

Physikalische Formeln

1 Koordinatensysteme

1.1 Kugelkoordinaten

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$|J| = \det(J) = r^2 \cdot \sin(\theta)$$

$$\int \int \int_{r,\varphi,\theta} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin(\theta) dr d\varphi d\theta \quad \text{Integral über den Raum}$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{Gradient}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \quad \text{Divergenz}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin(\theta)) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r +$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \quad \text{Rotation}$$

1.2 Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J| = \det(J) = r$$

$$\int \int \int_{r,\varphi,z} f(r, \varphi, z) r dr d\varphi dz \quad \text{Integral über den Raum}$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{Gradient}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

2 Mathematisches

2.1 Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \text{Kosinussatz}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \quad \text{Doppelwinkel}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad \text{Additionstheoreme}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x/2) = \pm \sqrt{1/2(1 - \cos(x))} \quad \text{Halber Winkel}$$

$$\cos(x/2) = \pm \sqrt{1/2(1 + \cos(x))}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{Reihenentwicklunge}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{Exponentialdarstellung}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\lim_{x \ll 1} \sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\lim_{x \ll 1} \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

2.2 Hyperbolische Funktionen

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \quad \text{Additionstheorem}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad \text{Doppelter Winkel}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2} (\cosh(2x) - 1)$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{2} (\cosh(2x) + 1) \quad \text{Quadrate}$$

2.3 Index-geschiebe

$$\vec{r} \times \vec{y} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_i y_k$$

$$\vec{r} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

$$(\vec{r} \times \vec{y})(\vec{v} \times \vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j y_k \epsilon_{ilm} v_l w_m$$

2.4 Ableitungsregeln

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad \text{Differenzierbarkeit}$$

Ableitungsregeln (Seien f, g und h differentierbare Funktionen der gleichen Variable)

$$(f + g)' = f' + g' ; (cf)' = c \cdot f' \quad \text{Linearität (c = konst.)}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{Produktregel}$$

$$(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{Mittelwertsatz}$$

$$Tf(x; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n \quad \text{Taylorreihenentwicklung}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{Satz von l'Hospital}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \text{Differentiation für Polynome}$$

2.5 Integrationstechniken

$$\int f(x) dx \quad \text{Unbestimmtes Integral}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Bestimmtes Integral}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{Linearität des Integrals}$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{1. Hauptsatz}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx \quad \text{Mittelwertsatz}$$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt, \text{ Subst.: } x = g(t), dx = g'(t) dt$$

$$\int_a^b f(h(x)) h'(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t) dt \text{ Subst.: } h(x) = t; h'(x) dx = dt$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

2.6 Sphärische Funktionen

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) =$$

$$\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) \cdot e^{im\phi} \quad \text{Kugelflächenfunktion}$$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l \cdot l!} \cdot (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l \quad \text{zug. Legendrepol.}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{l,m}^* Y_{l',m'} d\cos(\theta) d\varphi = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad \text{Orthogonalität}$$

2.7 Implizierte Funktionen

$$G(x, f(x)) = 0 \quad \text{Implizite Form der Funktion f}$$

2.8 Funktionaldeterminanten

Hier nimmt man an, dass alle Funktionen hinreichend

umkehrbar und Glatt sind.

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y$$

$$\frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_x$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = - \frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = - \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$$

3 Lineare Algebra

3.1 Vectormathematik

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{BACCAB-Regel}$$

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = V \quad \text{Spatprodukt}$$

4 Statistik

Definitionen

$$\mathbf{X} \quad \text{Zufallsvariable}$$

$$x \quad \text{Einzelnes Ergebnis einer Messung (stat. verteilt)}$$

$$e \quad \text{Mögliches Ergebnis einer Messreihe}$$

$$\mathbf{E} \quad \text{Ergebnismenge einer Messreihe}$$

$$\omega(x) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsverteilung von x}$$

$$\sum_{i=1}^N P(x_i) = 1; \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1 \quad \text{Normierung}$$

$$\sum_{i=1}^N x \cdot P(x) / N = \langle \mathbf{X} \rangle; \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) x dx = \langle \mathbf{X} \rangle$$

$$\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \langle \mathbf{X} \rangle)^2} \quad \text{Standardabweichung}$$

$$\langle F(\mathbf{X}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{X}) \omega(x) dx$$

$$\mu_n = \langle \mathbf{X}^n \rangle \quad \text{n-tes Moment}$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \mathbf{X}^2 \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle^2 = \langle (\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle)^2 \rangle \quad \text{Schwankung}$$

$$\Xi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \omega(x) dx \quad \text{Charakteristische Fkt.}$$

$$\Xi(k) = \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \langle \mathbf{X}^n \rangle$$

$$\omega_F(f) = \langle \delta(F(\mathbf{X}) - f) \rangle \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte der F Werte}$$

Statistik mit mehreren Zufallsvariablen

$$\vec{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Die obigen definitionen können auf diese Vektoren erweitert

werden zudem gilt

$$K_{ij} = \langle (\mathbf{X}_i - \langle \mathbf{X}_i \rangle)(\mathbf{X}_j - \langle \mathbf{X}_j \rangle) \rangle \quad \text{Korrelationsmatrix}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{Binomialkoeffizient}$$

$$\ln(n!) \approx n \ln(n) - n \quad \text{Stirlingformel für große N}$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

5 Fehlerrechnung

Ein Wert mit fehler wird durch $y = (\bar{y} \pm \Delta y)$ der Mittelweg der Statistik wird hier als \bar{x} geschrieben

Es gibt 4 verschiedene Fehlerquellen

- Systematischer Fehler

- Messgerätefehler

- Zufälliger Fehler

- Fehler des Mathematischen Modells

$$u = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot s \quad \text{Unsicherheit}$$

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{1}{1!} \frac{dy(x)}{dx} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots$$

$$y = c \cdot x \implies \Delta y = c \cdot \Delta x; \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} \quad \text{Lineare Fehler}$$

$$y = y(x_1, x_2, \dots) \implies \Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots$$

Falls nur die Fehlergrenzen bekannt sind so kann noch der Betrag der Unsicherheit angegeben werden.

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \dots$$

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot u_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot u_2 \right)^2 + \dots}$$

Bei korrelierten grössen, muss der Einfluss der Fehler aufeinander berücksichtigt werden.

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot u(x_1, x_k)}$$

6 Elektrodynamik

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad 1. \text{ Maxwell-Gleichung}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad 2. \text{ Maxwell-Gleichung}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad 3. \text{ Maxwell-Gleichung}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad 4. \text{ Maxwell-Gleichung}$$

7 Relativistik

7.1 Schreibweise

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Kontravarianter Vektor}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix} \quad \text{Kovarianter Vektor}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^{00} & \dots & f^{03} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{30} & \dots & f^{33} \end{pmatrix} \quad \text{Kontravarianter Tensor}$$

$$F_{\mu\nu} \quad \text{Kovarianter Tensor}$$

$$F_\mu^\nu \quad \text{Gemischter Tensor}$$

$$x_\mu y^\mu = C = \text{konst} \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$a_\mu b^\nu = F_\mu^\nu \quad \text{Tensorprodukt}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Metrischer Tensor}$$

$$y^\mu x^\nu = y^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{Definition des Skalarprodukts mit Met.Tensor}$$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = mc\dot{x}^\mu \quad \text{Kontravarianter Impuls}$$

7.2 Transformationsverhalten

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{L.T. eines Kontravarianten Vektors}$$

$$x'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x_\nu \quad \text{L.T. eines Kovarianten Vektors}$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad \text{L.T. eines Kontravarianten Tensors}$$

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu (\Lambda^{-1})^\beta_\nu F_{\alpha\beta} \quad \text{L.T. eines Kovarianten Tensors}$$

$$F_\mu^\nu = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \Lambda^\nu_\beta F_\alpha^\beta \quad \text{L.T. eines Gemischten Tensors}$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad \text{Transformation von ko- zu kontravariantem Vektor}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g^\mu_\sigma = \mathbf{1} = \delta^\mu_\sigma$$

7.3 Operatoren

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} c \cdot dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \text{Definition der 4er Ableitung}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \right) \quad \text{Divergenz}$$

$$\partial_\mu a^\mu = \partial^\mu a_\mu = \frac{1}{c} \partial_t a^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad \text{Gradient}$$

$$-\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{d'Alembert-Operator}$$

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0 \quad \text{Klein-Gordon Gleichung}$$

8 Quantenmechanik

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{Schrödingergleichung}$$

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad \text{Stationäre Schrödingergleichung}$$

$$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi(\vec{r}, t) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1 \quad \text{Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit}$$

$$\begin{aligned} |\Psi(\vec{r}, t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Psi(\vec{r}, 0)\rangle = \\ \sum_n |n\rangle e^{iE_n t/\hbar} \langle n | \Psi(\vec{r}, 0) \rangle & \quad \text{Zeitentwicklung} \end{aligned}$$

8.1 Dirac Schreibweise

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Phi dx$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n \quad \text{Vollständigkeit eines Funktionensatzes}$$

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad \text{Orthogonalität der Zustände}$$

8.2 Operatoren

$$O = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle \quad \text{Erwartungswert von O in } \Psi$$

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \cdot \vec{\nabla} \quad \text{Impulsoperator im Ortsraum}$$

$$\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^T \quad \text{Definition des } \dagger$$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A} \quad \text{Hermitischer Operator}$$

Eine Physikalische Größe wird immer durch einen Hermiteschen Operator dargestellt

8.3 Kommutatoren

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \quad \text{Kommutator}$$

$$\{\hat{a}, \hat{b}\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} \quad \text{Antikommutator}$$

$$[\hat{a}\hat{b}, \hat{c}] = \hat{a} [\hat{b}, \hat{c}] + [\hat{a}, \hat{c}] \hat{b}$$

$$[\hat{a} + \hat{b}, \hat{c}] = [\hat{a}, \hat{c}] + [\hat{b}, \hat{c}]$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar \quad \text{Fundamentale Kommutatorrelation}$$

Alle Kommutatoren lassen sich durch \hat{x} und \hat{p} darstellen.

8.4 Drehimpulsalgebra

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\alpha] = 0$$

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i \cdot \hat{L}_y \quad \text{Leiteroperatoren des Drehimpulses}$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$$

$$[\hat{L}_\pm, \hat{L}_\pm] = 0$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$$

8.5 Drehimpulsaddition

$$\hat{J} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$$

$$\hat{J}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$$

$$[\hat{L}_{1i}, \hat{L}_{2k}] = 0 \quad \text{Unabhängigkeit des Drehimpulses}$$

$$\hat{J}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + 2\hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \quad \text{Umwandlung des Drehimpulses}$$

Entkoppelte Basis

$$\hat{L}_i^2 |l_1, m_1, l_2, m_2\rangle = l_i(l_i + 1)\hbar^2 |l_1, m_1, l_2, m_2\rangle \quad i \in \{1, 2\}$$

$$\hat{L}_{iz} |l_1, m_1, l_2, m_2\rangle = m_i \hbar |l_1, m_1, l_2, m_2\rangle \quad i \in \{1, 2\}$$

Gekoppelte Basis

$$\hat{J}^2 |j, m_j, l_1, l_2\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m_j, l_1, l_2\rangle$$

$$\hat{L}_i^2 |j, m_j, l_1, l_2\rangle = l_i(l_i + 1)\hbar^2 |j, m_j, l_1, l_2\rangle$$

$$\hat{J}_z |l, m_j, l_1, l_2\rangle = m_j \hbar |j, m_j, l_1, l_2\rangle$$

Basistransformation

$$\sum_{m_1, m_2} |l_1, m_1, l_2, m_2\rangle \langle j, m_j, l_1, l_2 | l_1, m_1, l_2, m_2 \rangle = |j, m_j, l_1, l_2\rangle$$

Clebsh-gordon-Koeffizienten

$$C_{m_1, m_2}^{j, m_j, l_1, l_2} = \langle j, m_j, l_1, l_2 | l_1, m_1, l_2, m_2 \rangle$$

Um die CG-Koeffizienten auszurechnen, wendet man auf den Obersten Zustand in beiden Basen den Absteigeoperator an bis alle zustände für die J-te Quantenzahl bestimmt sind.

Der Spin

$$\sigma_i \quad \text{Pauli Matrizen}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_z$$

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad \text{Definition des Spins}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$$

8.6 Störungstheorie

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1 + \lambda^2 \hat{H}_2 \quad \text{Gestörter Hamiltonoperator}$$

Der Hamilton-Operator wird in λ entwickelt. Die Entwicklung bestimmt die Ordnung der Störungstheorie

Nichtentartete Störungstheorie

$$E_n^1 = \langle n^0 | \hat{H}_1 | n^0 \rangle \quad \text{Energie in 1. Ordnung}$$

$$|n^1\rangle = \sum_{m \neq n} |m^0\rangle \cdot \frac{\langle n^0 | \hat{H}_1 | m^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad \text{Wellenfkt. in 1. Ordnung}$$

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m^0 | \hat{H}_1 | n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} = \langle n^0 | \hat{H}_1 | n^1 \rangle \quad \text{Energie 2. Ord.}$$

Zeitabhängige Störungstheorie

$$H = H_0 + V(t) \quad \text{Annahme über die Form des Hamiltonoperators}$$

$$|\Psi(t)\rangle_S \quad \text{Wellenfkt. im Schrödingerbild}$$

$$U^\dagger |\Psi(t)\rangle \quad \text{Unitäre Transformation der WFkt.}$$

$$|\Psi(t)\rangle_H = e^{i\hat{H}t/\hbar} |\Psi\rangle \quad \text{WFkt. im Heisenbergbild}$$

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\Psi(t)\rangle \quad \text{WFkt. im Wechselwirkungsbild}$$

$$V(t)_I = U^\dagger V(t)_S U = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} V(t)_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad \text{Potential WW-Bild}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I = V(t)_I |\Psi(t)\rangle_I \quad \text{Schrödinger-Gl. im WW-Bild}$$

$$|\Psi(t)\rangle_I = |\Psi(t_0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t V(t')_I |\Psi(t')\rangle_I dt' \quad \text{Näherung für } \Psi$$

In der ersten Iteration setzt man als Startwert $|\Psi(t_0)\rangle_I$ ein.

Fermis Goldene Regel

$$\Gamma_{m \rightarrow n} = \frac{P_{m \rightarrow n}(t)}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m) \left| \langle m | \hat{V} | n \rangle \right|^2 \quad \text{Übergangsrate}$$

$$R_t = \int dN_n \Gamma_{m \rightarrow n} =$$

$$\int dE_n \frac{dN_n}{dE_n} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m) \left| \langle m | \hat{V} | n \rangle \right|^2 \quad \text{Totale Rate}$$

$$\frac{dN_n}{dE_n} = \rho(E) \quad \text{Zustandsdichte}$$

$$V(t) = \Theta(t) \left[\hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t} \right] \quad \text{Form von Periodischer Störung}$$

$$\Gamma_{m \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} \left[\delta(E_n - E_m - \hbar\omega) \left| \langle m | \hat{F} | n \rangle \right|^2 \right] \quad \text{Goldene Regel}$$

$$+ \frac{2\pi}{\hbar} \left[\delta(E_n - E_m + \hbar\omega) \left| \langle m | \hat{F}^\dagger | n \rangle \right|^2 \right] \quad \text{Periodische Stör.}$$

8.7 Streutheorie

$$V(\vec{r}) \quad \text{Potential an dem gestreut wird}$$

$$\varphi_S(\vec{r}) \quad \text{Gestrente Welle}$$

$$\varphi_E(\vec{r}) \quad \text{Einlaufende Welle}$$

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{Stationärer Streuzustand}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) = \frac{dn}{d\Omega \cdot F_i} \quad \text{Differentieller Wirkungsquerschnitt}$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad \text{Totaler Wirkungsquerschnitt}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f_{\vec{k}}(\theta, \phi) \right|^2 \quad \text{Diff. Wq. in Asympt. Lsg.}$$

$$dn = c \left| \vec{j}_s \right| r^2 d\Omega = c \cdot \frac{\hbar k}{m} \left| f_{\vec{k}} \right|^2 d\Omega \quad \text{Gestrente Teilchen}$$

$$\left[\left| \vec{k} \right|^2 + \nabla^2 \right] \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V(\vec{r}) \cdot \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{Littmann/Schwinger Gl.}$$

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} - \int \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot V(\vec{r}') \cdot \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}') \quad \text{Allg. Lsg.}$$

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + f_{\vec{k}}(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{Asymptotische Lsg. der LSG}$$

$$f_{\vec{k}}(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} \cdot V(\vec{r}) \cdot \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{Streuamplitude}$$

$$f_{\vec{k}}(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{r}'(\vec{k}'-\vec{k})} \cdot V(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{Bornsche Näherung}$$

$$\text{Partialwellenentwicklung}$$

$$f_{\vec{k}}(\theta, \phi) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) P_l(\cos(\theta)) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \quad \text{Streuphase}$$

8.8 Relativistische Quantenmechanik

Definitionen

$$p^\mu = i\hbar\partial_\mu \quad \text{Relativistischer Impulsoperator}$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Def. } \alpha$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \text{ sind die Pauli-Matrizen}$$

$$\left\{ \alpha^i, \alpha^j \right\} = 2\delta_{i,j}$$

$$\left\{ \beta, \alpha^i \right\} = 0$$

$$\beta^2 = \mathbf{1} \text{ Einheitsmatrix}$$

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i$$

$$(\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

$$\gamma^5 = i \cdot \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^5 \right\} = 0$$

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$$

Spuren

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$$

Gleichungen

$$\vec{j} = c\Psi^\dagger \vec{\alpha}\Psi = c\overline{\Psi}\vec{\gamma}\Psi \quad \text{Rel. Wahrscheinlichkeitsstrom}$$

$$i\hbar \left[\frac{1}{c} \cdot \partial_t + \vec{\alpha}\vec{\nabla} \right] \Psi(x^\mu) - mc\Psi(x^\mu) = 0 \quad \text{Dirac Gleichung}$$

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc]\Psi(x^\mu) = 0 \quad \text{Kovariante Schreibweise der Dirac Gl.}$$

Spinorrelationen

$$\overline{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma_0 = \gamma_0 u^\dagger(p)$$

$$\sum_s u(p)_\alpha \overline{u}(p)_\beta = \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

Def. β

Kommutatorrelation der α

Definition der γ

γ -Antikommutatorrelation

γ^5 Definition

Definition des Feynman-Dagger

$$\sum_s v(p)_\alpha \overline{v}(p)_\beta = \left(\frac{\not{p} - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}$$

8.9 Systeme Identischer Teilchen

Def. identischer Teilchen:

Identische Teilchen stimmen in allen Eigenschaften miteinander überein.

Symmetrisierungspostulat:

In einem System Identischer Teilchen sind nur bestimmte Vektoren im Zustandraum physikalisch realisierbare Zustände.

$ U\rangle$	Gesamtzustand
$ \Psi_S\rangle$	Symmetrischer Zustand
$ \Psi_A\rangle$	Antisymmetrischer Zustand
P_α	Permutation des Systems

$$\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$$

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_\alpha P_\alpha |U\rangle$$

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha |U\rangle$$

9 Thermodynamik

9.1 Zustandsgleichungen

$U = U(S, V); dU = TdS - pdV$	Innere Energie
$F = F(T, V) = U - TS; dF = -pdV - SdT$	Freie Energie
$H = H(S, P) = U + PV; dH = TdS + PdV$	Enthalpie
$G = G(T, P) = H - TS; dG = dH - TdS - SdT$	Gibbs Energie

9.2 Integrabilitätsbedingung

9.3 Maxwell Relation

Die Maxwell Relationen lassen sich aus der Integrabilitätsbedingung für implizite Differentialgleichungen ableiten. $U(S, V)$ ist beispielhaft aufgestellt:

$$dU(S, V) = TdS - PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \right)_S = \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \right)_V = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V$$