Physikalische Formeln

1 Koordinatensysteme

1.1 Kugelkoordinaten

$x = r \cdot \sin(\theta)\cos(\varphi)$
$y = r \cdot \sin(\theta)\sin(\varphi)$
$z = r \cdot \cos(\theta)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta\varphi)} =$

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$|J| = \mathbf{det}(J) = r^2 \cdot \sin(\theta)$
$\iiint_{r,\varphi,\theta} f(r,\varphi,\theta) r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ Integral über den Raum
$\nabla = \vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ Gradient
$\nabla \cdot \mathbf{A} =$
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$ Divergenz
$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin(\theta)) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{\mathbf{e}}_r +$
$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_r)\right)\vec{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ Rotation

1.2 Zylinderkoordinaten

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$
$z = z$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|J| = \mathbf{det}(J) = r$
$\iiint_{r,\varphi,z} f(r,\varphi,z) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$ Integral über den Raum
$\nabla = \vec{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z$ Gradient
$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
$\nabla \times \vec{A} =$
$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{\mathbf{e}}_z$

2 Mathematisches

2.1 Trigonometrische Identitäten

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ Kosinussatz
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$ Doppelwinkel
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ Additionstheoreme
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x/2) = \pm\sqrt{1/2(1-\cos(x))}$ Halber Winkel
$\cos(x/2) = \pm\sqrt{1/2(1+\cos(x))}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ Reihenentwicklune
$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ Exponentialdarstellung
$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\lim_{x \ll 1}\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
$\lim_{x \ll 1}\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$

2.2 Hyperbolische Funktionen

$\cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$
$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$ Additionstheorem
$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ Doppelter Winkel
$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
$\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$ Quadrate
$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$

2.3 Index-geschiebe

$\vec{r} \times \vec{y} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} x_i j_k$
$\vec{r} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$
$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta km - \delta_{jm}\delta kl$
$(\vec{r} \times \vec{y})(\vec{v} \times \vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k \varepsilon_{ilm} v_l w_m$

2.4 Ableitungsregeln

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$ Differentierbarkeit
Ableitungsregeln (Seien f, g und h differentierbare Funktionen der gleichen Variable)
$(f+g)' = f' + g'$; $(cf)' = c \cdot f'$ Linearität (c = konst)
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Produktregel
$(f/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ Quotientenregel
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ Mittelwertensatz
$Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^(n)(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ Taylorreihenwicklung
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Satz von l'Hospital
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = n \cdot x^{n-1}$ Differentiation fr Polynome

2.5 Integrationstechniken

$\int f(x)\mathrm{d}x$ Unbestimmtes Integral
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ Bestimmtes Integral
$\int(f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$ Linearität des Integrals
$\int a \cdot f(x)\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 1. Hauptsatz
$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ Mittelwertsatz
$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t, \text{Subst.:} x = g(t), \mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t$
$\int_a^b f(h(x))h'(x)\mathrm{d}x = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)\mathrm{d}t \text{Subst.:} h(x) = t; h'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$
$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$

2.6 Sphärische Funktionen

$Y_{l,m}(\theta,\phi) =$
$\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta) \cdot e^{im\phi})$ Kugelflächenfunktion
$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l \cdot l!} \cdot (1-x)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$ zug. Legendrepol.
$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y_{l,m}^* Y_{l',m'} \mathrm{d}\cos(\theta)\mathrm{d}\varphi = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$ Orthogonalität

2.7 Implizierte Funktionen

$G(x, f(x)) = 0$ Implizite Form der Funktion f

2.8 Funktionaldeterminanten

Hier nimmt man an, dass alle Funktionen hinreichend umkehrbar und Glatt sind.

$$det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y & \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_y & \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_x \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y$
$\frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_x$
$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)}$
$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$

3 Lineare Algebra

3.1 Vectormathematik

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ BACCAB-Regel
$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = V$ Spatprodukt

4 Statistik

Definitionen
$\mathbf{X}$ Zufallsvariable
x Einzelnes Ergebnis einer Messung (stat. verteilt)
e Mögliches Ergebnis einer Messreihe
$\mathbf{E}$ Ergebnismenge einer Messreihe
$\omega(\mathrm{x})$ Wahrscheinlichkeitsverteilung von x
$\sum_{i=1}^{N} P(\mathrm{x}_i) = 1;\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1$ Normierung
$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{x} \cdot P(\mathrm{x})/N = \langle\mathbf{X}\rangle;\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\mathrm{x})\mathrm{x}\mathrm{dx} = \langle\mathbf{X}\rangle$
$\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \langle\mathbf{X}\rangle)}$ Standardabweichung
$\langle F(\mathbf{X})\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{X})\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx}$
$\mu_n = \langle\mathbf{X}\rangle$ n-tes Moment
$(\Delta x)^2 = \langle\mathbf{X}^2\rangle - \langle\mathbf{X}\rangle^2 = \langle(\mathbf{X} - \langle\mathbf{X}\rangle)^2\rangle$ Schwankung
$\Xi(\mathrm{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\omega(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ Charakteristische Fkt.
$\Xi(\mathrm{k}) = \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!}\langle\mathbf{X}\rangle$
$\omega_F(\mathrm{f}) = \langle\delta(F(\mathbf{X}) - \mathrm{f})\rangle$ Wahrscheinlichkeitsdichte der F Werte
Statistik mit mehreren Zufallsvariablen
$\vec{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n)$
$\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, ..., \mathrm{x}_n)$
Die obigen definitionen können auf diese Vektoren erweitert werden zudem gilt
$K_{ij} = \langle(\mathbf{X}_i - \langle\mathbf{X}_i\rangle)(\mathbf{X}_j - \langle\mathbf{X}_j\rangle)\rangle$ Korrelationsmatrix
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Binomialkoeffizient
$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$ Stirlingformel für große N
$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

5 Fehlerrechnung

Ein Wert mit fehler wird durch $y = (\overline{y} \pm \Delta y)$ der Mittelweg der Statistik wird hier als $\overline{x}$ geschrieben
Es gibt 4 verschiedene Fehlerquellen

- Systematischer Fehler
- Messgerätefehler

- Zufälliger Fehler
- Fehler des Mathematischen Modells

$u = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot s$ Unsicherheit

$y(x+\Delta x) = y(x) + \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} \cdot (\Delta x)^2 + ...$

$y = c \cdot x \implies \Delta y = c \cdot \Delta x;\ \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x}$ Lineare Fehler

$y = y(x_1, x_2, ...) \implies \Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ...$

Falls nur die Fehlergrenzen bekannt sind so kann noch der Betrag der Unsicherheit angegeben werden.

$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \cdot \Delta x_1 + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \cdot \Delta x_2 + ...$

$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot u_2\right)^2 + ...}$

Bei korrelierten grössen, muss der Einfluss der Fehler aufeinander berücksichtigt werden.

$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot u(x_1, x_k)}$

6 Elektrodynamik

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 1. Maxwell-Gleichung

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ 2. Maxwell-Gleichung

$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ 3. Maxwell-Gleichung

$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ 4. Maxwell-Gleichung

7 Relativistik

7.1 Schreibweise

$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Kontravarianter Vektor

$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Metrischer Tensor

$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix}$ Kovarianter Vektor

$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = mc\dot{x^\mu}$ Kontravarianter Impuls

$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^{00} & \cdots & f^{03} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{30} & \cdots & f^{33} \end{pmatrix}$ Kontravarianter Tensor

$F_{\mu\nu}$ Kovarianter Tensor

F_μ^ν Gemischter Tensor

$x_\mu y^\mu = C = konst$ Skalarprodukt

$a_\mu b^\nu = F_\mu^\nu$ Tensorprodukt

7.2 Transformationsverhalten

$x'^\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu$ L.T. eines Kontravarianten Vektors

$x\prime_\mu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu$ L.T. eines Kovarianten Vektors

$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$ L.T. eines Kontravarianten Tensors

$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_{\mu\alpha}(\Lambda^{-1})_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$ L.T. eines Kovarianten Tensors

$F'^{\nu}_{\mu} = (\Lambda^{-1})_{\alpha\mu} \Lambda\nu\beta F_\alpha^\beta$ L.T. eines Gemischten Tensors

$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$ Transformation von ko- zu kontravariantem Vektor

$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_\sigma^\mu = \mathbf{1} = \delta_\sigma^\mu$

7.3 Operatoren

$dx^\mu = \begin{pmatrix} c \cdot \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$ Definition der 4er Ableitung

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$ Divergenz

$\partial_\mu a^\mu = \partial^\mu a_\mu = \frac{1}{c}\partial_t a^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ Gradient

$-\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembert-Operator

$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \Psi = 0$ Klein-Gordon Gleichung

8 Quantenmechanik

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = \hat{H}\Psi(\vec{r}, t)$ Schrödingergleichung

$\hat{H} \left|\Psi\right\rangle = E \left|\Psi\right\rangle$ Stationäre Schrödingergleichung

$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi(\vec{r}, t)$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}^3 r \, |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$ Erhaltug der Gesamtwahrscheinlichkeit

$\left|\Psi(\vec{r}, t)\right\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left|\Psi(\vec{r}, 0)\right\rangle = \sum_n \left|n\right\rangle e^{iE_n t/\hbar} \left\langle n|\Psi(\vec{r}, 0)\right\rangle$ Zeitentwicklung

8.1 Dirac Schreibweise

$\left\langle \Psi|\Phi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Phi \mathrm{d}x$

$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n$ Vollständigkeit eines Funktionensatzes

$\left\langle \psi_n|\psi_m \right\rangle = \delta_{n,m}$ Orthogonalität der Zustände

8.2 Operatoren

$O = \left\langle \Psi \middle| \hat{O} \middle| \Psi \right\rangle$ Erwarungswert von O in Ψ

$\vec{\hat{p}} = \frac{\hbar}{i} \cdot \vec{\nabla}$ Impulsoperator im Ortsraum

$\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^T$ Definition des $\dagger$

$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ Hermitischer Operator

Eine Physikalische Größe wird immer durch einen Hermitischen Operator dargestellt

8.3 Kommutatoren

$\left[\hat{a}, \hat{b}\right] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ Kommutator

$\left\{\hat{a}, \hat{b}\right\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$ Antikommutator

$\left[\hat{a}\hat{b}, \hat{c}\right] = \hat{a}\left[\hat{b}, \hat{c}\right] + \left[\hat{a}, \hat{c}\right]\hat{b}$

$\left[\hat{a} + \hat{b}, \hat{c}\right] = \left[\hat{a}, \hat{c}\right] + \left[\hat{b}, \hat{c}\right]$

$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar$ Fundamentale Kommutatorrelation

Alle Kommutatoren lassen sich durch $\hat{x}$ und $\hat{p}$ darstellen.

8.4 Drehimpulsalgebra

$\left[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta\right] = i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma$

$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\alpha\right] = 0$

$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i \cdot \hat{L}_y$ Leiteroperatoren des Drehimpulses

$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hat{L}_\pm$

$\left[\hat{L}_\pm, \hat{L}^2\right] = 0$

$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$

$\hat{L}_\pm \left|l, m\right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \left|l, m \pm 1\right\rangle$

8.5 Drehimpulsaddition

$\hat{J} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$

$\hat{J}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$

$\left[\hat{L}_{1i}, \hat{L}_{2k}\right] = 0$ Unabhängigkeit des Drehimpulses

$\hat{J}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + 2\hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2$ Umwandlung des Drehimpulses

Entkoppelte Basis

$\hat{L}_i^2 \left|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle = l_i(l_i+1)\hbar^2 \left|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle$ $i \in \{1, 2\}$

$\hat{L}_{iz} \left|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle = m_i\hbar \left|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle$ $i \in \{1, 2\}$

Gekoppelte Basis

$\hat{J}^2 \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle$

$\hat{L}_i^2 \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle = l_i(l_i+1)\hbar^2 \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle$

$\hat{J}_z \left|l, m_j, l_1, l_2\right\rangle = m_j\hbar \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle$

Basistransformation

$\sum_{m_1, m_2} \left|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle \left\langle j, m_j, l_1, l_2|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle = \left|j, m_j, l_1, l_2\right\rangle$

Clebsh-gordon-Koeffizienten

$C_{m_1, m_2}^{j, m_j, l_1, l_2} = \left\langle j, m_j, l_1, l_2|l_1, m_1, l_2, m_2\right\rangle$

Um die CG-Koeffizienten auszurechnen, wendet man auf den Obersten Zustand in beiden Basen den Absteigeoperator an bis alle zustände für die J-te Quantenzahl bestimmt sind.

Der Spin

σ_i Pauli Matrizen

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ σ_x

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ σ_y

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ σ_z

$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ Definition des Spins

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$

8.6 Störungstheorie

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_1 + \lambda^2\hat{H}_2$ Gestörter Hamiltonoperator

Der Hamilton-Operator wird in λ entwickelt. Die Entwicklung bestimmt die Ordnung der Störungstheorie

Nichtentartete Störungstheorie

$E_n^1 = \left\langle n^0 \middle| \hat{H}_1 \middle| n^0 \right\rangle$ Energie in 1. Ordnung

$\left|n^1\right\rangle = \sum_{m \neq n} \left|m^0\right\rangle \cdot \frac{\left\langle n^0|\hat{H}_1|n^0\right\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$ Wellenfkt. in 1. Ordnung

$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\left\langle m^0|H_1|n^0\right\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} = \left\langle n^0 \middle| H_1 \middle| n^1 \right\rangle$ Energie 2. Ord.

Zeitabhängige Störungstheorie

$H = H_0 + V(t)$ Annahme über die Form des Hamiltonoperators

$\left|\Psi(t)\right\rangle_S$ Wellenfkt. im Schrödingerbild

$U^\dagger \left|\Psi(t)\right\rangle$ Unitäre Transformation der WFkt.

$\left|\Psi(t)\right\rangle_H = e^{i\hat{H}t/\hbar} \left|\Psi\right\rangle$ WFkt. im Heisenbergbild

$\left|\Psi(t)\right\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t\hbar} \left|\Psi(t)\right\rangle$ WFkt. im Wechselwirkungsbild

$V(t)_I = U^\dagger V(t)_s U = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} V(t)_s e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$ Potential WW-Bild

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle_I = V(t)_I \left|\Psi(t)\right\rangle_I$ Schrödinger-Gl. im WW-Bild

$\left|\Psi(t)\right\rangle_I = \left|\Psi(t_0)\right\rangle_I + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} V(t')_I \left|\Psi(t')\right\rangle_I \mathrm{d}t'$ Näherung für Ψ

In der ersten Iteration setzt man als Startwert $\left|\Psi(t_0)\right\rangle_I$ ein.

Fermis Goldene Regel

$\Gamma_{m \to n} = \frac{P_{m \to n}(t)}{t} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_n - E_m) \left|\left\langle m \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle\right|^2$ Übergangsrate

$R_t = \int \mathrm{d}N_n \Gamma_{m \to n} = \int \mathrm{d}E_n \frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}E_n} \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_n - E_m) \left|\left\langle m \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle\right|^2$ Totale Rate

$\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}E_n} = \rho(E)$ Zustandsdichte

$V(t)=\Theta(t)\left[\hat{F}e^{-i\omega t}+\hat{F}^\dagger e^{i\omega t}\right]$ Form von Periodischer Störung

$\Gamma_{m\rightarrow\ n}=\frac{2\pi}{\hbar}\left[\delta(E_n-E_m-\hbar\omega)\left|\left\langle m\middle|\hat{F}\middle|n\right\rangle\right|^2\right]$ Goldene Regel

$+\frac{2\pi}{\hbar}\left[\delta(E_n-E_m+\hbar\omega)\left|\left\langle m\middle|\hat{F}^\dagger\middle|n\right\rangle\right|^2\right]$ Periodische Stör.

8.7 Streutheorie

$V(\vec{r})$ Potential an dem gestreut wird

$\varphi_S(\vec{r})$ Gestreute Welle

$\varphi_E(\vec{r})$ Einlaufende Welle

$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ Stationärer Streuzustand

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta,\phi)=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\Omega\cdot F_i}$ Differentieller Wiekungsquerschnitt

$\sigma=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega$ Totaler Wirkungsquerschnitt

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left|f_{\vec{k}}(\theta,\phi)\right|^2$ Diff. Wq. in Asympt. Lsg.

$\mathrm{d}n=c\left|\vec{j}_s\right|r^2\mathrm{d}\Omega=c\cdot\frac{\hbar k}{m}\left|f_{\vec{k}}\right|^2\mathrm{d}\Omega$ Gestreute Teilchen

$\left[\left|\vec{k}\right|^2+\nabla^2\right]\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})=\frac{2m}{\hbar^2}\cdot V(\vec{r})\cdot\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ Littmann/Schwinger Gl.

$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})=e^{i\vec{k}\vec{r}}-\int\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\cdot V(\vec{r}')\cdot\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}')$ Allg. Lsg.

$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})=e^{i\vec{k}\vec{r}}+f_{\vec{k}}(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$ Asymptotische Lsg. der LSG

$f_{\vec{k}}(\theta,\phi)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}'\vec{r}'}\cdot V(\vec{r})\cdot\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'$ Streuamplitude

$f_{\vec{k}}(\theta,\phi)=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{r}'(\vec{k}'-\vec{k})}\cdot V(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'$ Bornsche Näherung

Partialwellenentwicklung

$f_{\vec{k}}(\theta,\phi)=\frac{1}{k}\sum_l(2l+1)P_l(\cos(\theta))e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)$ Streuphase

8.8 Relativistische Quantenmechanik

Definitionen

$p^\mu=i\hbar\partial_\mu$ Relativistischer Impulsoperator

$\alpha^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\\sigma^i&0\end{pmatrix}$ Def. α

$\beta=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0\\0&-\mathbf{1}\end{pmatrix}$ Def. β

σ^i sind die Pauli-Matrizen

$\left\{\alpha^i,\alpha^j\right\}=2\delta_{i,j}$ Kommutatorrelation der α

$\left\{\beta,\alpha^i\right\}=0$

$\beta^2=\mathbf{1}$ Einheitsmatrix

$\gamma^0=\beta$ Definition der γ

$\gamma^i=\beta\alpha^i$

$(\gamma^i)^2=-\mathbf{1}$

$(\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i$

$(\gamma^\mu)^\dagger=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$(\gamma_\mu)^\dagger=\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$

$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$ γ-Antikommutatorrelation

$\gamma_\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\nu$

$\gamma^5=i\cdot\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ γ^5 Definition

$(\gamma^5)^2=\mathbf{1}$

$(\gamma^5)^\dagger=\gamma^5$

$\left\{\gamma^\mu,\gamma^5\right\}=0$

$\not{a}=\gamma^\mu a_\mu=\gamma_\mu a^\mu$ Definition des Feynman-Dagger

$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$

$\overline{\Psi}=\Psi^\dagger\gamma^0$

Spuren

$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\right)=0$

$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)=4g^{\mu\nu}$

$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)=4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right)$

Gleichungen

$\vec{j}=c\Psi^\dagger\vec{\alpha}\Psi=c\overline{\Psi}\gamma^i\Psi$ Rel. Wahrschinlichkeitsstrom

$i\hbar\left[1/c\cdot\partial_t+\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right]\Psi(x^\mu)-mc\Psi(x^\mu)=0$ Dirac Gleichung

$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc\right]\Psi(x^\mu)=0$ Kovariante Schreibweise der Dirac Gl.

Spinorrelationen

$\overline{u}(p)=u^\dagger(p)\gamma_0=\gamma_0u^\dagger(p)$

$\sum_s u(p)_\alpha\overline{u}(p)_\beta=\left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$

$\sum_s v(p)_\alpha\overline{v}(p)_\beta=\left(\frac{\not{p}-m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$

8.9 Systeme Identischer Teilchen

Def. identischer Teilchen:

Identische Teilchen stimmen in allen Eigenschaften miteinander überein.

Symmetrisierungspostulat:

In einem System Identischer Teilchen sind nur bestimmte Vektoren im Zustandstaum physikalisch realisierbare Zustände.

$|U\rangle$ Gesamtzustand

$|\Psi_S\rangle$ Symmetrischer Zustand

$|\Psi_A\rangle$ Antisymmetrischer Zustand

P_α αte Permutation des Systems

$\varepsilon_\alpha=\begin{cases}1\text{ für gerade Permutationen}\\-1\text{ für ungerade Permutationen}\end{cases}$

$|\Psi_S\rangle=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_\alpha P_\alpha\,|U\rangle$

$|\Psi_A\rangle=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha P_\alpha\,|U\rangle$

9 Thermodynamik

9.1 Zustandsgleichungen

$U=U(S,V);\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V$ Innere Energie

$F=F(T,V)=U-TS;\mathrm{d}F=-p\mathrm{d}V-S\mathrm{d}T$ Freie Energie

$H=H(S,P)=U+PV;\mathrm{d}H=T\mathrm{d}S+P\mathrm{d}V$ Enthalpie

$G=G(T,P)=H-TS;\mathrm{d}G=\mathrm{d}H-T\mathrm{d}S-S\mathrm{d}T$ Gibbs Energie

9.2 Integrabilitätsbedingung

9.3 Maxwell Relation

Die Maxwell Relationen lassen sich aus der Integrabilitaetsbedingung für implizite Differentialgleichungen ableiten. $U(S,V)$ ist beispiehlhaft aufgestellt:

$\mathrm{d}U(S,V)=T\mathrm{d}S-P\mathrm{d}V=\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\mathrm{d}S+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S\mathrm{d}V$

$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=\left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\right)_S=\left(\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S\right)_V=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$