



---

# RflySim 底层飞行控制算法 开发系列课程

## 第九讲 姿态控制器设计实验



# 大纲

---

1. 实验原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 小结



# 实验原理

## □ 基本概念

### (1) 系统时域特性

对二阶系统 
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $0 < \zeta < 1$ ，阶跃响应曲线如左图所示

1) 超调量 
$$M_p = \frac{x_o(t_p) - x_o(\infty)}{x_o(\infty)} * 100\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} * 100\%$$

#### 2) 调节时间

在初步分析系统时，经常采用下列公式计算调节时间  $t_s$ 。当阻尼比  $< 0.8$  时

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} \text{ (取5\% 误差带)} \quad t_s = \frac{4.5}{\xi\omega_n} \text{ (取2\% 误差带)}$$

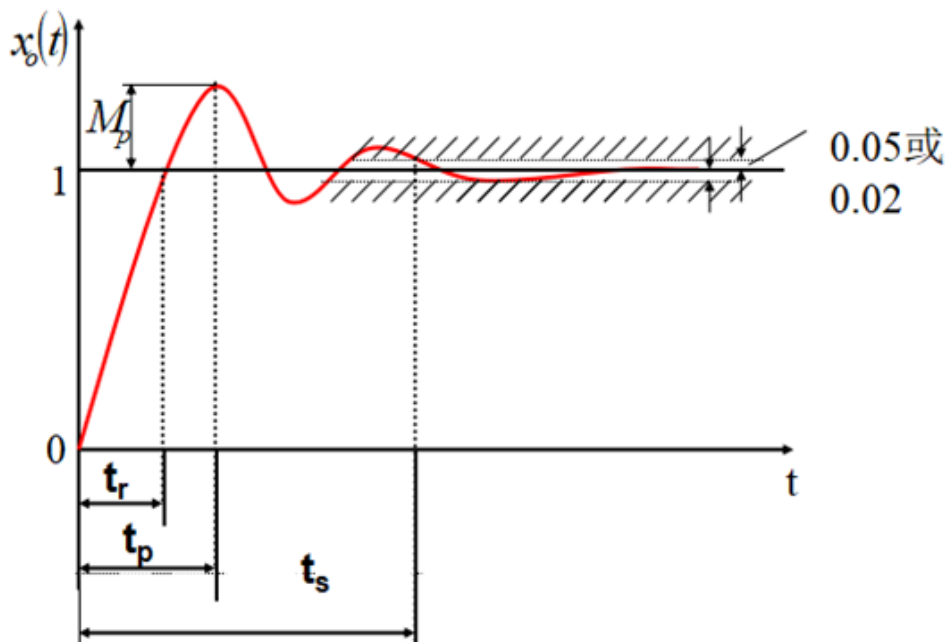


图. 二阶系统阶跃响应



# 实验原理

## □ 基本概念

### (2) Bode图 and 稳定裕度

Bode图也叫对数频率特性曲线，它将开环幅相特性画在对数坐标上。对数稳定判据根据开环对数幅频与对数相频曲线的相互关系来判别闭环系统稳定性。

相角裕度 $\gamma$ :  $L(\omega)=0\text{dB}$ 处的相频与 $-\pi$ 的差角，即：

$$\gamma = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) - (-180^\circ)$$

其中： $\omega_c$ 表示截止频率， $L(\omega_c)=0\text{dB}$ 。

模稳定裕度 $h$ ： $\angle G(j\omega_1)H(j\omega_1)$ 为 $-\pi$ 时，对应的对数幅频的绝对值，即：

$$h(\text{dB}) = 20\lg \left| \frac{1}{G(j\omega_1)H(j\omega_1)} \right| = -20\lg |G(j\omega_1)H(j\omega_1)|$$

在闭环系统稳定的条件下，系统的 $\gamma$ 和 $h$ 越大，反应系统的稳定程度越高。稳定裕度也间接反映了系统动态过程的平稳性，裕度大意为着超调小，振荡弱，“阻尼”大。一般要求：

$$\gamma > 40^\circ$$

$$h > 6\text{dB}$$

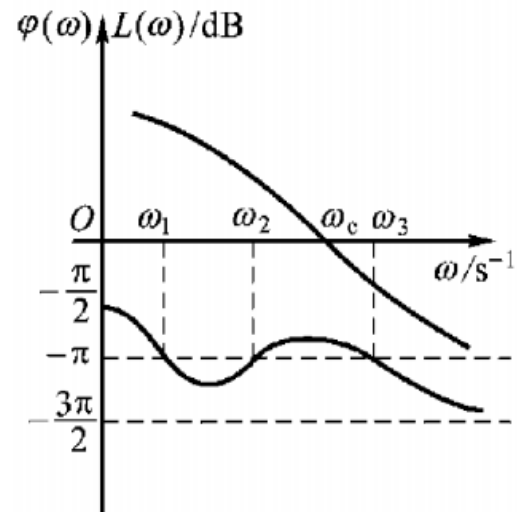


图. 稳定裕度

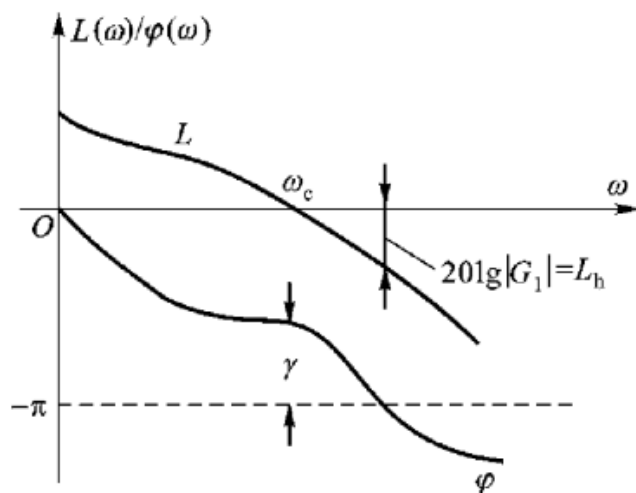


图. 对数频率特性曲线





# 实验原理

## □ 底层控制框架

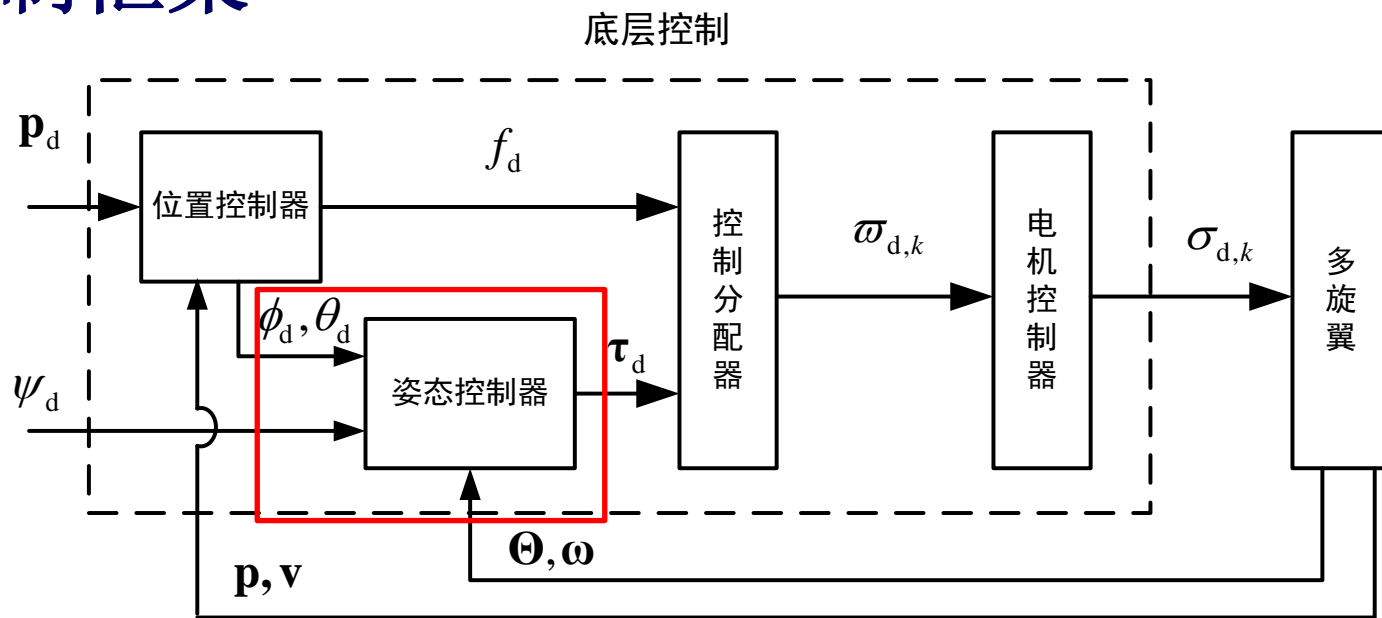


图. 多旋翼全自主控制闭环框图

欠驱动系统：4个输入（总拉力 $f$ 和三轴力矩 $\tau$ ）控制6个输出（位置 $p$ 和姿态角 $\Theta$ ）。设计多旋翼飞行控制器时，可以采用内外环的控制策略，其中内环对多旋翼飞行器姿态角进行控制，而外环对多旋翼飞行器的位置进行控制。由内外环控制实现多旋翼飞行器的升降、悬停、侧飞等飞行模态。



# 实验原理

## □ 姿态控制

多旋翼姿态控制是飞行器位置控制的基础。常见的刚体姿态描述方法为欧拉角描述方法和旋转矩阵描述方法。

表. 姿态参数性能对比

姿态参数	优点	缺点
欧拉角	无冗余参数，物理意义明确	俯仰角为90度时存在奇异，存在大量超越函数运算，死锁；偏航角从 $2\pi$ 到0的过渡问题。
旋转矩阵	无奇异，无超越函数运算，可用于连续旋转表示，全局且唯一，便于插值	六个冗余参数





## □ 姿态控制

姿态控制的目标：已知参考姿态角  $\Theta_d = [\Theta_{hd}^T \ \psi_d]^T$ ，设计控制器使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_\Theta(t)\| = 0$ ，其中  $\mathbf{e}_\Theta \triangleq \Theta - \Theta_d$ 。这里  $\Theta_{hd}$ 、 $\psi_d$  是由遥控器给定的。为了达到这个目的，我们先针对

$$\dot{\Theta} = \omega$$

设计角速度的期望  $\omega_d$  为

$$\omega_d = -\mathbf{K}_\Theta \mathbf{e}_\Theta$$

其中  $\mathbf{K}_\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是正定的常值对角矩阵，所有元素都大于0。以上两式构成了角度控制环。接下来的任务是针对

$$\mathbf{J}\dot{\omega} = \tau$$

设计转矩的期望  $\tau_d$

$$\tau_d = -\mathbf{K}_{\omega p} \mathbf{e}_\omega - \mathbf{K}_{\omega i} \int \mathbf{e}_\omega - \mathbf{K}_{\omega d} \dot{\mathbf{e}}_\omega$$

其中  $\mathbf{e}_\omega \triangleq \omega - \omega_d$ ， $\mathbf{K}_{\omega p}, \mathbf{K}_{\omega i}, \mathbf{K}_{\omega d} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 。以上两式构成了角速度控制环。



# 实验原理

## □ 控制系统校正

下面主要介绍串联校正。加入串联校正的系统结构图如图所示。其中 $G_c(s)$ 表示串联校正装置的传递函数, $G(s)$ 表示系统不变部分的传递函数。在工程实践中常用的串联校正有超前校正、滞后校正和滞后-超前校正。

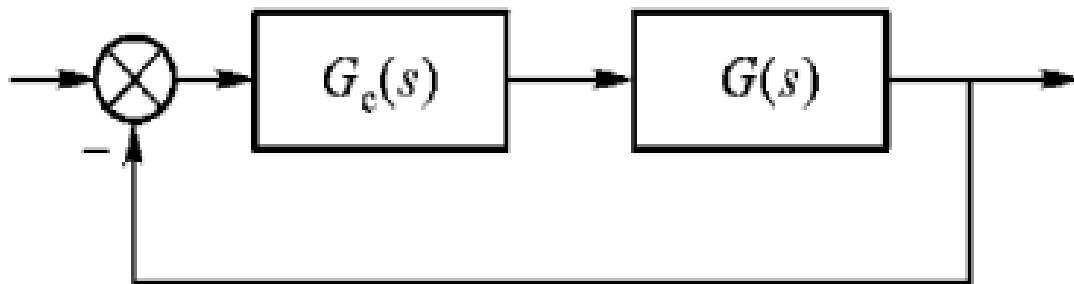


图. 系统串联校正







# 实验原理

## □ 控制系统校正

### (1) 相位超前校正

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a > 1)$$

特点: 提供正的相移。

相位超前校正主要发生在频段  $\left(\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}\right)$

而且超前的最大值为:  $\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$

这一最大值发生在对数频率特性曲线的几何中心处, 对应的角频率为:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$$

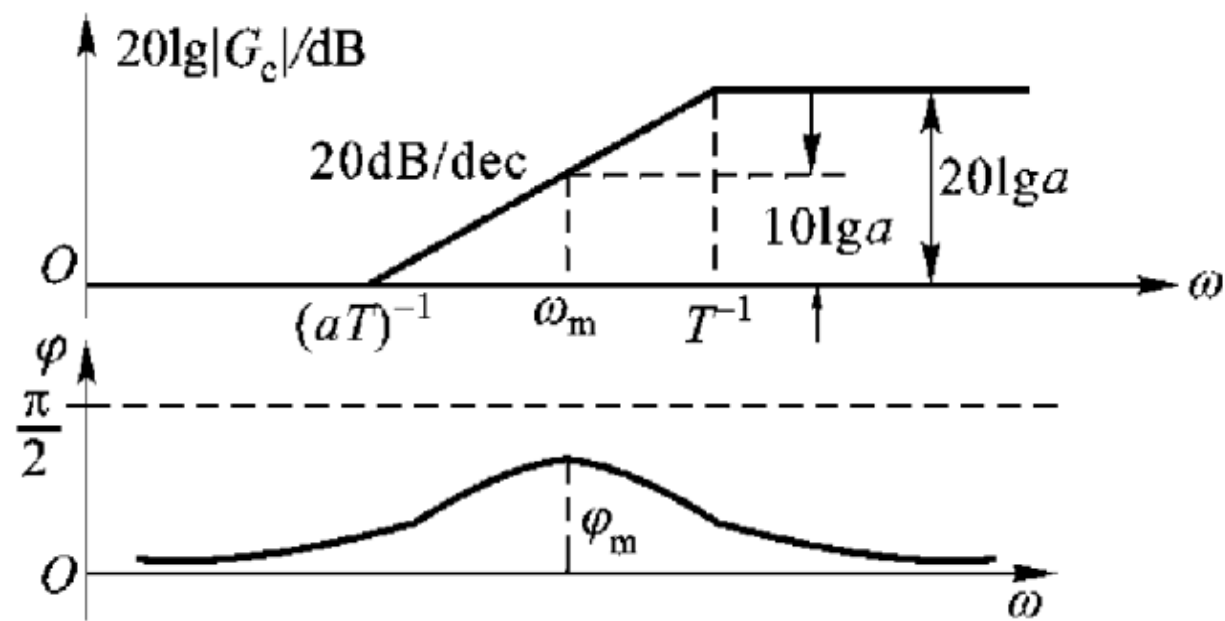


图. 超前校正幅频曲线





# 实验原理

## □ 控制系统校正

### (2) 相位滞后校正

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} \quad (b < 1)$$

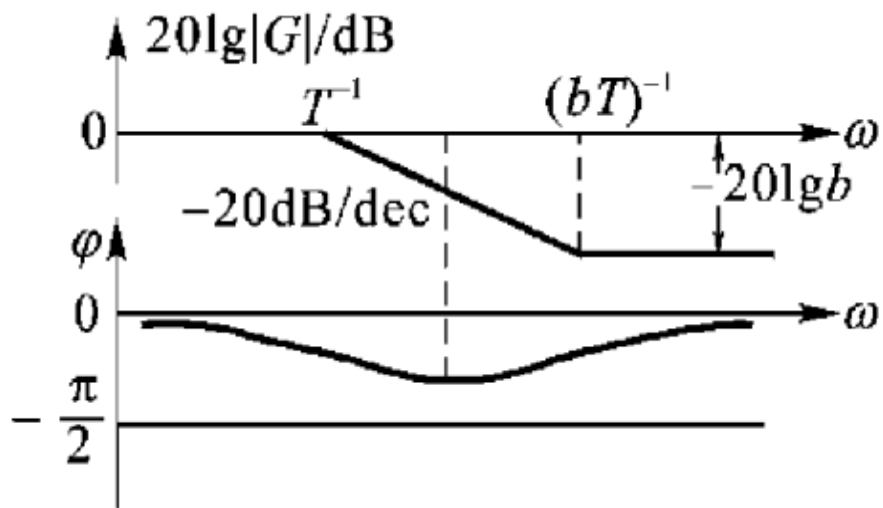


图. 滞后校正幅频曲线

### (3) 相位滞后超前校正

$$G_c(s) = \frac{(1 + bT_1s)(1 + aT_2s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}$$

其中  $a > 1, b > 1$ , 且有  $bT_1 > aT_2$

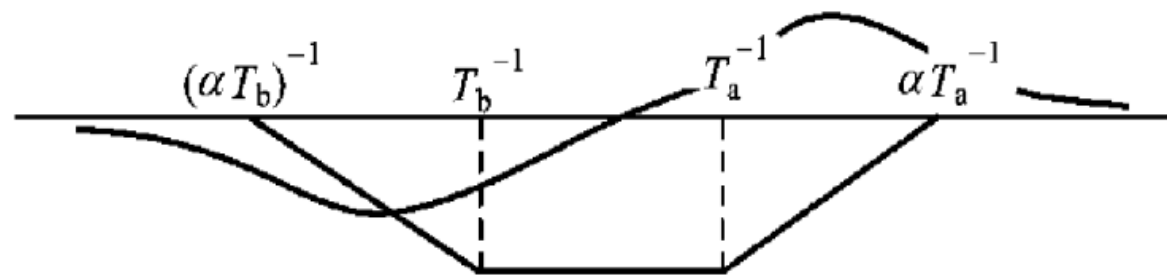


图. 滞后超前校正幅频曲线





# 实验原理

## □ 控制分配

简单来说，控制分配问题可描述为：给定  $\mathbf{u}_v(t)$

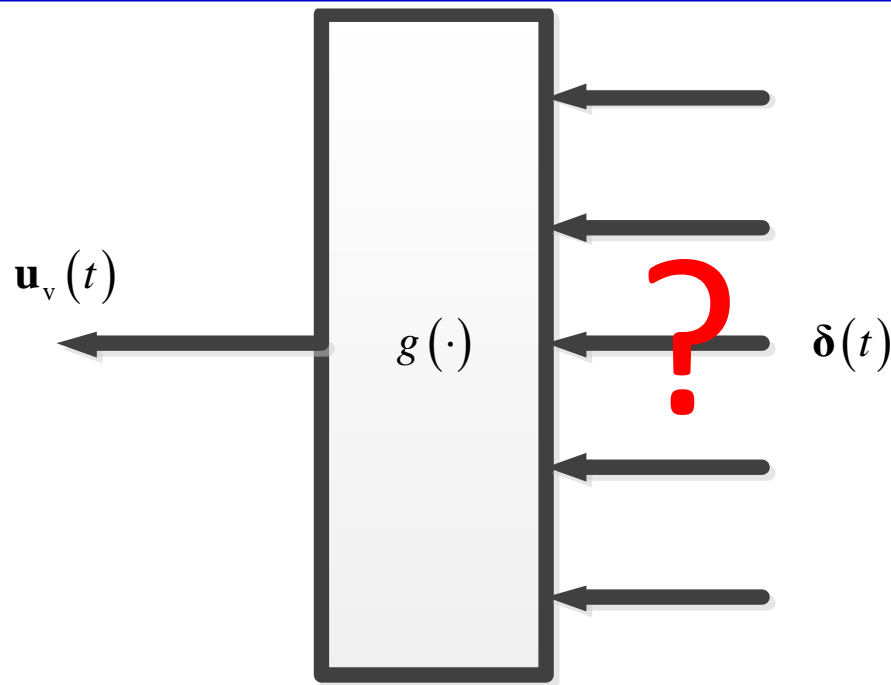
寻找  $\delta(t)$  使得

$$\mathbf{u}_v(t) = g(\delta(t))$$

其中  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  为被控系统中执行机构控制输入到伪控制输入的映射。常假设操纵机构偏转量与其产生的控制力矩之间为线性函数关系，则可得到线性控制分配问题

$$\mathbf{u}_v(t) = \mathbf{B}\delta(t)$$

其中  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  为已知控制效率阵。



- 上层控制和底层控制分离
- 有效分配，防止饱和
- 通过分配，提高对故障及损伤的鲁棒性
- ...

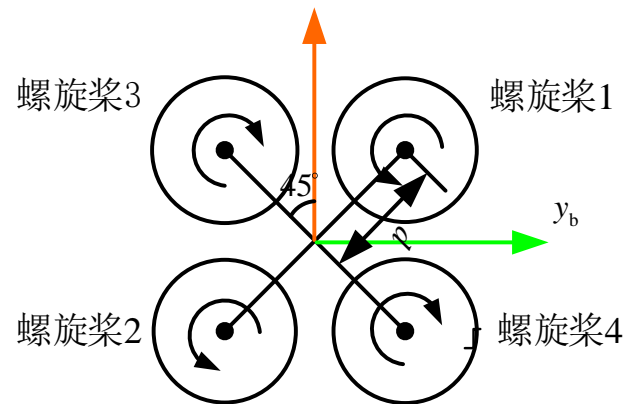




# 实验原理

## 控制分配

x字形四旋翼的控制分配和多旋翼的控制效率模型如下：



$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2}dc_T \\ c_M & c_M & -c_M & -c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dc_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dc_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{f}{4c_T} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{4dc_T} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{4dc_T} + \frac{\tau_z}{4c_M} \\ \omega_2^2 = \frac{f}{4c_T} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{4dc_T} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{4dc_T} + \frac{\tau_z}{4c_M} \\ \omega_3^2 = \frac{f}{4c_T} + \frac{\sqrt{2}\tau_x}{4dc_T} + \frac{\sqrt{2}\tau_y}{4dc_T} - \frac{\tau_z}{4c_M} \\ \omega_4^2 = \frac{f}{4c_T} - \frac{\sqrt{2}\tau_x}{4dc_T} - \frac{\sqrt{2}\tau_y}{4dc_T} - \frac{\tau_z}{4c_M} \end{cases}$$

未知参数可以使用

控制器来进行补偿，

假设油门、俯仰、横滚、偏航四个通道的

输出分别为

$\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$



$$\begin{cases} \omega_1^2 = \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_4 \\ \omega_2^2 = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_4 \\ \omega_3^2 = \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_4 \\ \omega_4^2 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_4 \end{cases}$$





# 实验原理

## □ 控制分配

多旋翼的控制效率模型如下：

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{n_r}} \begin{bmatrix} \varpi_1^2 \\ \varpi_2^2 \\ \vdots \\ \varpi_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

对于四旋翼来说， $\mathbf{M}_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  可逆，可直接求逆得到控制分配矩阵  $\mathbf{P}_4 = \mathbf{M}_4^{-1}$ ，其中  $\mathbf{P}_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 。这种分配是唯一的。然而，对于旋翼数大于4的多旋翼，分配可以有无穷多种。分配过程中，可能让某个旋翼的转速达到饱和。因此，好的控制分配算法就十分重要。在开源的自驾仪中，一般的算法是通过**求伪逆**得到控制分配矩阵，即

$$\mathbf{P}_{n_r} = \mathbf{M}_{n_r}^{\dagger}$$

其中  $\mathbf{P}_{n_r} \in \mathbb{R}^{n_r \times 4}$ ， $\mathbf{M}_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$ 。





# 实验原理

## □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

在实际中，通过控制器得到期望拉力  $f_d$  和期望力矩  $\tau_d$  后，进一步再通过

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,n_r}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{n_r} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix}$$

?

与参数相关

可得到每个螺旋桨的期望转速  $\omega_{d,i}, i=1,2,\dots,n_r$ 。

在工程实际中， $\mathbf{M}_{n_r}$  中的参数未知，即  $c_T, c_M, d$  未知时。那这又是如何进行控制分配的呢？



# 实验原理

## □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

要说明这个问题，首先定义映射矩阵为

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -dc_T \sin \varphi_1 & -dc_T \sin \varphi_2 & \cdots & -dc_T \sin \varphi_{n_r} \\ dc_T \cos \varphi_1 & dc_T \cos \varphi_2 & \cdots & dc_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \sigma_1 & c_M \sigma_2 & \cdots & c_M \sigma_{n_r} \end{bmatrix}$$

它满足

$$\mathbf{M}_{n_r}(c_T, c_M, d) = \mathbf{P}_a \mathbf{M}_{n_r}(1, 1, 1)$$

其中  $\mathbf{P}_a = \text{diag}(c_T \quad dc_T \quad dc_T \quad c_M)$ 。因此，有如下关系

$$\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(c_T, c_M, d) = \underbrace{\mathbf{M}_{n_r}^\dagger(1, 1, 1)}_{\text{已知参数}} \underbrace{\mathbf{P}_a^{-1}}_{\text{未知参数}}$$





# 实验原理

## □ 多旋翼控制分配的自驾仪实现

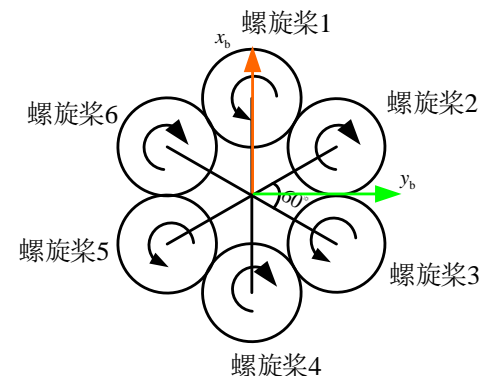
以六旋翼为例， $\mathbf{M}_6(c_T, c_M, d)$  可以表示为

$$\mathbf{M}_6(c_T, c_M, d) = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & -\frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} & \frac{\sqrt{3}dc_T}{2} \\ dc_T & \frac{dc_T}{2} & -\frac{dc_T}{2} & -dc_T & -\frac{dc_T}{2} & \frac{dc_T}{2} \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_6^\dagger(1,1,1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \omega_{d,1}^2 \\ \omega_{d,2}^2 \\ \vdots \\ \omega_{d,6}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_6^\dagger(1,1,1) \mathbf{P}_a^{-1} \begin{pmatrix} f_d \\ \tau_d \end{pmatrix} = \mathbf{M}_6^\dagger(1,1,1) \begin{pmatrix} f_d/c_T \\ \tau_{dx}/dc_T \\ \tau_{dy}/dc_T \\ \tau_{dz}/c_M \end{pmatrix}$$

自驾仪中，控制器都是PID控制器。可以通过调节PID参数来补偿未知量。







## 实验原理

---

以上原理可以详细参考“Quan Quan. *Introduction to Multicopter Design and Control*. Springer, Singapore, 2017”或者“全权著. 杜光勋、赵峙尧、戴训华、任锦瑞、邓恒译。《多旋翼飞行器设计与控制》，电子工业出版社，2018.”的第11章。



# 基础实验

---

## □ 实验目标

### ■ 已知

- (1) 硬件：Pixhawk 自驾仪系统，多旋翼硬件系统。
- (2) 软件：MATLAB 2017b 或以上的版本，基于 Simulink 的控制器设计与仿真平台，硬件在环平台，实验指导包 “ [e5.1](https://rflsim.com/course) ” （下载地址：<https://rflsim.com/course>）。

### ■ 目标

- (1) 复现四旋翼飞行器的 Simulink 仿真，分析控制分配器的作用；
- (2) 记录姿态的阶跃响应，并对开环姿态控制系统进行扫频以绘制 Bode 图，分析闭环姿态控制系统的稳定裕度；
- (3) 完成四旋翼硬件在环仿真。



# 基础实验

## □ 实验步骤

见 “ [e5.1\Readme.pdf](#) ”

## □ 实验效果（部分）

给pitch通道遥控器延迟输入1600，  
得到相应曲线如图所示。

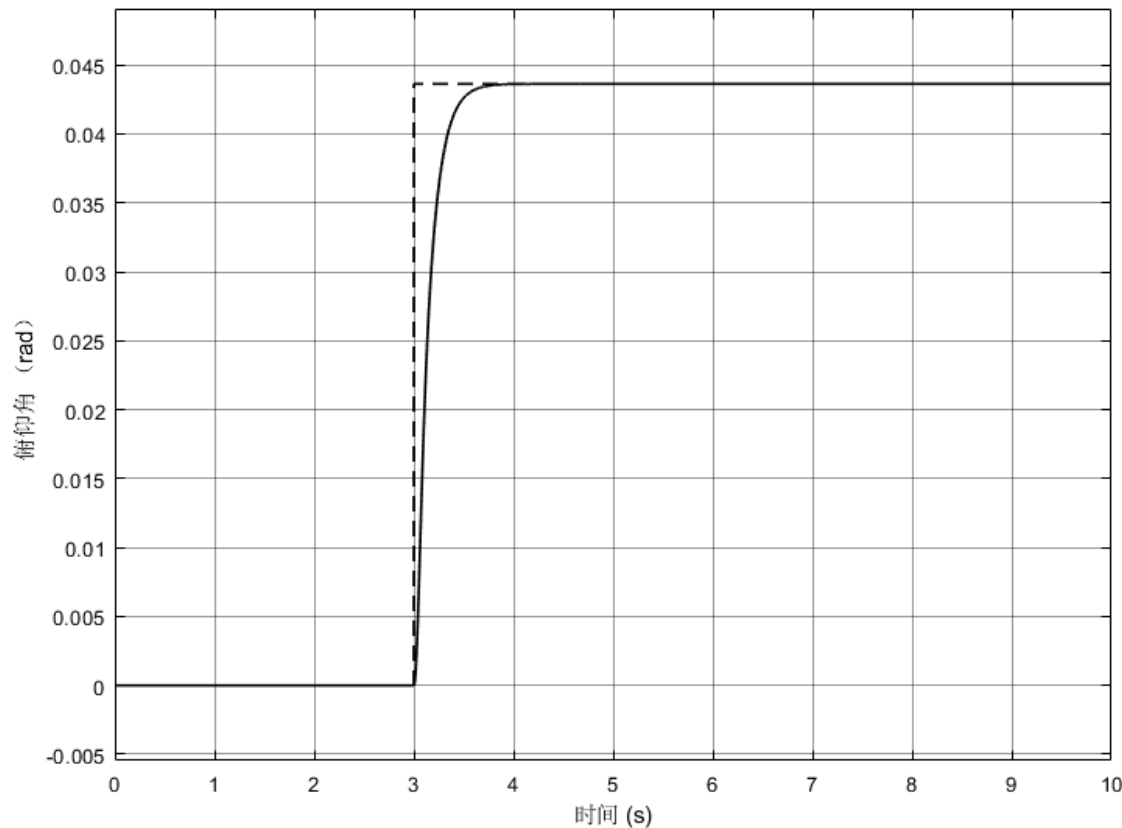


图. Pitch角度响应







# 基础实验

## □ 实验效果（部分）

### 控制分配器作用

当俯仰通道给值1600，在姿态调节阶段，控制器的输出为  $\tau_{dx} = 0, \tau_{dy} > 0, \tau_{dz} = 0, f_d = \text{constant}$ ，所以电机提供了  $o_b y_b$  轴方向的力矩，螺旋桨 1 和螺旋桨 3 电机控制量增加，螺旋桨 2 和螺旋桨 4 电机控制量减少，与控制分配原理相符。

$$\omega_{d,1}^2 \propto (f_d - \tau_{dx} + \tau_{dy} + \tau_{dz})$$

$$\omega_{d,2}^2 \propto (f_d + \tau_{dx} - \tau_{dy} + \tau_{dz})$$

$$\omega_{d,3}^2 \propto (f_d + \tau_{dx} + \tau_{dy} - \tau_{dz})$$

$$\omega_{d,4}^2 \propto (f_d - \tau_{dx} - \tau_{dy} - \tau_{dz})$$

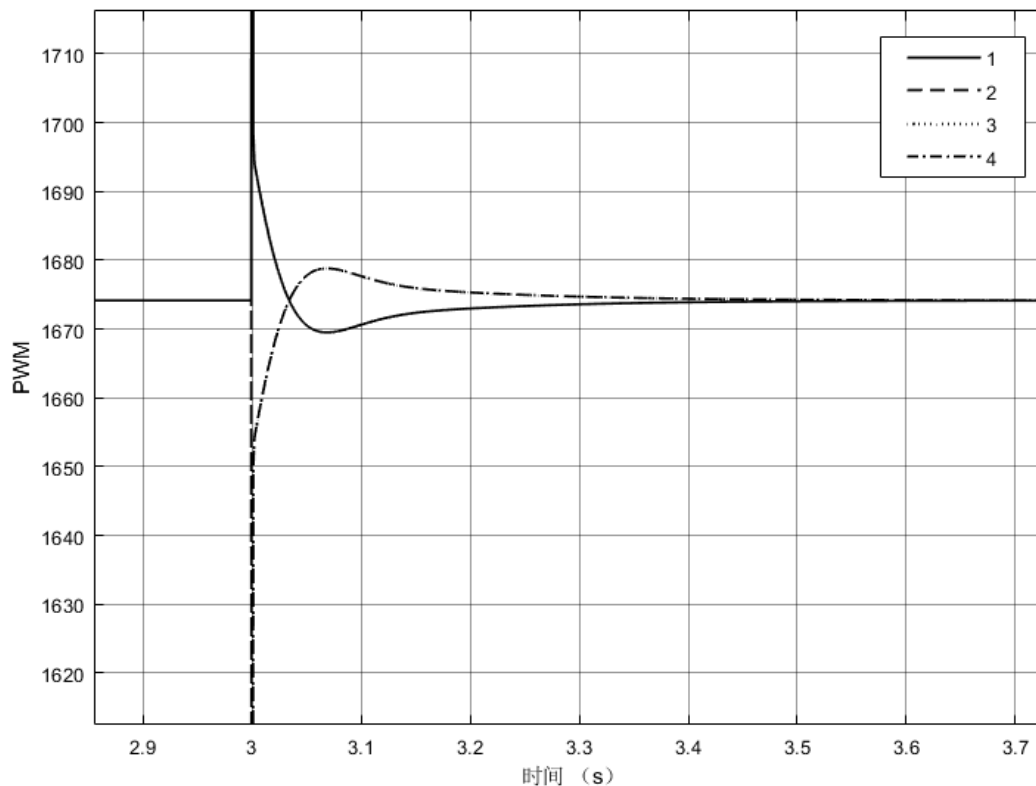


图 经过控制分配后的PWM值





## □ 实验目标

### ■ 已知

(1) 软件：MATLAB 2017b或以上的版本，基于Simulink的软件在环仿真平台，实验指导包“[e5.2](https://rflsim.com/course)”（下载地址：<https://rflsim.com/course>）。

### ■ 目标

(1) 调节PID控制器相关参数以改善控制性能并记录超调量和调节时间，得到一组恰当参数；

(2) 使用调试后的参数，对系统进行扫频以绘制Bode图，观察系统幅频响应，相频响应曲线，分析其稳定裕度。



# 分析实验

---

## □ 实验步骤

见 [e5.2\Readme.pdf](#)



# 设计实验

## □ 实验目标

### ■ 已知：

- (1) 硬件：Pixhawk 自驾仪系统，多旋翼硬件系统。
- (2) 软件：MATLAB 2017b或以上版本，基于Simulink的控制器设计与仿真平台，硬件在环仿真平台，实验指导包 “ [e5.3](#) ” 和 “ [e5.4](#) ” （下载地址：<https://rflysim.com/course>）。

### ■ 目标：

- (1) 建立姿态控制通道的传递函数模型，设计校正控制器，使得姿态角速度环稳态误差  $e_{rSS} \leq 0.01$ ，相位裕度  $> 65^\circ$ ，截至频率  $> 10 \text{ rad/s}$ 。姿态角度环截至频率  $> 5 \text{ rad/s}$ ，相位裕度  $> 60^\circ$ ；
- (2) 使用自己设计的控制器进行软件在环和硬件在环仿真实验；
- (3) 使用自己设计的控制器进行实飞实验。





# 分析实验

---

## □ 实验步骤

见 [e5.3\Readme.pdf](#) 和 [e5.4\Readme.pdf](#)



## □ 仿真实验步骤

### (1) 步骤一：将连续时间校正环节离散化

前述设计的校正环节是时域连续的环节，应将其变为时域离散的环节以便在自驾仪上运行。  
使用c2d函数将s域的传递函数变为z域：

$$H = \text{tf}([\text{num}], [\text{den}])$$

$$H_d = \text{c2d}(H, T_s, \text{'foh'})$$

其中“num”为传递函数分子系数向量，“den”为传递函数分母系数向量，“Ts”为仿真步长，本例中为0.004s。

替换后的传递函数为：

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.775194s}{1 + 23.955779s} \rightarrow G_c(z) = \frac{0.03236z - 0.03219}{z - 0.9998}$$





# 设计实验

## □ 仿真实验步骤

(2) 步骤二：替换控制模型。

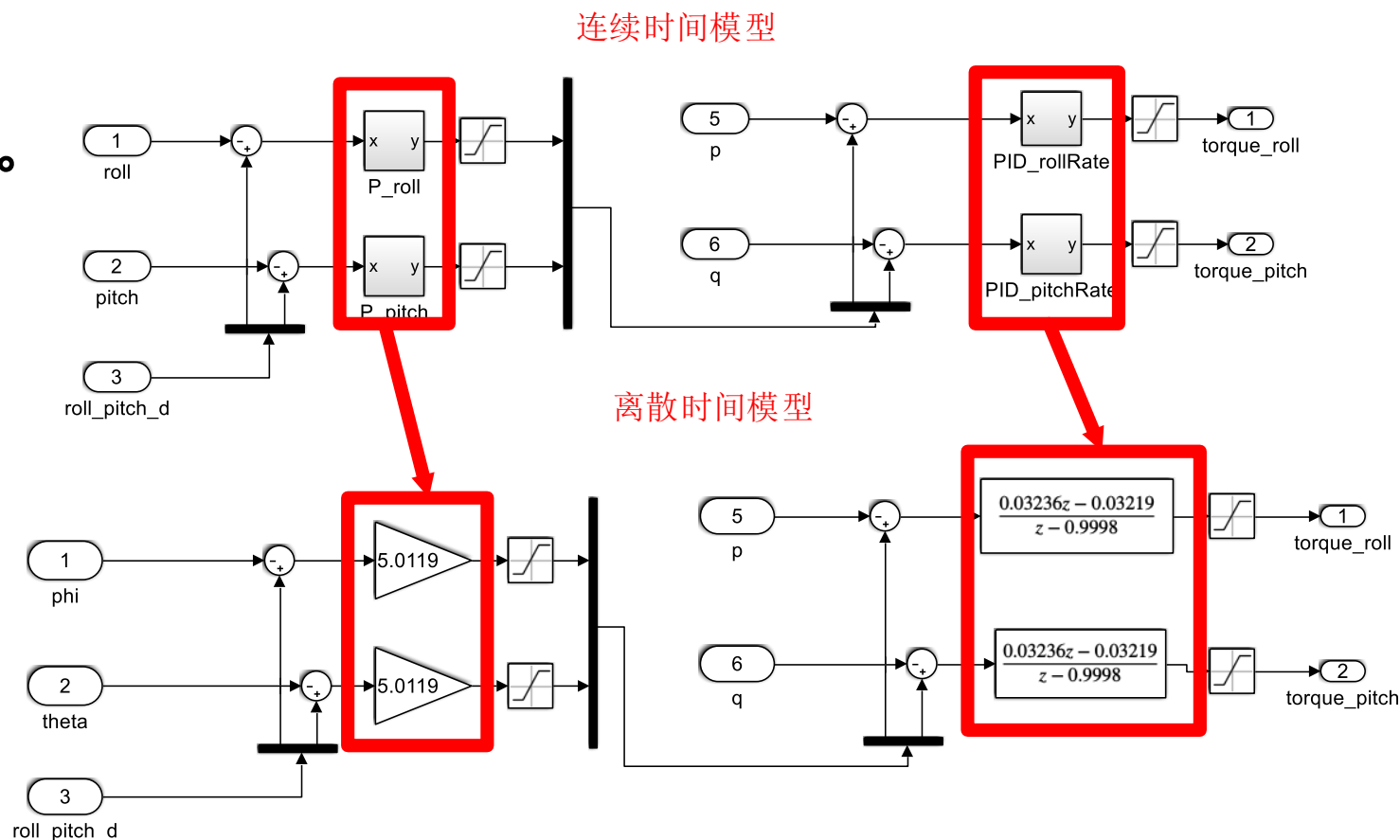


图. 替换原硬件在环仿真中的PID校正器





# 设计实验

## □ 仿真实验步骤

### (3) 步骤三：进行硬件在环仿真

观察发现，随着被拨动摇杆的放开，多旋翼能很快的返回到之前平稳的状态，并无明显振荡。故可认为校正环节设计可以满足要求。

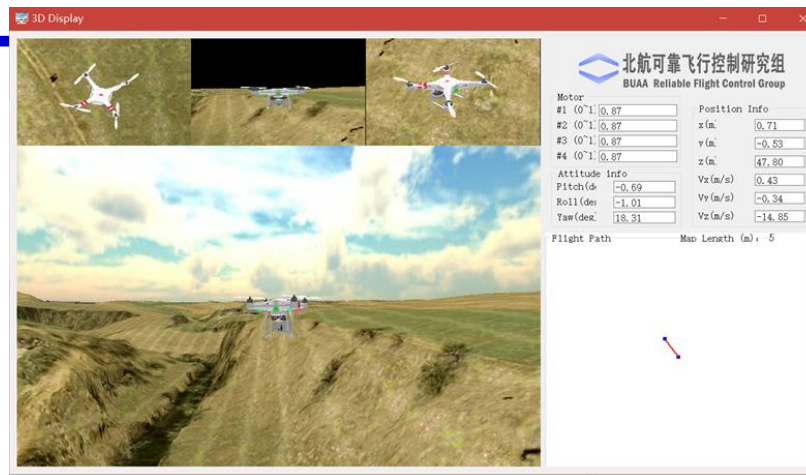


图. 3D显示界面—无人机解锁并起飞



图. 拨动摇杆使四旋翼无人机滚转角变化

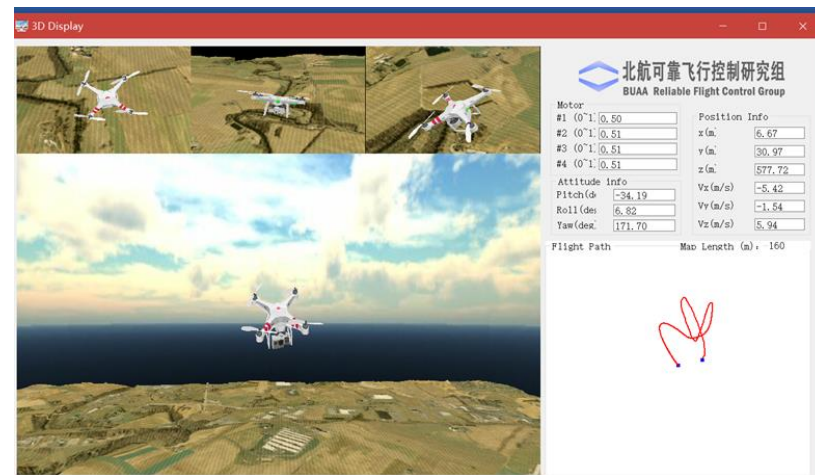


图. 拨动摇杆使四旋翼无人机俯仰角变化





## 小结

---

- (1) 以多旋翼的姿态模型为依据，建立了常见的PID控制方法，并在MATLAB的Simulink中完成姿态控制器的设计，并在RflySim3D中显示仿真效果。
- (2) 使用Simulink中的PSP工具箱生成代码下载到PixHawk飞控中进行硬件在环仿真实验。
- (3) 调节PID控制器的参数，尝试得到最优的参数，并使用MATLAB系统分析工具得到整个开环系统的Bode图，并查看系统的稳定裕度和幅值裕度。
- (4) 使用自动控制原理中的系统校正方法对多旋翼系统进行校正，设计了超前和滞后超前环节分别对角度环和角速度环实施控制，并达到设计指标。 完成设计后，连接硬件进行在环仿真验证了设计的效果。

如有疑问，请到<https://doc.rflysim.com>查询更多信息。



---

谢谢！