分析力学回顾

PhyDuck

2022 年 12 月 26 日

目录

1 低速宏观运动的基本原理

1.1 拉格朗日方程

如果在保守力场中，质点受力

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{1}$$

其中，笛卡尔坐标系下 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，牛顿运动学方程可以写作

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{2}$$

一般来说，这个方程在 U 在笛卡尔坐标系中有简单的形式时，比较好用，但是在具有轴对称的力场或是球对称的情况下，例如 $U = U(r)$ 时，求解较为困难，需要使用球坐标系，再将笛卡尔坐标系的形式转化为球坐标系的形式。这样做比较的复杂，书中的一句话非常的好，也阐明了我们建立广义坐标的意义：

在处理不同问题时，采用什么坐标系更方便，应该具体问题具体分析，而不应先入为主地把笛卡尔坐标系放到一个特殊的地位。

所以我们需要做的就是来考虑如何针对具体问题的性质，直接建立运动方程。如同在笛卡尔坐标系内一样，一个质点在 r 维空间中运动，我们需要 Nr 个变量来描述这个质点的位置，把这 Nr 个变量分别标记为

$$q_1^1, q_2^1 \cdots q_r^1 \cdots q_1^N, q_2^N \cdots q_r^N$$

,q 表示**广义坐标**。广义坐标没有什么特殊的，只是讨论坐标的一般情况，比如在笛卡尔坐标系中，就是 x, y, z，在球坐标中就是 r, θ, ϕ。

考虑保守力场，从牛顿第二定律 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$ 出发：对于左边，考虑低速宏观运动，没有相对论效应，且质量不变，则有：

$$\begin{aligned} m\ddot{q} &= \frac{\mathrm{d}(m\dot{q})}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}})(\frac{1}{2}m\dot{q}^2) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \end{aligned} \tag{3}$$

考虑到 U 不是广义速度的函数（只和坐标有关），(3) 还可以写作：

$$m\ddot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}}$$

对于右边：考虑到动能 T 与广义坐标 q 无关，可以写作：

$$-\frac{\partial U}{\partial q}=\frac{\partial(T-U)}{\partial q}$$

于是有：

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}}$$

不妨定义

$$L=T-U \tag{4}$$

于是有：

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q_\alpha}}\quad \alpha=1,2,\ldots Nr \tag{5}$$

(4) 称为拉格朗日函数，而 (5) 称为拉格朗日方程，它由牛顿运动方程推导而来，但它是直接从广义坐标 q 写出的，而且是一个标量方程，不需要矢量和几何工具就可以解，这就是比牛顿方程优越的地方。

以上的证明没有考虑到系统收到约束的情形，如果系统受到理想约束，列出 $Nr-s$ 个约束方程，系统的自由度就变成了 s，只需要 s 个广义坐标就可以描述系统的运动状态，类似的，有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q_\alpha}}\quad \alpha=1,2,\ldots s \tag{6}$$

1.2 最小作用量原理

无论是牛顿运动方程还是拉格朗日方程，目的都是寻求系统真实的运动状态。也就是说，我们是要在无数种一切满足条件的可能运动中“挑选”出实际发生的运动状态。现在想知道：如何通过数学和物理的方法来解答这个问题呢？我们不妨让每一种运动状态对应一个数，让真实的运动状态对应**最小**的这个数。我们称这个数为**作用量**。

最小作用量原理表述为：一个物理系统实际发生的真实运动状态是所对应的作用量具有最小值的那个状态，这是物理学中一个普适的原理。

下面来考虑作用量的形式。最小作用量原理是去寻求物体真实运动路径的，而作用量是在给定的初值条件下，在一切可能的路径下给出数，这仅仅依赖于路径，而**与时间无关**。所以作用量可以写作一个函数对时间的积分，这样积分出来的函数就不显含时间了。

$$S=\int_{t_1}^{t_2}f(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

其中，S 即为作用量，$\boldsymbol{q}(t)$ 表示 s 个广义坐标 $q_\alpha(t)(\alpha=1,2,\cdots,s)$。现在根据最小作用量原理导出 f 的条件：

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\int_{t_1}^{t_2} f(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta f(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\delta\dot{q_\alpha})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

使用分部积分法，可以得到

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\delta\dot{q_\alpha}\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\ \mathrm{d}\delta q_\alpha &= \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\delta q_\alpha\right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\delta q_\alpha\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\delta q_\alpha\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

代回原方程，则有

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\right)\delta q_\alpha\ \mathrm{d}t$$

由最小作用量原理，作用量应该取最小值，此时一阶变分应为 0，即：

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}\right)\delta q_\alpha\ \mathrm{d}t=0$$

由于 δq 的任意性

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q_\alpha}}=0 \tag{8}$$

这称为**拉格朗日方程**，比较 (6) 与 (8)，容易知道他们具有一样的形式，其中函数 f 就是 $f=L=T-V$ 拉格朗日函数。与上一节以牛顿第二定律为基础的推导不同，本节是以最小作用量原理为基本原理进行推到的。

“这是适用于一切物理系统的基本原理，它把不同系统的特点集中在一个标量函数：**拉格朗日方程**上！”

2 低速宏观运动规律的正则形式–哈密顿方程

由拉格朗日方程 $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}=0$ 不难看出：广义坐标和广义速度的地位并不是平等的，这个公式的形式并不是对称的，为此，可以改用**共轭物理量**（乘积为能量）来描述系统的状态，我们将利用勒让德变换导出对称的方程，这称为正则方程。

2.1 勒让德变换

我们将利用勒让德变换来建立正则方程。

对于函数 $f(x,y)$, 其全微分为

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \mathrm{d}y = u\ \mathrm{d}x + v\ \mathrm{d}y$$

式中以 (x,y) 为自变量。如果我们需要将自变量从 (x,y) 换为 (u,y) , 可引入变换:

$$g = f - ux$$

此时

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g &= -u\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}u + \mathrm{d}f \\ &= -u\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}u + u\ \mathrm{d}x + v\ \mathrm{d}y \\ &= -x\ \mathrm{d}u + v\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

这样，就获得了一个以 (u,y) 为自由变量的函数 g. 实际上，在热力学中就有这样的例子:

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$$

作勒让德变换

$$F = U - TS$$

有

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$$

2.2 哈密顿函数的建立

下面利用勒让德变换建立哈密顿函数。首先，写出拉格朗日函数的微分表达式:

$$\mathrm{d}L = \sum_{\alpha=1}^{s}(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t}\ \mathrm{d}t \tag{9}$$

拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}$$

与牛顿力学方程比较:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

定义：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} = p_\alpha \tag{10}$$

称为广义动量，

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = f_\alpha \tag{11}$$

称为广义力。这样，

$$\mathrm{d}L = \sum_{\alpha=1}^{s} (\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}q_\alpha + p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t}\ \mathrm{d}t$$

容易知道：广义坐标与广义动量的乘积应该有广义能量的量纲，所以广义坐标和广义动量是一对正则物理量，我们要将自变量换为 (q_α, p_α) 为此，构造勒让德变换：

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q_\alpha} - L \tag{12}$$

(12) 式称为哈密顿函数或哈密顿量。则：

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{s} (-\dot{p_\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + \dot{q}_\alpha \mathrm{d}p_\alpha) - \frac{\partial L}{\partial t}\ \mathrm{d}t \tag{13}$$

而 $\mathrm{d}H$ 还可以写作：

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \mathrm{d}p_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\ \mathrm{d}t \tag{14}$$

可以得到：

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

于是 (13) 还可以表示为：

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{s} (-\dot{p_\alpha} \mathrm{d}q_\alpha + \dot{q}_\alpha \mathrm{d}p_\alpha) + \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d}t \tag{15}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s} \underbrace{(-\dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

这样则有：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

如果哈密顿量 H 中不显含时间，$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$，则：$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$，哈密顿量 H 在时间变化上为一个常数，也称为正则方程的广义能量积分。由于 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ 所以如果拉格朗日量 L 不显含时间，则哈密顿

量 H 就不显含时间, 就是守恒量。将广义动量的定义 $p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 代入哈密顿量的定义 (12) 得到

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L$$

由于势能和广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 无关, 则: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$, 再由于动能为关于 $\dot{q}_\alpha$ 的二次齐次函数, 根据附录的（附录见后）欧拉齐次函数定理, 可得

$$\begin{aligned}H&=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=2T-(T-V)\\&=T+V=E\end{aligned}$$

这就说明了，哈密顿量在势能不依赖于速度的前提下就是系统的机械能, 是一守恒量或运动常数.

（这一小部分内容来自《力学讲义》[1]）

2.3 哈密顿正则方程

有了哈密顿函数，对比 (13),(14)，则:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\\ \dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\end{array}\right. \tag{16}$$

(16) 式就是哈密顿正则方程，这个方程中 p_α 与 q_α 具有相同的地位。拉格朗日方程中，是关于 s 个函数 $q_\alpha(t)$ 的二阶微分方程，而哈密顿方程是关于 2s 个函数 $p_\alpha(t), p_\alpha(t)$ 的一阶微分方程，两者实际上是等价的，都可以作为系统的运动方程。

A 齐次函数的欧拉定理

（摘录于《力学讲义》[1]）

所谓 m 次齐次函数是指满足下列关系的函数:

$$f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n\right)=\lambda^m f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \tag{17}$$

如果函数 f 对各变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可连续偏微商, 对上式两端对 λ 求微商, 由 Leibniz 链式法则, 上式中左端为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_1\right)}\frac{\partial\left(\lambda x_1\right)}{\partial\lambda} + \frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_2\right)}\frac{\partial\left(\lambda x_2\right)}{\partial\lambda} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_n\right)}\frac{\partial\left(\lambda x_n\right)}{\partial\lambda} \\
& x_1\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_1\right)} + x_2\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_2\right)} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_n\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_i\right)}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

式 (18) 应等于 (17) 式中右端对 λ 求的微商值: $m\lambda^{m-1}f$, 亦即

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda x_i\right)} = m\lambda^{m-1}f \tag{19}
$$

在式 (19) 中, 令 $\lambda = 1$, 则可得到齐次函数的欧拉定理:

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = mf
$$

例如, 当 f 为动能 $f = T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ 时, 则其为 $m = 2$ 的二次齐次函数, 则有如下常用关系式:

$$
\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} = 2T
$$

B 经典力学特点表

经典力学类型	创立时间	类型	对应的空间	方程类型
牛顿力学	1687 年	矢量力学	欧氏空间	二节微分方程
拉格朗日力学	1788 年	分析力学	位形空间	s 个二阶偏微分方程组
哈密顿力学	1834 1835 年	分析力学	相空间	2s 个一阶偏微分方程组

表 1: 经典力学特点表

参考文献

[1] 赵亚溥. 力学讲义[M]. 中国科学院大学: 科学出版社, 2018.