la representación particular que estemos considerando. Para un escalar ϕ , el índice i toma un solo valor, por lo que es una representación unidimensional, y $(J^{\mu\nu})^i_j$ es una matriz 1×1 , es decir, un número, para cada par dado (μ, ν) . Pero de hecho, por definición, en un escalar una transformación de Lorentz es la transformación identidad, por lo que $\delta\phi = 0$ y $J^{\mu\nu} = 0$. Una representación en la que todos los generadores son iguales a cero es trivialmente una solución de la ec. (2.9), para cualquier grupo de Lie, por lo que se llama la representación trivial.

La representación de cuatro vectores es más interesante. En este caso i, j son a su vez índices de Lorentz, por lo que cada generador $J^{\mu\nu}$ está representado por una matriz de 4×4 $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$. La forma explícita de esta matriz es

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i (\eta^{\mu\rho} \delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho} \delta^\mu_\sigma) \quad (2.23)$$

Esto puede demostrarse observando que, a partir de las ecs. (2.22) y (2.15), la variación de un cuatro vector V^μ bajo una transformación infinitesimal de Lorentz es $\delta V^\mu = \omega^\mu_\nu V^\nu$, que puede reescribirse como

$$\delta V^\rho = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho_\sigma V^\sigma \quad (2.24)$$

con $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$ dada por la ec. (2.23) (esta solución para $J^{\mu\nu}$ es única porque requerimos la antisimetría bajo $\mu \leftrightarrow \nu$). Esta representación es irreducible ya que una transformación de Lorentz genérica mezcla las cuatro componentes de un cuatro-vector y por tanto no hay cambio de base que nos permita escribir $(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma$ en forma diagonal de bloque. Ahora podemos utilizar la expresión explícita (2.23) para calcular los conmutadores, y encontramos

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \quad (2.25)$$

Esta es el álgebra de Lie de $SO(3, 1)$. Es conveniente reordenar los seis componentes de $J^{\mu\nu}$ en dos vectores espaciales,

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} J^{jk}, \quad K^i = J^{i0} \quad (2.26)$$

En términos de J^i, K^i el álgebra de Lie del grupo de Lorentz (2.25) se

convierte en

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \quad (2.27)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k \quad (2.28)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k \quad (2.29)$$

La ecuación (2.27) es el álgebra de Lie de $SU(2)$ y esto muestra que J^i , definido en la ec. (2.26), es el momento angular. En cambio la ec. (2.28) expresa el hecho de que \mathbf{K} es un vector espacial ³ Este es el punto de vista "activo". Alternativamente, podemos decir que mantenemos P fijo y rotamos el marco de referencia en el sentido de las agujas del reloj; este es el punto de vista "pasivo". También introducimos las definiciones $\theta^i = (1/2)\epsilon^{ijk}\omega^{jk}$ y $\eta^i = \omega^{i0}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= \omega_{12}J^{12} + \omega_{13}J^{13} + \omega_{23}J^{23} + \sum_{i=1}^3 \omega_{i0}J^{i0} \\ &= \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K} \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde utilizamos $\omega_{i0} = -\omega^{i0} = -\eta^i$ mientras que $\omega_{12} = \omega^{12} = \theta^3$, etc. Entonces una transformación de Lorentz puede escribirse como

$$\Lambda = \exp\{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K}\} \quad (2.31)$$

Con nuestras definiciones $\theta^i = +(1/2)\epsilon^{ijk}\omega^{jk}$ y $\eta^i = +\omega^{i0}$ una rotación por un ángulo $\theta > 0$ en el plano (x, y) gira en sentido contrario a las agujas del reloj la posición de un punto P respecto a un sistema de referencia fijo, ³ mientras que al realizar un impulso de velocidad \mathbf{v} sobre una partícula en reposo obtenemos una partícula con velocidad $+\mathbf{v}$. Para comprobar estos signos, podemos considerar transformaciones infinitesimales, y utilizar la forma explícita (2.23) de los generadores. Realizando una rotación por un ángulo θ alrededor del eje z , las ecs. (2.31) y (2.23) dan

$$\delta x^\mu = -i\theta (J^{12})^\mu{}_\nu x^\nu = \theta (\eta^{1\mu}\delta_\nu^2 - \eta^{2\mu}\delta_\nu^1) x^\nu \quad (2.32)$$

y por tanto $\delta x = -\theta y$ y $\delta y = +\theta x$, lo que corresponde a una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj. Análogamente, realizando un impulso a lo largo del eje x ,

$$\delta x^\mu = +i\eta (J^{10})^\mu{}_\nu x^\nu = -\eta (\eta^{1\mu}\delta_\nu^0 - \eta^{0\mu}\delta_\nu^1) x^\nu \quad (2.33)$$

y por tanto $\delta t = +\eta x$ y $\delta x = +\eta t$, que es la forma infinitesimal de la ec. (2.18).

1.3. Representación tensorial

Por definición un tensor $T^{\mu\nu}$ con dos índices contravariantes (es decir, superiores) es un objeto que se transforma como

$$T^{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} T^{\mu'\nu'} \quad (2.34)$$

En general, un tensor con un número arbitrario de índices superior e inferior se transforma con un factor $\Lambda_{\mu'}^{\mu}$ para cada índice superior y un factor $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$ para cada índice inferior. Los tensores son ejemplos de representaciones del grupo de Lorentz. Por ejemplo, un tensor genérico $T^{\mu\nu}$ con dos índices tiene 16 componentes y la ec. (2.34) muestra que estas 16 componentes se transforman entre sí, es decir, son una base para una representación de dimensión 16. Sin embargo, esta representación es reducible. Sin embargo, esta representación es reducible. A partir de la ec. (2.34) vemos que, si $T^{\mu\nu}$ es antisimétrica, después de una transformación de Lorentz sigue siendo antisimétrica, mientras que si es simétrica sigue siendo simétrica. Así que las partes simétrica y antisimétrica de un tensor $T^{\mu\nu}$ no se mezclan, y la representación de 16 dimensiones es reducible a una representación antisimétrica de seis dimensiones $A^{\mu\nu} = (1/2)(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})$ y una representación simétrica de 10 dimensiones $S^{\mu\nu} = (1/2)(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu})$. Además, también la traza de un tensor simétrico es invariante,

$$S \equiv \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} S^{\rho\sigma} = S \quad (2.35)$$

donde en el último paso utilizamos la propiedad definitoria del grupo de Lorentz, ecuación (2.13). Esto significa, en particular, que un tensor sin trazas sigue sin trazas después de una transformación de Lorentz, y así la representación simétrica de 10 dimensiones se descompone en una representación simétrica irreducible sin trazas de nueve dimensiones, $S^{\mu\nu} - (1/4)\eta^{\mu\nu} S$, y la representación escalar unidimensional S .

1.4. Representación espinorial

1.4.1. No relativista

Las representaciones tensoriales no agotan todas las representaciones finidimensionales físicamente interesantes del grupo de Lorentz. Podemos entender la cuestión considerando las rotaciones espaciales, es decir, el subgrupo $SO(3)$ del grupo de Lorentz. Las representaciones tensoriales de $SO(3)$ se construyen exactamente igual que antes, con escalares ϕ , vectores espaciales v^i , tensores T^{ij} , etc. con $i = 1, 2, 3$. Sin embargo, sabemos por la mecánica cuántica no relativista que, además de las representaciones tensoriales, existen otras representaciones de gran interés físico. Se trata de las representaciones espinoriales. Estrictamente hablando, éstas no son representaciones $SO(3)$, porque bajo una rotación de 2π un espinor cambia de signo, mientras que una rotación $SO(3)$ por 2π es lo mismo que la transformación de identidad. Sin embargo, dado que los observables son cuadráticos en la función de onda, esta ambigüedad de signos es perfectamente aceptable físicamente, y estas representaciones deben incluirse. En términos más formales, esto significa que, para las rotaciones espaciales, el grupo físicamente relevante no es $SO(3)$ sino $SU(2)$.

Recordemos algunos hechos sobre las representaciones $SU(2)$, bien conocidos de la mecánica cuántica no relativista. Las álgebras de Lie

de $SU(2)$ y de $SO(3)$ son las mismas, y vienen dadas por el álgebra de momento angular

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad (2.45)$$

A partir de la discusión del apartado 1.1, vemos que el álgebra de Lie sólo conoce las propiedades de un grupo cerca del elemento identidad, y el hecho de que $SU(2)$ y $SO(3)$ tengan el mismo álgebra de Lie significa que son indistinguibles a nivel de transformaciones infinitesimales. Sin embargo, $SU(2)$ y $SO(3)$ difieren a nivel global, es decir, lejos de la identidad. En $SO(3)$ una rotación por 2π es lo mismo que la identidad. En cambio, puede demostrarse que $SU(2)$ es periódico sólo bajo rotaciones por 4π . Esto significa que un objeto que recoge un signo menos bajo una rotación por 2π es una representación aceptable de $SU(2)$, mientras que no es una representación aceptable de $SO(3)$. Por tanto, cuando consideramos $SU(2)$ incluimos las soluciones de la ec. (2.45) que corresponden a espín medio entero, mientras que para $SO(3)$ sólo retenemos representaciones con espín entero. Así, las representaciones de $SU(2)$ se etiquetan con un índice j que toma valores $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ y da el espín del estado, en unidades de \hbar . La representación de espín j tiene dimensión $2j + 1$, y los distintos estados dentro de ella se etiquetan por j_z , que toma los valores $-j, \dots, j$ en pasos enteros. La representación $j = 1/2$ se denomina representación espinorial, y tiene dimensión 2: en ella los J^i se representan como

$$J^i = \frac{\sigma^i}{2} \quad (2.46)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Satisfacen la identidad algebraica

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (2.48)$$

de lo que se deduce inmediatamente que $\sigma^i/2$ obedecen a las relaciones de conmutación (2.45).

El espinorial es la representación fundamental de $SU(2)$ ya que todas las representaciones pueden construirse con productos tensoriales de espinores. En ⁷ El hecho de que el álgebra de Lorentz pueda escribirse como el álgebra de $SU(2) \times SU(2)$ no significa que el grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ sea el mismo que $SU(2) \times SU(2)$. En primer lugar, el álgebra de Lie sólo refleja las propiedades del grupo cercanas a la identidad. Además, J^\pm son combinaciones complejas de \mathbf{J} y \mathbf{K} . Obsérvese que, debido al factor i de la ec. (2.52), una representación de $SU(2) \times SU(2)$ con J^\pm hermitiana induce una representación de $SO(3, 1)$ con \mathbf{J} hermitiana pero \mathbf{K} antihermitiana. Para el lector más matemático: $SU(2) \times SU(2)$ es el grupo de cobertura universal de $SO(4)$ (de forma similar al hecho de que $SU(2)$ es el grupo de cobertura universal de $SO(3)$) y $SO(4)$ es la versión euclídea del grupo de Lorentz, es decir, se obtiene tomando la variable temporal t puramente imaginaria. El grupo de cobertura universal de $SO(3, 1)$ es $SL(2, \mathbb{C})$. En términos físicos, esto significa que con partículas de espín $1/2$ podemos construir sistemas compuestos con todos los espines enteros o semienteros posibles. Por ejemplo, la

composición de dos estados de espín 1/2 da espín cero y espín 1 ,

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (2.49)$$

Si denotamos por \uparrow y \downarrow los estados $j = 1/2$ con $j_z = +1/2$ y $j_z = -1/2$, respectivamente, entonces los tres estados con $j = 1$ vienen dados por

$$(\uparrow\uparrow), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \quad (\downarrow\downarrow) \quad (2.50)$$

mientras que el singlete (es decir, el estado escalar) es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (2.51)$$

1.4.2. Relativista

Ciertamente queremos mantener los espinores en la teoría relativista. Esto significa que debemos ampliar el conjunto de representaciones del grupo de Lorentz, en comparación con las representaciones tensoriales discutidas anteriormente. Esto se hace más fácilmente partiendo del álgebra de Lorentz en la forma dada por las ecs. (2,27) – (2,29), y definiendo

$$\mathbf{J}^\pm = \frac{\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}}{2} \quad (2.52)$$

El álgebra de Lie se vuelve

$$\begin{aligned} [J^{+,i}, J^{+,j}] &= i\epsilon^{ijk} J^{+,k} \\ [J^{-,i}, J^{-,j}] &= i\epsilon^{ijk} J^{-,k} \\ [J^{+,i}, J^{-,j}] &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos dos copias del álgebra del momento angular, que conmutan entre sí.

Habiendo escrito el grupo de Lorentz de esta forma, ahora es fácil incluir las representaciones espinoriales: simplemente tomamos todas las soluciones del álgebra (2,53) – (2,55), incluyendo las representaciones espinoriales.

Como conocemos las representaciones de $SU(2)$, y aquí tenemos dos factores conmutativos $SU(2)$, encontramos que: - Las representaciones del álgebra de Lorentz se pueden etiquetar con dos semienteros: (j_-, j_+) . - La dimensión de la representación (j_-, j_+) es $(2j_- + 1)(2j_+ + 1)$. - El generador de rotaciones \mathbf{J} está relacionado con \mathbf{J}^+ y \mathbf{J}^- por $\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^-$; por tanto, por la suma de momentos angulares habitual en mecánica cuántica, en la representación (j_-, j_+) tenemos estados con todos los espines posibles j en pasos enteros entre los valores $|j_+ - j_-|$ y $j_+ + j_-$.

Las representaciones son en general complejas y la dimensión de la representación es el número de componentes complejas independientes. En algunos casos podemos imponer una condición de realidad y $(2j_- + 1)(2j_+ + 1)$ se convierte en el número de componentes reales independientes. Las representaciones (j_-, j_+) deben incluir todas las

representaciones tensoriales discutidas en la sección anterior, además de las representaciones espinoriales. Examinamos los casos más sencillos.

Representaciones de 1 dimensión

$(0, 0)$. Esta representación tiene dimensión uno. En ella, $\mathbf{J}^\pm = 0$ por lo que también \mathbf{J}, \mathbf{K} son cero. Por lo tanto es la representación escalar.

Representaciones de 2 dimensiones

Espinores de Weyl $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$. Estas representaciones tienen dimensión dos y espín $1/2$, por lo que son representaciones espinoriales. Denotamos por $(\psi_L)_\alpha$, con $\alpha = 1, 2$, un espinor en $(1/2, 0)$ y por $(\psi_R)_\alpha$ un espinor en $(0, 1/2)$ (a veces en la literatura el índice de ψ_L se denota por $\dot{\alpha}$ para destacar que es un índice en una representación diferente en comparación con el índice de ψ_R). ψ_L se denomina espinor de Weyl zurdo y ψ_R espinor de Weyl diestro:

$$\text{Weyl spinors: } \psi_L \in \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \psi_R \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (2.56)$$

Queremos determinar la forma explícita de los generadores \mathbf{J}, \mathbf{K} en espinores de Weyl. Consideremos primero la representación $(1/2, 0)$. Por definición, en esta representación \mathbf{J}^- está representado por una matriz 2×2 , mientras que $\mathbf{J}^+ = 0$. La solución de (2.54) en términos de matrices 2×2 es por supuesto $\mathbf{J}^- = \sigma/2$, y por tanto

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{K} = -i(\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = i\frac{\sigma}{2} \quad (2.58)$$

Obsérvese que en esta representación los generadores K^i no son hermitianos. Esto es una consecuencia del hecho de que el grupo de Lorentz es no compacto y del teorema que afirma que los grupos no compactos no tienen representaciones unitarias de dimensión finita, excepto las representaciones en las que los generadores no compactos (en este caso los K^i) se representan trivialmente, es decir, $K^i = 0$. Ahora podemos escribir explícitamente cómo se transforma un espinor de Weyl bajo transformaciones de Lorentz, utilizando la ec. (2.31),

$$\psi_L \rightarrow \Lambda_L \psi_L = \exp \left\{ (-i\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\eta}) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right\} \psi_L \quad (2.59)$$

Repitiendo el argumento para la representación $(0, 1/2)$, encontramos de nuevo $\mathbf{J} = \sigma/2$ pero $\mathbf{K} = -i\sigma/2$ y

$$\psi_R \rightarrow \Lambda_R \psi_R = \exp \left\{ (-i\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right\} \psi_R \quad (2.60)$$

Nótese que $\Lambda_{L,R}$ son matrices complejas, y por tanto necesariamente las dos componentes de un espinor de Weyl son números complejos. Utilizando la propiedad de las matrices de Pauli $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -\sigma^{i*}$ y la forma explícita de $\Lambda_{L,R}$ es fácil demostrar que

$$\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 = \Lambda_R \quad (2.61)$$

De ello se deduce que

$$\sigma^2 \psi_L^* \rightarrow \sigma^2 (\Lambda_L \psi_L)^* = (\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2) \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R (\sigma^2 \psi_L^*) \quad (2.62)$$

donde usamos el hecho de que $\sigma^2 \sigma^2 = 1$. Por lo tanto, si $\psi_L(1/2, 0)$, entonces $\sigma^2 \psi_L^*$ es un espinor de Weyl diestro,

$$\sigma^2 \psi_L^* \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (2.63)$$

Espinores de Dirac $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Esta representación tiene dimensión (compleja) cuatro y $|1/2 - 1/2| \leq j \leq 1/2 + 1/2$, es decir $j = 0, 1$. Comparando con la ec. (2.40) vemos que se trata de una representación compleja de cuatro vectores. Un elemento genérico de la representación $(1/2, 1/2)$ puede escribirse como un par $\left((\psi_L)_\alpha, (\xi_R)_\beta\right)$, donde ψ_L y ξ_R son dos espinores de Weyl independientes, zurdo y diestro, respectivamente, y α, β toman los valores 1, 2. Queremos explicitar la relación entre estas cuatro magnitudes (complejas) y las cuatro componentes de un vector (complejo). En primer lugar, hemos visto anteriormente que, dado un espinor ξ_R diestro, podemos formar un espinor ξ_L zurdo $\equiv -i\sigma^2 \xi_R^*$, y análogamente a partir de ψ_L podemos construir $\psi_R \equiv i\sigma^2 \psi_L^*$. Definimos las matrices σ^μ y $\bar{\sigma}^\mu$ como

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i) \quad (2.67)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli y 1 es la 2×2 matriz identidad. Entonces, es fácil demostrar que

$$\xi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad (2.68)$$

y

$$\xi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (2.69)$$

son cuadvectores contravariantes.

1.5. Grupo de Poincare

Además de la invariancia bajo transformaciones de Lorentz, requerimos también invariancia bajo traslaciones espacio-temporales. Un elemento genérico del grupo de traslación se escribe como

$$\exp \{-iP^\mu a_\mu\} \quad (2.96)$$

donde a_μ son los parámetros de la traslación, $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, y las componentes del operador de cuatro momentos P^μ son los generadores. Las traslaciones más las transformaciones de Lorentz forman un grupo, llamado el grupo de Poincaré, o el grupo inhomogéneo de Lorentz (a veces se denota como $ISO(3, 1)$, donde "I" significa inhomogéneo). Puesto que las traslaciones conmutan, tenemos

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.97)$$

Para encontrar el conmutador entre P^μ y $J^{\rho\sigma}$ podemos partir de los conmutadores

$$[J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk}P^k \quad (2.98)$$

$$[J^i, P^0] = 0 \quad (2.99)$$

que expresan los hechos de que P^i es un vector bajo rotaciones y que la energía es un escalar bajo rotaciones. La única generalización Lorentz-covariante de las ecs. (2.98) y (2.99) es

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho) \quad (2.100)$$

Junto con el álgebra de Lorentz (2.25), las ecs. (2.97) y (2.100) definen el álgebra de Poincaré. En términos de $J^i, K^i, P^0 = H$ y P^i se lee

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k, \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k, \quad [J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk}P^k \quad (2.101)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k, \quad [P^i, P^j] = 0, \quad [K^i, P^j] = iH\delta^{ij} \quad (2.102)$$

$$[J^i, H] = 0, \quad [P^i, H] = 0, \quad [K^i, H] = iP^i \quad (2.103)$$

Las ecuaciones (2.101) expresan el hecho de que los J^i generan rotaciones espaciales y K^i, P^i son vectores bajo rotaciones. Las ecuaciones (2.103) establecen que J^i y P^i conmutan con el generador de traslaciones temporales y por lo tanto son cantidades conservadas; las K^i en cambio no se conservan, y esta es la razón por la que los valores propios de \mathbf{K} no se utilizan para etiquetar estados físicos.

1.5.1. Representación en estados de una partícula

La representación del grupo de Poincaré en campos nos permite construir Lagrangianos invariantes de Poincaré, como estudiaremos en el próximo capítulo. A nivel clásico, una descripción lagrangiana es todo lo que necesitamos para especificar la dinámica del sistema. A nivel cuántico, sin embargo, uno de nuestros objetivos será entender cómo el concepto de partícula emerge de la cuantización de campos. Por lo tanto, es útil ver cómo se puede representar el grupo de Poincaré utilizando como base el espacio de Hilbert de una partícula libre. Denotaremos los estados de una partícula libre con momento \mathbf{p} como $|\mathbf{p}, s\rangle$, donde s etiqueta colectivamente todos los demás números cuánticos. Puesto que \mathbf{p} es una variable continua e ilimitada, este espacio base es infinito-dimensional. Un teorema de Wigner (véase Weinberg (1995), capítulo 2) afirma que en este espacio de Hilbert cualquier transformación de simetría puede representarse mediante un operador unitario.¹ Por tanto, en este espacio base una transformación de Poincaré se representa por una matriz unitaria, y los generadores J^i, K^i, P^i y H por operadores hermitianos.

Las representaciones están etiquetadas por los operadores de Casimir. Uno de ellos es fácil de encontrar, y es $P_\mu P^\mu$. En un estado de una partícula tiene el valor m^2 , donde m es la masa de la partícula. Utilizando las relaciones de conmutación del grupo de Poincaré se puede verificar que existe un segundo operador de Casimir dado por $W_\mu W^\mu$, donde

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma \quad (2.113)$$

se llama el cuatro-vector de Pauli-Lubanski. Demostrar que $W_\mu W^\mu$ es un operador de Casimir es sencillo. En primer lugar, W^μ es claramente un cuatro vector, por lo que $W_\mu W^\mu$ es Lorentz-invariante y por lo tanto conmuta con $J^{\mu\nu}$. De la forma explícita se deduce también que

$$[W^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.114)$$

(utilizando la ec. (2.100) y la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$), y entonces $W_\mu W^\mu$ conmuta también con P^ν .

Como $W_\mu W^\mu$ es invariante de Lorentz, podemos calcularlo en el marco que prefiramos. Si $m \neq 0$, es conveniente elegir el marco de reposo de la partícula; en este marco $W^\mu = (-m/2)\epsilon^{\mu\nu\rho 0}J_{\nu\rho} = (m/2)\epsilon^{0\mu\nu\rho}J_{\nu\rho}$, por lo que $W^0 = 0$ mientras que

$$W^i = \frac{m}{2}\epsilon^{0ijk}J^{jk} = \frac{m}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} = mJ^i \quad (2.115)$$

Por lo tanto en un estado de una partícula con masa m y spin j tenemos

$$-W_\mu W^\mu = m^2 j(j+1), \quad (m \neq 0) \quad (2.116)$$

Si en cambio $m = 0$ el marco de reposo no existe, pero podemos elegir un marco donde $P^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$; en este marco un cálculo sencillo da $W^0 = W^3 = \omega J^3$, $W^1 = \omega$ izquierda ($J^1 - K^2$ derecha) y $W^2 = \omega$ izquierda ($J^2 + K^1$ derecha). Por lo tanto

$$-W_\mu W^\mu = \omega^2 \left[(K^2 - J^1)^2 + (K^1 + J^2)^2 \right], \quad (m = 0) \quad (2.117)$$

Comparando las ecs. (2.116) y (2.117) vemos que el límite $m \rightarrow 0$ es bastante sutil, y debemos estudiar por separado las representaciones masivas y sin masa.

Representación masiva

En este caso en los estados de una partícula tenemos $P^\mu P_\mu = m^2$ mientras que $W_\mu W^\mu = -m^2 j(j+1)$. Restringiremos a m reales y positivos. Por lo tanto las representaciones están etiquetadas por la masa m y por el espín j . Podemos entenderlo mejor observando que, si $m \neq 0$, con una transformación de Lorentz podemos llevar P^μ a la forma $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Esta elección de P^μ nos deja aún la libertad de realizar rotaciones espaciales. En otras palabras, el espacio de estados de una partícula con momento $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$ sigue siendo una base para la representación de rotaciones espaciales. El grupo de transformaciones que deja invariante una elección dada de P^μ se llama el pequeño grupo. En este caso, puesto que queremos incluir las representaciones de espinores, el pequeño grupo es $SU(2)$. Las representaciones masivas se etiquetan por tanto por la masa m y por el espín $j = 0, 1/2, 1, \dots$, y los estados dentro de cada ¹¹ En principio también existe la posibilidad de representaciones con $m^2 < 0$, conocidas como taquiones. En la teoría de campos, la aparición de un modo taquiónico es la señal de una inestabilidad, y refleja el hecho de que nos hemos expandido alrededor del vacío equivocado, por ejemplo, alrededor de un máximo en lugar de un mínimo de un potencial.

Esta parte es más técnica y puede omitirse en una primera lectura. Basta con suponer que el pequeño grupo es $SO(2)$ y omitir la parte escrita en caracteres más pequeños.¹² Serían hermitianas si las escribimos como $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$ y $C^{\mu\nu}$. Sin embargo, δx^ρ es proporcional a $\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma x^\sigma$, por lo que la representación viene dada por las matrices con un índice superior y otro inferior, y es para estas matrices para las que se cumple el álgebra (2.124).124) es válida. representación se etiquetan con $j_z = -j, -j+1, \dots, j$. Esto significa que las partículas masivas de espín j tienen $2j+1$ grados de libertad.

Representación no masiva

Cuando $P^2 = 0$ el marco de reposo no existe, pero podemos reducir P^μ a la forma $P^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$. El pequeño grupo es el conjunto de transformaciones de Poincaré que deja este vector sin cambios. Se ve inmediatamente que las rotaciones en el plano (x, y) dejan invariante este P^μ ; se trata de un grupo $SO(2)$, generado por J^3 .

Además hay dos transformaciones de Lorentz menos evidentes que no cambian P^μ ; para encontrar la solución más general, basta con restringirse a transformaciones de Lorentz infinitesimales $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, y buscar la matriz más general $\omega^{\mu\nu}$ que satisfaga $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ (para tener una transformación de Lorentz) y

$$\omega^{\mu\nu} P_\nu = 0 \quad (2.118)$$

para $P_\nu = (\omega, 0, 0, -\omega)$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^{01} & \omega^{02} & \omega^{03} \\ -\omega^{01} & 0 & \omega^{12} & \omega^{13} \\ -\omega^{02} & -\omega^{12} & 0 & \omega^{23} \\ -\omega^{03} & -\omega^{13} & -\omega^{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

lo que da $\omega^{03} = 0$, $\omega^{01} + \omega^{13} = 0$ y $\omega^{02} + \omega^{23} = 0$. Denotando $\omega^{01} = \alpha$, $\omega^{02} = \beta$ y $\omega^{12} = \theta$ vemos que la transformación de Lorentz más general que deja P^μ invariante puede escribirse como

$$\Lambda = e^{-i(\alpha A + \beta B + \theta C)} \quad (2.120)$$

donde (bajando el segundo índice de Lorentz)

$$A^\mu{}_\nu = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^\mu{}_\nu = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$C^\mu{}_\nu = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Example 1.5.1 (Fotón: $m^2 = 0$, dos estados de polarización $h = \pm 1$)
 Puesto que la interacción electromagnética conserva la paridad, es más natural definir el fotón como una representación del grupo de Poincaré y de la paridad, es decir, reunir los dos estados de helicidad $h = \pm 1$. Los dos estados $h = \pm 1$ se denominan entonces fotones ($h = -1$) zurdos y ($h = +1$) diestros.

Example 1.5.2 (Gravitón: $m^2 = 0$, dos estados de polarización $h = \pm 2$)
 Del mismo modo, los dos estados con helicidad $h = \pm 2$ que median la interacción gravitatoria se consideran mejor como dos estados de polarización de la misma partícula, el gravitón:

Example 1.5.3 (Neutrinos) Por el contrario, los neutrinos sólo tienen interacciones débiles (aparte de la interacción gravitatoria, mucho menor), que no conservan la paridad, y los dos estados con helicidad $h = \pm 1/2$ reciben nombres diferentes: neutrino se reserva para $h = -1/2$, y antineutrino para $h = +1/2$.

CAMPOS CLÁSICOS

Ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac

2

Todo esto lo he sacado de [2]

2.1. Ecuación de Klein Gordon

Recordemos que bajo el sistema natural de unidades, el Hamiltoniano de una partícula relativista es simplemente $H = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, con $c = 1$. La ecuación de Klein-Gordon busca una descripción relativista de la ecuación de Schrödinger:

$$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

Volviéndola a aplicar para quitar las raíces cuadradas:

$$(\vec{p}^2 + m^2) \psi = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Está es la ecuación de Klein-Gordon, que es invariante relativista. A continuación, un breve inciso explicando como obtener los cuadvectores y sus operadores.

Recordemos la definición de cuadvector contravariante $V^\mu = (V^0, \vec{V})$. Se definen las componentes covariantes a partir del tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Si tengo dos cuadvectores, $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ y $B^\mu = (B^0, \vec{B})$, podemos definir el producto escalar (en sentido Minkowski ^{1,3}) como:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Así mismo, definimos las componentes covariantes se obtienen a partir de la métrica: $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (V_0, -\vec{V})$. De esta manera:

$$V^2 = V^\mu V_\mu = V^0 V_0 - \vec{V}^2$$

Esta norma, en el espacio de Minkowski, no está definida positiva (en función del género: tiempo, luz, espacio).

^{1,3}El producto escalar en sentido Minkowski es invariante Lorentz.

2.1	Ecuación de Klein Gordon	23
2.2	Ecuación de Klein-Gordon en presencia de campos electromagnéticos	24
2.3	Ecuación de Dirac	25
2.3.1	Partículas cargadas en un campo electromagnético .	27
2.4	El límite no relativista de la ecuación de Dirac . . .	28
2.5	Soluciones a la ecuación de Dirac	28
2.5.1	Ondas con energía positiva	29
2.5.2	Ondas con energía negativa	32
2.5.3	Interpretación física. Mar de Dirac	33
2.6	Fermiones quirales	33
2.6.1	Proyectores de Weyl . . .	34

Con:

$$\rho = \frac{i}{2m} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$$

$$\vec{j} = \frac{-i}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

Si hacemos el cuadrigradiante de la densidad de corriente: $\partial_\mu J^\mu = \frac{i}{2m} (\partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \psi^* \square \psi - \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - \psi \square \psi^*) = 0 \rightarrow \partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Esto último nos verifica que cumple la ecuación de continuidad.

2.2. Ecuación de Klein-Gordon en presencia de campos electromagnéticos

En el sistema de unidades Heaviside-Lorentz las ecuaciones de Maxwell verifican:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0; & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0; & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{E}, \vec{B}; & & \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \phi, \vec{A}; & & \vec{E} &= -\vec{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

El objetivo de estas unidades es que las ecuaciones de Maxwell sean lo más sencillo posible. Si además imponemos sistema natural:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0; & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho; & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

El Lagrangiano de una partícula interactuando con campo eléctrico y magnético es:

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\phi = \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v})$$

Con $-m\sqrt{1-v^2}$ el término de partícula libre, $q\vec{v} \cdot \vec{A}$ el término de interacción magnética y $-q\phi$ el correspondiente a la interacción eléctrica.

El Hamiltoniano está definido en función de \vec{x} y de $\vec{\Pi}$, con $\vec{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + q\vec{A}$, el momento canónicamente conjugado; que es distinto a la cantidad de movimiento, $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$.

El cuadrivector $p^\mu = (E, \vec{p})$ en representación de posiciones ($|x\rangle$):

$$P^\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla} \right) \rightarrow P^\mu = i\partial^\mu$$

De aquí, a partir de la expresión para obtener un Hamiltoniano a partir del Lagrangiano de un sistema:

$$H(q_i, p_i) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \rightarrow H(\vec{x}, \vec{\Pi}) = \vec{v} \cdot \vec{\Pi} - \mathcal{L}$$

Obteniendo la siguiente expresión para el Hamiltoniano del sistema:

$$H(\vec{x}, \vec{\Pi}) = \sqrt{m^2 + (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2} + q\phi$$

Con $(\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 = \vec{p}^2$; $\sqrt{m^2 + (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2} = E$, el término de la energía relativista y $q\phi$ la energía electromagnética (no contribuye el campo magnético ya que no acelerará trayectorias, solo las curva).

Comparando con las ecuaciones de una partícula, para introducir el campo electromagnético hay que hacer los siguientes cambios:

$$\left. \begin{aligned} i\partial_t &\longrightarrow i\partial_t - q\phi \\ -i\vec{\nabla} &\longrightarrow -i\vec{\nabla} - q\vec{A} \end{aligned} \right\} \partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$$

Con \mathcal{D}^μ la derivada covariante. Así, la ecuación de Klein-Gordon para la interacción EM queda:

Esta es la ecuación de Klein-Gordon para una partícula cargada en presencia de un campo EM.

Si ahora introducimos la carga q en el cuádrivector J^μ :

$$J^\mu = \frac{iq}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = (\rho, \vec{j})^{1,4}$$

Que, nuevamente, cumple la ecuación de continuidad. Si $\psi \in \mathbb{R} \rightarrow \psi = \psi^* = J^\mu = 0$, es decir, si la función de onda es real, representa una partícula neutra y, por tanto, una partícula cargada debe tener función de onda compleja.

2.3. Ecuación de Dirac

A continuación vamos intentar solucionar algunos de los problemas que tenía la ecuación de Klein-Gordon y para ello vamos a definir la siguiente base de estados:

$$|\vec{x}, s\rangle \Rightarrow \psi_s = \vec{x}, s \psi(t) = \psi_s(\vec{x}, t)$$

en donde $s = s_1, s_2, \dots, s_m$ y $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}$

La s tiene que ver con el espín, pero no es exactamente el espín

A continuación definimos un nuevo hamiltoniano llamado *H*hamiltoniano de Dirac el cual tiene la forma

$$H_D = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta$$

en donde α, β son matrices de $m \times n$ dimensiones.

Aplicando este Hamiltoniano a la ecuación de Schrödinger obtenemos

$$i\partial_t\Psi = H_D\Psi \Rightarrow H_D\Psi = E\Psi \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow E\Psi = H_D\Psi \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow (E - H_D)\Psi = 0 \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow (E - \vec{\alpha}\vec{\mathcal{P}} - \beta)\Psi = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación de Klein-Gordon es correcta por lo que se tiene que satisfacer que $E^2 = p^2 + m^2$ de forma que

$$(E + \vec{\alpha}\vec{\mathcal{P}} + \beta)(E - \vec{\alpha}\vec{\mathcal{P}} - \beta)\Psi = 0 \Rightarrow (E^2 - (\vec{\alpha}\vec{\mathcal{P}} + \beta)^2)\Psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow (E^2 - \alpha_i\alpha_j P^i P^j - m\alpha_i\beta P^i - m\beta\alpha_i P^i - m^2\beta^2)\Psi = 0 \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow (E^2 - \sum_i) \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \quad (2.8)$$

Para acortar vamos a usar el convenio de Einstein de índices repetidos, en este caso esto es $\alpha_i\alpha_j P^i P^j = \sum_{ij} \alpha_i\alpha_j P^i P^j$

De esta última ecuación podemos obtener los coeficientes de las matrices α y β que cumplen la ecuación de K-G, los cuales deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\alpha_i^2 = \beta_i^2 = \mathcal{I}$
- $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad \forall i \neq j$
- $\{\alpha_i, \beta\} = 0$
- $\alpha^i = (\alpha^i)^\dagger$ y $\beta^i = (\beta^i)^\dagger$

De esta forma la ecuación de Dirac por componentes queda con la forma

$$i(\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi_s = 0 \quad (2.9)$$

A continuación vamos a definir lo que se denominan *Matrices de Dirac*, las cuales se definen como

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha^i$$

con $\alpha^i = \alpha_i$. Podemos expresarlas en forma indicial, **pero sin ser un cuadvivector**, con la forma $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$.

Podemos expresar las condiciones de los coeficientes β y α con estas matrices de forma mucho más abreviada como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Se puede demostrar que estas condiciones solo se satisfacen para matrices con dimensiones pares, pero además se puede demostrar que la dimensión mínima que han de tener para que se cumplan es 4, por lo que solo se cumplen para aquellas con $n \geq 4$ siendo n el número de componentes del espinor de Dirac Ψ .

Podemos escribir la ecuación 2.4 con las matrices γ de la forma

Recuerda

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0$$

Esta ecuación no es covariante ya que γ^μ no es un cuadvivector ni Ψ es un escalar (es decir, función $\Psi(x)$); pero si es un invariante relativista.

A continuación veamos la forma de estas matrices γ en diferentes representaciones:

- Representación de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

- Representación de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver entre una representación y otra solo cambia γ^0 , pero el cambio es importante ya que si **cambiamos las matrices, cambiamos el significado físico de las componentes del espinor de Dirac**.

Además, podemos reconocer $\vec{\sigma}$ como las matrices sigma de Pauli, las cuales siguen la siguiente regla de conmutación y anticonmutación:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma^k \quad \begin{cases} [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma^k \\ \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} \end{cases}$$

2.3.1. Partículas cargadas en un campo electromagnético

En electrodinámica clásica, vimos que el Lagrangiano de un sistema relativista es: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Ahora bien, en el sistema de Maxwell-Dirac:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi$$

Con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético y $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. Quedando el Lagrangiano para un sistema de una partícula sometida a un campo EM:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi - J_\mu A^\mu$$

Con \vec{B} el campo magnético $\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$. En su momento Pauli definió $\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon'_+ \\ \epsilon'_- \end{bmatrix}$ Con ϵ'_+ la componente del espín hacia arriba y ϵ'_- la componente del espín hacia abajo. Además se sabía que las partículas con espín \vec{S} tiene asociado un momento magnético asociado \vec{M}_S .

$$i\frac{\partial \epsilon'}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\phi - \vec{M}_S \vec{B} \right] \epsilon'$$

Esta es la ecuación de Pauli, con la parte dentro del corchete el Hamiltoniano de partícula espín $\frac{1}{2}$ interactuando con un campo electromagnético no relativista.

Se definió: $\vec{M}_S = g \frac{q}{2m} \vec{S}$, con g el ratio giromagnético. Comparando la ecuación de Pauli con la ecuación de Dirac en el límite no relativista:

$$i \frac{\partial \epsilon'}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - \frac{q}{m} \vec{S} \cdot \vec{B} + q\phi \right\} \epsilon' \rightarrow g = 2$$

Si una partícula sigue la ecuación de Dirac, su razón giromagnética es 2. Para el electrón, experimentalmente se ha medido: $\frac{g_e}{2} = 1,001159652209 \dots$, una precisión de 11 cifras. A partir de QED, hasta 5° orden de perturbaciones, el cálculo encaja con el experimental.

El radio giromagnético para el protón medido experimentalmente es: $\frac{g_p}{2} = 2,7928 \dots$, la ecuación de Dirac no vale para el protón. Esto se debe a que a los hadrones ($p, n, \pi, k, \kappa, \varphi, \dots$) están compuestos por quarks (u, d, s, c, t, b). El protón está formado por uud:

$$\left. \begin{array}{l} q_u = \frac{2}{3}e \\ q_d = -\frac{1}{3}e \end{array} \right\} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

Por eso no satisface la ecuación de Dirac ya que el protón no es partícula elemental (es un sistema).

Ocurre lo mismo con el neutrón, según Pauli $g = 0$ (por no tener carga), pero experimentalmente: $\frac{g_n}{2} = -1,9130 \dots \rightarrow$.

Por lo mismo, es un sistema compuesto por partículas cargadas que generan corrientes provocando ese momento magnético: $n \sim udd$. La ecuación de Dirac solo se puede aplicar a partículas elementales.

Al resolver la ecuación de Dirac para el átomo de Hidrógeno:

$$E = E_0 + \Delta E; \quad E_0 = \frac{\alpha}{2a_0 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$. Además: $\Delta E = -\alpha^2 E_0 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)$; con $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$. La ecuación de Dirac predice la estructura fina¹ del átomo de Hidrógeno. Sin embargo no predice la hiperfina ni el efecto Lamb. Según Dirac: $E_{2S_{1/2}} = E_{2P_{1/2}}$, experimentalmente

son distintos por el efecto Lamb. En resumen, la ecuación de Dirac en el límite no relativista describe partículas de $\frac{1}{2}$ y explica en parte el espectro del Hidrógeno.

2.4. El límite no relativista de la ecuación de Dirac

2.5. Soluciones a la ecuación de Dirac

Esta sección es de [3]

1: Estructura fina: Aproximaciones relativistas, interacción espín-órbita y término de Darwin.

Para familiarizarnos con la física de la ecuación de Dirac, analicemos ahora sus soluciones de onda plana. Puesto que un campo de Dirac ψ obedece a la ecuación de Klein-Gordon, sabemos inmediatamente que puede escribirse como una combinación lineal de ondas planas:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad \text{en donde } p^2 = m^2 \quad (3.45)$$

2.5.1. Ondas con energía positiva

Por el momento nos concentraremos en soluciones con frecuencia positiva, es decir, $p^0 > 0$. El vector columna $u(p)$ debe obedecer a una restricción adicional, que se encuentra introduciendo (3.45) en la ecuación de Dirac:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0 \quad (3.46)$$

Es más fácil analizar esta ecuación en el marco de reposo, donde $p = p_0 = (m, \mathbf{0})$; la solución para p general puede entonces encontrarse potenciando con $\Lambda_{\frac{1}{2}}$. En el marco de reposo, la Ec. (3.46) se convierte en

$$(m\gamma^0 - m) u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0$$

y las soluciones son

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

para cualquier espinor numérico de dos componentes ξ . Convencionalmente normalizamos ξ de modo que $\xi^\dagger \xi = 1$; el factor \sqrt{m} se ha insertado por conveniencia futura. Podemos interpretar el espinor ξ observando el generador de rotación (3.27): ξ se transforma bajo rotaciones como un espinor ordinario de dos componentes del grupo de rotación, y por tanto determina la orientación del espín de la solución de Dirac de la forma habitual. Por ejemplo, cuando $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la partícula tiene espín hacia arriba a lo largo de la 3-dirección.

Nótese que después de aplicar la ecuación de Dirac, somos libres de elegir sólo dos de los cuatro componentes de $u(p)$. Esto es justo lo que queremos, ya que una partícula con espín 1/2 sólo tiene dos estados físicos: espín arriba y espín abajo. (Por supuesto, estamos siendo un poco prematuros al hablar de partículas y espín. Demostraremos que el momento angular de espín de una partícula de Dirac es $\hbar/2$ cuando cuantifiquemos la teoría de Dirac en la Sección 3.5; por ahora, basta con observar que hay dos soluciones posibles $u(p)$ para cualquier momento p). Ahora que tenemos la forma general de $u(p)$ en el marco de reposo, podemos obtener $u(p)$ en cualquier otro marco potenciando. Consideremos un aumento a lo largo de la dirección 3. Primero debemos recordar lo que el impulso hace al vector 4-momento. En forma infinitesimal,

$$\begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} = \left[1 + \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde η es algún parámetro infinitesimal. Para η finito debemos escribir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E \\ p^3 \end{pmatrix} &= \exp \left[\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left[\cosh \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

El parámetro η se denomina rapidez. Es la cantidad que es aditiva bajo aumentos sucesivos. Ahora aplicar el mismo impulso a $u(p)$. Según las Ecs. (3.26) y (3.30),

$$\begin{aligned} u(p) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \eta \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \left[\cosh \left(\frac{1}{2} \eta \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sinh \left(\frac{1}{2} \eta \right) \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\eta/2} \left(\frac{1-\sigma^3}{2} \right) + e^{-\eta/2} \left(\frac{1+\sigma^3}{2} \right) & 0 \\ 0 & e^{\eta/2} \left(\frac{1+\sigma^3}{2} \right) + e^{-\eta/2} \left(\frac{1-\sigma^3}{2} \right) \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\sqrt{E+p^3} \left(\frac{1-\sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E-p^3} \left(\frac{1+\sigma^3}{2} \right) \right] \xi \\ \left[\sqrt{E+p^3} \left(\frac{1+\sigma^3}{2} \right) + \sqrt{E-p^3} \left(\frac{1-\sigma^3}{2} \right) \right] \xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

La última línea puede simplificarse para obtener

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

donde se entiende que al tomar la raíz cuadrada de una matriz, tomamos la raíz positiva de cada valor propio. Esta expresión para $u(p)$ no sólo es más compacta, sino que también es válida para una dirección arbitraria de \mathbf{p} . Cuando se trabaja con expresiones de esta forma, a menudo es útil conocer la identidad

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2 \quad (3.51)$$

Entonces se puede verificar directamente que (3.50) es una solución de la ecuación de Dirac en la forma de (3.43). En la práctica, a menudo es conveniente trabajar con espinores específicos ξ . Una elección útil en este caso serían los estados propios de σ^3 . Por ejemplo, si $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (espín hacia arriba a lo largo del eje 3), obtenemos

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que para $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (espín hacia abajo a lo largo del eje 3) tenemos

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E - p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{large boost}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En el límite $\eta \rightarrow \infty$ los estados degeneran en los espinores de dos componentes de una partícula sin masa. (Ahora vemos la razón del factor \sqrt{m} en (3.47): Mantiene finitas las expresiones de los espinores en el límite sin masa). Las soluciones (3.52) y (3.53) son estados propios del operador de helicidad,

$$h \equiv \hat{p} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

Una partícula con $h = +1/2$ se llama diestra, mientras que una con $h = -1/2$ se llama zurda. La helicidad de una partícula masiva depende del sistema de referencia, ya que siempre se puede pasar a un sistema en el que su momento esté en la dirección opuesta (pero su espín no cambie). En el caso de una partícula sin masa, que se desplaza a la velocidad de la luz, no se puede realizar tal desplazamiento. La forma extremadamente simple de $u(p)$ para una partícula sin masa en un estado propio de helicidad hace que el comportamiento de dicha partícula sea fácil de entender. En el Capítulo 1, nos permitió adivinar la forma de e^+e^- en el límite sin masa. En capítulos posteriores a menudo haremos primero un cálculo sin masa, y luego miraremos los estados propios de la helicidad en el límite de alta energía para entender lo que hemos hecho. Por cierto, ya estamos preparados para comprender el origen de la notación ψ_L y ψ_R para los espinores de Weyl. Las soluciones de las ecuaciones de Weyl son estados de helicidad definida, correspondientes a partículas zurdas y diestras, respectivamente. La invariancia Lorentz de la helicidad (para una partícula sin masa) se manifiesta en la notación de los espinores de Weyl, ya que ψ_L y ψ_R viven en diferentes representaciones del grupo de Lorentz. Es conveniente escribir la condición de normalización para $u(p)$ de forma Lorentzinvariante. Vimos anteriormente que $\psi^\dagger \psi$ no es invariante de Lorentz. Análogamente,

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= \left(\xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \\ &= 2E_p \xi^\dagger \xi \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para hacer un escalar de Lorentz definimos

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p) \gamma^0 \quad (3.56)$$

Entonces, por un cálculo casi idéntico,

$$\bar{u}u = 2m \xi^\dagger \xi \quad (3.57)$$

Esta será nuestra condición de normalización, una vez que también requerimos que el espinor de dos componentes ξ se normalice como de costumbre: $\xi^\dagger \xi = 1$. También es convencional elegir espinores de base ξ^1 y ξ^2 (como $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) que sean ortogonales. Para una partícula sin masa la Ec. (3.57) es trivial, por lo que debemos escribir la condición de normalización en la forma de (3.55). Resumamos nuestra discusión hasta ahora. La solución general de la ecuación de Dirac puede escribirse como una combinación lineal de ondas planas. Las ondas de frecuencia positiva son de la forma

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0 \quad (3.58)$$

Hay dos soluciones linealmente independientes para $u(p)$,

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (3.59)$$

que normalizamos según

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs} \quad \text{or} \quad u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_p\delta^{rs} \quad (3.60)$$

2.5.2. Ondas con energía negativa

Exactamente de la misma manera, podemos encontrar las soluciones de frecuencia negativa:

$$\psi(x) = v(p)e^{+ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0 \quad (3.61)$$

(Nótese que hemos optado por poner el signo + en la exponencial, en lugar de tener $p^0 < 0$). Hay dos soluciones linealmente independientes para $v(p)$,

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (3.62)$$

donde η^s es otra base de espinores de dos componentes. Estas soluciones se normalizan según

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs} \quad \text{or} \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = +2E_p\delta^{rs} \quad (3.63)$$

Las u 's y v 's también son ortogonales entre sí:

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0 \quad (3.64)$$

Ten cuidado, ya que $u^{r\dagger}(p)v^s(p) \neq 0$ y $v^{r\dagger}(p)u^s(p) \neq 0$. Sin embargo, obsérvese que

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0 \quad (3.65)$$

donde hemos cambiado el signo del trivector momento en un factor de cada producto espinor.

2.5.3. Interpretación física. Mar de Dirac

Las soluciones encontradas por Dirac no tienen sentido debido a que no hay un estado fundamental de energía cero (Ver figura 2.1).

Dirac propuso lo que se conoce como el mar de Dirac

Definition 2.5.1 (Mar de Dirac) *El mar de Dirac propone que todos los niveles con energía negativa están llenos (u ocupados) por estados, dado que Dirac trabajaba con fermiones hay que tener en cuenta el principio de exclusión de Pauli y por lo tanto hay un número finito de electrones que pueden ocupar dichos estados.*

Esto quiere decir que el vacío no está realmente vacío, si no que está lleno, tan lleno que no cabe nada más y por lo tanto no son estados accesibles. Lo que se puede interpretar como que ese es el estado fundamental.

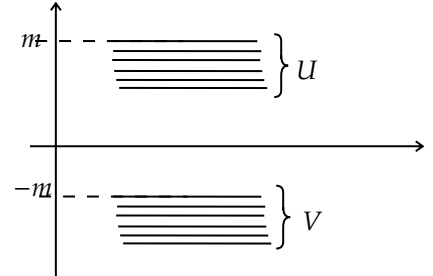


Figura 2.1: Soluciones de la ecuación de Dirac

En este caso Dirac tuvo suerte, ya que al tratar con fermiones se sacó el principio de exclusión de Pauli como un as bajo la manga, pero con los bosones ese truco no funciona.

Ahora veamos cómo llegamos de eso a la existencia de antipartículas con toda la magia que conlleva. Las antipartículas nacen de esta interpretación por las excitaciones del vacío mediante campos electromagnéticos (Ver figura 2.2) las cuales hacen saltar a los estados con masa negativa a masas positivas (más o menos como los huecos que contaban en estado sólido).

Por razones que no apunté o Dobado no contó, al parecer estos huecos como pasan a tener ahora masa positiva pero su energía (o algo, estoy inventando un poco) se conserva, estas deben tener carga contraria (en carga inserte propiedad cualquiera).

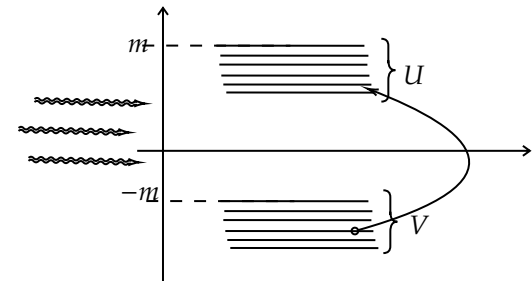


Figura 2.2: Excitación del mar de Dirac por un campo electromagnético

2.6. Fermiones quirales

A continuación definimos la matriz γ^5 en la representación de Weyl, que será la que usemos de ahora en adelante para este curso.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Algunas propiedades de γ^5 son:

- $\gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger$
- $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$
- $\gamma^\mu \gamma^5 =$
- $(\gamma^5)^2 = \mathcal{I}$

2.6.1. Proyectores de Weyl

A continuación definiremos los proyectores Weyl y posteriormente los formularemos.

Definition 2.6.1 (Proyectores Weyl) *Los proyectores Weyl son unos operadores que nos devuelven el espinor de Weyl correspondiente, esto es, ψ_L o ψ_R una vez aplicados a la función de onda. Estos operadores se definen como:*

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estos operadores tienen las siguientes propiedades:

- $P_L^2 = P_L$ y $P_R^2 = P_R$
- $P_L P_R = P_R P_L = 0$
- $P_L + P_R = \mathbb{1}$
- $\gamma_\mu P_L = P_R \gamma^\mu$

Podemos escribir el cuadriespinor en terminos de estos operadores, que nos lo dividen en su componente levógira y dextrógira, respectivamente:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow \psi = \psi_L + \psi_R = P_L \psi + P_R \psi = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

Si introducimos ahora estos operadores en la ecuación de Dirac:

$$(i \not{\partial} - m)\psi = 0 \rightarrow \begin{cases} i \not{\partial} \psi_R = m \psi_L \\ i \not{\partial} \psi_L = m \psi_R \end{cases}$$

Se demostró que las partículas con masa nula no tienen parte dextrógira y se pueden describir únicamente con la parte levógira. En representación de Weyl:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Levógiro: } (\frac{1}{2}, 0) \\ \text{Dextrógiro: } (0, \frac{1}{2}) \end{array} \right\} \text{ Fermiones de Dirac: } \psi_D = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2, 0 \end{pmatrix}}^{\psi_L \sim \varepsilon} \oplus \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\psi_R \sim \chi}$$

Todo esto lo he sacado del [2]

3.1. Campos clásicos relativistas

En la teoría de campos clásicos relativistas, el campo es un concepto abstracto que se puede entender como una función de varias variables que depende de las coordenadas espaciales y de un parámetro temporal.

Al igual que las funciones de onda, tenemos un campo Φ que depende de las ϕ_i coordenadas, y cada una de estas coordenadas está definida por unas coordenadas espaciales \vec{x} y un parámetro temporal t .

A la hora de aplicar transformaciones en este formalismo podemos emplear 2 tipos de puntos de vista:

1. **Actitud activa:** Esta será la que usaremos y será aquella en la que las transformaciones se hacen al sistema
2. **Actitud pasiva:** En este caso aplicamos las transformaciones al sistema de referencia.

Corollary 3.1.1 Cuando hay simetría estos puntos de vista pueden ser iguales.

Dado que adoptamos la actitud activa, una transformación sobre el campo lo alterará de forma que

$$\Phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \Phi(\vec{x}')$$

De esta forma definimos las variaciones de campo como $\tilde{\delta}$:

Definition 3.1.1 (Variación tilda) La variación tilda $\tilde{\delta}$ de un campo Φ es la diferencia entre el campo en un punto \vec{x} y el campo en un punto \vec{x}' que se obtiene al aplicar una transformación T al campo original. Es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\Phi &= \underbrace{\Phi'(\vec{x}') - \Phi(\vec{x})}_{\text{Trans. General}} = \Phi'(\vec{x}' + \delta\vec{x}) - \Phi(\vec{x}) = \\ &= \Phi'(x^\mu) + \partial_\mu \Phi'(x^\mu)(\delta x^\mu) - \Phi(x^\mu) \end{aligned}$$

En donde el término del medio se va ya que no quedaría lineal ($\Phi'(x^\mu) = \Phi(x^\mu) + \delta\Phi$).

De esta forma, la variación tilda de un campo Φ es:

$$\tilde{\delta}\Phi = \underbrace{\Phi'(\vec{x}) - \Phi(\vec{x})}_{\text{Variación intrínseca}} + \underbrace{\delta x^\mu \partial_\mu \Phi(x^\mu)}_{\text{Término de transporte}} = \delta\Phi + \delta x^\mu \partial_\mu \Phi(x^\mu)$$

3.1 Campos clásicos relativistas	35
3.1.1 Casos simples	36
3.2 Dinámica de los campos clásicos	37
3.2.1 Formalismo Lagrangiano	37
3.2.2 Formalismo Hamiltoniano	39
3.2.3 Ejemplos	39
3.3 Teorema de Noether . . .	41
3.3.1 Corrientes	41
3.3.2 Cargas	43
3.4 Transformaciones de simetría espacio-temporales .	43
3.4.1 Traslaciones	43
3.4.2 Transformaciones de Lorentz	44

3.1.1. Casos simples

Los casos simples son aquellos en los que las variaciones del campo tienen o no tiene término de transporte, es decir,

$$\delta x^\mu \neq 0 \longrightarrow \text{Transformación tipo espacio-tiempo}$$

$$\delta x^\mu = 0 \longrightarrow \text{Transformación tipo interna} \rightarrow \tilde{\delta}\Phi = \delta\Phi$$

A continuación definiremos que son estas variaciones:

Definition 3.1.2 (Variación intrínseca) La variación $\delta x^\mu = \epsilon^a A_a^\mu(x)$ $\epsilon^a \ll 1$ $\partial_\mu \epsilon^a = 0 \rightarrow$ transformación global

Definition 3.1.3 (Variación tilda) $\hat{\delta}\phi = \epsilon^a F_{i,a}(\Phi, \partial\Phi)$ $\partial_\mu \epsilon^a \neq 0 \rightarrow$ transformación local (Gauge)

Transformaciones de Lorentz

De la forma $x^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$. La transformación general será de la forma:

$$\delta\phi(x) = \delta\phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi$$

Pero, en el tema 0 vimos que $\Lambda_v^\mu = \delta_v^\mu + \omega_v^\mu$, por lo que, para un cambio de coordenadas o transformación infinitesimal, $\delta x^\mu = \omega_v^\mu x^\nu$, por lo que la transformación general quedaría: $\delta\phi = \delta\phi + \omega_v^\mu x^\nu \partial_\mu \phi$

Como ya se introdujo en el tema 1 también, usamos el operador $P^\mu = i\partial^\mu$ para definir el operador $L^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$, por lo que las transformaciones nos quedan:

$$\delta\phi = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \phi \Rightarrow \delta\phi = L^{\mu\nu} J_\mu \phi$$

Ahora bien, si definimos un nuevo generador $S^{\mu\nu}$ tal que la transformación general sea de la forma:

$$\delta\phi = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \phi,$$

de manera que $\delta\phi = \epsilon^{\mu\nu} J_\mu \phi + S^{\mu\nu} \phi$.

Las componentes del operador L serán de la forma:

$$L^{ij} = x^i P^j$$

$$L^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L^{jk} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

Algunos ejemplos o casos concretos donde se usan estas transformaciones:

Example 3.1.1 (Campo escalar)

Example 3.1.2 (Espinores de Weyl)

Example 3.1.3 (Campo vectorial)

Example 3.1.4 (Campo tensorial)

3.2. Dinámica de los campos clásicos

Por la mecánica lagrangiana sabemos que para estudiar la dinámica usamos las llamadas coordenadas generalizadas $q_i(t)$. En el formalismo de campos utilizamos el propio campo para definir la dinámica, es decir, supongamos que tenemos un campo Φ el cual esta compuesto por el valor del campo en un punto que denotamos $\phi_i(\vec{x}, t)$ estas ϕ_i son las coordenadas generalizadas en el formalismo de campos. Esto se puede ver como:

$$q_i \rightarrow \phi_i(\vec{x}, t)$$

Esto quiere decir, que vamos a tener tantas coordenadas como puntos del espacio esten definidos en nuestro campo y cada punto del espacio ϕ_i esta definido por unas coordeandas.

De esta forma, la teoría de campos que buscamos para entender la dinámica de un sistema es una *Teoría de campos local*, es decir, que lo que le ocurre a un punto del campo solo afecte a otros puntos cercanos y no a todo el campo y que además sea relativista.

3.2.1. Formalismo Lagrangiano

Si inicialmente consideramos un sistema con $q_a(t)$, donde $a = 1, \dots, n$ representa los n grados de libertad del sistema, cada uno de estos grados de libertad corresponde a un punto específico en el espacio. Ahora, al extender el sistema a un campo, los grados de libertad ya no están limitados a un número finito, sino que están definidos en cada punto del espacio y evolucionan con el tiempo. En este caso, el índice x indica el punto espacial asociado al grado de libertad particular. De este modo, pasamos de una descripción discreta de los grados de libertad $q_a(t)$ a una descripción continua mediante un campo, $\phi(\vec{x}, t)$, donde \vec{x} representa la posición espacial.

La dinámica del sistema viene dada por la **acción**:

$$S = S[\phi] = \int d^x t \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Con \mathcal{L} la densidad lagrangiana. Recordemos también que:

$$\int dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt, \quad \int d^x = \int d^0 x \int d^1 x \dots \int d^3 x$$

Definimos así el Lagrangiano: $L = \int d^x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Por tanto, la acción se puede simplificar como:

$$S = \int dt L$$

Utilizando el principio de mínima acción:

Proposition 3.2.1 (Principio de mínima acción o acción estacionaria)

Los campos físicos, cuyos valores están fijados en una cierta hipersuperficie espacial, son aquellos para los que la acción del sistema es estacionaria, es decir, aquellos campos para los que pequeñas variaciones intrínsecas no afectan al valor de la acción.

Para

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \rightarrow S[\phi] \rightarrow S[\phi] + \delta S[\phi]$$

Hacemos que esa variación de la acción sea estacionaria: $\delta S = 0$, quedando:

$$\delta S = \int d^x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right)$$

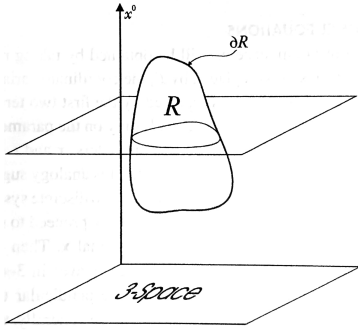


Figura 3.1: Espacio de Minkowski de 4 dimensiones

Definimos

$$K^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \sim \partial_\mu \phi$$

Ahora, aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_V d^4x \partial_\mu K^\mu = \int_{\Sigma_1} d\Sigma_\mu K^\mu - \int_{\Sigma_0} d\Sigma_\mu K^\mu$$

Con Σ^μ el cuadrivector perpendicular a la hipersuperficie (ver en Figura 3.1).

Entonces, el flujo de K^μ sobre la superficie se anula en toda la frontera de Minkowski:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \approx 0 \quad \forall \delta\phi \rightarrow$$

Obteniendo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Para una acción S' tal que su diferencia con S sea de la forma: $S' = S + \int d^4x f(x) \delta V(\phi) \rightarrow \delta S' = \delta S + \int d^4x \delta V(\phi) = \delta S$: Si la diferencia entre acciones S y S' es la cuatridivergencia de un campo vectorial, entonces ambas tienen las mismas ecuaciones del movimiento.

3.2.2. Formalismo Hamiltoniano

Una vez descrito el formalismo Lagrangiano, podemos ir al formalismo Hamiltoniano de forma análoga a como lo hacíamos en mecánica clásica, para ello definimos el *Momento canónico generalizado* como

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} \text{ con } \partial_0 \phi_i = \dot{\phi}$$

De forma que el Hamiltoniano queda definido como

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi}_i - \mathcal{L}$$

3.2.3. Ejemplos

Example 3.2.1 (Campo escalar real sin interacción)

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu \phi)$$

A partir de estos lagrangianos y las ecuaciones de Euler-Lagrange es posible obtener la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \square \phi \Rightarrow (\square + m^2) \phi = 0$$

Example 3.2.2 (Campo escalar real con interacción)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) = \mathcal{L}_0 - V(\phi)$$

La ecuación de Klein-Gordon obtenida a partir de este lagrangiano sería:

$$(\square + m^2) \phi = -V'(\phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$$

Example 3.2.3 (Campo complejo) El campo es de la forma: $\phi = \phi_1 + i\phi_2 \in \mathbb{C}$, con $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. El lagrangiano sería:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 - V(|\phi|^2)$$

Donde hemos considerado que ϕ_1 y ϕ_2 dependen de la misma masa. Para el cálculo de K-G es equivalente trabajar con ϕ_1 y ϕ_2 como campos independientes que trabajar con ϕ y ϕ^* :

$$(\square + m^2) \phi^* = -\frac{\partial V}{\partial |\phi|^2} \phi^*$$

$$(\square + m^2) \phi = -\frac{\partial V}{\partial |\phi|^2} \phi$$

Example 3.2.4 (Campo electromagnético con potencial)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

Con $F^{\mu\nu}$ el tensor de campo electromagnético, definido como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

El término $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ es el campo electromagnético libre, mientras que el término $A_\mu J^\mu$ se refiere a la interacción. Con las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano podemos obtener el segundo par de ecuaciones de Maxwell.

Example 3.2.5 (Partícula en campo electromagnético)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2|\phi|^2$$

Recordando que, para una partícula en un campo electromagnético, D_μ toma la forma $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, podemos reescribir el lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi|^2 - m^2|\phi|^2$$

donde:

$$J^\mu = iq(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)$$

Es la corriente conservada asociada a la simetría de gauge. Así, las ecuaciones de movimiento para los campos complejos en presencia de un campo electromagnético toman la forma:

$$(\square + m^2)\phi = -2iq\partial^\mu A_\mu\phi - 2iqA_\mu\partial^\mu\phi + q^2A_\mu A^\mu\phi$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 2iq\partial^\mu A_\mu\phi^* + 2iqA_\mu\partial^\mu\phi^* + q^2A_\mu A^\mu\phi^*$$

Lo que implica que ϕ^* se comporta como ϕ , pero con una carga opuesta, $-q$.

Example 3.2.6 (Lagrangiano de Dirac)

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi$$

Con ψ el cuadriespinor de Dirac (ver L.D.) y $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ el adjunto de Dirac. Introduciendo la notación slash de nuevo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} - m)\psi$$

Example 3.2.7 (Cuadriespinor de Dirac en campo electromagnético)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - A_\mu J^\mu$$

En esta expresión:

- $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ representa el lagrangiano libre del campo electromagnético.
- $\bar{\psi}(i\partial - m)\psi$ es el lagrangiano libre del campo de Dirac.
- $A_\mu J^\mu$ es el término de interacción entre el cuadrespinor de Dirac y el campo electromagnético.

Esta expresión es conocida como el **lagrangiano de Maxwell-Dirac**. Si la corriente conservada está dada por:

$$J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Entonces las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad iD\psi = m\psi$$

Donde se verifica que la corriente es conservada ($\partial_\mu J^\mu = 0$).

3.3. Teorema de Noether

El teorema de Noether es una herramienta fundamental en el estudio de la dinámica de los cuerpos, por lo que también es relevante ver como es su formalismo en teoría de campos.

3.3.1. Corrientes

En mecánica Lagrangiana decíamos que una coordenada era una constante del movimiento cuando su momento canónico conjugado era constante, es decir,

$$\dot{p}_{q^a} = 0 \rightarrow p_{q^a} = \text{const} \quad q^a \text{ es cíclica}$$

esto implicaba que podíamos cambiar q por una coordenada q' parametrizada por un parámetro ϵ de tal forma que L es invariante.

El teorema de Noether relaciona las simetrías en la integral de acción con leyes de conservación. Considerando una transformación infinitesimal de las coordenadas:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

Además usaremos la propiedad de conmutación

$$[\delta, \partial_\mu] = 0$$

La acción de la transformación infinitesimal es de la forma :

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (3.1)$$

El jacobiano para la primera integral al cambiarse la base (x') será:

$$dx' = d^4x' = \left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| d^4x = \det(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu) d^4x \quad (3.2)$$

Para resolver esta ecuación, usamos que $\det\{e^M\} = e^{\text{tr}M}$, por lo que, haciendo un desarrollo en potencias, el determinante queda en primera corrección: $\det(1 + M) = 1 + \langle M \rangle + \mathcal{O}(M^2)$. Así:

$$dx' = (1 + \text{tr} \partial_\nu \delta x^\mu) dx = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) dx \rightarrow dx' \mathcal{L} = dx (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} \quad (3.3)$$

Sustituyendo de nuevo en la transformación general:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta S} &= \int dx \overbrace{(\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}(x))}^{\tilde{\delta \mathcal{L}}} = \int dx (\delta \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}) = \\ &= \int dx (\delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L})) = \int dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \partial_\mu \phi + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \right) = \\ &= \int dx \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)_{\text{EMov}} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se dice que tenemos una transformación de simetría si $\delta S = 0$, es decir, tendrá las mismas ecuaciones de movimiento tras la transformación. Decimos que δx^μ y $\delta \phi$ son simetrías del sistema si conducen a las mismas ecuaciones del movimiento, es decir, a $\delta S = 0$. Tomando el caso en el que tenemos transformación de simetría, la integral se debe anular:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right)_{\text{EMov}} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) = 0$$

Definimos así el cuádrivector *corriente Noether*:

$$J^\mu = \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - (\delta x^\mu \mathcal{L})$$

Así, la condición para la simetría se simplifica:

$$\partial_\mu J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)_{\text{EMov}} \delta \phi$$

Es decir, la condición de simetría se reduce a:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

J^μ es una cantidad conservada. El conjunto de las transformaciones de simetría forman grupo, que denotaremos por $\{J_a^\mu\}$, tales que $J^\mu = \epsilon J_a^\mu$, es decir, J_a^μ es el generador del grupo.

3.3.2. Cargas

Podemos definir también las *cargas de Noether* asociadas a las transformaciones de simetría:

$$Q_a = \int dx J_a^0 \Rightarrow \frac{dQ_a}{dt} = 0$$

Consideremos un cambio en la corriente: $J_a^\mu \rightarrow J_a^\mu = J_a^\mu + \partial_\nu A_a^{\mu\nu}$ Con $A_a^{\mu\nu}$ anti-simétrico. Calculando $\partial_\mu J_a^\mu$:

$$\partial_\mu J_a^\mu = \partial_\mu J_a^\mu + \partial_\nu \partial_\mu A_a^{\mu\nu} = 0$$

Esta ambigüedad está relacionada con la de la lagrangiana en una derivada total.

3.4. Transformaciones de simetría espacio-temporales

Dependiendo de la forma de las transformaciones (3.56), podemos distinguir distintos tipos de simetrías:

Simetrías globales: los parámetros θ^a son independientes de las coordenadas; las simetrías globales son un caso especial de las simetrías locales.

Simetrías locales: los parámetros $\theta^a(x)$ dependen de las coordenadas

Simetrías internas: $X_a^\mu(x) = 0$, es decir, las coordenadas no cambian.

Simetrías espacio-temporales: $X_a^\mu(x) \neq 0$, es decir, involucran cambios en las coordenadas.

3.4.1. Traslaciones

El ejemplo más sencillo es la simetría bajo traslaciones, dadas en el caso infinitesimal por

$$x'^\mu = x^\mu + \theta^\mu$$

$$\phi'_i(x') = \phi_i(x)$$

En este caso, el índice $a = 1, \dots, 4$ podemos sustituirlo por un índice griego ν , de forma que

$$X_\nu^\mu = \delta^\mu_\nu$$

$$Y_{i,\nu} = 0$$

La corriente conservada se lee en este caso

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.65)$$

donde hemos usado $\theta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho} \theta_\rho^\mu$. Esta corriente conservada se conoce como tensor energíamomento.

La conservación de la corriente implica

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} (\phi^{cl}) = 0 \quad (3.66)$$

y las cargas son

$$P^\nu \equiv \int d^3x \theta^{0\nu} (\phi^{cl}) \quad (3.67)$$

que es el cuádrimomento del campo. Nótese que $\theta^{\mu\nu}$ no es simétrico en sus índices. Sin embargo, podemos construir un tensor simétrico

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho A^{\rho\mu\nu} \quad (3.68)$$

con A un tensor antisimétrico en los índices ρ, μ elegido adecuadamente. Precisamente debido a la antisimetría de A , el nuevo tensor también es conservado

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\rho A^{\rho\mu\nu} = 0$$

Para $\mu = 0$ tenemos $\partial_\rho A^{\rho 0\nu} = \partial_i A^{i0\nu}$ que es una divergencia espacial y por tanto no cambia las cargas conservadas en (3.67). En otras palabras, $\theta^{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$ son físicamente equivalentes y podemos trabajar con cualquiera de ellos. $T^{\mu\nu}$ se conoce como tensor energía-momento simetrizado de Belinfante-Rosenfeld.

3.4.2. Transformaciones de Lorentz

Consideremos ahora el caso en el que la acción es invariante bajo transformaciones de Lorentz dadas anteriormente en (3.6) y (3.31)

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \\ \phi'_i(x') &= \phi_i(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} [S^{\mu\nu}]^j_i \phi_j(x) \end{aligned}$$

de forma que ahora el índice a se convierte en un par de índices griegos ν, ρ

$$\begin{aligned} X^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} x^\rho - \eta^{\mu\rho} x^\nu) \\ Y_i^{\nu\rho} &= -\frac{i}{2} [S^{\nu\rho}]^j_i \phi_j(x) \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde los generadores $[S^{\nu\rho}]^j_i$ se escribirán en la representación correspondiente a los campos ϕ_i .

La correspondiente corriente de Noether será

$$j^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \left(-\frac{i}{2} [S^{\nu\rho}]^j_i \phi_j(x) - X^{\lambda\nu\rho}(x) \partial_\lambda \phi_i(x) \right) + \mathcal{L} X^{\mu\nu\rho}(x) \right] \omega_{\nu\rho} \quad (3.71)$$

Esta corriente se puede escribir como

$$j^\mu = \frac{1}{2} M^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho} \quad (3.72)$$

donde $M^{\mu\nu\rho}$ se puede escribir en función del tensor energía-momento como

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu \theta^{\mu\rho} - x^\rho \theta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu\rho} \quad (3.73)$$

con

$$S^{\mu\nu\rho} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} [S^{\nu\rho}]_i^j \phi_j \quad (3.74)$$

La conservación de la corriente implica

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (3.75)$$

Por tanto, tenemos 6 corrientes conservadas, $M^{\mu\nu\rho}$ una por cada uno de los 6 parámetros independientes de la transformación de Lorentz $\omega_{\nu\rho}$. Nótese que por construcción $M^{\mu\nu\rho}$ es antisimétrico en $(\nu\rho)$. Las correspondientes cargas conservadas son:

$$M^{\nu\rho} = \int d^3x M^{0\nu\rho} = \int d^3x (x^\nu p^\rho - x^\rho p^\nu + S^{0\nu\rho}) \quad (3.76)$$

con $p^\nu = \theta^{0\nu}$ la densidad de cuádrimomento. Nótese que las 3 cargas conservadas M^{ij} , asociadas a las rotaciones, proporcionan el momento angular del campo como

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M^{jk} \quad (3.77)$$

que como vemos tienen la contribución del momento angular orbital $(x^i p^j - x^j p^i)$ y de spin S^{0ij} . Las M^{0i} corresponderían a las 3 cargas conservadas asociadas a los boosts.¹

1: La interpretación física de estas cargas conservadas no es tan directa y puede verse que corresponden a la posición del centro de momentos del campo en el instante $t = 0$.

CAMPOS CUÁNTICOS

Cuantización canónica del campo escalar libre

4

Todo esto lo he sacado del [2]

4.1. Cuantización canónica del campo bosónico libre

Una vez visto lo que es un campo clásico vamos a cuantizarlo, para ello vamos primero a ver como se cuantizaban las cosas.

En mecánica clásica teníamos el Hamiltoniano el cual estaba definido como función de (q_i, p_i) , sin embargo, en mecánica cuántica usamos operadores

$$\left. \begin{array}{l} q_i \xrightarrow{\text{Cuantizamos}} \hat{q}_i \\ p_i \xrightarrow{\text{Cuantizamos}} \hat{p}_i \end{array} \right\} [\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i\delta_{ij}$$

Como podemos sospechar que en vez de tener variables como (q_i, p_i) tengamos los operadores (\hat{q}_i, \hat{p}_i) complica un poco las cosas, ya que habrá que asegurarse siempre que se cumplan ciertas reglas de conmutación.

Si (q_i, p_i) han pasado a convertirse en operadores H , también lo será, es decir, $\hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i)$.

En mecánica cuántica la ecuación que describía la dinámica de un sistema era la ecuación de Schrödinger, y su variable dinámica era la función de onda

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t_0)\rangle = \hat{H} |\psi(t_0)\rangle$$

En este caso nos encontramos con un problema, ya que la variable dinámica es la función de onda, y es la que tiene la dependencia temporal, y queremos irnos a un campo en donde no hay funciones de onda. La solución a este problema es la **Imagen de Heisenberg**, la cual nos permite poner la dependencia temporal en los operadores en vez de en las funciones de onda, es decir,

$$q_i \longrightarrow \hat{q}_i(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}_i e^{-i\hat{H}t} = \mathcal{U}^{-1} \hat{q}_i \mathcal{U}$$

como el operador evolución temporal \mathcal{U} cumple la relación $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} = \mathbb{I}$, entonces conservamos la relación de conmutación de la imagen de Schrödinger

$$[\hat{q}_i(t), \hat{p}_i(t)] = i\delta_{ij}$$

Basicamente hemos movido la dinámica a los operadores, y esto es importante porque cuando pasamos (en el tema anterior) al formalismo

4.1	Cuantización canónica del campo bosónico libre . .	49
4.1.1	Cuantización en teoría de campos	50
4.1.2	Solución general de la ecuación de Klein-Gordon	51
4.1.3	Soluciones en el formalismo de campo cuántico . .	52
4.1.4	Espacio de Fock	53
4.1.5	Propagador del campo escalar libre	57
4.2	Cuantización del campo escalar complejo	58
4.3	¿Porque estos campos? . .	62

de campos, pasamos las coordenadas generalizadas, en ningún momento hablamos de funciones de onda.

4.1.1. Cuantización en teoría de campos

Ahora una vez visto como cuantizamos cosas y sabiendo como se pasa de la coordenadas generalizadas a un campo, vamos a juntar las dos cosas y ver que pasa, para ello expresemos los operadores $\hat{q}_i(t)$ como campos

$$\hat{q}_i(t) \longrightarrow \hat{\phi}(\vec{x}, t)$$

El subíndice i hace referencia a las coordenadas \vec{x} , es decir, $q \rightarrow \phi$ y $i \rightarrow \vec{x}$

En teoría clásica de campos podíamos obtener un campo real $\phi \in \mathbb{R}$ con el que describir una partícula con el lagrangiano

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Del cual podíamos obtener el momento canónico conjugado como

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \dot{\phi}$$

Con estas 2 cantidades podíamos escribir el Hamiltoniano del sistema como

$$H_0 = \int d\vec{x} \mathcal{H} = \int d\vec{x} (\Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d\vec{x} (\Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2)$$

Si ahora cuantizamos el campo pasamos a obtener que

$$\left. \begin{array}{l} \phi_i \xrightarrow{\text{Cuantizamos}} \hat{\phi}(\vec{x}, t) \\ \Pi_i \xrightarrow{\text{Cuantizamos}} \hat{\Pi}(\vec{x}, t) \end{array} \right\} [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

En este caso a diferencia de los operadores, los campos son un continuo (por definición, ya que ocupan todo el espacio) no obtenemos la delta de Kronecker, si no la de Dirac.

Otras reglas de conmutación que cumplen estos campos cuantizados son

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)]$$

De esta forma obtenemos que el operador Hamiltoniano en este formalismo es

$$\hat{H}_0 = \int d\vec{x} \frac{1}{2} [\hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi}(\vec{x}, t))^2 + m^2 \hat{\phi}(\vec{x}, t)^2]$$

Como los operadores de campo son continuos, estos cumplen la ecuación de heisenberg de forma que

$$i\partial_0\hat{\phi}(\vec{x},t) = [\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{H}_0]$$

Se puede demostrar que $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ cumple la ecuación de Klein-Gordon.

Demostración.

$$(\square + m^2)\hat{\phi}(\vec{x},t) = 0$$

□

4.1.2. Solución general de la ecuación de Klein-Gordon

Volviendo al formalismo de campos clásicos y a la ecuación de Klein-Gordon, obtuvimos soluciones con la forma

$$e^{-ikx}$$

para soluciones con energía positiva y con la forma

$$e^{ikx}$$

para soluciones con energía negativa, en donde $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ y $x^\mu = (t, \vec{x})$. Estas soluciones complian las siguientes condiciones:

$$k^2 - m^2 = 0 \quad k^0 = E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \text{ con } E_k > 0$$

Si nos centramos en las soluciones con energía positiva, podemos buscar otras soluciones, que mientras cumplan las condiciones anteriores también serán soluciones válidas.

Esta función

$$\int d^4k \frac{k}{(2\pi)^3} \alpha_{\vec{k}} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}$$

es solución porque $\delta(k^2 - m^2)$ garantiza que $k^2 - m^2 = 0$ y $\theta(k^0)$ (es la función escalón) garantiza que $E_k > 0$ y es proporcional a las soluciones que obtuvimos en el tema 1.

$$\theta(k^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k^0 < 0 \\ 1 & \text{si } k^0 > 0 \end{cases}$$

Podemos definir la delta de una función como

Definition 4.1.1 (Delta de Dirac de una función) *Podemos definir la delta de Dirac de una función como*

$$\delta(f(x_0)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

En el caso de nuestra solución esto se aplica como

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta((k^0)^2 - \vec{k}^2 - m^2) = \frac{1}{2k^0} \delta(k^0 - E_k) + \text{Un termino de } k^0 < 0$$

Y como la última delta nos fuerza a que $k^0 = E_k$.

La última condición que debemos cumplir es que $\phi \in \mathbb{R}$, por lo que juntando este desarrollo con el mismo para las soluciones con energía negativa, tenemos que la solución más general a la ecuación de Klein-Gordon es:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d\tilde{k} (\alpha_{\vec{k}} e^{-ikx} + \alpha_{\vec{k}}^* e^{ikx})$$

en donde los coeficientes $\alpha_{\vec{k}}$ y $\alpha_{\vec{k}}^*$ aseguran que se cumpla la última condición

Corollary 4.1.1 *El termino*

$$d^4 \frac{k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2)$$

se convierte en

pasando a una integral sobre el trivector \vec{k} por el efecto de la delta, este término de ahora en adelante llamaremos $d\tilde{k}$.

Además que, tanto d^4k como k^2 son invariantes Lorentz (esto es porque el jacobiano de la transformación es 0), entonces

$$d\tilde{k} = d\tilde{k}'$$

4.1.3. Soluciones en el formalismo de campo cuántico

Para conseguir las soluciones en el formalismo de campo cuántico podemos reutilizar la misma estructura que para un campo clásico.

Para ello seguimos teniendo que tener soluciones $\hat{\phi}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}$, el análogo clásico era que $\phi(\vec{x}, t) = \phi^*(\vec{x}, t)$. EN este formalismo cuántico esta condición se puede obtener imponiendo que las soluciones sean autoadjuntas, es decir, $\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t)$.

De esta forma vemos que ya no podemos seguir usando los números $\alpha_{\vec{k}}$, si no que tenemos que cambiarlos por unos operadores llamados aniquilación $\hat{a}_{\vec{k}}$ y destrucción $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$.

Así obtenemos que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de un campo cuántico son

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int d\tilde{k} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx})$$

Resumen de los operadores de campo $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$

- Estos operadores satisfacen la ecuación de Heisenberg

$$i\partial_0 \hat{\phi}(\vec{x}, t) = [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{H}_0]$$

- Tambien Satisfacen la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\hat{\phi}(\vec{x}, t) = 0$$

- Son autoadjuntos

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t)$$

- Cumplen la regla de conmutación

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{x}', t) \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Esto no lo hemos obtenido realmente, pero si forzamos a que cumplan estas reglas podemos obtener las reglas de conmutación de los operadores creación y destrucción. Estas reglas son

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'} \right] = \left[\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \right] = 0$$

y

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right] = 2E_k(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Una vez encontrados los operadores, nos falta encontrar a que estados los aplicamos, ya dijimos que no íbamos a tener funciones de onda, ¿como vamos a describir a las cosas si no usamos funciones de onda?

4.1.4. Espacio de Fock

El espacio de Fock es el equivalente al espacio de Hilbert en campos cuánticos.

Definition 4.1.2 (Espacio de Fock) *El espacio de Fock $\mathcal{F}(H)$, en mecánica cuántica es un espacio de Hilbert especial, que se construye como suma directa de productos tensoriales de otro espacio de Hilbert dado H . Dicho espacio se usa para describir el estado cuántico de un sistema formado por un número variable o indeterminado de partículas.*

Dentro de este espacio vamos a encontrar los estados de Fock, que son los que usaremos en este formalismo de campo cuantizado.

Definition 4.1.3 (Estados de Fock) *Si nos limitamos, por simplicidad, a un sistema con un solo tipo de partícula y un solo modo (con lo que formalmente estamos describiendo un oscilador armónico), un estado de Fock se representa por $|n\rangle$, donde n es un valor entero. Esto significa que hay n cuantos de excitación en ese modo. Así, $|0\rangle$ corresponde al estado fundamental (sin excitación), o estado que representa el vacío cuántico (esto es diferente de 0 ($\langle 0|0\rangle = 1$), que es el vector nulo que no es un estado posible del sistema al no ser un vector unitario)*

Los estados de Fock han de cumplir las siguientes condiciones:

-

$$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$

Si recordamos al operador $\hat{a}_{\vec{k}}$ lo denominamos operador destrucción, por lo que al vacío no podemos quitarle partículas

-

$$\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle = |\vec{k}\rangle$$

Si recordamos al operador $\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$ lo denominamos operador creación, si al vacío le aplicamos este operador aparecerá una partícula. De esta forma podemos ver que cualquier estado puede ser construido aplicando el operador creación al estado de vacío $|0\rangle$.

Ahora vamos a contruir la normalización de este conjunto de estados, esto es:

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger}] | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}} | 0 \rangle = 2E_k (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Remark 4.1.1 (Normalización de estados con momento bien definido) Como podemos observar la norma de los estados con $\vec{k} = \vec{k}'$ nos da 0, sin embargo podemos redefinir la delta como:

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \chi(x)$$

si $\chi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$, es decir, que la función es 0 para cualquier valor de x que no pertenezca a una región del espacio, entonces

$$\delta(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} V(\Omega)$$

si el espacio $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$ entonces $V(\Omega) = V$

Cuando los momentos están bien definidos $\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \delta(0)$ y podemos hacer la normalización así:

$$\langle \vec{k} | \vec{k} \rangle = 2E_k V$$

Una vez obtenida la normalización vamos a construir estados de multiples partículas, empezando por 2:

$$\hat{a}_{\vec{k}_1}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}_2}^{\dagger} | 0 \rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$$

Esto quiere decir que para crear un estado vamos a multiplicar tantos operadores creación al estado de vacío como partículas haya en el. De esta forma un estado con N partículas es

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_{\vec{k}_1}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}_2}^{\dagger} \dots \hat{a}_{\vec{k}_N}^{\dagger} | 0 \rangle$$

Tambien podemos tener un estado cualquiera $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ formado por muchos estados diferentes con cada uno diferentes partículas como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n) \prod_{n=0}^{\infty} \hat{a}_{\vec{k}_n}^{\dagger} | 0 \rangle$$

Obteniendo un estado con la forma

$$|\phi\rangle = |0\rangle + \alpha |\vec{k}_1\rangle + \beta |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle + \dots$$

además, como

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \longrightarrow |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = |\vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle$$

Es decir, son funciones simétricas y por lo tanto serán lo que llamaremos bosones.

Operadores en el espacio de Fock

Una vez definidos los estados, lo lógico es calcular algunos valores esperados necesarios y ver como se hace. Para ellos calculamos el valor esperado de la energía de vacío como

Operador Energía

$$\langle 0 | \hat{H}_0 | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \langle \vec{k} | \vec{k} \rangle = \frac{V}{2} \int d\tilde{k} = \infty \quad (4.1)$$

Como vemos la energía de vacío diverge, lo cual no tiene sentido por lo que podemos definir un nuevo Hamiltoniano como

$$\hat{H}'_0 = \hat{H}_0 - \langle 0 | \hat{H}_0 | 0 \rangle \quad (4.2)$$

$$\langle 0 | \hat{H}'_0 | 0 \rangle = 0 \quad (4.3)$$

De esta forma la energía de vacío se anula, lo cual tiene más sentido.

Como ya mencionamos al pasar de las coordenadas clásicas q, p a los operadores \hat{q}, \hat{p} teníamos el problema de que estos operadores no conmutan, por lo que hay muchas formas de obtener \hat{H}_0 , para no tener esa ambigüedad a la hora de obtener el Hamiltoniano definimos el producto normal

Definition 4.1.4 (Producto normal) *El producto normal se define como*

$$:\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger := \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \quad (4.4)$$

Basicamente, lo que hace es ordenar los operadores de forma que todos los conjugados se encuentren a la izquierda.

De esta forma podemos definir el Hamiltoniano \hat{H}' como

$$\hat{H}' \equiv: \hat{H}_0 := \int d\tilde{k} E_k \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} \quad (4.5)$$

En donde encontramos un nuevo operador como multiplicación de 2 operadores, este es el operador número y se define como

Definition 4.1.5 (Operador número) *El operador número de una partícula se define como:*

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (4.6)$$

Este operador nos devuelve el número de partículas en un estado.

De esta forma el Hamiltoniano H' es

$$\int d\tilde{k} E_k \hat{n}_k \quad (4.7)$$

Una vez definido el operador número, es conveniente definir el operador número total de partículas

Definition 4.1.6 (Operador número total de partículas) *El operador número total de partículas se define como:*

$$\hat{N} = \int d\tilde{k} \hat{n}_k \quad (4.8)$$

Este operador nos devuelve el número total de partículas en un estado.

$$\hat{N} |0\rangle = 0 \hat{N} |\vec{k}\rangle = 1 |\vec{k}\rangle \hat{N} |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle = 2 |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle \quad (4.9)$$

Hay que tener en cuenta que en el caso de $|\psi\rangle = \alpha |\vec{k}\rangle + \beta |\vec{k}' \vec{k}''\rangle$ no tenemos un autoestado, por lo que el número total de partículas no estará bien definido y podrá dar números que no son enteros.

Dado que la construcción del producto normal nos pone el operador aniquilación en primer lugar obtenemos que el valor esperado de la energía de vacío es

$$\langle 0 | \hat{H}' | 0 \rangle = 0 \quad (4.10)$$

Otros resultados de este Hamiltoniano son:

- $\hat{H}' |0\rangle$
- $\hat{H}' |\vec{k}\rangle = E_k |\vec{k}\rangle$
- $\hat{H}' |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle = (E_{k_1} + E_{k_2}) |\vec{k}_1 \vec{k}_2\rangle$

Operador momento lineal También se puede definir el operador momento lineal mediante el producto normal como

$$: \hat{P} := \int d\tilde{k} \hat{n}_k \vec{k} \quad (4.11)$$

Operador campo El operador campo conjugado crea una partícula y nos devuelve la posición de esa partícula en el campo, es decir,

$$\hat{\Phi}^\dagger(\vec{x}, 0) |0\rangle = |\psi\rangle = |\vec{x}\rangle \quad (4.12)$$

Demostración. Esto se puede ver como

$$\langle \vec{k} | \psi \rangle = e^{-ikx} \quad (4.13)$$

$$\langle \vec{k} | \vec{x} \rangle = e^{-ikx} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

Y como ambas cosas son iguales, podemos sustituir. \square

4.1.5. Propagador del campo escalar libre

El propagador de un campo se define como:

Definition 4.1.7 Definimos el propagador como:

$$G(x, y) = \langle 0 | T(\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle \quad (4.16)$$

Donde $\hat{\phi}(x)$ es el campo escalar libre en el punto x y $T(\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y))$ es el operador de ordenación temporal, el cual ordena los tiempos de mayor a menor, es decir,

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) \quad \text{si } x^0 > y^0 \\ & \hat{\phi}(y), \hat{\phi}(x) \quad \text{si } x^0 < y^0 \end{aligned}$$

Ahora podemos ver que tenemos 2 casos:

$$1. \quad x^0 > y^0$$

En este caso tenemos que el propagador es

$$G(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y) | 0 \rangle \quad (4.17)$$

$$= \int d\tilde{k} e^{-ikx} \int d\tilde{k}' e^{ik'y} \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle \quad (4.18)$$

$$= \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} \quad (4.19)$$

$$2. \quad x^0 < y^0$$

De forma análoga tenemos que el propagador es

$$G(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(y), \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (4.20)$$

$$= \int d\tilde{k} e^{-iky} \int d\tilde{k}' e^{ik'x} \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle \quad (4.21)$$

$$= \int d\tilde{k} e^{-ik(y-x)} \quad (4.22)$$

El propagador del campo escalar libre es una función que realmente se comporta como una distribución de probabilidad ya que permite el uso de deltas de Dirac.

Podemos definir el propagador de forma general como

Definition 4.1.8 (Propagador General I) *Podemos definir la versión más general del propagador como:*

$$G(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int d\tilde{k} e^{-ik(y-x)} \quad (4.23)$$

Aunque esta definición no es muy cómoda, podemos definirla de forma más sencilla haciendo uso del siguiente teorema:

Theorem 4.1.2

$$G(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (4.24)$$

Primero se hace la integral y luego se hace el límite

Demostración. A continuación demostraremos este teorema para el caso $x^0 > y^0$ y para el caso $x^0 < y^0$ se procederá de manera análoga.

□

4.2. Cuantización del campo escalar complejo

En esta sección vamos a dar la forma del operador campo complejo, de la misma forma que el campo escalar libre.

A continuación vamos a definir el campo escalar complejo como $\phi \in \mathbb{C}$ dado que el campo es complejo, no tenemos la misma condición de mantenerlo real, por lo que $\phi \neq \phi^*$, es decir, el conjugado del no tiene porque ser igual que el campo.

También definimos el módulo al cuadrado del campo complejo como $|\phi|^2 = \phi \phi^*$.

De esta forma el lagrangiano del campo complejo es

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 \quad (4.25)$$

Recuerda

Cuando se habla de Lagrangiano O hamiltoniano pero se usa \mathcal{L} o \mathcal{H} , estamos hablando de densidades Lagrangianas y Hamiltonianas respectivamente. El lagrangiano o hamiltoniano será $L = \int d\vec{x} \mathcal{L}$ y $H = \int d\vec{x} \mathcal{H}$

Este campo complejo también obedece las ecuaciones de Klein-Gordon, es decir,

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (4.26)$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (4.27)$$

Una vez obtenido el lagrangiano podemos obtener el Hamiltoniano, pero antes es necesario definir el momento canónico conjugado, el cual es

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \equiv \dot{\phi}^* \quad (4.28)$$

$$\Pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^*} \equiv \dot{\phi} \quad (4.29)$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Y su complejo} \end{array} \right\}$

Y ahora si, obtenemos el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H}_0 = \Pi \Pi^* + \vec{\nabla} \cdot \phi \vec{\nabla} \cdot \phi^* + m^2 |\phi|^2 \quad (4.30)$$

Ahora pasamos a sustituir el campo complejo por los operadores de campo complejo, es decir,

$$\phi \longrightarrow \hat{\phi} \quad (4.31)$$

$$\phi^* \longrightarrow \hat{\phi}^\dagger \quad (4.32)$$

Los conmutadores no triviales de estos operadores, es decir, que son diferentes de 0 son:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.33)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.34)$$

Según la ecuación de evolución temporal de Heisenberg la evolución temporal del operador campo complejo es

$$i\partial_0 \hat{\phi}(\vec{x}, t) = [\hat{\phi}(\vec{x}, t), H_0] \quad (4.35)$$

También sabemos que cumplen la ecuación de Klein-Gordon al igual que hicimos con el campo escalar libre, es decir,

$$(\square + m^2)\hat{\phi} = 0 \quad (4.36)$$

$$(\square + m^2)\hat{\phi}^\dagger = 0 \quad (4.37)$$

A continuación vamos a dar la forma del operador campo complejo, de la misma forma que el campo escalar libre, pero ahora, como no tenemos la restricción de que el campo sea real ($\phi \neq \phi^*$) entonces tenemos

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{ikx}) \quad (4.38)$$

$$\hat{\phi}^{\dagger}(\vec{x}, t) = \int d\vec{k} (\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k}} e^{-ikx}) \quad (4.39)$$

Estados de Fock y sus operadores en el campo complejo

Al igual que en el caso del campo escalar libre, tenemos los estados del espacio de Fock y sus operadores. Ahora partimos del mismo estado de Fock que en el caso del campo escalar libre, cuyas condiciones eran:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (4.40)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad (4.41)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Añadimos una más} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

Esta última condición es nueva, ya que el campo complejo no tiene la condición de mantenerse real.

Los nuevos operadores $\hat{b}_{\vec{k}}^{\dagger}$ y $\hat{b}_{\vec{k}}$ funcionan de manera similar a los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}$ del campo escalar libre. Solo que estos operadores serán los **Operadores creación y aniquilación de antipartículas**, respectivamente.

Entonces los estados de Fock para el campo complejo son los mismos que para el campo escalar libre, pero ahora con el operador de creación y aniquilación de antipartículas, es decir:

$$\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad (4.43)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}}^{\dagger} |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pero además} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}_1}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}_2}^{\dagger} |0\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle \quad (4.45)$$

$$\hat{b}_{\vec{k}_1}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{k}_2}^{\dagger} |0\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_1\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pero además} \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

Y esto con todo lo que hemos visto hasta ahora, básicamente añadir las mismas operaciones del campo escalar libre con los nuevos operadores de creación y aniquilación de antipartículas y poniendo una barra debajo para diferenciar los estados.

Otra cosa que podemos obtener en este campo son estados mixtos que tienen la forma

$$\hat{a}_{\vec{k}_1}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{k}_2}^{\dagger} |0\rangle = |\vec{k}_1, \underline{\vec{k}_1}\rangle \quad (4.47)$$

Esto es debido a que las reglas de conmutación no triviales son

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 E_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.48)$$

$$[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger] = (2\pi)^3 E_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.49)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] = [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger] = 0 \quad (4.50)$$

Operador Energía Una vez definidos los operadores y los estado de Fock, podemos definir el Hamiltoniano de forma análoga al campo escalar libre, pero ahora con el operador de creación y aniquilación de antipartículas.

$$\hat{H}' \equiv: \hat{H}_0 := \int d\vec{k} E_k (\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}}) = \int d\vec{k} E_k (\hat{n}_k + \hat{\bar{n}}_k) \quad (4.51)$$

Al aplicarlo al estado vacío obtenemos 0, ya que gracias a usar el producto normal no hay ni energías negativas ni divergencias. Aplicando este operador sobre un estado cualquiera obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}' \left| \vec{k} \right\rangle &= E_k \left| \vec{k} \right\rangle \\ \hat{H}' \left| \vec{k} \right\rangle &= E_k \left| \vec{k} \right\rangle \end{aligned} \right\} \forall |\psi\rangle \in \mathcal{F} \quad \langle \psi | \hat{H}' | \psi \rangle = 0 \quad (4.52)$$

En donde $\hat{\bar{n}}_k$ es el operador número de antipartícula, el operador número total de antipartículas es

$$\hat{\bar{N}} = \int d\vec{k} \hat{\bar{n}}_k \quad (4.53)$$

Operador Carga Un operador que no nos interesa antes, ya que en el campo escalar libre todas las partículas tenían la misma carga, es el operador carga, el cual devuelve la carga de un estado

$$\hat{Q} = q \int d\vec{k} (\hat{n}_k - \hat{\bar{n}}_k) \quad (4.54)$$

La carga de los sistemas se conserva, es decir,

$$[\hat{H}', \hat{Q}] = 0 \quad (4.55)$$

Y podemos obtener la carga de una partícula en un estado cualquiera de la forma

$$\hat{Q}\hat{a}_{\vec{k}}^+|0\rangle = q|\vec{k}\rangle \quad (4.56)$$

$$\hat{Q}\hat{b}_{\vec{k}}^+|0\rangle = -q|\vec{k}\rangle \quad (4.57)$$

Las funciones de onda en este caso siguen siendo simétricas por lo que seguimos en un campo bosónico.

4.3. ¿Porque estos campos?

Como vimos en el primer tema la ecuación de Klein-Gordon no describe bien la mecánica cuántica de las partículas haciendo uso de las funciones de onda, pero si que es una buena ecuación para describir las partículas si se usan campos.

Además, La ventaja de usar campos, es que con 1 solo campo definimos todas las partículas que existen en el universo, en el caso de los campos escalares podemos definir:

- Bosones sin antipartículas con espín 0
Como fotones, Bosones de Higgs, etc.
- Bosones con antipartículas y con espín 0
Como piones y muchos otros. (En estructura seguro que los visteis, eran tantos que no recuerdo ninguno)

Cuantización canónica del campo fermiónico libre

5

Todo esto lo he sacado del [2]

En este tema vamos a ver como es el formalismo de campos cuánticos en partículas con espín $\frac{1}{2}$

5.1. Campos fermionicos libres

Primero recordamos como son las soluciones para los campos fermionicos libres.

Recordemos que estos campos son soluciones de la ecuación de Dirac

$$(i\not{\partial} - m)\Psi_D = 0$$

en donde $\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ es el cuadriespinor de Dirac.

Las soluciones a la ecuación de Dirac tenían la siguiente forma según la energía

$$\begin{aligned} u_s(\vec{k})e^{-ikx} & \text{ con } E > 0 \\ v_s(\vec{k})e^{ikx} & \text{ con } E < 0 \end{aligned}$$

en donde $s = 1, 2$ denota los 2 biespinores del cuadriespinor de Dirac. A partir de ahora pasamos de s a α para denotar cada una de las componentes del cuadriespinor, es decir, $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

De esta forma la solución más general para la ecuación de Dirac es:

$$\psi_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_s \int d\vec{k} \left(\beta(\vec{k}, s) u_\alpha e^{-ikx} + \delta^*(\vec{k}, s) v_\alpha(\vec{k}, s) e^{+ikx} \right)$$

Esta solución puede obtenerse de uno de estos 2 Lagrangianos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i_2 (\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) - m \bar{\Psi} \Psi \\ \mathcal{L} &= \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi \end{aligned}$$

Usando el segundo Lagrangiano podemos definir el momento canónico conjugado de ψ_α como:

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi_\alpha^*$$

Si lo expresamos en terminos del cuadriespinor de Dirac, en vez de por componentes, obtenemos:

$$\Pi = i\Psi^*$$

5.1	Campos fermionicos libres	63
5.2	Cuantización canónica . .	64
5.2.1	Operadores de creación y destrucción	65
5.2.2	Hamiltoniano del campo fermiónico libre	65
5.2.3	Estados de Fock	66
5.3	Propagador fermiónico .	67

Estos 2 Lagrangianos son equivalentes ya que se diferencian por la divergencia de una cantidad

Una vez que tenemos el momento canónico conjugado, podemos expresar el Hamiltoniano de Dirac como:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m)\psi$$

Luego Dobado definió estas cantidades no se muy bien porque, pero las usaremos más adelante

$$\sum_s u_s(\vec{k}) \overline{u_s(\vec{k})} = \not{k} + m$$

$$\sum_s v_s(\vec{k}) \overline{v_s(\vec{k})} = \not{k} - m$$

5.2. Cuantización canónica

Una vez hecho el repaso sobre los campos clásicos relativistas, vamos a pasar a la cuantización canónica. Por lo que tendremos que ver las relaciones de conmutación.

En casos anteriores solo usamos el conmutador para ver las relaciones de conmutación, pero en este caso vamos a dejarlo un poco más ambiguo usando el anticonmutador tambien. Para ello introducimos la siguiente notación para los conmutadores de los operadores:

$$[A, B]_{\mp} \begin{cases} [A, B]_{-} \equiv [A, B] A, B > A, B \\ + \equiv \{A, B\} \end{cases}$$

Dobado demuestra una cosa con esto que resultará en que solo son validas las relaciones de anticonmutación

De esta forma, cuando establezcamos una relación de conmutación exigiremos que se aplique al conmutador y al anticonmutador por igual.

Una propiedad interesante de las relaciones de anticonmutación es:

$$[A, A]_{+} = 0 \Rightarrow A^2 = -A^2 \rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow A \neq 0$$

Esto realmente es lo que deberíamos haber hecho siempre para luego acabar descartando uno de los dos

En temas anteriores hemos visto que para cuantizar pasábamos de $\{q, p\}$ a $[\hat{q}, \hat{p}]$, pero como ya he mencionado, vamos a dejarlo abierto a que también puedan usarse el anticonmutador.

$$[\hat{q}, \hat{p}] \rightarrow \frac{1}{\hbar i} [\hat{q}, \hat{p}]_{\mp}$$

De esta forma al pasar de del campo clásico al campo cuántico, las reglas de conmutación canónicas son:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha}(\vec{x}, t) &\rightarrow \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t) \\ \Pi_{\alpha}(\vec{x}, t) &\rightarrow \hat{\Pi}_{\alpha}(\vec{x}, t) \end{aligned} \right\} [\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{\beta}(\vec{x}, t)]_{\mp} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

y

$$[\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x}, t)]_{\mp} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

A continuación pasamos a obtener el Hamiltoniano de este sistema, el cual es muy similar al hamiltoniano integrando la densidad Hamiltoniana

de antes.

$$\hat{H}_0 = \int d\vec{x} \hat{\bar{\psi}}(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m)\hat{\psi}$$

Hay que decir, que estos operadores de campo cumplen con la ecuación de Heisenberg, y por lo tanto su evolución se define como:

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}_0 t} \Psi(\vec{x}, 0) e^{-i\hat{H}_0 t}$$

Y además también cumplen la ecuación de Dirac para campos cuánticos:

$$(i\hat{\not{D}} - m)\hat{\Psi} = 0$$

De esta forma las soluciones en su forma más general son:

$$\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_s \int d\vec{k} \left(u_\alpha(\vec{k}, s) \hat{b}(\vec{k}, s) e^{-ikx} + v_\alpha(\vec{k}, s) \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s) e^{ikx} \right)$$

5.2.1. Operadores de creación y destrucción

Ahora, al igual que en el tema anterior nos han salido dos nuevos operadores, que también serán los operadores creación y destrucción para las partículas y antipartículas de este campo.

Ahora estudiamos las relaciones de conmutación (y anticonmutación) de estos operadores:

- Relaciones de conmutación para los operadores $\hat{b}(\vec{k}, s)$ y $\hat{b}^\dagger(\vec{k}', s')$

$$\left[\hat{b}(\vec{k}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = (2\pi)^3 2E_K \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'}$$

$$\left[\hat{b}(\vec{k}, s), \hat{b}(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = \left[\hat{b}^\dagger(\vec{k}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = 0$$

- Relaciones de conmutación para los operadores $\hat{d}(\vec{k}, s)$ y $\hat{d}^\dagger(\vec{k}', s')$

$$\left[\hat{d}(\vec{k}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = (2\pi)^3 2E_K \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'}$$

$$\left[\hat{d}(\vec{k}, s), \hat{d}(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = \left[\hat{d}^\dagger(\vec{k}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{k}', s') \right]_{\mp} = 0$$

5.2.2. Hamiltoniano del campo fermiónico libre

Una vez definidos los operadores y las relación de conmutación, podemos definir el operador Hamiltoniano del campo fermiónico libre.

$$\hat{H}_0 = \sum_s \int d\vec{k} E_k \left(\hat{b}^\dagger(\vec{k}, s) \hat{b}(\vec{k}, s) - \begin{cases} [- \rightarrow \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s) \hat{d}(\vec{k}, s) \\ [+ \rightarrow \hat{d}(\vec{k}, s) \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s) \end{cases} \right)$$

Como podemos ver, el operador Hamiltoniano del campo fermiónico libre es muy similar al de un campo cuántico, pero como no hemos establecido que reglas de computación se deben cumplir, tenemos dos opciones. Vamos a ver los 2 casos:

- Caso en el que los operadores cumplen las reglas de conmutación. Como en temas anteriores en los que se obedecían las reglas de conmutación, podemos expresar el Hamiltoniano en función de los operadores número de partículas y número de antipartículas:

$$\hat{H}_0 = \sum_s \int d\vec{k} E_k (\hat{n}(\vec{k}, s) - \hat{\bar{n}}(\vec{k}, s))$$

en donde $\hat{n}(\vec{k}, s) = \hat{b}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{b}(\vec{k}, s)$ y $\hat{\bar{n}}(\vec{k}, s) = \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{d}(\vec{k}, s)$.

El problema aquí reside que mientras en el tema anterior las antipartículas añadían energía, en este caso la restan. Y como $\hat{\bar{n}}(\vec{k}, s)$ no tiene ninguna cota superior podríamos obtener un estado con energía negativa. Esto nos dice que este Hamiltoniano no es compatible con la teoría de un campo cuántico ya que no hay un estado fundamental.

- Caso en el que los operadores cumplen las reglas de anticonmutación. Como ya hemos visto que el Hamiltoniano del campo fermiónico libre cumple las reglas de anticonmutación, podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \sum_s \int d\vec{k} E_k \left(\hat{b}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{b}(\vec{k}, s) - \hat{d}(\vec{k}, s)\hat{d}^\dagger(\vec{k}, s) \right) \\ &= \sum_s \int d\vec{k} E_k \left(\hat{b}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{b}(\vec{k}, s) + \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{d}(\vec{k}, s) \right) - 2 \int d\vec{k} E_k \delta(\vec{0}) \end{aligned}$$

En este caso, el operador número de antipartículas no estaba de forma directa en el Hamiltoniano, por lo que se ha introducido el término que está restando.

Para no andar con el Hamiltoniano anterior, podemos definir el producto normal de este campo y así obtener un Hamiltoniano bueno y que este bien definido.

Definition 5.2.1 (Producto normal) Aunque el producto normal ya lo definimos, en este caso es diferente ya que al cumplir las reglas de anticonmutación el producto normal es:

$$: \hat{b}\hat{b}^\dagger := -\hat{b}^\dagger\hat{b}$$

De esta forma podemos definir el Hamiltoniano del campo fermiónico libre como:

$$\hat{H}'_0 =: \hat{H}_0 := \sum_s \int d\vec{k} \left(E_k \hat{n}(\vec{k}, s) + E_k \hat{\bar{n}}(\vec{k}, s) \right)$$

en donde $\hat{n}(\vec{k}, s) = \hat{b}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{b}(\vec{k}, s)$ y $\hat{\bar{n}}(\vec{k}, s) = \hat{d}^\dagger(\vec{k}, s)\hat{d}(\vec{k}, s)$.

Este Hamiltoniano es compatible con la teoría de un campo cuántico ya que hay un estado fundamental.

5.2.3. Estados de Fock

Al igual que en el tema anterior, podemos obtener los estados de Fock para este campo.

En este caso, como hemos usado los anticonmutadores en vez de los conmutadores, los estados tienen dos propiedades diferentes a las definidas en el tema anterior:

1. Los estados son antisimétricos

$$\begin{aligned} \left| \vec{k}_1, s_1; \vec{k}_2, s_2 \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}^\dagger(\vec{k}_1, s_1) \hat{b}(\vec{k}_2, s_2) |0\rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \hat{b}(\vec{k}_1, s_1) \hat{b}^\dagger(\vec{k}_2, s_2) |0\rangle \\ &= - \left| \vec{k}_1, s_1; \vec{k}_2, s_2 \right\rangle \end{aligned}$$

2. Los estados siguen el Teorema espín estadística debido a que se cumple esta regla que definimos al principio del tema:

$$\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0 \quad \hat{b}^{\dagger 2} = 0$$

Por lo que la superposición de 2 estados de Fock es:

$$\left| \vec{k}, s; \vec{k}, s \right\rangle = 0$$

5.3. Propagador fermiónico

Al igual que en el tema anterior podemos definir el propagador fermiónico para este campo.

Definition 5.3.1 (Propagador del campo fermiónico libre) *El propagador del campo fermiónico libre es:*

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = \langle 0 | T \left(\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(y) \right) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle & x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \hat{\psi}_\beta(y) \hat{\psi}_\alpha(x) | 0 \rangle & x^0 < y^0 \end{cases}$$

A continuación definimos la estructura del propagador para los siguientes casos

- $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x, y) &= \sum_{ss'} \int d\vec{k} \int d\vec{k}' u_\alpha(\vec{k}, s) \overline{u_\beta(\vec{k}', s')} e^{-ikx} e^{ik'y} \\ &= \int d\vec{k} \underbrace{\sum_s u_\alpha(s, \vec{k}) \overline{u_\beta(s, \vec{k})}}_{(K+m)_{\alpha\beta}} e^{iky} \\ &= (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \int d\vec{k} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

- $x^0 < y^0$ Y deforma análoga al caso anterior:

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \int d\vec{k} e^{-ik(y-x)}$$

El propagador en su forma más general es:

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Y en notación matricial, sin índices, es:

$$G(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k (i\not{k} + m) e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Procesos de interacción: Matriz S, secciones eficaces y vidas medias

6

Todo esto lo he sacado del [2]

En los temas anteriores hemos estudiado cómo cuantizar teorías libres. En una teoría libre, la evolución de los estados es trivial. En efecto, consideremos por simplicidad un estado inicial de una partícula $|\vec{p}\rangle$. En imagen de Schrödinger, el estado simplemente evolucionará con una fase, esto es

$$e^{-iH(t-t_0)}|\vec{p}\rangle = e^{-iE_p(t-t_0)}|\vec{p}\rangle$$

donde hemos usado que los estados de Fock son autoestados del Hamiltoniano, y por tanto el estado final será también un estado de una partícula con el mismo momento \vec{p} . Es decir, en la teoría libre no es posible que ocurran procesos de dispersión en los que cambie el momento de la partícula, ni de creación o aniquilación de partículas.

Los procesos físicamente interesantes aparecen cuando hay interacciones entre los campos. Desde el punto de vista matemático, las interacciones se describen a través de términos que involucren más de dos campos en el Lagrangiano. Dichos términos pueden contener potencias mayores de un mismo campo, como

$$\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

en el caso de una teoría escalar, o productos que involucren distintos tipos de campos como

$$-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

en electrodinámica. En este tema presentaremos el formalismo para calcular las probabilidades de transición entre distintos estados en presencia de interacciones y cómo, a partir de esas probabilidades, calcular las cantidades que pueden medirse experimentalmente (ritmos de desintegración y secciones eficaces).

6.1. Imágen de interacción

Consideremos una teoría con interacción, en la que podemos separar el Hamiltoniano del sistema en dos partes

$$H = H_0 + H_{int} \quad (7.1)$$

donde H_0 corresponde al Hamiltoniano de la teoría libre que hemos visto en los temas anteriores y H_{int} es el Hamiltoniano de las interacciones. Así, por ejemplo en la teoría escalar con interacción

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (7.2)$$

podemos definir

6.1	Imágen de interacción . .	69
6.1.1	Imagen de Schrödinger .	70
6.1.2	Imagen de Heisenberg .	70
6.1.3	Imagen de Interacción (Dirac)	70
6.2	Propiedades de la Matriz S	71
6.3	Probabilidad de interacción	72
6.3.1	Desintegraciones	73
6.4	Secciones eficaces	73
6.4.1	Secciones eficaces polarizadas	73
6.5	Espacio de fases de 2 cuerpos	73
6.5.1	Desintegraciones	73
6.5.2	Sección eficaz a 2 cuerpos	73
6.5.3	Ejemplos	75
6.6	Diagramas de Feynman . .	75

$$H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (7.3)$$

donde hemos usado que el término de interacción no involucra derivadas de los campos. Supondremos que H_{int} es una pequeña perturbación con respecto a H_0

6.1.1. Imagen de Schrödinger

- A_S . Los operadores no dependen del tiempo
- $|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle_S$. Los estados evolucionan.

6.1.2. Imagen de Heisenberg

- $A_H(t) = e^{iH(t-t_0)} A_H(t_0) e^{-iH(t-t_0)}$. Los operadores evolucionan.
- $|\Psi\rangle_H$. Los estados no evolucionan

En el caso en el que tengamos interacciones es posible definir una tercera imagen en la que tanto los estados como los operadores dependen del tiempo

6.1.3. Imagen de Interacción (Dirac)

- $A_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} A_I(t_0) e^{-iH_0(t-t_0)}$. Los operadores evolucionan con la parte libre del Hamiltoniano, es decir, como los operadores libres.
- $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle_I$. Los estados evolucionan con el hamiltoniano libre y el total.

Nótese que $A_I(t_0) = A_H(t_0) = A_S$ y que $|\Psi(t_0)\rangle_I = |\Psi(t_0)\rangle_S = |\Psi\rangle_H$. Nótese también que si $H_{int} = 0$, las imágenes de Heisenberg y de interacción coinciden.

Podemos, por tanto, definir el operador de evolución en la imagen de interacción

$$|\Psi(t)\rangle_I = U_I(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I \quad (7.4)$$

como

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (7.5)$$

que cumple $U_I(t_0, t_0) = 1$ y satisface la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = H_I(t) U_I(t, t_0) \quad (7.6)$$

donde $H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)}$. Así, en el ejemplo anterior

$$H_I(t) = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4 \quad (7.7)$$

La solución de la ecuación (7.6) puede escribirse formalmente como

$$U_I(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' H_I(t') U_I(t', t_0) \quad (7.8)$$

utilizando el hecho de que H_I es una pequeña perturbación, podemos escribir una solución en serie de la forma

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ & + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \end{aligned}$$

Se puede comprobar que al derivar cada término se obtiene el anterior multiplicado por $-iH_I(t)$ y por tanto es solución perturbativa de la ecuación (7.6). Nótese que en la integral

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \quad (7.10)$$

donde T denota el producto cronológico de los operadores, como puede verse en la Fig.7.1. Expresiones similares pueden encontrarse para el resto de términos de forma que podemos escribir

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) = & 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T \{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots \\ = & T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \end{aligned}$$

que es la llamada fórmula de Dyson.

Figura 6.1: Integración temporal en (7.10). anterior los factores $H_I(t_i)$ aparecen en orden temporal (los últimos a la izquierda) puesto que por ejemplo $t_2 \leq t_1$. Esto implica que por ejemplo el término H_I^2

6.2. Propiedades de la Matriz S

Hemos visto en la sección anterior que debido a la presencia de la interacción, la evolución de los estados es no trivial. Consideremos por tanto un sistema que inicialmente se encuentra en un cierto estado $|i\rangle_I$ y queremos determinar la probabilidad de que se transforme en un estado final $|f\rangle_I$ debido a la interacción. Es decir, si el estado de nuestro sistema viene descrito en la imagen de interacción por $|\psi(t)\rangle_I$, tendremos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle_I = |i\rangle_I \quad (7.12)$$

Por tanto, la amplitud de probabilidad de que este estado se transforme en un cierto estado $|f\rangle_I$ en $t \rightarrow \infty$ vendrá dado por el elemento de matriz S

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle f | \psi(t) \rangle_I = {}_I \langle f | S | i \rangle_I \quad (7.13)$$

Expresado en términos del operador de evolución en la imagen de interacción tendremos

$$S_{fi} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} I \langle f | U_I(t_2, t_1) | i \rangle_I \quad (7.14)$$

es decir el operador S puede escribirse como

$$S = U_I(\infty, -\infty) = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t') \right) = T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right) \quad (7.15)$$

Un aspecto fundamental de este resultado es que puesto que los campos en imagen de interacción evolucionan como campos libres, podremos usar la descomposición en operadores de creación y destrucción vista en los temas anteriores cuando calculemos \mathcal{H}_I .

El operador S es un operador unitario $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$ lo que representa la conservación de la probabilidad. Es conveniente introducir la llamada matriz T de la forma

$$S = 1 + iT \quad (7.16)$$

En los procesos de dispersión suponemos que en los estados iniciales y finales las partículas están suficientemente separadas como para ignorar las interacciones. Es decir, los estados inicial y final $|i\rangle_I$ y $|f\rangle_I$ se supondrán por simplicidad como estados libres, es decir serán autoestados del Hamiltoniano libre H_0 . Esto plantea dos problemas:

- Este formalismo no permite trabajar con estados ligados. Por ejemplo, no podremos describir el proceso en el que un electrón y un protón colisionan y forma un átomo de hidrógeno.
- Aún más importante es que incluso una única partícula alejada de otras partículas nunca puede considerarse de forma estricta como libre en teoría de campos. Así por ejemplo, un electrón siempre aparecerá rodeado por una nube de fotones virtuales. Esto conduce a la noción de renormalización que no veremos en este curso. La forma rigurosa de tratar con este problema se basa en la llamada fórmula de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ).

6.3. Probabilidad de interacción

$$|f\rangle = \mathcal{N} \int d\mathbf{x} e^{-i(E_f - E_i)t} |i\rangle$$

$$\langle f | \mathcal{T} | i \rangle = \langle f | H | i \rangle + i\epsilon \langle f | \mathcal{T} | i \rangle$$

$$d\Gamma = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p - p')$$

$$\rho_f = (2\pi)^4 V \delta(E_f - E_i) |\mathcal{T}_{fi}|^2$$

$$dn = \rho d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n$$

$$\text{Número de estados} = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}$$

Esto guía si $\langle k|k' \rangle \neq 1$ pero como no era así:

$$\langle k|k \rangle = 2EV$$

$$\text{Número de estados en un } V: 2EV \in (\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k}) = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}$$

Los estados normalizados son:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2EV}}$$

6.3.1. Desintegraciones

Vida media

Desintegración a 2 partículas

6.4. Secciones eficaces

6.4.1. Secciones eficaces polarizadas

Si tenemos en cuenta el espín de las partículas, podemos tener una sección eficaz polarizada:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathcal{T}_{f,i}|^2$$

Si no tenemos en cuenta (no medimos) el espín, podemos promediar sobre el estado inicial (un espín medio) y sumar sobre el estado final (porque todos contribuyen):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\text{nopol}} = \frac{1}{N_i} \sum \sum |\mathcal{T}_{f,i}|^2$$

6.5. Espacio de fases de 2 cuerpos

6.5.1. Desintegraciones

6.5.2. Sección eficaz a 2 cuerpos

Consideremos ahora el caso particular de colisiones $2 \rightarrow 2$ entre partículas con momentos

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4 \quad (7.64)$$

donde las masas de las partículas iniciales son m_1 y m_2 y las de las finales m_3 y m_4 . Es útil introducir las llamadas variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 \end{aligned}$$

Las variables son invariantes Lorentz y cumplen

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (7.68)$$

como puede comprobarse inmediatamente usando conservando del cuadrimomento total $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

En el sistema CM tendremos $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ y $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ con $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_{CM}$ y por tanto se puede ver inmediatamente que $\sqrt{s} = E_{CM}$ es la energía total en el sistema centro de masas.

Caso inelástico

Caso elástico

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} |\mathcal{T}_{if}|^2 d\Omega = \frac{K}{4\pi} |\mathcal{T}_{if}|^2 d\Omega$$

Para que:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_3 = m_4 \\ K &= k_i \end{aligned}$$

Cuando hay espines y no los calculamos, sección eficaz:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2j+1} \sum_{m_i m_f} |\mathcal{T}_{if}|^2 d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k_i^2} |\mathcal{T}_{if}|^2$$

Número de estados con diferentes espines iniciales:

$$|\mathcal{T}_{if}| = \frac{1}{N} \sum_{m_i m_f} |\mathcal{T}_{if}|$$

Polarizada:

$$|\mathcal{T}_{if}|^2$$

6.5.3. Ejemplos

6.6. Diagramas de Feynman

Aunque hemos considerado únicamente un par de ejemplos concretos, se puede demostrar de forma totalmente general que existe una relación uno a uno entre los distintos términos del desarrollo perturbativo de la amplitud de transición y los diagramas de Feynman.

Por tanto, para calcular $iT_{fi} = \langle f|iT|i \rangle$ tendremos que dibujar todos los posibles diagramas de Feynman (conectados) que conecten las partículas de los estados iniciales con las finales. Para ello tendremos que seguir los siguientes pasos:

- Identificar los distintos vértices de interacción que aparecen en \mathcal{L}_{int} .
- Dibujar una línea externa por cada partícula del estado inicial $|i\rangle$ y por cada partícula del estado final $|f\rangle$. En el ejemplo anterior se usaban líneas discontinuas para los mesones y líneas continuas para los bariones y antibariones.
- Asignar un momento con sentido entrante o saliente a cada línea.
- En las líneas correspondiente a partículas con carga conservada (no necesariamente eléctrica) asignar una flecha que indique el sentido de la carga. Entrante (saliente) para partículas (antipartículas) en el estado inicial y al revés en el estado final.
- Conectar de todas las formas posibles las líneas de las partículas iniciales con las finales utilizando los vértices y líneas internas. Asignar también un momento entrante o saliente del vértice a cada línea interna.

Una vez dibujados todos los diagramas de Feynman que contribuyen a un cierto proceso, calcularemos su contribución a la amplitud de transición usando las reglas de Feynman.

Reglas de Feynman

Hemos visto que en los elementos de matriz iT_{fi} que hemos calculado aparecen factores $\delta^{(4)}(P_i - P_f)$, donde $P_i = \sum k_j$ y $P_f = \sum p_k$ son los cuadrimomentos totales iniciales y finales, que aseguran la conservación del cuadrimomento. Es conveniente por tanto extraer estos factores y escribir los elementos de matriz T como

$$iT_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) i\mathcal{M}_{fi} \quad (7.46)$$

donde se ha definido el llamado elemento de matriz invariante \mathcal{M}_{fi} . Podemos finalmente escribir unas reglas de Feynman aún más sencillas para calcular las amplitudes invariantes $i\mathcal{M}_{fi}$.

- Escribir un factor $(-iav)$ por cada vértice.
- Imponer conservación del cuadrimomento en cada vértice.
- Escribir un propagador de Feynman por cada línea interna, esto es,

$$\frac{i}{k^2 - m^2}$$

por cada línea interna de mesones (partículas con carga, no necesariamente eléctrica) y

$$\frac{i}{k^2 - M^2}$$

por cada línea interna de nucleones (partículas neutras).

El criterio de la carga es sobre la diferencia entre partículas, es decir, si la carga de las dos partículas unidas por una línea interna es la misma, entonces se usará el propagador de nucleones, si tienen cargas distintas, entonces se usará el propagador de mesones.

- Integrar sobre el momento interno que fluya en líneas cerradas (loops)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

Respecto al último punto, los diagramas que hemos visto son diagramas a nivel árbol (tree-level) que no incluyen loops. Típicamente las contribuciones de los loops son divergentes y requieren un proceso de regularización y renormalización para proporcionar resultados finitos que no veremos en este curso.

Cuantización del campo escalar libre

7

Todo esto lo he sacado del [4]

7.1. EL campo electromagnético clásico

El campo electromagnético se describe a través de un campo vectorial A_μ . El tensor de Faraday que contiene los campos eléctricos $\vec{E} = (E^1, E^2, E^3)$ y magnéticos $\vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ está dado por

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_0 A^i + \partial_i A^0 = -E^i \\F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k\end{aligned}$$

El Lagrangiano invariante Lorentz se puede construir contrayendo el tensor de Faraday de la siguiente forma ¹

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (6.4)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes son las ecuaciones de Maxwell libres

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \partial_0 \vec{E} \quad (6.5)$$

Definiendo el tensor dual del tensor de Faraday

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

y derivando obtenemos las llamadas identidades de Bianchi que conducen a las otras dos ecuaciones de Maxwell

$$0 = \partial_\mu *F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}. \quad (6.6)$$

7.2. Invariancia Gauge

Una simetría fundamental del Lagrangiano de Maxwell, aparte de la simetría Lorentz, es la simetría gauge dada por

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad (6.7)$$

donde $\theta(x)$ es una función arbitraria de x . Se trata por tanto de una simetría interna local. Como puede verse directamente, el tensor de Faraday es invariante bajo transformaciones gauge y por tanto el Lagrangiano también lo es.

7.1	EL campo electromagnético clásico	77
7.2	Invariancia Gauge	77
7.2.1	Tensor energía-momento	79
7.3	Cuantización del Gauge de radiación	80
7.4	Cuantización covariante	82

La invariancia gauge implica que de los cuatro campos A_μ algunos son redundantes. Así por ejemplo, podemos encontrar una transformación gauge que haga $A'_0 = 0$. En efecto,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \int^t dt' A_0(\vec{x}, t')$$

Nótese que aún podemos hacer transformaciones gauge que mantengan la condición $A'_0 = 0$, en concreto todas aquellas en las que el parámetro $\theta = \theta(\vec{x})$ no dependa de t

$$A'_\mu \rightarrow A''_\mu = A'_\mu - \partial_\mu \theta(\vec{x})$$

Escogiendo

$$\theta(\vec{x}) = - \int \frac{d^3 y}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial}{\partial y^i} A'^i(\vec{y}, t)$$

vemos que $\theta(\vec{x})$ definido de esta forma es independiente del tiempo $\partial_0 \partial_i A'^i = \partial_i (-E^i + \partial^i A'^0) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, donde hemos usado $A'^0 = 0$. Usando ahora

$$\vec{\nabla}_x^2 \left(\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \right) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' - \vec{\nabla}^2 \theta = 0$$

Por tanto, usando la simetría gauge hemos encontrado que podemos fijar el llamado gauge de radiación

$$A_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.8)$$

El gauge de radiación implica el llamado gauge de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (6.9)$$

Nótese sin embargo que imponer el gauge de Lorentz no garantiza estar en el gauge de radiación.

En el gauge de radiación, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu = 0 \quad (6.10)$$

Es decir, las componentes del campo vectorial se comportan como cuatro campos escalares sin masa.

Para los campos electromagnéticos, la simetría gauge y el hecho de que no tienen masa implica que sólo dos de las cuatro componentes son independientes (los fotones sólo tienen dos grados de libertad). Podemos por tanto escribir las soluciones reales de las ecuaciones (6.10) como

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(k) e^{-ikx} + \varepsilon_\mu^*(k) e^{ikx} \quad (6.11)$$

con $k^2 = 0$ y $\varepsilon_\mu k^\mu = 0$. En el gauge de radiación $\varepsilon_0 = 0$ y $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0$ que corresponde a dos grados de libertad.

Nótese que si añadimos un término de masa al Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (6.12)$$

la teoría no respeta la invariancia gauge. Este es el Lagrangiano de Proca que describe campos vectoriales con masa como pueden ser los bosones vectoriales W, Z . En este caso el campo tiene tres grados de libertad.

7.2.1. Tensor energía-momento

Podemos calcular el tensor energía-momento a partir del Lagrangiano de Maxwell

$$\theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) \quad (6.13)$$

Vemos que esta expresión no es explícitamente invariante gauge puesto que depende de los campos A_ρ . Sin embargo, bajo transformaciones gauge y usando las ecuaciones del movimiento $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ tenemos

$$\theta^{\mu\nu} \rightarrow \theta^{\mu\nu} + F^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\rho\theta = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho(F^{\mu\rho}\partial^\nu\theta) \quad (6.14)$$

y las cargas conservadas cambian como

$$P^\nu \rightarrow P^\nu + \int d^3x \partial_\rho (F^{0\rho}\partial^\nu\theta) = P^\nu + \int d^3x \partial_i (F^{0i}\partial^\nu\theta) \quad (6.15)$$

y por tanto el último término se integra a cero. Es decir, la energía y el momento son invariantes gauge.

Podemos obtener una expresión explícitamente invariante gauge añadiendo un término $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$ a $\theta^{\mu\nu}$ que como vimos conduce a las mismas cargas conservadas. De esta forma se obtiene

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2 \quad (6.16)$$

con $F^2 = F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. Esta expresión conduce directamente a la energía

$$P^0 = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (6.17)$$

y al vector de Poynting para el trimomento del campo

$$\vec{P} = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (6.18)$$

7.3. Cuantización del Gauge de radiación

Fijemos por tanto el gauge de radiación de forma que

$$A_0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.25)$$

En este gauge tenemos que $\partial_\mu A^\mu = 0$ y por tanto las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\square A_i = 0 \quad (6.26)$$

cuya solución como vimos puede escribirse como

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \vec{\epsilon}^*(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx} \right)_{p^0=\omega_p} \quad (6.27)$$

donde usamos la notación $\omega_p = |\vec{p}|$. La condición de gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ impone $\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) = 0$. Por tanto λ corresponde a las dos polarizaciones independientes transversas a \vec{p} . Las dos componentes físicas del campo electromagnético están dadas por los vectores de polarización unitarios $\vec{\epsilon}(\vec{p}, 1)$ y $\vec{\epsilon}(\vec{p}, 2)$ ortogonales entre sí y perpendiculares a \vec{p} . Puede demostrarse que

$$\sum_{\lambda} (\epsilon^i(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{j*}(\vec{p}, \lambda)) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2} \equiv P^{ij}(\vec{p}) \quad (6.28)$$

El momento canónico conjugado de las componentes físicas A_i será

$$\pi^i = F^{i0} = \partial_0 A_i = E^i \quad (6.29)$$

y puesto que $A^0 = 0$ no tenemos ahora el problema con su momento conjugado.

En principio, las reglas de conmutación deberían ser $[A^i(t, \vec{x}), \pi^j(t, \vec{y})] = -i\delta^{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Sin embargo esta regla de conmutación no es compatible con la condición de gauge. Efectivamente, si tomamos la divergencia con respecto a \vec{x} , tendremos que el miembro de la izquierda se anula mientras que el miembro de la derecha no lo hace. La forma de resolver este problema es sustituir el miembro de la derecha por la llamada delta de Dirac transversa que viene dada por

$$\delta_{tr}^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) \quad (6.30)$$

que efectivamente cumple $\partial_i^x \delta_{tr}^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \partial_i^y \delta_{tr}^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Por tanto, la regla de conmutación correcta será

$$[A^i(t, \vec{x}), \pi^j(t, \vec{y})] = -i\delta_{tr}^{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.31)$$

y el resto de conmutadores nulos. Podemos por tanto, al igual que en los casos anteriores, imponer las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] &= [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0 \end{aligned}$$

Podemos ahora construir el espacio de Fock definiendo el vacío como

$$a_{p,\lambda}|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p}, \lambda = 1, 2 \quad (6.34)$$

El operador Hamiltoniano se puede obtener a partir de la definición canónica

$$\mathcal{H} = \pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (6.35)$$

y por tanto usando la ordenación normal tenemos

$$: H := \frac{1}{2} \int d^3x : \vec{E}^2 + \vec{B}^2 := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \omega_p a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} \quad (6.36)$$

De forma análoga, el operador momento corresponde con

$$: \vec{P} := \int d^3x : \vec{E} \times \vec{B} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \vec{p} a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} \quad (6.37)$$

Por tanto vemos que los estados de una partícula $\sqrt{2\omega_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle$ corresponden a partículas con energía ω_p y momento \vec{p} . Para determinar el spin de los estados, debemos de nuevo, como hicimos en el caso fermiónico construir la corriente de Noether correspondiente al momento angular.

En este caso la expresión para el operador momento angular total es

$$\vec{J} = \int d^3x : \left(\pi^i (\vec{x} \times \vec{\nabla}) A^i + \vec{\pi} \times \vec{A} \right) : \quad (6.38)$$

Podemos de nuevo identificar el segundo término con el operador de spin de forma que

$$\vec{S} = \int d^3x : (\vec{\pi} \times \vec{A}) : \quad (6.39)$$

y podemos por tanto determinar el spin de los estados de una partícula. Consideremos el caso S^3 con $\vec{p} = (0, 0, p)$. Por tanto los vectores de polarización podemos tomarlos como $\vec{\epsilon}(\vec{p}, 1) = (1, 0, 0)$, $\vec{\epsilon}(\vec{p}, 2) = (0, 1, 0)$. En este caso la helicidad $h = \vec{p} \cdot \vec{S} / |\vec{p}| = S^3$

$$S^3 a_{p,1}^\dagger |0\rangle = i a_{p,2}^\dagger |0\rangle \quad (6.40)$$

y de forma totalmente análoga tenemos

$$S^3 a_{p,2}^\dagger |0\rangle = -i a_{p,1}^\dagger |0\rangle \quad (6.41)$$

Es decir, las polarizaciones lineales no son autoestados de la helicidad. Sin embargo las polarizaciones circulares

$$a_{p,\pm}^\dagger = \frac{a_{p,1}^\dagger \pm i a_{p,2}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (6.42)$$

sí lo son, de forma que

La conclusión por tanto es que los estados $\sqrt{2\omega_p}a_{p,\pm}$ describen partículas con energía ω_p , momento \vec{p} , spin 1 y helicidad ± 1 . Estas partículas son los fotones. Nótese que en este caso, como en el de campo escalar real, los fotones son sus propias antipartículas.

7.4. Cuantización covariante

Como hemos visto antes, el problema fundamental a la hora de cuantizar la teoría de Maxwell es que no hay un término $\partial_0 A_0$ en el Lagrangiano que permita obtener un momento π^0 no nulo. La cuantización en el gauge de radiación resuelve el problema eliminando la componente A_0 como campo físico a través de la condición de gauge $A_0 = 0$. Sin embargo esta condición no es invariante Lorentz con lo que se pierda la covariancia manifiesta de la teoría.

Una forma de evitar ambos problemas es el llamado método de cuantización covariante. El primer paso es la modificación del Lagrangiano de la siguiente forma

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (6.48)$$

En principio esta teoría es muy distinta de la teoría de Maxwell (no es ni siquiera invariante gauge) sin embargo las ecuaciones de movimiento para todas las componentes son

$$\square A_\mu = 0 \quad (6.49)$$

y por tanto coinciden para los modos transversos con las del gauge de radiación. Podemos ahora calcular los momentos canónicos conjugados de las cuatro componentes A_μ

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_0 A_\mu)} \quad (6.50)$$

es decir

$$\begin{aligned} \pi^0 &= -\partial_\mu A^\mu \\ \pi^i &= F^{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E^i \end{aligned}$$

Como vemos coincide con los anteriores para las componentes espaciales π^i pero ahora π^0 es no nulo. Podemos intentar imponer las reglas de conmutación canónicas de forma manifiestamente covariante

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{y})] = i\delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.52)$$

De forma que con todos los índice arriba se leería

$$[A^\mu(t, \vec{x}), \pi^\nu(t, \vec{y})] = i\eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6.53)$$

y el resto de conmutadores nulos. Puesto que todas las componentes cumplen ahora una ecuación de ondas, la solución más general podrá

escribirse como

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=0}^3 \left(\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \bar{\epsilon}^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx} \right)_{p^0=\omega_p} \quad (6.54)$$

donde ahora tenemos cuatro posible polarizaciones $\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)$, $\lambda = 0, \dots, 3$ y puesto que todas las componentes satisfacen la misma ecuación de ondas tenemos para todos los modos $p^2 = 0$. En el frame en el que $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, los vectores de polarización se puede elegir como

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(\vec{p}, 0) &= (1, 0, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(\vec{p}, 1) &= (0, 1, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(\vec{p}, 2) &= (0, 0, 1, 0), \\ \epsilon^\mu(\vec{p}, 3) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

o de forma más compacta $\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = \delta_\lambda^\mu$. En cualquier otro inercial pueden obtenerse realizando la correspondiente transformación de Lorentz.

En general se cumple que

$$\eta_{\mu\nu} \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{p}, \lambda') = \eta^{\lambda\lambda'} \quad (6.56)$$

y

$$\sum_{\lambda} \frac{\epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{p}, \lambda)}{\eta_{\mu\nu} \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{p}, \lambda)} = \eta^{\mu\nu} \quad (6.57)$$

independientemente del inercial ¹

$$\sum_{\lambda} \eta^{\lambda\lambda} \epsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \epsilon^{\nu*}(\vec{p}, \lambda) = \eta^{\mu\nu} \quad (6.58)$$

donde $\eta^{\lambda\lambda}$ es simplemente un signo.. Las relaciones de conmutación anteriores puede obtenerse imponiendo las siguientes relaciones de conmutación sobre los operadores de creación y destrucción

$$\begin{aligned} [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] &= -\eta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ [a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}] &= [a_{p,\lambda}^\dagger, a_{q,\lambda'}^\dagger] = 0, \quad \lambda, \lambda' = 0 \dots 3 \end{aligned}$$

El punto fundamental aquí es que el conmutador correspondiente a $\lambda = \lambda' = 0$ tiene el signo opuesto al de los espaciales y esto hace que los estados de una partícula correspondientes tengan normas negativas, lo cual podría ser catastrófico para la consistencia de la teoría. En efecto consideremos los estados

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_p} a_{p,\lambda}^\dagger |0\rangle \quad (6.61)$$

por tanto

$$\langle \vec{p}, \lambda | \vec{p}, \lambda \rangle = 2\omega_p \langle 0 | a_{p,\lambda} a_{p,\lambda}^\dagger | 0 \rangle = 2\omega_p \langle 0 | [a_{p,\lambda}, a_{p,\lambda}^\dagger] | 0 \rangle = -\eta_{\lambda\lambda} 2\omega_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \quad (6.62)$$

Puesto que los productos escalares en Mecánica Cuántica tienen una interpretación en términos de probabilidades, un espacio de Fock con

un producto escalar no definido positivo no tiene una interpretación probabilística. Por otra parte, hay que notar que ni los estados creados por $a_{p,0}^\dagger$ ni los creados por $a_{p,3}^\dagger$ correspondían a estados físicos.

La solución a estos problemas puede encontrarse en el hecho de que hemos añadido un término $(\partial_\mu A^\mu)^2$ al Lagrangiano. La idea de la cuantización covariante es limitar el espacio de Fock de forma que sobre los estados físicos $|\text{phys}\rangle$ tengamos

$$\langle \text{phys}' | (\partial_\mu A^\mu) | \text{phys} \rangle = 0 \quad (6.63)$$

que es lo que se conoce como condición de Gupta-Bleuler. Por tanto, sobre estados físicos se recuperarán las ecuaciones de Maxwell usuales. Veamos cómo implementar esta condición de forma más concreta. Para ello vamos a separar el operador $\partial_\mu A^\mu$ en su parte de frecuencia positiva y negativa.

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^- \quad (6.64)$$

donde

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A^\mu)^+ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=0}^3 (p_\mu \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx}) \\ (\partial_\mu A^\mu)^- &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=0}^3 (p_\mu \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda}^\dagger e^{ipx}) \end{aligned}$$

Puesto que $(\partial_\mu A^\mu)^- = (\partial_\mu A^\mu)^{+\dagger}$ tenemos que la condición de Gupta-Bleuler se cumple si

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ | \text{phys} \rangle = 0 \quad (6.66)$$

Puesto que es una condición lineal, tendremos que el espacio de Fock de los estados físicos también lo será, es decir si $|\text{phys}_1\rangle$ y $|\text{phys}_2\rangle$ son estados físicos entonces $\alpha |\text{phys}_1\rangle + \beta |\text{phys}_2\rangle$ también lo será.

Veamos el efecto de esta condición sobre los estados de una partícula. Para ello consideremos un estado de una partícula general $|\psi\rangle = \sum_{\lambda'=0}^3 c_{\lambda'} \sqrt{2\omega_k} a_{k,\lambda'}^\dagger |0\rangle$. Tomando por simplicidad $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A^\mu)^+ |\psi\rangle &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=0}^3 (p_\mu \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx}) \sum_{\lambda'=0}^3 c_{\lambda'} \sqrt{2\omega_k} a_{k,\lambda'}^\dagger |0\rangle \\ &= i \sum_{\lambda\lambda'=0}^3 \left(k_\mu \delta_\lambda^\mu e^{-ikx} \right) c_{\lambda'} \eta_{\lambda,\lambda'} |0\rangle = ik (c_0 + c_3) e^{-ikx} |0\rangle = 0 \end{aligned}$$

es decir, la condición de Gupta-Bleuler requiere $c_0 + c_3 = 0$. Es decir:

$$|\phi\rangle = \left(a_{k,0}^\dagger - a_{k,3}^\dagger \right) |0\rangle \quad (6.68)$$

sería un estado físico. Por otra parte, nótese que los estados de fotones transversales de la forma $a_{k,1,2}^\dagger |0\rangle$ también son físicos. Sin embargo, ni los fotones temporales $a_{k,0}^\dagger |0\rangle$ ni los fotones longitudinales $a_{k,3}^\dagger |0\rangle$ son físicos, sólo la combinación anterior lo es. Por tanto, la forma más general

de los estados de una partícula sería

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle \quad (6.69)$$

con $|\psi_T\rangle$ un estado de fotones transversos. Calculemos ahora la norma del estado físico $|\phi\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\phi\rangle &= \langle 0|(a_{k,0} - a_{k,3})(a_{k,0}^\dagger - a_{k,3}^\dagger)|0\rangle = \langle 0|(a_{k,0}a_{k,0}^\dagger + a_{k,3}a_{k,3}^\dagger)|0\rangle \\ &= \langle 0|([a_{k,0}, a_{k,0}^\dagger] + [a_{k,3}, a_{k,3}^\dagger])|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

debido a la diferencia de signo en los conmutadores. Es decir la norma de los estados $|\phi\rangle$ es cero y son por tanto ortogonales a todos los estados físicos. Por tanto, todos los productos escalares de estados $|\psi_T\rangle + c|\phi\rangle$ son idénticos a los productos escalares de los estados transversos $|\psi_T\rangle$.

Calculemos ahora la energía y el momento de los nuevos estados. La expresión del Hamiltoniano es ahora diferente

$$:H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(-a_{p,0}^\dagger a_{p,0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} \right) \quad (6.71)$$

y de forma análoga

$$:\vec{P} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \left(-a_{p,0}^\dagger a_{p,0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{p,\lambda}^\dagger a_{p,\lambda} \right) \quad (6.72)$$

vemos por tanto que los fotones temporales contribuyen a la energía y al momento con un signo opuesto al de las componentes transversas. De hecho puede verse que puesto que los estados físicos contienen el mismo número de fotones temporales y longitudinales sus contribuciones se cancelan y por tanto sobre los estados físicos únicamente los fotones transversos contribuyen a la energía y el momento.

En conclusión, a pesar de que en el formalismo covariante aparecen nuevos estados, estos no son físicos, puesto que no contribuyen a la energía ni al momento, ni a los productos escalares. Dado su carácter manifiestamente covariante, este es el formalismo habitualmente empleado en los cálculos en electrodinámica cuántica.

Todo esto lo he sacado del [2]

La electrodinámica cuántica (QED) describe la interacción entre electrones (o cualquier otra partícula cargada de spin $1/2$ como los muones, quarks, etc) y los fotones, así como las interacciones de las partículas cargadas entre sí. La teoría fue desarrollada por F. Dyson, R. Feynman, J. Schwinger y S. Tomonaga a finales de los años 40 y es la primera teoría cuántica de campos que permitió hacer cálculos de forma consistente. La constante de acoplo de la teoría viene dada por la carga del electrón e , o más concretamente, por la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \simeq 1/137$ que es una cantidad pequeña y por tanto la teoría permite un desarrollo perturbativo como el que hemos visto en el tema anterior.

En este tema estudiaremos las reglas de Feynman para QED y los principales procesos de interacción.

8.1	Lagrangiano clásico e invariancia Gauge . . .	87
8.2	Cuantización, teoría de perturbaciones y reglas de Feynman	87
8.3	Reglas de Feynman . . .	87
8.3.1	Partículas en el estado inicial	87
8.3.2	Partículas en el estado final	88
8.3.3	Vértice	88
8.3.4	Líneas internas	88
8.3.5	Alguna fórmulas útiles . . .	89
8.4	Procesos en electrodinámica cuántica	90
8.4.1	Dispersión Möller . . .	90
8.4.2	Dispersión Blhaba . . .	98
8.4.3	Dispersión Compton . .	106
8.4.4	Sección eficaz de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. .	107

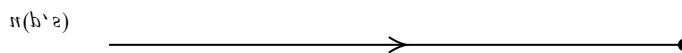
8.1. Lagrangiano clásico e invariancia Gauge

8.2. Cuantización, teoría de perturbaciones y reglas de Feynman

8.3. Reglas de Feynman

8.3.1. Partículas en el estado inicial

- Electrón (fermión) en el estado inicial:



- Positrón (antifermión) en el estado inicial:



- Fotón en el estado inicial:



Los λ son los 2 estados de polarización del fotón, es decir, $\lambda = 1, 2$.

8.3.2. Partículas en el estado final

- **Electrón (fermión) en el estado final:**

$$\underline{n}(h, z)$$

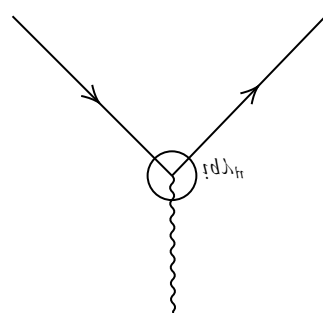
- **Positrón (antifermión) en el estado final:**

A horizontal line with a solid black dot at its left end. An arrow is drawn on the line, pointing to the left. Above the dot is the label $\Omega(h, z)$.

- **Fotón en el estado final:**

Los λ son los 2 estados de polarización del fotón, es decir, $\lambda = 1, 2$.

8.3.3. Vértice



- $\{$
 q (que no es el q del momento de fotón) es

$$q = e_{Q_f} \text{ con } Q_f \begin{cases} Q_{e,\mu,\tau} = -1 \\ Q_{u,c,t} = \frac{2}{3} \\ Q_{d,s,b} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (8.1)$$

8.3.4. Líneas internas

- **Propagador fermiónico:**

$$\mathcal{Z}^{\mathbb{E}}(\kappa) = \frac{\kappa_S - m_S}{\kappa - m}$$

- **Propagador del fotón:**

$$\mathcal{Z}^{\text{tr}_h}(\mathbf{d}) = -\frac{\mathrm{d}_\Sigma}{\mathcal{Z}^{\text{tr}_h}} \quad \text{tr}$$

Quando tenemos que sumar varios diagramas es importante determinar el signo relativo entre ellos. Para ello debemos ver si la ordenación de los espinores en las amplitudes es la misma o no. Así por ejemplo, dos amplitudes con espinores $\bar{u}u\bar{v}v$ y $\bar{v}u\bar{u}v$ tendrán signos opuestos puesto que requieren intercambiar el orden de operadores de creación o destrucción fermiónicos.

Basta con coger el orden de las partículas calculadas en la amplitud de dispersión y hacer permutaciones de 2 a 2 partículas cambiando el signo en cada una de las permutaciones para ver el signo relativo de cada canal

Example 8.3.1 (Ejemplo de signos relativos) Dada la siguiente amplitud de dispersión

$$\frac{e^2}{q^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \quad (8.2)$$

Vemos que se encuentra en el orden

$$3142 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Un cambio} \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

$$-1342 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Otro cambio} \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

$$1324 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cambio final} \end{array} \right\} \quad (8.5)$$

$$-1234 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cambio final} \end{array} \right\} \quad (8.6)$$

Como vemos el signo de esta amplitud de dispersión será negativo.

8.3.5. Algunas fórmulas útiles

$$\begin{aligned} g_\mu^\mu &= 4 = \delta_\mu^\mu & \gamma^0 &= \gamma^{0\dagger} \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} & \gamma^i &= -\gamma^{i\dagger} \\ \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= -2\gamma^\mu & (\gamma^0)^2 &= 1 \\ \gamma_\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\nu & \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \\ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho &= 4g^{\mu\nu} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \end{aligned} \quad (8.7)$$

γ^5 no aparece en la electrodinámica cuántica, pero si aparece cuando hay interacción de la fuerza débil. Algunas propiedades són:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 & (\gamma^5)^2 &= \mathbb{I} & \gamma^5 &= \gamma^{5\dagger} & \{\gamma^5, \gamma^\nu\} &= 0 \\ P_L &= 1/2 (1 - \gamma^5) & P_R &= 1/2 (1 + \gamma^5) \\ P_L^2 &= P_L & P_R^2 &= P_R & P_L + P_R &= \mathbb{I} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Algunas propiedades sobre traza son:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu\nu}) &= 0 \Leftrightarrow \nu \text{ impar} & \text{Tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu} & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\rho) &= 4(g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ & & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^5) &= 0 \\ & & \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^5) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \end{aligned} \quad (8.9)$$

8.4. Procesos en electrodinámica cuántica

8.4.1. Dispersión Möller

Canal t

A partir del diagrama, podemos escribir el elemento de matriz:

$$\mathcal{M}_t = (e i \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) \frac{i g_{\mu\nu}}{q^2} (e i \bar{v}_4 \gamma^\nu u_2) = \frac{e^2}{q^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2], \quad (8.10)$$

donde el momento del propagador $q = p_1 - p_3 = \sqrt{t}$. El módulo al cuadrado es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_t|^2 &= \frac{e^4}{t^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1]^* [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2]^* \\ &= \frac{e^4}{t^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_1 \gamma^\rho u_3] [\bar{u}_2 \gamma^\sigma v_4] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \\ &= \frac{e^4}{t^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_1 \gamma^\rho u_3] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_2 \gamma^\sigma v_4], \end{aligned} \quad (8.11)$$

donde hemos utilizado la identidad:

$$[\bar{u} \gamma^\rho v]^* = [\bar{u} \gamma^\rho v]^\dagger = v^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho \gamma^0 u = v^\dagger (\gamma^0)^2 \gamma^\rho \gamma^0 u = \bar{v} \gamma^\rho u. \quad (8.12)$$

lo cual es válido para espinores u y v . Dado que las cantidades entre corchetes son números C , podemos tomar sus trazas sin repercusiones:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_t|^2 &= \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3] \text{Tr}[\bar{u}_2 \gamma^\mu u_4 \bar{u}_4 \gamma^\mu u_2] \\ &= \frac{e^4}{t^2} \text{Tr}[u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu] \text{Tr}[u_2 \bar{u}_2 \gamma^\mu u_4 \bar{u}_4 \gamma^\mu]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

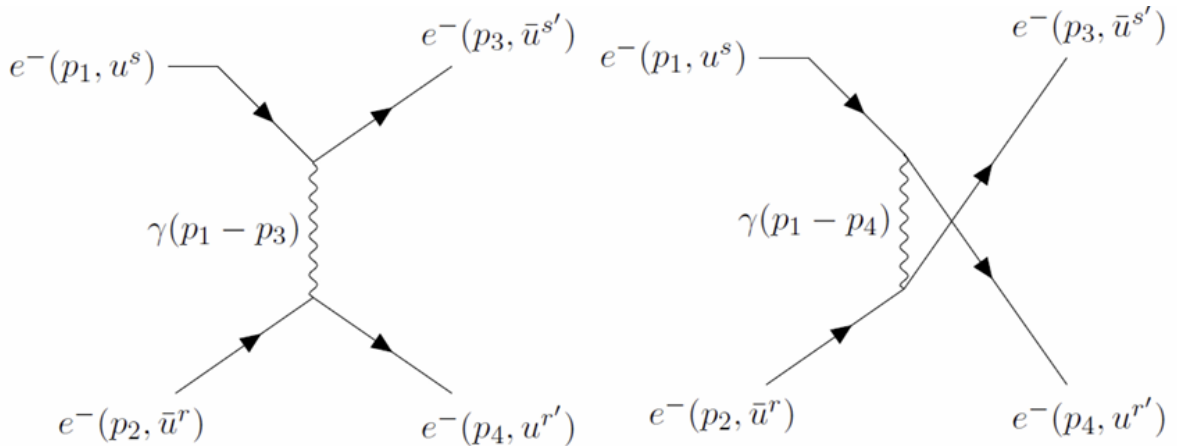


Figura 8.1: Diagramas de Feynman de la dispersión Möller

Ahora debemos promediar sobre los espines iniciales y sumar sobre los espines finales:

$$|\overline{\mathcal{M}}_t|^2 = \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr} \left[\sum_s u_1^s \bar{u}_1^s \gamma^\nu \sum_{s'} u_3^{s'} \bar{u}_3^{s'} \gamma^\mu \right] \text{Tr} \left[\sum_r v_2^r \bar{v}_2^r \gamma^\mu \sum_{r'} v_4^{r'} \bar{v}_4^{r'} \gamma^\nu \right], \quad (8.14)$$

usamos las relaciones de completitud para los espinores de Dirac:

$$|\overline{\mathcal{M}}_t|^2 = \frac{e^4}{4t^2} \text{Tr} [(p_1 - m_e) \gamma^\nu (p_3 - m_e) \gamma^\mu] \text{Tr} [(p_2 - m_e) \gamma^\mu (p_4 - m_e) \gamma^\nu], \quad (8.15)$$

aquí notaremos que cualquier término que sea lineal en la masa del electrón contendrá un número impar de matrices de Dirac dentro de una traza, la cual se evalúa a cero. Por lo tanto:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{e^4}{4t^2} \{ \text{Tr} [p_1 \not{p}_3 \gamma^\nu \not{p}_3 \gamma^\mu] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\mu] \} \{ \text{Tr} [p_2 \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_4 \gamma^\nu] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \}, \quad (8.16)$$

usando las identidades de traza de las matrices de Dirac (Peskin Apéndice 3) esto es

$$|\overline{\mathcal{M}}_t|^2 = \frac{e^4}{4t^2} \{ p_1 \not{p}_3 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\mu] + 4g_{\mu\nu} m_e^2 \} \{ p_2 \not{p}_4 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] + 4g_{\mu\nu} m_e^2 \}, \quad (8.17)$$

las trazas restantes son

$$p_{1\alpha} p_{3\beta} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu] = 4p_{1\alpha} p_{3\beta} (g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) \quad (8.18)$$

$$= 4(p_{1\mu} p_{3\nu} - (p_1 \cdot p_3) g_{\mu\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu}) \quad (8.19)$$

$$= 4p_{2\alpha} p_{4\beta} (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \quad (8.20)$$

$$= 4(p_{2\mu} p_{4\nu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu}) \quad (8.21)$$

$$(8.22)$$

Ahora debemos realizar la multiplicación en la expansión de las matrices. El primer término es la contracción de las dos trazas anteriores, así que usando la notación (1+2+3)(A+B+C), los términos son

las cuales debemos sumar (incluyendo un factor global de 4²), observa que el factor de 4 en 2B proviene de $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$. Notemos las relaciones:

$$1A = 3C \quad 1C = 3A \quad 2B + 1B + 2A + 2C + 3B = 0,$$

así que su suma es

$$4^2 [2(p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3) + 2(p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3)]. \quad (8.23)$$

El segundo término (en el elemento de matriz) es la contracción de los dos términos de masa:

$$4^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} m_e^4 = 4^2 [4m_e^4]. \quad (8.24)$$

Los dos términos restantes son los "términos cruzados":

$$4(p_{1\mu} p_{3\beta} - (p_1 \cdot p_3) g_{\mu\beta} + p_{1\beta} p_{3\mu})(4g_{\mu\nu} m_e^2) = 4^2 [m_e^2 (p_1 \cdot p_3 - 4p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_3)] \quad (8.25)$$

$$= 4^2 [-2m_e^2 p_1 \cdot p_3], \quad (8.26)$$

y

$$4(p_2^\beta p_4^\alpha - (p_2 \cdot p_4)g_{\mu\nu} + p_4^\beta p_2^\alpha)(4g_{\mu\nu}m_e^2) = 4^2 [m_e^2(p_2 \cdot p_4 - 4(p_2 \cdot p_4) + p_2 \cdot p_4)] \quad (8.27)$$

$$= 4^2 [-2m_e^2 p_2 \cdot p_4] ., \quad (8.28)$$

Reuniendo estos términos, el elemento de matriz es

$$|\overline{\mathcal{M}}_t|^2 = \frac{e^4}{t^2} \{2(p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3) + 2(p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3) + 4m_e^4 - 2m_e^2(p_1 \cdot p_3) - 2m_e^2(p_2 \cdot p_4)\} . \quad (8.29)$$

Nuevamente utilizaremos nuestros invariantes de Mandelstam, observando (en el caso masivo)

$$-2p_1 \cdot p_2 = s - 2m_e^2 = 2ps \cdot p_4, \quad (8.30)$$

$$-2p_1 \cdot p_3 = t - 2m_e^2 = -2p_2 \cdot p_4, \quad (8.31)$$

$$-2p_1 \cdot p_4 = u - 2m_e^2 = -2p_2 \cdot p_3. \quad (8.32)$$

Con estos, el cuadrado del elemento de matriz es

$$|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{e^4}{t^2} [(2(p_1 \cdot p_2)(p_4 \cdot p_3) + (2(p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3) + 8m_e^4 - 4m_e^2(p_1 \cdot p_3) - 4m_e^2(p_2 \cdot p_4)] \quad (8.33)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} [(s - t - m_e^2)^2 + (u - t - m_e^2)^2 + 8m_e^4 + 2m_e^2(t - 2m_e^2) + 2m_e^2(t - 2m_e^2)] \quad (8.34)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} [s^2 + u^2 + 2sm_e^2 + 2um_e^2 + 4m_e^4 + 2m_e^2(t - 2m_e^2)] \quad (8.35)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} [s^2 + u^2 + 2sm_e^2 + 2um_e^2 + 4m_e^4 + 4m_e^2t - 8m_e^4] \quad (8.36)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} [s^2 + u^2 - 2m_e^2s - 2m_e^2u + 4m_e^2t - 8m_e^4] . \quad (8.37)$$

Recuperamos, en el límite ultrarrelativista (i.e., electrón sin masa):

$$|\overline{\mathcal{M}}_t|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}. \quad (8.38)$$

Canal u

A partir del diagrama, podemos escribir el elemento de matriz:

$$\mathcal{M}_u = (e i \bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) \frac{i g_{\nu\rho}}{q^2} (e i \bar{u}_4 \gamma^\rho u_2) = \frac{e^2}{q^2} [\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\rho u_2], \quad (8.39)$$

el análisis que sigue se abreviará porque el proceso es casi idéntico al canal t. El cuadrado del módulo del elemento de matriz es

$$|\mathcal{M}_u|^2 = \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 [[\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\rho u_2]] [[\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1] [\bar{u}_2 \gamma_\rho u_4]] \quad (8.40)$$

$$= \frac{e^4}{q^4} [[\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\rho u_2]]^* [[\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1] [\bar{u}_2 \gamma_\rho u_4]] \quad (8.41)$$

$$= \frac{e^4}{q^4} \text{Tr}[u_1 \bar{u}_1 \gamma^\nu u_4 \bar{u}_4 \gamma^\rho] \text{Tr}[u_3 \bar{u}_3 \gamma_\nu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\rho], \quad (8.42)$$

ahora sumamos y promediamos sobre los espines finales e iniciales, y usamos las relaciones de completitud para los espinores de Dirac:

$$|\overline{\mathcal{M}}_u|^2 = \frac{e^4}{4u^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m) \gamma^\rho] \text{Tr}[(\not{p}_2 + m) \gamma^\rho (\not{p}_3 + m) \gamma^\nu] \quad (8.43)$$

$$= \frac{e^4}{4u^2} \{ \text{Tr} [\not{p}_1 \not{p}_4 \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\rho] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\rho] \} \{ \text{Tr} [\not{p}_2 \not{p}_3 \gamma^\rho \not{p}_3 \gamma^\nu] + m^2 \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\nu] \} \quad (8.44)$$

$$= \frac{e^4}{4u^2} \{ p_{1\alpha} p_{4\beta} \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\rho] + 4 g_{\nu\rho} m^2 \} \{ p_{2\alpha} p_{3\beta} \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha] + 4 g_{\rho\nu} m^2 \}, \quad (8.45)$$

las trazas restantes son

$$p_1^\alpha p_4^\beta \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\rho] = 4 p_1^\alpha p_4^\beta (g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho} - g_{\alpha\beta} g_{\nu\rho} + g_{\alpha\rho} g_{\beta\nu}) \quad (8.46)$$

$$= 4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4), \quad (8.47)$$

$$p_{2\alpha} p_{3\beta} \text{Tr} [\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha] = 4 p_{2\alpha} p_{3\beta} (g_{\rho\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\rho\nu} g_{\beta\alpha} + g_{\rho\alpha} g_{\beta\nu}) \quad (8.48)$$

$$= 4(p_2 \cdot p_3)(g_{\rho\nu} - (p_2 \cdot p_4)) + 4(p_4 \cdot p_3), \quad (8.49)$$

que se contraen para dar

$$4^2 [2(p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3) + 2(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_4)]. \quad (8.50)$$

El producto de términos de masa es

$$4^2 [4m^4], \quad (8.51)$$

y los términos cruzados son

$$4(p_{1\mu}p_{4\nu} - (p_1 \cdot p_4)g_{\mu\nu} + p_{1\nu}p_{4\mu})4m_e^2g_{\mu\nu} = 4^2[-2m_e^2(p_1 \cdot p_4)] \quad (8.52)$$

$$4(p_2^\alpha p_3^\beta - (p_2 \cdot p_3)g_{\rho\nu} + p_3^\alpha p_2^\beta)4m_e^2g_{\rho\nu} = 4^2[-2m_e^2(p_2 \cdot p_3)], \quad (8.53)$$

así que el cuadrado del elemento de matriz es

$$|\overline{\mathcal{M}}_u|^2 = \frac{e^4}{u^2} [2(p_2 \cdot p_1)(p_4 \cdot p_3) + 2(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_4) + 4m_e^4 - 2m_e^2(p_1 \cdot p_4) - 2m_e^2(p_2 \cdot p_3)]. \quad (8.54)$$

Escribiendo esto en términos de invariantes de Mandelstam, tenemos

$$|\overline{\mathcal{M}}_u|^2 = \frac{e^4}{u^2} \{2(p_2 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_4) + (-2)(p_3 \cdot p_1)(-2)(p_2 \cdot p_4) + 8m_e^4 - 4m_e^2(p_1 \cdot p_4) - 4m_e^2(p_2 \cdot p_3)\}, \quad (8.55)$$

$$= \frac{e^4}{u^2} \{[(s - m_e^2)^2 + (t - m_e^2)^2 + 8m_e^4 + 2m_e^2(u - m_e^2) + 2m_e^2(u - m_e^2)]\}, \quad (8.56)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}_u|^2 = \frac{e^4}{u^2} [s^2 + t^2 + 2m_e^2(2u - s - t) + 4m_e^4]. \quad (8.57)$$

Recuperamos, en el límite ultrarrelativista (i.e., electrón sin masa):

$$|\overline{\mathcal{M}}_u|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + t^2}{u^2}. \quad (8.58)$$

Es interesante notar que podríamos haber encontrado este resultado si hubiéramos hecho las sustituciones $p_3 \rightarrow p_4$ y $p_4 \rightarrow p_3$ (nótese que no necesitamos considerar un cambio de signo, ya que no estamos tratando con antipartículas), por lo que los invariantes de Mandelstam se convierten en

$$s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow (p_1 + p_2)^2 = s, \quad (8.59)$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 \rightarrow (p_4 - p_1)^2 = u, \quad (8.60)$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 \rightarrow (p_3 - p_1)^2 = t. \quad (8.61)$$

Términos cruzados

El primer término cruzado es

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \left[\frac{e^2}{t} [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2] \right] \left[\frac{e^2}{u^2} [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2] \right] \quad (8.62)$$

$$= \frac{e^4}{4tu} \sum_{\text{spins}} [\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1] [\bar{u}_4 \gamma_\nu u_2] [\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2] [\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1] \quad (8.63)$$

$$= \frac{e^4}{4tu} \sum_{\text{spins}} \text{Tr}[\gamma_\nu u_1 \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_3 \bar{u}_3] \quad (8.64)$$

$$= \frac{e^4}{4tu} \text{Tr}[(q_3 + m) \gamma_\nu (p_4 + m) \gamma^\mu (p_2 + m) \gamma^\nu (p_3 + m)] \quad (8.65)$$

$$= \frac{e^4}{4tu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\rho (p_4 + m) \gamma^\mu (p_2 + m) \gamma^\sigma (p_3 + m)] \quad (8.66)$$

$$= \frac{e^4}{4tu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \text{Tr}[\gamma^\rho p_4 \gamma^\mu p_2 \gamma^\sigma p_3] \quad (8.67)$$

Por el bien de los cálculos, pongamos esto en una forma diferente, usando $p_1 \rightarrow p$, $p_2 \rightarrow k$, $p_3 \rightarrow p'$, $p_4 \rightarrow k'$, entonces podemos escribir el término cruzado como

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{e^4}{4st} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \text{Tr}[\gamma^\alpha k' \gamma^\mu k \gamma^\beta p'] = \frac{e^4}{4st} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \text{Tr}[\gamma^\alpha k' \gamma^\nu p \gamma^\mu p'] \quad (8.68)$$

ahora renombramos nuestros índices (intercambiando β y μ):

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{e^4}{4tu} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta k' p \gamma^\nu] \quad (8.69)$$

Nota las siguientes relaciones que se pueden encontrar en el Apéndice A.4 de Schwartz *Quantum Field Theory and the Standard Model*:

$$\gamma^\nu \gamma^\nu = 4 \quad (8.70)$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -2\gamma^\mu \quad (8.71)$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = 4g^{\mu\rho} \quad (8.72)$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\mu \quad (8.73)$$

y nota que la cuarta vale para cualquier cantidad impar de matrices gamma entre dos matrices gamma contraídas. Por lo tanto:

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{e^4}{4tu} g_{\alpha\beta} \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta k' p p'] = \frac{e^4}{2tu} g_{\alpha\beta} \text{Tr}[k \gamma^\nu p \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho] \quad (8.74)$$

$$= \frac{e^4}{2tu} e^2(p \cdot k') \text{Tr}[p k \gamma^\nu] = e^4 \left(\frac{p_2 \cdot p_4}{p \cdot k'} \right) \text{Tr}[p \cdot k] \quad (8.75)$$

Ahora en términos de los momentos definidos originalmente:

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = \frac{-e^8}{stu} (p_1, p_2)(p_3, p_4) \quad (8.76)$$

En términos de los invariantes de Mandelstam esto es

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* = -8 \frac{e^4}{tu} \left(\frac{s}{2} \right) \left(\frac{s}{2} \right) = -2e^4 \frac{s^2}{tu}. \quad (8.77)$$

En lugar de calcular el otro término cruzado, afirmaré

$$2\text{Re}\{\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^*\} = \mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* + \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u = 2\text{Re}\{\mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u\}, \quad (8.78)$$

así que

$$\mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* + \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u = -4e^4 \frac{s^2}{tu}. \quad (8.79)$$

Sección eficaz diferencial

Para un estado final de dos cuerpos, la sección transversal diferencial está dada por (Peskin eq. 5.12)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_{\text{cm}}^2} \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}|^2. \quad (8.80)$$

En el límite sin masa, en el marco del centro de masa, la sección transversal diferencial se simplifica a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_{\text{cm}}} \frac{E_{\text{cm}}/2}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4E_{\text{cm}}} \frac{1}{(4\pi)^2} |\mathcal{M}|^2. \quad (8.81)$$

Usando los elementos de matriz de las secciones sin masa, tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_t} = \frac{1}{4E_{\text{cm}}^2 (4\pi)^2 t^2} e^4 = \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \frac{s^2 + u^2}{t^2}, \quad (8.82)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_u} = \frac{1}{4E_{\text{cm}}^2 (4\pi)^2 u^2} e^4 = \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \frac{s^2 + t^2}{u^2}, \quad (8.83)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{int}}} = \frac{1}{4E_{\text{cm}}^2 (4\pi)^2} \frac{e^4 s^2}{tu} = \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \left(2 - \frac{s^2}{tu} \right). \quad (8.84)$$

Ahora necesitamos calcular la suma de las secciones transversales diferenciales, pero primero debemos determinar su signo. Como hay fermiones idénticos en el estado final, tenemos que:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_t - \mathcal{M}_u \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 - \mathcal{M}_t \mathcal{M}_u^* - \mathcal{M}_t^* \mathcal{M}_u, \quad (8.85)$$

ya que bajo el intercambio de partículas, los sistemas fermiónicos son impares. Entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega_t} + \frac{d\sigma}{d\Omega_u} + \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{int}}}. \quad (8.86)$$

poniendo nuestros resultados:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - 2 \left(\frac{t}{u} \right)^2 - 2 \left(\frac{u}{t} \right)^2 \right], \quad (8.87)$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left(\left(\frac{u}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{u} \right)^2 + \frac{1}{s^2} \right). \quad (8.88)$$

Si integramos sobre el azimut, adquirimos un factor de 2π , por lo tanto

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left(\left(\frac{u}{t} \right)^2 + \left(\frac{t}{u} \right)^2 + 2s + \left(\frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} \right). \quad (8.89)$$

Investigamos la dependencia angular de la sección transversal diferencial. En el marco del centro de masa, tenemos

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_{\text{cm}}/2, \mathbf{p}), \\ p_2 &= (E_{\text{cm}}/2, -\mathbf{p}), \\ p_3 &= (E_{\text{cm}}/2, \mathbf{k}), \\ p_4 &= (E_{\text{cm}}/2, -\mathbf{k}). \end{aligned}$$

donde $|\mathbf{p}| = |\mathbf{k}| = E_{\text{cm}}/2$. Usando esto, los invariantes de Mandelstam se pueden escribir como

$$s = 2p_1 \cdot p_2 = E_{\text{cm}}^2 \quad (8.90)$$

$$t = -2p_1 \cdot p_3 = -2(p_1^0 p_3^0 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})) = -\frac{E_{\text{cm}}^2}{4}(1 - \cos\theta) \quad (8.91)$$

$$u = -2p_1 \cdot p_4 = -2(p_1^0 p_4^0 - (\mathbf{p} \cdot -\mathbf{k})) = -\frac{E_{\text{cm}}^2}{4}(1 + \cos\theta) \quad (8.92)$$

Insertando esto en la expresión de la sección transversal diferencial obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left[\left(\frac{-E_{\text{cm}}^2/4}{1 - \cos\theta} \right)^2 + \left(\frac{-E_{\text{cm}}^2/4}{1 + \cos\theta} \right)^2 + E_{\text{cm}}^4 \left(\frac{1}{-E_{\text{cm}}^2/4(1 - \cos\theta)} + \frac{1}{-E_{\text{cm}}^2/4(1 + \cos\theta)} \right)^2 \right] \quad (8.93)$$

la simplificación da como resultado

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left[\left(\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{1 - \cos\theta} + \frac{1}{1 + \cos\theta} \right)^2 \right] \quad (8.94)$$

dejando que nuestro viejo amigo *MATHEMATICA* maneje el álgebra, obtenemos

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\pi\alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} \left[\frac{2(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2} \right], \quad (8.95)$$

donde $x = \cos\theta$. Podemos integrar la dependencia angular para ver la dependencia en la energía del centro de masa:

$$\sigma = \int \frac{\pi\alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} \left[\frac{2(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2} \right] dx = \frac{\pi\alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} \left[x - \frac{8x}{x^2 - 1} \right], \quad (8.96)$$

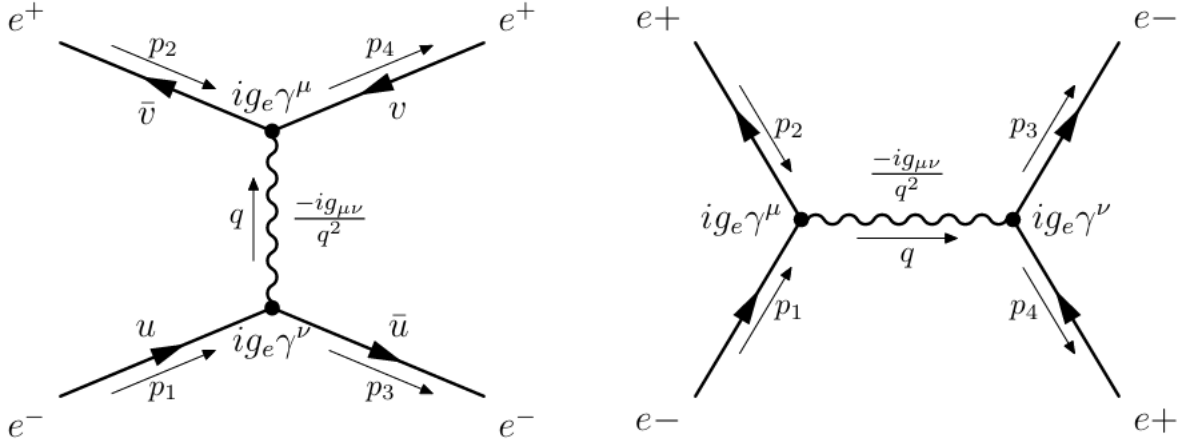


Figura 8.2: Diagramas de Feynman de la dispersión Bhabha

que diverge en ± 1 . Si limitamos la medición a partículas con un ángulo de dispersión mayor que 10° , podemos evaluar la integral numéricamente:

$$\sigma = \int_{\cos(170^\circ)}^{\cos(10^\circ)} \frac{\pi \alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} \frac{2(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2} dx = 1049,05 \frac{\pi \alpha^2}{E_{\text{cm}}^2}, \quad (8.97)$$

tener en cuenta que las unidades son GeV^{-2} , por lo que tomamos un factor de:

$$\sigma = 1049,05 \frac{0,3894 \text{ mb}}{1 \text{ GeV}^{-2}} = \frac{0,06837}{(E_{\text{cm}}/\text{GeV})^2} \text{ mb}. \quad (8.98)$$

Ahora necesitamos incluir un factor de $1/2$ debido a las partículas idénticas en el estado final[†], así que

$$\sigma = \frac{0,0342}{(E_{\text{cm}}/\text{GeV})^2} \text{ mb}. \quad (8.99)$$

Por ejemplo, en haces de electrones colisionando, cada uno con un momento de 4000 GeV (para un *center-of-mass* de energía de 8000 GeV), la sección transversal total (para la dispersión mayor de 10°) es $\sigma = 5,342 \times 10^{-10}$ mb o 0.534 pb.

8.4.2. Dispersión Bhabha

Hay dos diagramas de Feynman que contribuyen en el proceso: Con amplitudes que denotamos como $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ respectivamente. Usando las reglas de Feynman, podemos traducir los diagramas de Feynman en amplitudes:

$$iA^{(1)} = \bar{u}(k')(-ie\gamma^\mu)u(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{v}(p')(-ie\gamma^\nu)v(k') \quad (8.100)$$

donde $q = p - p' = k' - k$.

$$iA^{(2)} = \bar{u}(k')(-ie\gamma^\nu)u(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{v}(p')(-ie\gamma^\mu)v(k') \quad (8.101)$$

La amplitud total del proceso es la suma de estos dos:

$$\mathcal{A} = iA^{(1)} + iA^{(2)} \quad (8.102)$$

Para simplificar las expresiones, introduciremos las variables de Mandelstam:

$$t = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 \quad (8.103)$$

$$s = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 \quad (8.104)$$

$$u = (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 \quad (8.105)$$

donde p_1 y p_2 son los momentos de las dos partículas iniciales y p'_1 y p'_2 son los momentos de las dos partículas finales. Entonces, las amplitudes se pueden escribir como:

$$iA^{(1)} = [\bar{u}(k')\gamma^\nu u(p)] \left[\frac{e^2 g_{\mu\nu}}{s} \right] [\bar{v}(p')\gamma^\mu v(k)] \quad (8.106)$$

$$iA^{(2)} = [\bar{u}(k')\gamma^\mu u(p)] \left[\frac{e^2 g_{\mu\nu}}{u} \right] [\bar{v}(p')\gamma^\nu v(k)] \quad (8.107)$$

Entonces, el cuadrado de la amplitud es:

$$|\mathcal{A}|^2 = |A^{(1)}|^2 + |A^{(2)}|^2 + 2\text{Re} \left(A^{(1)} A^{(2)*} \right) \quad (8.108)$$

En la mayoría de los experimentos, los haces de las partículas iniciales no están polarizados y el detector que usamos para estudiar las partículas finales es ciego a la polarización del espín. Entonces, la sección medida es un promedio sobre todas las polarizaciones de los estados final e inicial. Por lo tanto, de hecho, calculamos:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}^{(1)}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}^{(2)}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(1)} \mathcal{A}^{(2)*} + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*} \quad (8.109)$$

Canal t

Calculamos el canal t para este proceso:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}^{(1)}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \left(\frac{ie^2}{s} \eta_{\mu\nu} \bar{v}(k) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma^\nu v(k') \right) \left(-\frac{ie^2}{s} \eta_{\rho\sigma} \bar{v}(k') \gamma^\rho u(p') \bar{u}(p) \gamma^\sigma v(k) \right) \\
&= \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \bar{v}(k) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma^\nu v(k') \bar{v}(k') \gamma^\rho u(p') \bar{u}(p) \gamma^\sigma v(k) \\
&= \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \bar{v}_a(k) \gamma_{ab}^\mu u_b(p) \bar{u}_c(p') \gamma_{cd}^\nu v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\rho u_f(p') \bar{u}_g(p) \gamma_{gh}^\sigma v_h(k) \\
&= (-1)^{14} \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \gamma_{ab}^\mu u_b(p) \bar{u}_g(p) \gamma_{gh}^\sigma v_h(k) \bar{v}_a(k) \gamma_{cd}^\nu v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\rho u_f(p') \bar{u}_c(p') \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m)_{bg} \gamma_{gh}^\sigma (\not{k} - m)_{ha} \gamma_{cd}^\nu (\not{k}' - m)_{de} \gamma_{ef}^\rho (\not{p}' + m)_{fc} \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr}(\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\sigma (\not{k} - m)) \text{tr}(\gamma^\nu (\not{k}' - m) \gamma^\rho (\not{p}' + m)) \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr}((\not{k} - m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\sigma) \text{tr}((\not{k}' - m) \gamma^\rho (\not{p}' + m) \gamma^\nu)
\end{aligned} \tag{8.110}$$

El factor $(-1)^{14}$ es el resultado de catorce conmutaciones de los campos fermiónicos. En la penúltima línea hemos usado las ecuaciones (3.98) y (3.99). Ahora, computamos cada uno de los trazos por separado, usando la tecnología de trazos que desarrollamos en el capítulo anterior:

$$\text{tr}\{((\not{k} - m) \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^\sigma)\} = \text{tr}\{(k^\rho \gamma^\mu + k^\mu \gamma^\rho - m \gamma^\rho)(p_\nu \gamma^\nu + m) \gamma^\sigma\} \tag{8.111}$$

$$= \text{tr}(k^\rho \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu \gamma^\sigma + k^\rho m \gamma^\mu \gamma^\sigma - m p_\nu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - m^2 \gamma^\rho \gamma^\sigma) \tag{8.112}$$

$$= k_\rho p_\mu (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\nu \gamma^\sigma) + m k_\rho (\gamma^\mu \gamma^\sigma) - m p_\nu (\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) - m^2 \text{tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) \tag{8.113}$$

$$= (4k^\rho p^\sigma - 4(k \cdot p) g^{\rho\sigma} + 4k^\nu p^\rho) - 4m^2 g^{\rho\sigma} \tag{8.114}$$

El siguiente término de traza es:

$$\text{tr}\{((\not{k}' - m) \gamma^\rho (\not{p}' + m) \gamma^\sigma)\} \tag{8.115}$$

Notamos que este término está conectado al primer traza si realizamos el intercambio: $k \rightarrow k'$ y $p \rightarrow p'$ y $\mu \rightarrow \rho$ y $\sigma \rightarrow \nu$. Así que:

$$\text{tr}\{((\not{k}' - m) \gamma^\rho (\not{p}' + m) \gamma^\sigma)\} = (4k'^\rho p'^\nu - 4(k' \cdot p') g^{\rho\nu} + 4k'^\nu p'^\rho) - 4m^2 g^{\rho\nu} \tag{8.116}$$

Reemplazando los trazos que hemos computado, en la ecuación (6.9), obtenemos:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |A^{(1)}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} ((4k'^\rho p'^\nu - 4(k' \cdot p') g^{\rho\nu} + 4k'^\nu p'^\rho) - 4m^2 g^{\rho\nu}) \tag{8.117}$$

$$((4k^\rho p^\nu - 4(k \cdot p) g^{\rho\sigma} + 4k^\nu p^\rho) - 4m^2 g^{\rho\sigma}) \tag{8.118}$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} ((k' \cdot p)(k \cdot p) - (k' \cdot k)(p \cdot p) - m^2(k \cdot p)) \quad (8.119)$$

$$= \frac{4e^4}{s^2} (m^2((p \cdot p) - 4m^2)) \quad (8.120)$$

Reuniendo todos los términos, obtenemos:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |A^{(1)}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left((p \cdot p')(k \cdot k') + (p \cdot k)(p' \cdot k') + m^2(k \cdot p') + m^2(k' \cdot p) + 2m^4 \right) \quad (8.121)$$

Canal s

Procedemos con el cálculo del siguiente término:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |A^{(2)}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \left(\frac{ie^2}{t} \eta_{\mu\nu} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{v}(k) \gamma^\nu v(k') \right) \left(-\frac{ie^2}{t} \eta_{\rho\sigma} \bar{v}(k') \gamma^\rho v(k) \bar{u}(p) \gamma^\sigma u(p') \right) \\ &= \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{v}(k) \gamma^\nu v(k') \bar{v}(k') \gamma^\rho v(k) \bar{u}(p) \gamma^\sigma u(p') \\ &= \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \bar{u}_a(p') \gamma^\mu_{ab} u_b(p) \bar{v}_c(k) \gamma^\nu_{cd} v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma^\rho_{ef} v_f(k) \bar{u}_g(p) \gamma^\sigma_{gh} u_h(p') \\ &= (-1)^{14} \sum_{\text{spins}} \frac{e^4}{4t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \gamma^\mu_{ab} u_b(p) \bar{u}_g(p) \gamma^\sigma_{gh} u_h(p') \bar{u}_a(p') \gamma^\nu_{cd} v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma^\rho_{ef} v_f(k) \bar{v}_c(k) \\ &= \frac{e^4}{4t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \gamma^\mu_{ab} (\not{p} + m)_{bg} \gamma^\sigma_{gh} (\not{p}' + m)_{ha} \gamma^\nu_{cd} (\not{k}' - m)_{de} \gamma^\rho_{ef} (\not{k} - m)_{fc} \\ &= \frac{e^4}{4t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\sigma (\not{p}' + m)) \text{tr} (\gamma^\nu (\not{k}' - m) \gamma^\rho (\not{k} - m)) \end{aligned} \quad (8.122)$$

El factor $(-1)^{14}$ es el resultado de catorce conmutaciones de los campos fermiónicos. En la penúltima línea hemos usado las ecuaciones (3.98) y (3.99). Vamos a computar ahora cada traza por separado, usando la tecnología de trazas:

$$\text{tr} \{ \gamma^\rho (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p}' + m) \} = \text{tr} \{ \gamma^\rho \not{p} \gamma^\mu \not{p}' \} + m^2 \text{tr} (\gamma^\rho \gamma^\mu) \quad (8.123)$$

$$= 4p^\rho p'^\mu + 4m^2 \eta^{\rho\mu} \quad (8.124)$$

Repetimos el mismo procedimiento para el cálculo de la otra traza, obtenemos:

$$\text{tr} \{ \gamma^\nu (\not{k}' - m) \gamma^\sigma (\not{k} - m) \} = 4 \left(k'_\rho k_\nu \eta^{\rho\nu} + k_\rho k'_\nu \eta^{\rho\nu} + m^2 \eta^{\rho\nu} \right) \quad (8.125)$$

Usando estas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{A}^{(2)}|^2 &= \frac{4e^4}{t^2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} (p^\mu p'^\sigma - (p \cdot p') \eta^{\mu\sigma} + p'^\mu p^\sigma + m^2 \eta^{\mu\sigma}) (k'^\nu k^\rho - (k \cdot k') \eta^{\nu\rho} + k^\nu k'^\rho + m^2 \eta^{\nu\rho}) \\
&= \frac{4e^4}{t^2} p_\nu p'_\rho (k'^\nu k^\rho - (k \cdot k') \eta^{\nu\rho} + k^\nu k'^\rho + m^2 \eta^{\nu\rho}) \\
&\quad - \frac{4e^4}{t^2} (p \cdot p') \eta_{\nu\rho} (k'^\nu k^\rho - (k \cdot k') \eta^{\nu\rho} + k^\nu k'^\rho + m^2 \eta^{\nu\rho}) \\
&\quad + \frac{4e^4}{t^2} p'_\nu p_\rho (k'^\nu k^\rho - (k \cdot k') \eta^{\nu\rho} + k^\nu k'^\rho + m^2 \eta^{\nu\rho}) \\
&\quad + \frac{4m^2 e^4}{t^2} \eta_{\nu\rho} (k'^\nu k^\rho - (k \cdot k') \eta^{\nu\rho} + k^\nu k'^\rho + m^2 \eta^{\nu\rho}) \\
&= \frac{4e^4}{t^2} ((p \cdot k') (p' \cdot k) - (k \cdot k') (p \cdot p') + (p \cdot k) (p' \cdot k') + m^2 (p \cdot p')) \\
&\quad - \frac{4e^4}{t^2} (p \cdot p') ((k \cdot k') - 4(k \cdot k') + (k \cdot k') + 4m^2) \\
&\quad + \frac{4e^4}{t^2} ((p' \cdot k') (p \cdot k) - (k \cdot k') (p \cdot p') + (p' \cdot k) (p \cdot k') + m^2 (p \cdot p')) \\
&\quad + \frac{4m^2 e^4}{t^2} ((k \cdot k') - 4(k \cdot k') + (k \cdot k') + 4m^2) \\
&= \frac{8e^4}{t^2} ((p \cdot k') (p' \cdot k) - (k \cdot k') (p \cdot p') + (p \cdot k) (p' \cdot k') + m^2 (p \cdot p') + m^2 - (p \cdot p')) (2m^2 - (k \cdot k')) \\
&= \frac{8e^4}{t^2} ((p \cdot k') (p' \cdot k) + (p \cdot k) (p' \cdot k') - m^2 (p \cdot p') - m^2 (k \cdot k') + 2m^4)
\end{aligned} \tag{8.126}$$

Términos cruzados

Los términos $\mathcal{A}^{(1)} \mathcal{A}^{(2)*}$ y $\mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*}$ son ligeramente más complicados. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{A}^{(1)} \mathcal{A}^{(2)} &= \frac{1}{4} \sum_{spins} \left(\frac{ie^2}{s} \eta_{\mu\nu} \bar{v}(k) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma^\nu v(k') \right) \left(-\frac{ie^2}{t} \eta_{\rho\sigma} \bar{v}(k') \gamma^\sigma v(k) \bar{u}(p) \gamma^\rho u(p') \right) \\
&= \frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \sum_{spins} \bar{v}_a(k) \gamma_{ab}^\mu u_b(p) \bar{u}_c(p') \gamma_{cd}^\nu v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\sigma v_f(k) \bar{u}_g(p) \gamma_{gh}^\rho u_h(p') \\
&= (-1)^{15} \frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \sum_{spins} \gamma_{ab}^\mu u_b(p) \bar{u}_g(p) \gamma_{cd}^\nu v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\sigma v_f(k) \bar{u}_a(k) \gamma_{gh}^\rho u_h(p') \bar{u}_c(p') \\
&= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \not{k}_{fa} \gamma_{ab}^\mu \not{p}_{bg} \gamma_{gh}^\rho \not{p}'_{hc} \gamma_{cd}^\nu \not{k}'_{de} \gamma_{ef}^\sigma \\
&= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} tr(\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\sigma)
\end{aligned} \tag{8.127}$$

Nota que en el paso penúltimo hemos eliminado todos los términos de masa. Para calcular esta traza, utilizaremos el hecho de que:

$$\gamma^\mu \not{p} = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu = p_\nu (2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2p^\mu - \not{p} \gamma^\mu \tag{8.128}$$

y

$$\not{p} \not{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu 2\eta^{\mu\nu} = p^2 = 0 \quad (8.129)$$

Luego, usamos la conservación del momento: $k' = p + k - p'$, para reemplazar k' :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{M}^{(1)} \mathcal{M}^{(2)} &= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\sigma) \\ &= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} - \not{p}') \gamma^\sigma) \end{aligned} \quad (8.130)$$

Ahora computamos cada uno de los términos en las trazas separadamente:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma) &= \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu (2p^\rho - \gamma^\rho \not{p}) \not{p}' (2p^\nu - \not{p} \gamma^\nu) \gamma^\sigma) \\ &= 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{p}' \not{p}) - 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p}' \not{p} \gamma^\nu \not{p}) - 2\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \not{p} \gamma^\rho \not{p} \not{p}' \gamma^\sigma) \\ &\quad + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p} \not{p}' \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &= 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} (2(p \cdot p') - \not{p} \not{p}')) - 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p}' (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p}) \not{p}) \\ &\quad - 2\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \not{p} (2p^\rho - \not{p} \gamma^\rho) \not{p}' \gamma^\sigma) + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho (2(p \cdot p') - \not{p}' \not{p}) \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \end{aligned} \quad (8.131)$$

Entonces, usando $p^2 = m^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma) &= 8(p \cdot p') \text{tr} (\not{k} \not{p}) - 4 \text{tr} (\not{k} p^2 \not{p}') - 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{p}' \not{p}) + 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p}' \gamma^\nu p^2) \\ &\quad - 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{p}' \not{p}) + 2\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} p^2 \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\sigma) + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} 2(p \cdot p') \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p}' \not{p} \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &= 32(p \cdot p')(k \cdot p) - 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{p}' \not{p}) - 4 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{p}' \not{p}) + 2(p \cdot p') \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &= 32(p \cdot p')(k \cdot p) - 8 \text{tr} (\not{k} (2(p \cdot p') - \not{p}' \not{p}) \not{p}) + 2(p \cdot p') \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) \end{aligned} \quad (8.132)$$

El último término se convierte en:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \gamma^\rho \not{p} \gamma^\nu \gamma^\sigma) &= \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} ((2k^\mu - \gamma^\mu \not{k}) \gamma^\rho \not{p} (2\eta^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\nu)) \\ &= 4 \text{tr} (\not{k} \not{p}) - 2\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\gamma^\rho \not{p} \gamma^\sigma \not{k}) - 2\eta_{\mu\rho} \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho \not{p}) + 4\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\rho \not{p} \gamma^\sigma) \\ &= 4 \text{tr} (\not{k} \not{p}) - (2 + 2 - 4)\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\gamma^\rho \not{p} \gamma^\sigma \not{k}) \\ &= 16k \cdot p \end{aligned} \quad (8.133)$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{k} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma) &= 32(p \cdot p')(k \cdot p) - 16(p \cdot p') \text{tr} (\not{k} \not{p}) + 8 \text{tr} (\not{k} \not{p}' \not{p} \not{p}) + 32(p \cdot p')(k \cdot p) \\ &= 32(p \cdot p')(k \cdot p) - 64(p \cdot p')(p \cdot k) + 32(p \cdot p')(k \cdot p) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.134)$$

Procedemos con el cálculo del siguiente término de traza, que es relativamente más fácil:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu \not{k}\gamma^\sigma) &= \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu (2k^\sigma - \gamma^\sigma \not{k})) \\
&= 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p} \not{k} \not{p}'\gamma^\rho) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu \gamma^\sigma \not{k}) \\
&= 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} ((2k^\mu - \gamma^\mu \not{k}) \not{p} \not{k} \not{p}'\gamma^\nu) \\
&= 4 \text{tr} (\not{p} \not{k} \not{p}' \not{k}) - 2\eta_{\mu\nu} \text{tr} (\gamma^\mu \not{k} \not{p} \not{k} \not{p}'\gamma^\nu) \\
&= 4 \text{tr} (\not{p} \not{k} \not{p}' \not{k}) - 8 \text{tr} (\not{k} \not{p} \not{k} \not{p}') \\
&= -4 \text{tr} (\not{p} \not{k} (2(p' \cdot k) - \not{k} \not{p}')) \\
&= -8(p' \cdot k) \text{tr}(\not{p} \not{k}) + 4 \text{tr}(\not{p} \not{k} \not{k} \not{p}') \\
&= -32(p' \cdot k)(p \cdot k)
\end{aligned} \tag{8.135}$$

Continuamos con el siguiente término:

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu \not{p}'\gamma^\sigma) = \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{p}'\gamma^\sigma \not{k}\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu) \tag{8.136}$$

Podemos calcular esta traza fácilmente si notamos que utilizando la permutación cíclica: $k \rightarrow p' \rightarrow p \rightarrow k$ y renombrando los índices ficticios se obtiene:

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu \not{p}'\gamma^\sigma) = -32(p \cdot p')(k \cdot p') \tag{8.137}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(1)} \mathcal{A}^{(2)} &= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} - \not{p}') \gamma^\sigma) \\
&= -\frac{e^4}{4st} (0 - 32(p' \cdot k)(p \cdot k) + 32(p \cdot p')(k \cdot p')) \\
&= -\frac{8e^4}{st} ((p \cdot p')(k \cdot p') - (p' \cdot k)(p \cdot k))
\end{aligned} \tag{8.138}$$

Calculamos ahora el término $\mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \left(\frac{ie^2}{t} \eta_{\rho\sigma} \bar{u}(p') \gamma^\rho u(p) \bar{v}(k) \gamma^\sigma v(k') \right) \left(-\frac{ie^2}{s} \eta_{\mu\nu} \bar{v}(k') \gamma^\nu u(p') \bar{u}(p) \gamma^\mu v(k) \right) \\
&= \frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \sum_{\text{spins}} \bar{u}_a(p') \gamma_{ab}^\rho u_b(p) \bar{v}_c(k) \gamma_{cd}^\sigma v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\nu u_f(p') \bar{u}_g(p) \gamma_{gh}^\mu u_h(k) \\
&= (-1)^{15} \frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \sum_{\text{spins}} \gamma_{ab}^\rho u_b(p) \bar{u}_g(p) \gamma_{cd}^\sigma v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\nu u_f(p') \bar{u}_a(p') \gamma_{gh}^\mu u_h(k) \bar{v}_c(k) \\
&= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \sum_{\text{spins}} \gamma_{ab}^\rho u_b(p) \bar{u}_g(p) \gamma_{gh}^\mu u_h(k) \bar{v}_c(k) \gamma_{cd}^\sigma v_d(k') \bar{v}_e(k') \gamma_{ef}^\nu u_f(p') \bar{u}_a(p') \\
&= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\gamma^\rho \not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\sigma \not{k}'\gamma^\nu \not{p}') \\
&= -\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (\not{p}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\sigma \not{k}'\gamma^\nu \not{p}'\gamma^\rho)
\end{aligned} \tag{8.139}$$

Cuando calculamos el termino anterior, calculamos la cantidad:

$$\frac{e^4}{4st} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \text{tr} (k\gamma^\mu \not{p}\gamma^\rho \not{p}'\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\sigma) = \frac{8e^4}{st} ((p \cdot p')(k \cdot p') - (p' \cdot k)(p \cdot k)) \tag{8.140}$$

Por lo que ahora basta con cambiar $p \leftrightarrow k$ y $p' \leftrightarrow k'$ para obtener el resultado final:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*} = -\frac{8e^4}{st} ((k \cdot k') (p \cdot k') - (k' \cdot p) (k \cdot p)) \quad (8.141)$$

Cogiendo todo lo anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}^{(1)}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}^{(2)}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(1)} \mathcal{A}^{(2)*} + \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \mathcal{A}^{(2)} \mathcal{A}^{(1)*} \\ &= \frac{8e^4}{s^2} ((p \cdot p') (k \cdot k') + (p' \cdot k) (p \cdot k') + m^2 (k' \cdot p') + m^2 (k \cdot p) + 2m^4) \\ &\quad + \frac{8e^4}{t^2} ((p \cdot k') (p' \cdot k) + (p \cdot k) (p' \cdot k') - m^2 (p \cdot p') - m^2 (k \cdot k') + 2m^4) \\ &\quad - \frac{8e^4}{st} ((p \cdot p') (k \cdot p') - (p' \cdot k) (p \cdot k)) - \frac{8e^4}{st} ((k \cdot k') (p \cdot k') - (k' \cdot p) (k \cdot p)) \end{aligned} \quad (8.142)$$

Eliminando los terminos que van con la masa obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{8e^4}{s^2} ((p \cdot p') (k \cdot k') + (p' \cdot k) (p \cdot k')) + \frac{8e^4}{t^2} ((p \cdot k') (p' \cdot k) + (p \cdot k) (p' \cdot k')) \\ &\quad - \frac{8e^4}{st} ((p \cdot p') (k \cdot p') - (p' \cdot k) (p \cdot k) + (k \cdot k') (p \cdot k') - (k' \cdot p) (k \cdot p)) \end{aligned} \quad (8.143)$$

Sección eficaz diferencial

Ahora, movemos el marco de referencia al centro de masa. Establecemos el ángulo entre los electrones del estado inicial y el estado final como θ . Los diferentes cuatro-momentos de las partículas del proceso son:

$$p = (E, \mathbf{p}), \quad k = (E, -\mathbf{p}), \quad p' = (E, \mathbf{p}'), \quad k' = (E, -\mathbf{p}') \quad (8.144)$$

Entonces, establecemos $\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2 = E^2$ y calculamos todos los productos internos y las cantidades t y s de la última ecuación del apartado anterior:

- $p \cdot k = E^2 + \mathbf{p}^2 = 2E^2$
- $p' \cdot k = E^2 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} = E^2 + E^2 \cos \theta = E^2(1 + \cos \theta)$
- $k' \cdot k = E^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} = E^2(1 - \cos \theta)$
- $p \cdot p' = E^2(1 - \cos \theta)$
- $p \cdot k' = E^2(1 + \cos \theta)$
- $p' \cdot k' = E^2 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' = 2E^2$
- $t = (p - p')^2 = 2m^2 - 2p \cdot p' = -2E^2(1 - \cos \theta)$
- $s = (p + k)^2 = 4E^2$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{64\pi^2 4E^2} \left((1 + \cos^2 \theta) + \frac{2(4 + (1 + \cos \theta)^2)}{(1 - \cos \theta)^2} \right) + \frac{e^4}{64\pi^2 4E^2} \left(\frac{1}{1 - \cos \theta} (2(1 - \cos^2 \theta) - 4(1 + \cos \theta)) \right) \\
&= \frac{e^4}{64\pi^2 4E^2} \left((1 + \cos^2 \theta) + \frac{2(4 + (1 + \cos \theta)^2)}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{1 - \cos \theta} - \frac{4(1 + \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \right) \\
&= \frac{e^4}{64\pi^2 2E^2} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1 + \cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2 \cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \right) \\
&= \frac{e^4}{64\pi^2 2E^2} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{1 + \cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} - \frac{2 \cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)
\end{aligned} \tag{8.145}$$

8.4.3. Dispersión Compton

Vamos a considerar ahora un tipo de proceso diferente, la dispersión electrón-fotón que involucra la suma de los dos diagramas de Feynman en la Fig.8.3. Usando las reglas de Feynman de QED, la amplitud invariante del proceso está dada por

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \bar{u}(p'_1, r') (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(p'_2, \lambda') \frac{i(p_1 + p_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(p_2, \lambda) u(p_1, r) \\
&\quad + \bar{u}(p'_1, r') (-ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(p_2, \lambda) \frac{i(p_1 - p'_2 + m)}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(p'_2, \lambda') u(p_1, r) \\
&= -ie^2 \bar{u}(p'_1, r') \epsilon_\mu^*(p'_2, \lambda') \epsilon_\nu(p_2, \lambda) \left[\frac{\gamma^\mu (p_1 + p_2 + m) \gamma^\nu}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (p_1 - p'_2 + m) \gamma^\mu}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right] u(p_1, r)
\end{aligned}$$

Nótese que en las dos amplitudes el orden de los espinores es el mismo luego deben sumarse. Esta expresión puede simplificarse, teniendo en cuenta que $p_1^2 = m^2$ y $p_2^2 = p_2'^2 = 0$ con lo que $(p_1 + p_2)^2 - m^2 = 2p_1 \cdot p_2$ y $(p_1 - p'_2)^2 - m^2 = -2p_1 \cdot p'_2$. Por otra parte, en el numerador de los propagadores podemos usar que

$$(p_1 + m) \gamma^\nu u(p_1) = (2p_1^\nu - \gamma^\nu p_1 + \gamma^\nu m) u(p_1) = 2p_1^\nu u(p_1) - \gamma^\nu (p_1 - m) u(p_1) = 2p_1^\nu u(p_1) \tag{8.30}$$

Figura 8.3:

Diagramas de Feynman correspondientes a la dispersión Compton electrón-fotón.

De forma totalmente análoga al ejemplo anterior, ahora podemos promediar sobre el spin y la polarización de las partículas iniciales y sumar sobre las finales. Para los fermiones usamos el mismo truco, mientras que para los fotones puede demostrarse que

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^*(p, \lambda) \epsilon_\nu(p, \lambda) \rightarrow -\eta_{\mu\nu} \tag{8.32}$$

Esta expresión no es una identidad estricta, pero se puede demostrar que es válida siempre que aparezca en el interior de una amplitud de QED. Utilizando las expresiones anteriores llegamos a

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p_1 \cdot p'_2}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p'_2} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p'_2} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p'_2} \right)^2 \right] \quad (8.33)$$

que permite calcular la sección eficaz del proceso. En el sistema laboratorio, la sección eficaz diferencial viene dada por la llamada fórmula de Klein-Nishina

$$\frac{d\sigma_{LAB}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \quad (8.34)$$

donde $\omega\omega'$ son las energías inicial y final del fotón relacionadas por la fórmula de Compton

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta)$$

con θ el ángulo entre la dirección del fotón incidente y el saliente.

8.4.4. Sección eficaz de aniquilación $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

A partir de la amplitud invariante calculada anteriormente en (8.14) vamos a calcular la sección eficaz de aniquilación en el sistema centro de masas usando (7.75). Necesitamos por tanto evaluar $|\mathcal{M}|^2$. Para ello necesitamos obtener los complejos conjugados de términos de la forma $\bar{v}\gamma^\mu u$, que usando $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, se escribe

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger (\gamma^0)^\dagger v = u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 v = u^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v = \bar{u}\gamma^\mu v \quad (8.15)$$

Por tanto, podemos escribir (por simplicidad hemos quitado la etiqueta de spin)

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} (\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu v(p'_2) \bar{v}(p'_2) \gamma^\nu u(p'_1)) (\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2)) \quad (8.16)$$

En la mayor parte de los casos, los haces de electrones y positrones iniciales no están polarizados, por tanto la sección eficaz que medimos es un promedio sobre los estados de spin r y s de los electrones y positrones iniciales. Por otra parte, los detectores de muones no son sensibles al spin de los mismos, por tanto la sección eficaz es la suma sobre los estados de spin finales r' y s' . Es decir, tenemos que calcular

$$\frac{1}{2} \sum_r \frac{1}{2} \sum_s \sum_{r',s'} |\mathcal{M}(r, s \rightarrow r', s')|^2 \quad (8.17)$$

Estas sumas como veremos simplifican enormemente el cálculo de la sección eficaz. En efecto, podemos emplear para la suma en estados de spin las relaciones (5.59)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u(p, s) \bar{u}(p, s) &= p + m \\ \sum_{s=1,2} v(p, s) \bar{v}(p, s) &= p - m \end{aligned}$$

Así, cogiendo el segundo factor de (8.16) tenemos que escribiendo explícitamente los índices espinoriales

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \bar{v}(p_2, s) \gamma_\mu u(p_1, r) \bar{u}(p_1, r) \gamma_\nu v(p_2, s) &= \sum_{r,s} \bar{v}_a(p_2, s) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1, r) \bar{u}_c(p_1, r) (\gamma_\nu)_{cd} v_d(p_2, s) \\ &= (p_2 - m_e)_{da} (\gamma_\mu)_{ab} (p_1 + m_e)_{bc} (\gamma_\nu)_{cd} = \text{tr} [(p_2 - m_e) \gamma_\mu (p_1 + m_e) \gamma_\nu] \end{aligned}$$

Procedemos de forma análoga con el primer factor y obtenemos

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} \text{tr} [(p'_1 + m_\mu) \gamma^\mu (p'_2 - m_\mu) \gamma^\nu] \text{tr} [(p_2 - m_e) \gamma_\mu (p_1 + m_e) \gamma_\nu] \quad (8.21)$$

Utilizando ahora las propiedades de la traza de las matrices gamma tenemos

$$\text{tr} [(p_2 - m_e) \gamma_\mu (p_1 + m_e) \gamma_\nu] = 4 [p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - \eta_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2 + m_e^2)] \quad (8.22)$$

y

$$\text{tr} [(p'_1 + m_\mu) \gamma^\mu (p'_2 - m_\mu) \gamma^\nu] = 4 [p_1'^\mu p_2'^\nu + p_1'^\nu p_2'^\mu - \eta^{\mu\nu} (p'_1 \cdot p'_2 + m_\mu^2)] \quad (8.23)$$

Multiplicando los dos factores obtenemos directamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{8e^4}{(p_1 + p_2)^4} [(p_1 \cdot p'_1) (p_2 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p'_2) (p_2 \cdot p'_1) - (p'_1 \cdot p'_2) (p_1 \cdot p_2 + m_e^2) \\ & - (p_1 \cdot p_2) (p'_1 \cdot p'_2 + m_\mu^2) + 2(p_1 \cdot p_2 + m_e^2) (p'_1 \cdot p'_2 + m_\mu^2)] \end{aligned}$$

Podemos ahora considerar la siguiente aproximación. Puesto que la masa del muón es mucho mayor que la masa del electrón, la producción de muones requiere electrones ultrarrelativistas, por lo que podemos despreciar la masa del electrón y suponer $m_e = 0$. En ese caso la expresión anterior se simplifica de forma

Figura 8.4:

Co-
li-
sión
en
el
sis-

tema centro de masa (ver Fig.8.2), tenemos que en el estado inicial $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ y por tanto como ambas partículas tienen la misma masa $E_1 = E_2$. De la misma forma en el estado final $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$ y $E'_1 = E'_2$. La energía total en el centro de masas será $\sqrt{s} = E_1 + E_2 = 2E_1$ y por conservación de la energía $E_1 = E'_1$. Por tanto

de
ma-
sas
con
donde

$\vec{p}'_1 =$
 $\vec{p}_2 \cdot$
 $\vec{p}'_2 =$

$\cos \theta$
y finalmente

$$p_1 \cdot p'_1 = p_2 \cdot p'_2 = E_1^2 - E_1 |\vec{p}'_1| \cos \theta$$

donde hemos usado que $m_e = 0$. Por otra parte,

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E_1^2 + E_1 |\vec{p}'_1| \cos \theta$$

$$p_1 \cdot p_2 = 2E_1^2$$

El momento transferido que aparece en el propagador será

$$(p_1 + p_2)^2 = 4E_1^2$$

con lo que podemos escribir finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{8e^4}{16E_1^4} [(E_1^2 - E_1 |\vec{p}'_1| \cos \theta)^2 + (E_1^2 + E_1 |\vec{p}'_1| \cos \theta)^2 + 2E_1^2 m_\mu^2] \\ = & e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned}$$

Por tanto, la sección eficaz diferencial de aniquilación en el sistema centro de masas será

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{CM}}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}'_1|}{|\vec{p}_1|} \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{256\pi^2 E_1^2} \frac{|\vec{p}'_1|}{E_1} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) \cos^2 \theta \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{16E_1^2} \sqrt{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right)} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_1^2}\right) \cos^2 \theta \right]\end{aligned}$$

que como vemos es de orden α^2 . Integrando la sección eficaz diferencial en $d\Omega = d\phi d\cos\theta$ obtenemos la sección eficaz total en función de la energía total en el sistema centro de masas

$$\sigma_{CM} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right)} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right) \quad (8.28)$$

Vemos que la sección eficaz es nula para $s < 4m_\mu^2$ puesto que en ese caso, el par electrón-positrón no tiene energía suficiente para producir el par muón-antimuón.

Bibliography

Aquí las referencias que ha usado Dobado en clase.

- [1] Michele Maggiore. «A Modern Introduction to Quantum Field Theory». En: Oxford University Press, 2005. Cap. Tema 2 (vid. pág. 3).
- [2] Antonio Dobado. *Notas tomadas de la pizarra durante la clase*. Clase de campos cuánticos, Universidad Complutense de Madrid. 2024 (vid. págs. 23, 35, 49, 63, 69, 87).
- [3] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boulder, CO: Westview Press, 1995 (vid. pág. 28).
- [4] Antonio L. Maroto e Ignazio Scimemi. *Apuntes de años anteriores*. Clase de campos cuánticos, Universidad Complutense de Madrid. 2024 (vid. pág. 77).