

# Mediendo la constante de Planck usando diodos de unión p-n mediante la programación de un microcontrolador tipo ATmega328P.

Measuring Planck's constant using P-N junction diodes by programming an ATmega328P-type microcontroller.

Juan P. Garcia Prado<sup>1</sup>, Nicolas E. Castro Toledo<sup>2</sup>, and Miguel A. Parra Carrillo<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Departamento de Física, Universidad de Concepción, Concepción - Chile.

## RESUMEN

En el presente escrito se presenta un método experimental para determinar el valor de la constante de Planck mediante la variación de elementos resistivos en un circuito controlado por una placa tipo ATmega328P. Este registro empírico consiste en la manipulación de diodos emisores de luz de unión P-N para determinar  $h$  por medio de, la determinación de los potenciales de barrera y los valores de minimos de energía necesarias para la emisión de fotones en difentes tipos de diodos LED, usando los valores conocidos de longitud de onda de la luz emitida.

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra "quantum" viene del latín "quantus", por "Quanta" que significa "cuanta" de cantidad. El concepto de cuantización de la radiación fue descubierto en 1900 por Max Planck, quien utilizó "quanta" para definir "cuantos" de materia y electricidad, de gas y de calor[1]. Planck trataba de entender la emisión de radiación de los objetos calientes, conocida como radiación del cuerpo negro. La acepción surgió al asumir que la energía solo puede ser absorbida o liberada en paquetes discretos, diferenciales, que llamó "paquetes" o "elementos de energía". Como resultado de sus experimentos, Planck dedujo el valor numérico de  $h$ , conocido como constante de Planck, que junto a otras contribuciones le hizo merecedor del Premio Nobel de Física en 1918.

La constante de Planck es una constante física que desempeña un papel central en la teoría de la mecánica cuántica, es una de las constantes fundamentales. Fue inicialmente propuesta como la constante de proporcionalidad entre la energía un fotón y la frecuencia de su onda electromagnética asociada en la relación de Planck-Einstein[2]. Esta constanate tiene un valor de  $6,626 \cdot 10^{34}$  julios-segundo, y aparece en los cálculos para medir los niveles de energía de un átomo, o la longitud de onda de una partícula en movimiento, como un electrón. También aparece en el principio de indeterminación que da una relación entre las mediciones de posición y momento. La constante de Planck provee una escala de cuantificación

para todos los sistemas, pero sólo es realmente perceptible en la escala atómica[2].

Consideremos un átomo de hidrógeno, que está formado por un solo electrón que interactúa con un protón. El electrón puede tener diferentes energías, pero no cualquier energía. Puede tener una energía de  $-13.6[eV]$ , o de  $-3.4[eV]$  o de  $-1.5[eV]$ . Pero no puede tener una energía de  $-5[eV]$ , eso no es posible esto se debe a que los niveles de energía del hidrógeno están cuantizados, lo que significa que sólo hay niveles discretos de energía.1

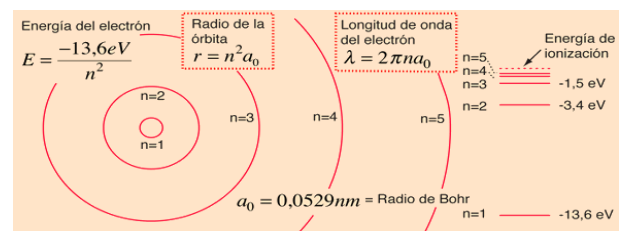


Fig. 1. Saltos energéticos del H.

Existe un paralelo entre el átomo de hidrogeno con un diodo LED (2). Los LEDS son dispositivos semiconductores con un hueco energético, a menudo llamado hueco de banda.El hueco energético es igual que la transición energética en el átomo de hidrógeno. Los electrones pueden existir a ambos lados del hueco de banda, pero no en medio de él. Si un

electrón tiene la energía adecuada, puede saltar a través de la brecha de banda. Y como el electrón pierde energía al hacer el salto, produce luz.



Fig. 2. Diodo LED.

Si uno de estos dispositivos es conectado a una fuente es posible apreciar que para valores bajos de voltaje no emiten luz. A una determinada voltaje, llamado voltaje de activación el LED comienza a brillar. En este experimento vamos a medir este valor y para ello usamos una fuente de alimentación variable conectada a un LED. Se aumentara lentamente el voltaje a media que se registra el valor de la intensidad de la corriente eléctrica. Cuando la corriente empieza a aumentar, es cuando podrá ver la luz visible.

## 2. MARCO TEÓRICO

La constante de Planck se presenta en la relación de Planck–Einstein <sup>1</sup>:

$$\Delta E = h\nu \quad (1)$$

Una interpretación de esta ecuación es que para cambiar los niveles de energía de un sistema cuántico, hay que perturbarlo en una frecuencia determinada.

En la ecuación (1),  $\Delta E$  es el cambio en los niveles de energía,  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  es la frecuencia de la perturbación[2].

Una forma de perturbar un sistema es con la radiación electromagnética, también conocida como luz .

Por ejemplo, si tomamos el electrón de un átomo de hidrógeno y lo excitamos desde el primer nivel de energía hasta el segundo, necesitamos una frecuencia determinada para golpearlo, de  $2.46 \times 10^{15} \text{ Hz}$ .

Como la perturbación proviene de la luz, podemos describir la ecuación (1) con longitud de onda,  $\lambda$ , en vez de frecuencia.

Así, tenemos la siguiente ecuación :

$$c = \lambda \nu \quad (2)$$

<sup>1</sup>La Relación de Planck–Einstein también se conoce como la relación de frecuencia-energía de Planck, relación de Planck, y ecuación de Planck. Se refieren a una fórmula integral de la mecánica cuántica, la cual establece que la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia.

Con esta relación entre longitud de onda y frecuencia, de la ecuación 1 y ecuación 2 tenemos:

$$\Delta E = E_p = \frac{hc}{\lambda} \quad (3)$$

Por otro lado, cuando un LED se conecta a voltajes pequeños, la corriente eléctrica es muy pequeña, y la energía no es suficiente para producir fotones. A partir de cierto voltaje, el LED comienza a emitir fotones: este es el voltaje de activación,  $V_a$  [3]. El voltaje de activación mínimo, para distintos colores de LEDs, está relacionado con la energía de los fotones emitidos,  $E_p$ , y deducimos la siguiente ecuación:

$$V_a = \frac{E_p}{q} + \frac{\lambda}{c} \quad (4)$$

En casi todos los circuitos eléctricos (incluidos los que tienen LEDs), la carga móvil,  $q$ , son los electrones. Así, como conocemos la carga de un electrón,  $1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$ , podemos utilizar el cambio de potencial eléctrico para encontrar el cambio de energía.

Para voltajes superiores a  $V_a$ , la intensidad de corriente está determinada por la resistencia eléctrica de los LEDs [3]. Así, por Ley de Ohm,  $V = I \cdot R$ , se deduce una relación lineal entre la intensidad de corriente y el voltaje aplicado.

En la ecuación 4, el término  $\lambda/c$  es una constante que representa la pérdida de energía del semiconductor, y podemos suponer que es igual para todos los LEDs.

Este término es desconocido, por lo que no es posible, a partir de la ecuación 2, determinar la constante de Planck midiendo sólo el voltaje de activación.

Sin embargo, si éste es medido para varios LEDs que emiten en diferentes longitudes de onda, podemos calcular  $h$  a partir de la gráfica  $V_a$  frente a la inversa de la longitud de onda.

De este modo, reescribiendo la ecuación (4), tenemos que

$$V_a = \frac{hc}{e(1/\lambda)} + \frac{\phi}{c} \quad (5)$$

Por tanto, la gráfica  $V_a$  versus  $1/\lambda$ , nos da una línea recta con pendiente  $hc/e$ , a partir de la cual se puede calcular la constante de Planck, suponiendo conocidos los valores de  $e$  y  $c$ . Mediante un modelo de regresión lineal se obtiene el valor para la pendiente  $V$  y en consecuencia el valor de la constante de Planck.

Finalmente, otro manera es calcular  $h$  a partir de la ecuación

de la energía de un foton de luz :

$$E = hf \quad (6)$$

$$= \frac{h c}{\lambda} \approx eV_a \quad (7)$$

Por lo tanto, para valores aproximados de  $h$ :

$$V_a = \frac{h c}{\lambda e} \quad (8)$$

$$\Rightarrow h = \frac{\lambda e V_a}{c} \quad (9)$$

**Método de mínimos cuadrados ponderados.** Consideramos un conjunto de  $m$  de observaciones y una curva (función del modelo)  $y = f(x, \beta)$  que además de la variable  $x$  también depende de  $n$  parámetros,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  con  $n < m$ . Se desea encontrar el vector  $\beta$  de parámetros tales que la curva se ajuste mejor a los datos dados en el sentido de mínimos cuadrados, es decir, la suma de cuadrados:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i, \beta))^2 \quad (10)$$

El mínimo valor de  $\chi^2$  se produce cuando el gradiente es cero. Dado que el modelo contiene  $n$  parámetros, hay  $n$  ecuaciones de gradiente:

$$\frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = 0 \quad (11)$$

Con  $r_i = (y_i - f(x_i, \beta))$  y donde  $j = (1, \dots, n)$ . En un sistema no lineal, las derivadas  $\frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}$  son funciones tanto de la variable independiente como de los parámetros, por lo que estas ecuaciones de gradiente no tienen una solución cerrada [4]. En lugar de ello, los valores iniciales deben ser elegidos para los parámetros. Entonces, los parámetros se refinan iterativamente, es decir, los valores se obtienen por aproximación sucesiva:

$$\beta_j \approx \beta_j^{k+1} = \beta_j^k + \Delta \beta_j$$

Aquí  $k$  es un número de iteración y el vector de incrementos,  $\Delta \beta$ , que se conoce como el vector de desplazamiento. En cada iteración del modelo se linealiza por aproximación a un primer orden en serie de Taylor de expansión sobre  $\beta^k$ :

$$f(x_i, \beta) \approx f(x_i, \beta^k) + \sum_j \frac{\partial f(x_i, \beta^k)}{\partial \beta_j} (\beta_j - \beta_j^k)$$

Donde podemos considerar la siguiente aproximación

$f(x_i, \beta) \approx f(x_i, \beta^k) + \sum_j J_{ij} \Delta \beta_j$ . El jacobiano,  $J$ , es una función de las constantes, la variable independiente y los parámetros, por lo que cambia de una iteración a la siguiente [4]. Por lo tanto, en términos del modelo linealizado,  $\frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} = -J_{ij}$  y los residuos se dan por

$$r_i = \left( y_i - f(x_i, \beta^k) \right) - \sum_{s=1}^n J_{is} \Delta \beta_s$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de gradiente, se convierten en

$$-2 \sum_{i=1}^m J_{ij} \left( \left( y_i - f(x_i, \beta^k) \right) - \sum_{s=1}^n J_{is} \Delta \beta_s \right) = 0$$

que, en el reordenamiento, convertido en  $n$  ecuaciones lineales simultáneas, las ecuaciones normales

$$\sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^n J_{ij} J_{is} \Delta \beta_s = \sum_{i=1}^m J_{ij} \Delta y_i ; j = (1, \dots, n)$$

Luego, las ecuaciones normales se escriben en notación matricial como

$$(J^T J) \Delta \beta = J^T \Delta y$$

Cuando las observaciones no son igualmente fiable (la dispersión no es la misma para cada uno de los  $y_i$ , lo que implicaría que no todos los  $y_i$  tienen la misma variabilidad), una suma ponderada de los cuadrados puede ser minimizado [4]. El método de mínimos cuadrados ponderados, contempla diferentes pesos para cada uno de los valores medidos, según el grado de dispersión de cada uno de estos. A cada medición se le asocia un peso  $w_i$ , tal que

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m w_{ii} r_i^2 \quad (12)$$

Cada elemento de la matriz de peso diagonal  $W$  debería, idealmente, ser igual al recíproco de la varianza de error de la medida (es decir que los pesos sean inversamente proporcionales a la incertidumbre, es decir, le daríamos mayor credibilidad a los  $y_i$  con menos incertidumbre y menor credibilidad a los  $y_i$  con mayor incertidumbre) [4]. Esto implica que las observaciones no están correlacionadas. Si las observaciones están correlacionadas, aplica la expresión siguiente

$$\chi^2 = \sum_{k=1} \sum_{j=1} r_k W_{kj} r_j$$

En este caso, la matriz de pesos debería idealmente ser igual a la inversa de la matriz error -covarianza de error de las observaciones. Las ecuaciones normales son entonces:

$$(J^T W J) \Delta \beta = J^T W \Delta y$$

En mínimos cuadrados lineales la función objetivo,  $\chi^2$ , es una función cuadrática de los parámetros. Con dos o más parámetros, los contornos de  $\chi^2$  con respecto a cualquier par de parámetros serán elipses concéntricas. Los valores de los parámetros mínimos se encuentran en el centro de las elipses. Cuanto más los valores de los parámetros difieren de sus valores óptimos, más los contornos se desvían de la forma elíptica. Una consecuencia de esto es que las estimaciones de parámetros iniciales deben ser lo más cercanas posible a sus valores óptimos (¡desconocidos!). También explica cómo la divergencia puede surgir y como el algoritmo de Gauss-Newton es convergente sólo cuando la función objetivo es aproximadamente cuadrática en los parámetros.

### Residuos

Los residuos corresponden a las diferencias entre los datos medidos y la predicción realizado por el modelo propuesto; es decir son la diferencia entre el valor observado y el valor ajustado por el modelo. Las métricas mas utilizadas para medir la calidad del ajuste son el error estándar de los residuos y el coeficiente de determinación. El error estándar de los residuos  $\epsilon_{res}$  mide la desviación promedio cualquier punto estimado por el modelo respecto de la curva de regresión.

$$\epsilon_{res} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}} \quad (13)$$

El coeficiente de determinación  $R^2$  describe la proporción de varianza de la variable respuesta explicada por el modelo y relativa a la varianza total. Su valor está acotado entre 0 y 1. Al ser adimensional, presenta la ventaja frente al error estándar residual de ser más fácil de interpretar.

$$R^2 = \frac{SCT - SCE}{SCT} \quad (14)$$

Donde  $SCT$  es la suma de los cuadrados totales y  $SCE$  es la suma de los cuadrados residuales

## 3. MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1 Materiales

En esta sección se detallan los materiales utilizados en el experimento.

- Cuatro LEDs, que emiten luz roja, amarilla, verde y azul respectivamente.
- Arduino UNO R3
- Un potenciómetro de 10KΩ
- Resistencia de 330Ω
- Cable de alimentación USB
- 4 Jumpers Macho-Macho
- Protoboard de 400 puntos
- Software de Arduino
- CoolTerm
- Miniconda

### 3.2 Arduino UNO R3

El Arduino UNO R3 es una placa basada en micro-controlador. En el presente experimento, se alimenta el Arduino UNO, de la figura 3, mediante conexión USB a una Laptop que proporciona 5[V] a 500mA.

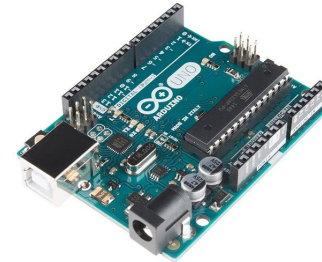


Fig. 3. Arduino UNO R3

### Funcionamiento de Arduino UNO R3

La función de Arduino en el dispositivo es alimentar el circuito y medir los datos. Para la alimentación hacemos uso de los pines de alimentación y para la lectura de los datos los pines de entrada analógica.

- GND : Referencia cero, tierra. Son la referencia cero para todo voltaje.
- 5V : Salida de 5[V] regulados.
- A0 a A5 : pines de entrada analógica.

Para medir los datos hacemos uso de los pines de entrada analógica, que utilizan un ADC (Analog-Digital Converter) para ingresar valores analógicos al microcontrolador en una codificación que éste puede manejar, que es digital, y la conversión analógica tarda entre  $13 - 260\mu s$ . Así, se programa el dispositivo de tal manera que entre cada medida exista un retardo de 1 segundo.

Cabe destacar, que el ADC es un circuito electrónico que convierte señales analógicas en digitales. La representación digital de las señales analógicas es necesaria porque el procesador -digital- necesita valores digitales para utilizar los valores que se presentan en estas entradas. Los pines del Arduino A0-A5 tienen la capacidad de leer tensiones analógicas llegadas desde el exterior, y en el Arduino UNO R3, el voltaje mayor que puede ingresar a una entrada analógica es de 5[V].

Para hacer la lectura de uno de estos pines, en nuestro código escribiremos “Vcc = analogRead(sensorVccPin)” que programa al sensor (definido como sensorVccPin) para que efectue una lectura analógica de la tensión de alimentación en el pin predeterminado, y que almacene el nombre de los datos leídos.

Las entradas analógicas se caracterizan por leer valores de tensión de 0 a 5 Voltios con una resolución de 1024 (10 bits). Si dividimos 5 entre 1024 tenemos que ser capaz de detectar variaciones en el nivel de la señal de entrada de casi 5 [mV]<sup>2</sup>. Esta función nos devolverá un valor que va de 0 a 1024 en proporción al nivel de la señal de entrada. Para una entrada nula obtendremos el valor 0, para una entrada de 2.5[V], 511, y para 5[V], 1024.

Por lo tanto, la función “analogRead” nos devolverá un valor en proporción al nivel de la señal de entrada.

Para comunicar Arduino UNO con la laptop se estableció el protocolo de comunicación serie, ya que este permite intercambiar datos entre la placa Arduino y otro dispositivo con puerto serie. Debe tenerse en cuenta que sólo hay un módulo ADC dentro de este microcontrolador, de modo que sólo se puede leer una entrada analógica a la vez. Los datos se presentan digitalmente en el monitor serie, por lo que para poder crear una base de datos fue necesario el uso de Coolterm, un software que recopila datos y los almacena en archivos de texto simple, dados del monitor en serie.

<sup>2</sup>Observamos que la sensibilidad de los instrumentos es de  $\pm 2.5[mV]$

### 3.3 Montaje

#### 3.3.1 Montaje del circuito

En el figura 4, vemos un diagrama del circuito, formado por un potenciómetro, una resistencia, una fuente y el diodo led:

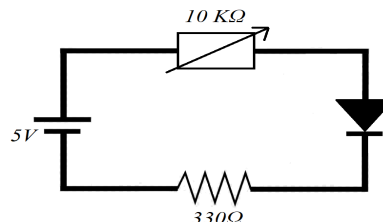


Fig. 4. Diagrama del circuito

Los elementos del circuito se montan sobre un protoboard, y se posicionan los cables que conectan a las entradas analógicas de la placa, que actuarán como sensores, como vemos en la figura 5

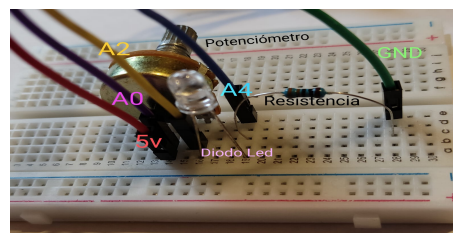


Fig. 5. Circuito sobre el protoboard, donde 5V corresponde a la fuente y GND a la tierra.

A0 corresponde al cable que llega al pin de lectura analógica de la tensión de alimentación, A2 al cable que llega al pin de lectura que mide un potencial sobre el diodo, y A4 el cable que llega al pin de lectura que recoge la tensión sobre del resistor.

Finalmente, en la figura 6 vemos los otros extremos de los cables, conectados a la placa

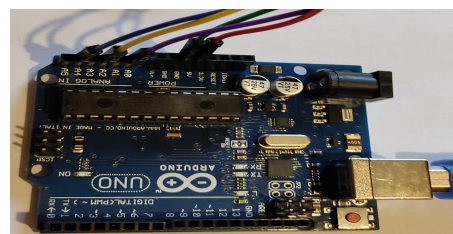


Fig. 6. Placa de Arduino UNO R3 via USB con pins conectados al protoboard mediante jumpers.

### 3.3.2 Codificación y almacenamiento de datos

La placa de Arduino UNO se programa usando el software del fabricante. El código es cargado a la placa y luego de un instante esta comienza a proporcionar datos que pueden ser visualizados en el monitor de serie.

```
int Vcc = 0;
int Vr = 0;
int Vd=0;
int Vaux=0;
int sensorVccPin = A0;
int sensor1Pin = A2;
int sensor2Pin = A4;
void setup(){
  Serial.begin(9600);
}
void loop(){
  Vcc = analogRead(sensorVccPin);
  Vaux = analogRead(sensor1Pin);
  Vr = analogRead(sensor2Pin);
  Vd = Vaux - Vr;
  Serial.print(Vr);
  Serial.print(";");
  Serial.println(Vd);
  delay(1000);
}
```

En el código, se definen las variables  $V_{cc}$  (tensión de alimentación),  $V_r$  (tensión de la resistencia),  $V_d$  (tensión en el diodo) y  $V_{aux} = V_r + V_d$  (variable auxiliar).

Luego, se asigna la variable “sensorVccPin” al pin de lectura de A0 ( que mide  $V_{cc}$ ), “sensor1Pin” al pin de lectura A2 (que mide  $V_r + V_D$ ) y “sensor2Pin” al pin de lectura A4 (que mide  $V_r$ ).

Por otro lado, “void setup(){Serial.begin(9600)}” se encarga de establecer un enlace de comunicación en serie que controlará el orden en el que se leen los valores de tensión y se alimenta el monitor. Además permitirá almacenar y presentar los datos de cada medida.

Finalmente, “void loop()” define un bucle que se ejecuta en secuencia continuamente en el que se irá programando a los sensores para que efectúen lecturas analógicas de las tensiones, calcule  $V_D$  e imprima los valores de  $V_D$  y  $V_r$  con un retardo de 1 segundo. Este retardo evitará el efecto de atenuación y dará el tiempo suficiente para que se presenten los datos en pantalla.

Para recolectar los datos medidos y construir una base datos, hacemos uso de Coolterm, que automáticamente detecta la placa y genera los archivos de texto con los datos recogidos.

### 3.4 Procesamiento de datos

Para el procesamiento de los datos se utiliza Jupyter notebook.

El intervalo de las tensiones va entre los 0[V] y 5[V], y es discretizado por el Arduino en números enteros en el intervalo [0, 1023]. Por esto, es necesario hacer una conversión a través de la siguiente relación:

$$V_d = \frac{5}{1023} V'_d \quad (15)$$

Donde  $V_d$  corresponde a la tensión medida en el diodo para cada color, por ello definimos la función “conver()” en Jupyter.

De acuerdo a las Leyes de Kirchhoff, la ecuación del circuito viene dado por:

$$I = \frac{V_{cc} - V_D}{R + R_1} \quad (16)$$

Donde  $I$  es la corriente,  $V_D$  es la tensión en el diodo,  $R(t)$  es la resistencia del potenciómetro (que es variable y cuyo valor máximo es  $10K\Omega$ ) y  $R_1$  la resistencia en el circuito cuyo valor nominal es de  $330\Omega$ .

Reemplazando valores obtenemos:

$$I = \frac{5 - V_D}{R + 330} \quad (17)$$

Como  $V_R = 5 - V_D$ , y aplicando la ley de Ohm en la resistencia, cuyo valor nominal es de  $330\Omega$ , tenemos:

$$I = \frac{V_R}{330} \quad (18)$$

Usando la ecuación ( 18) podemos calcular la corriente en la resistencia usando el valor de  $V_R$ . Posteriormente, si se conoce el valor de la corriente y el error de los datos, se puede obtener la curva característica para cada LED.

Podemos considerar que cada valor del voltaje corresponde a una única medida, por lo que para cada valor de la tensión el error experimental esta determinado por la sensibilidad del del instrumento, que para Arduino UNO es de  $5[mV]$ .

Notar que,  $V_D = \frac{5}{1023} V'_d$  de modo que  $\Delta V_D = \frac{\partial V_D}{\partial V'_d} \Delta V'_d$ .

Luego como la sensibilidad del arduino para medir los voltajes es de  $5[mV]$  (valor convertido) y como  $\frac{\partial V_D}{\partial V'_d}$  es una diferencial completa, entonces,

$$\Delta V_D = 2.5 \cdot 10^{-3} [V] \quad (19)$$

Bajo razonamientos análogos, se infiere que el valor  $\Delta V_R$  es el mismo, por lo que se define el valor del error experimental para ambas tensiones como  $\Delta V_D = 2.5 \cdot 10^{-3} [V]$  y en milivoltios  $\Delta V_D = 2.5 [mV]$ .

De igual manera, mediante el método para determinar errores para la corriente :

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial V_R} \Delta V_R = \frac{\partial (\frac{V_R}{R})}{\partial V_R} \Delta V_R = \frac{1}{R} \Delta V_R + \frac{V_R}{R^2} \Delta R \quad (20)$$

Suponiendo que  $\Delta R = \Delta V$ .

$$\Delta I = \frac{1}{R} \Delta V_R + \frac{V_R}{R^2} \Delta R = \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{330} + V_R \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{330^2} \quad (21)$$

Luego, el error experimental para la corriente es  $\Delta I = 7.6 \cdot 10^{-6} + 2.3 \cdot 10^{-8} V_R$ .

Se presentan las curvas características de los diodos LED.

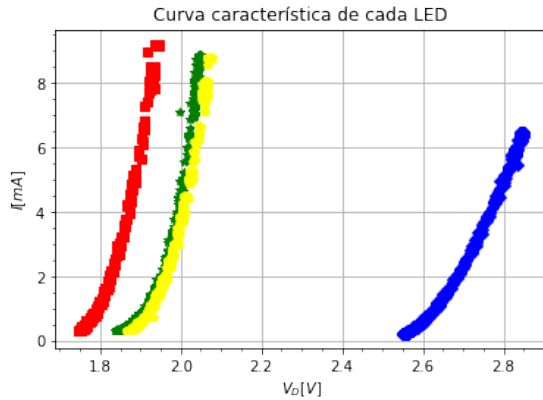


Fig. 7. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

De la figura (27) se infiere cualitativamente que existen patrones en el comportamiento de los datos; a partir de los cuales extraemos los criterios para ajustar curvas que emulen las tendencias de los datos, mediante modelos de regresión. Para los diodos LED de color verde, rojo y azul, se propone modelo de Shockley que permite aproximar el comportamiento del diodo. Por otro lado, para el LED de color amarillo se propone un ajuste polinomial.

La ecuación del diodo de acuerdo al modelo de Schockley relaciona la intensidad de corriente y la diferencia de potencial.

$$I = I_0 \left( e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1 \right) \quad (22)$$

donde  $V_T = \frac{kT}{q}$  es el voltaje térmico,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$  es la constante de Boltzman,  $T[K]$  es la temperatura absoluta y  $q = 1.6 \cdot 10^{-19} [K]$  es la carga del electrón [3].

Por otro lado, para la corriente en el resistor de  $330\Omega$  al reescribir la ecuación (17) obtenemos la recta de carga.

$$I = \frac{5 - V_d}{330 + R} = \frac{5}{330} - \frac{V_d}{330} \quad (23)$$

Si en la ecuación (23),  $V_D = 0[V]$ , entonces la corriente  $I$  es  $5/330[A]$ . Pero si la corriente es nula, entonces  $V_D = 5[V]$ . El ajuste de curvas se lleva a cabo mediante el método de minimos cuadrados ponderados; ya que según lo expresado en la ecuación (21) el error experimental de la corriente es un valor variable, que depende del voltaje medido en la resistencia. Entendiendo que al hablar de resistencia nos referimos a la resistencia equivalente del circuito, que está constituida por el resistor y la resistencia variable del potenciómetro.

Usaremos el método gráfico para calcular el voltaje de activación, el cual consiste en buscar los valores para los cuales la intensidad de corriente aumenta linealmente con el voltaje, para luego extrapolar líneas rectas que se ajusten a la respuesta.

De los ajustes extremos, los coeficientes que corresponden a los valores  $I_0$  y  $V_T$ . Luego, igualando las corriente en las ecuaciones (22) y (23)

$$I_0(e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1) = \frac{5}{330 + R} - \frac{V_D}{330 + R} \quad (24)$$

Obtenemos la ecuación (24), con la cual es posible determinar el punto de intersección entre la curva de corriente y la recta de carga, valor que en su abscisa se corresponde con el voltaje de activación. Pero como se evalúan los valores sobre una cantidad discreta de puntos, surge el inconveniente de que no existan intersecciones en los arreglos definidos; es decir que no sea posible resolver la ecuación (24). En vista de lo anterior se presenta un algoritmo que proporciona soluciones numéricas, sin embargo es importante destacar que esta solución podría traer consigo errores computacionales.

```
def d(i_,phi):
    return i_-phi
d_g = d(i_G,exponencial(xx_g,A_g,B_g))
for i in range(len(d_g)-1):
    if d_g[i]==0. or d_g[i]*d_g[i+1]<0.:
        rot_g = xx_g[i]
Va_g= rot_g
```

En el código (3.4) se define una función  $d(i,phi)$  que evalúa la diferencia de los valores del arreglo que corresponde a la recta de carga con la curva ajustada. Luego, dichas diferencias son procesadas en un ciclo que compara los valores en

busca del comportamiento buscado; es decir, busca los valores que sean 0, o bien que los valores pasen de ser positivos a negativos. En tal caso define la raíz.

Una vez conocido el valor  $V_a$ , procedemos a ajustar los datos mediante un modelo de regresión lineal, a partir de los puntos situados en la zona lineal. Es decir buscamos ajustar rectas a las porciones de las curvas de corriente que presenten un crecimiento lineal. Dichas rectas serán usadas para comprobar gráficamente los valores obtenidos en el código (3.4 ).

Una vez determinado el valor  $V_a$  para cada LED y utilizando el valor de la longitud de onda de cada diodo, calculamos el valor de la constante de Planck de manera aproximada mediante la ecuación (9) para cada led, donde  $h$  corresponde a la media de los valores de  $h$  de todos los LEDs, y su error corresponde a la desviación estándar.

Por otro lado, calculamos el valor de  $h$  usando (5) y un modelo de regresión lineal para los valores de  $V_a$  versus  $\frac{1}{\lambda}$ . Usando la pendiente de la recta ajustada y la relación  $\frac{m \cdot e}{c}$  obtenemos  $h$  y de la matriz de covarianza el error en la medición.

## 4. RESULTADOS

Las curvas características de cada LED con sus respectivos errores.

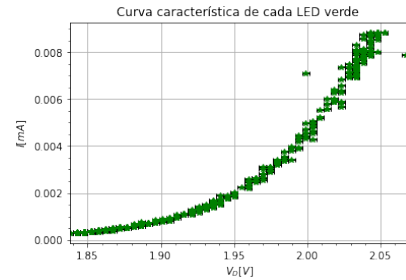


Fig. 8. Gráfico  $V_D$   $v/s$   $I$ .

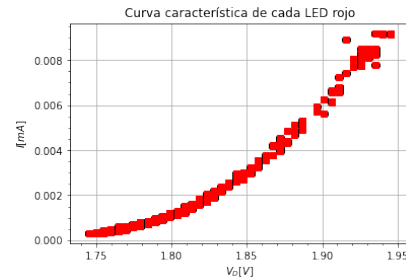


Fig. 9. Gráfico  $V_D$   $v/s$   $I$ .

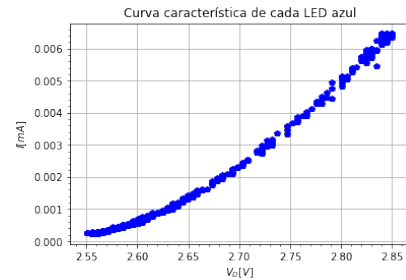


Fig. 10. Gráfico  $V_D$   $v/s$   $I$ .



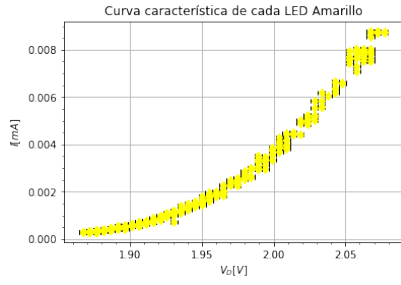


Fig. 11. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

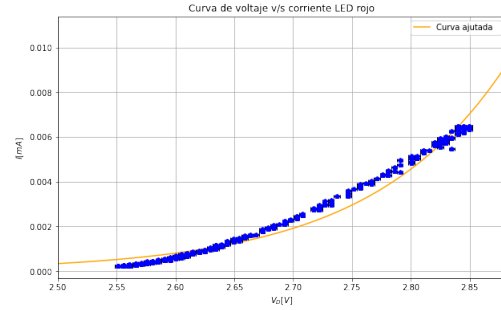


Fig. 14. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

Para cada LED se presenta un ajuste de los datos usando el método minimos cuadrados ponderados.

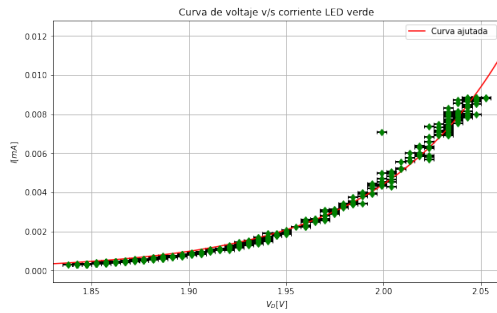


Fig. 12. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

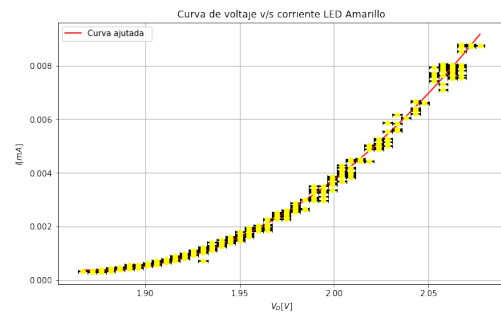


Fig. 15. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

Se presentan los residuos de cada curva ajustada y los valores de los coeficientes de determinación en cada LED.

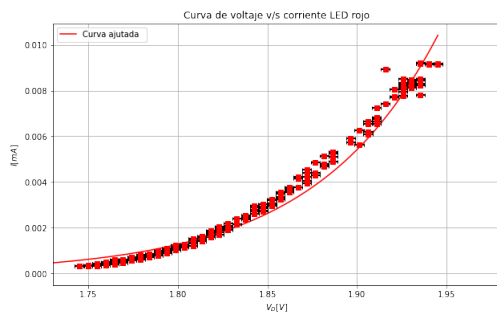


Fig. 13. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

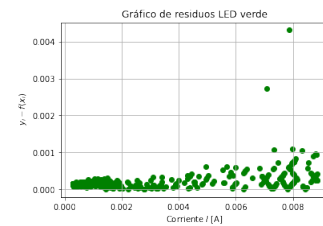


Fig. 16. Gráfico Residuos v/s  $I$ .

El Coeficiente de determinación para el ajuste correspondiente al LED verde es

$$r^2 = 0.9882406960355284$$

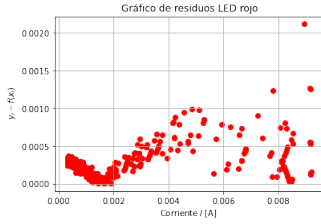


Fig. 17. Gráfico Residuos v/s I.

El Coeficiente de determinación para el ajuste correspondiente al LED rojo es

$$r^2 = 0.9843997038935856$$

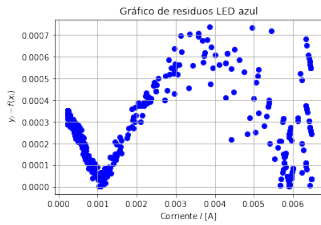


Fig. 18. Gráfico Residuos v/s I.

El Coeficiente de determinación para el ajuste correspondiente al LED azul es

$$r^2 = 0.9811076701564756$$

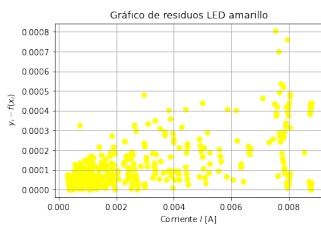


Fig. 19. Gráfico Residuos v/s I

El Coeficiente de determinación para el ajuste correspondiente al LED amarillo es

$$r^2 = 0.9967463439900076$$

Gráfica de la intersección de la recta de carga con la curva ajustada para cada LED.

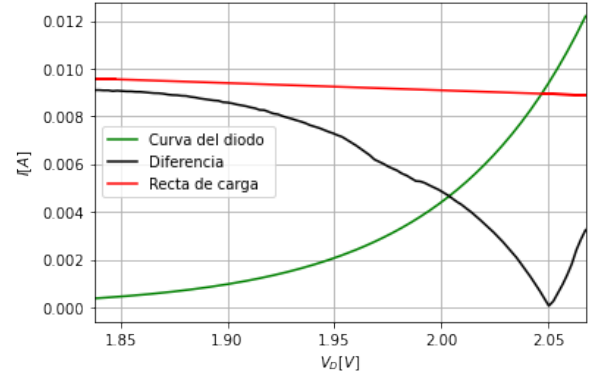


Fig. 20. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

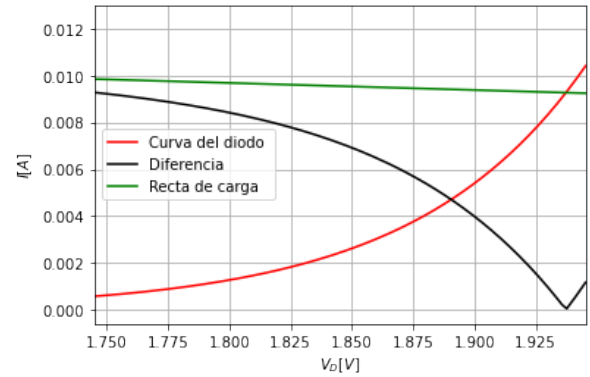


Fig. 21. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

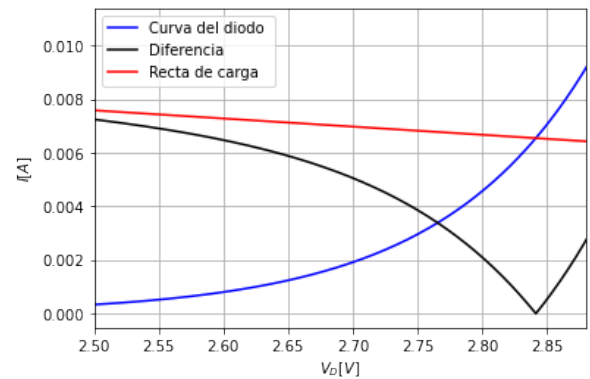


Fig. 22. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

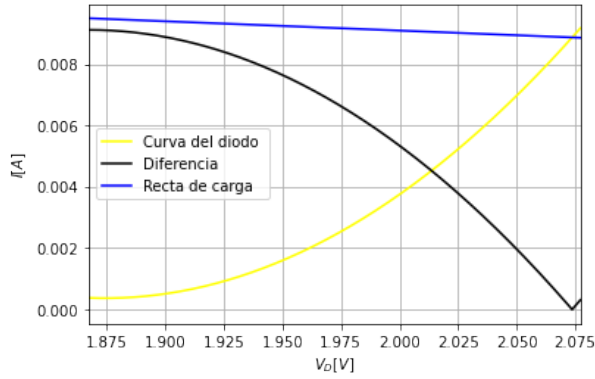


Fig. 23. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

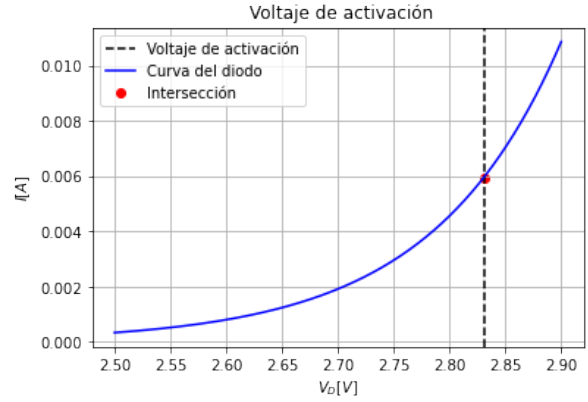


Fig. 26. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

Gráficas del punto de intersección con el valor del voltaje de activación para cada LED.

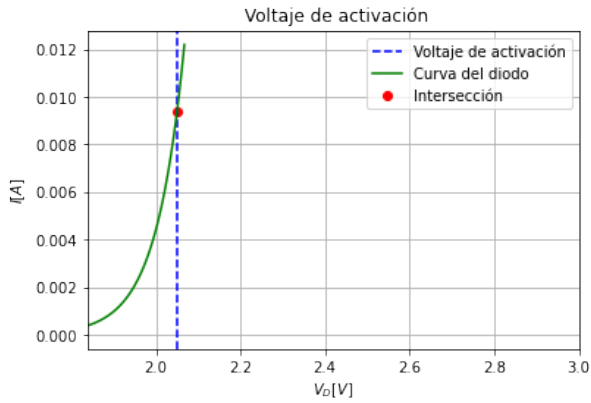


Fig. 24. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

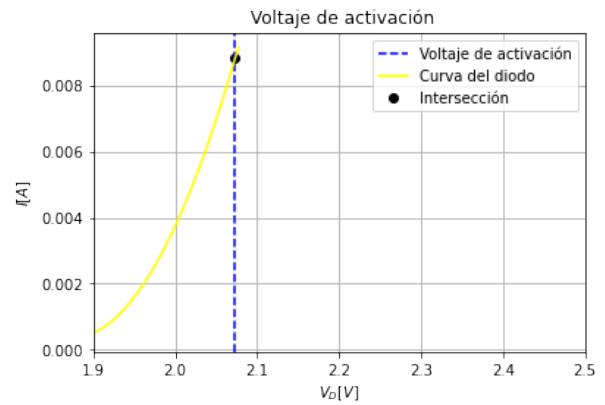


Fig. 27. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

Rectas ajustadas para valores de  $V_D > V_a$  para cada LED .

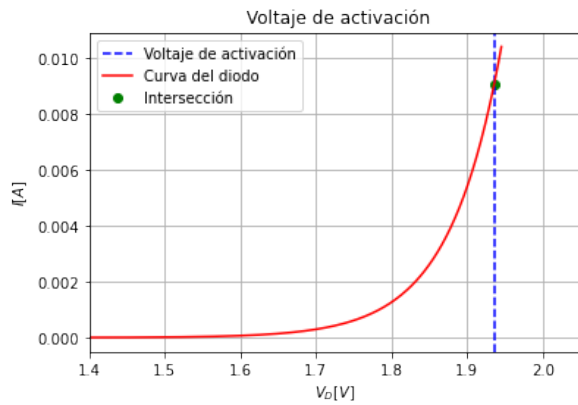


Fig. 25. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

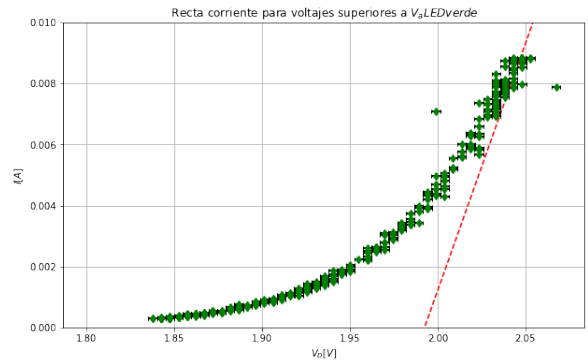


Fig. 28. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

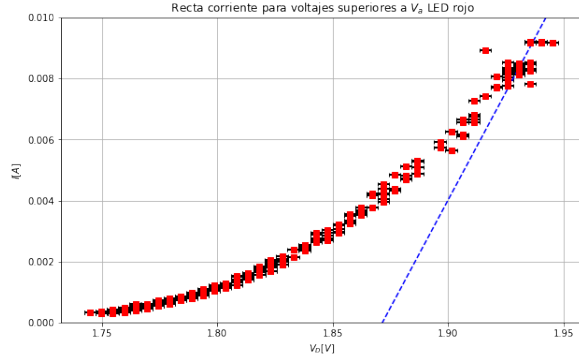


Fig. 29. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

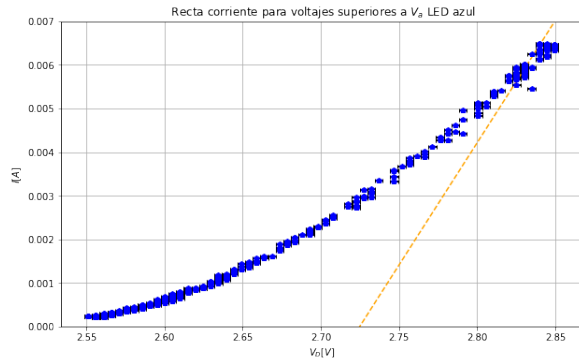


Fig. 30. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

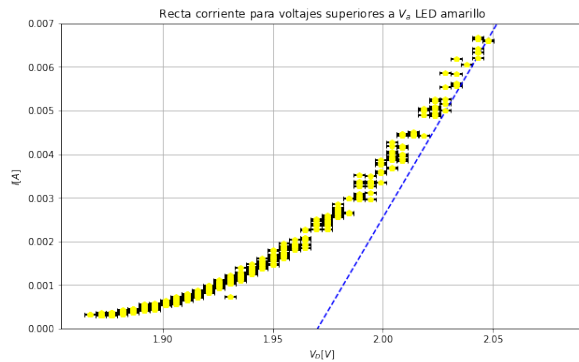


Fig. 31. Gráfico  $V_D$  v/s  $I$ .

Los valores de voltaje de activación y la respectiva longitud de onda para cada LED (valores presentados por el fabricante con el error respectivo) se presentan la siguiente tabla:

Color	Voltaje[V]	Longitud de onda $\lambda$ $10^{-7}[m]$
Verde	2.05	$5.25 \pm 5$
Rojo	1.94	$6.25 \pm 5$
Azul	2.83	$4.65 \pm 5$
Amarillo	2.07	$5.85 \pm 5$

Valor aproximados de  $h$  para cada LED y un valor aproximado de  $h$  que corresponde a la media de los valores y su error que es la desviación de los datos.

Color	$h$ $[J/s]$
Verde	$5.74078 \cdot 10^{-34}$
Rojo	$6.45223 \cdot 10^{-34}$
Azul	$7.02023 \cdot 10^{-34}$
Amarillo	$6.46897 \cdot 10^{-34}$
Promedio	$6.420537 \cdot \pm 4.5415912 \cdot 10^{-34}$

Para el cálculo de  $h$  mediante un modelo de regresión lineal usando los valores del recíproco de la longitud de onda versus el voltaje para cada color, lo obtenemos mediante el siguiente código:

```
def curvalineal(x,a,b):
    return a*x + b
coeff_h,matrix_h =
curve_fit(curvalineal,(1/lambdaa)*1e-6,Va)
a =coeff_h[0]
b = coeff_h[1]
e = 1.6e-19
c = 3e8
h = (a*e/c)*1e-6
delta = (matrix_h[0,0]*e/c)*1e-6
```

Además se presenta un gráfico de la recta obtenida del ajuste lineal de la longitud de onda versus el voltaje de activación.

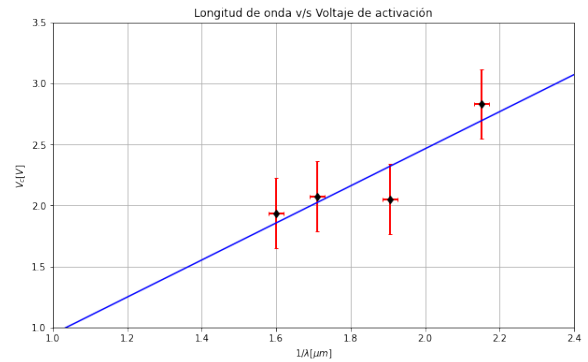


Fig. 32. Gráfico  $V_a$  v/s  $1/\lambda$

Y los valores impresos para la constante de Planck y su error es :

$$h \pm \Delta h = (8.09514358 \pm 1.52619507) \cdot 10^{-34}. \quad (25)$$

## 5. DISCUSIÓN

El ajuste de las curvas características de cada LED deben ser llevadas a cabo mediante el método de mínimos cuadrados ponderados; ya que el error experimental de los valores de la resistencia equivalente varían para cada medida.

Para evaluar la calidad de los ajustes a la curva característica de cada LED y los valores de  $V_a$  es necesario hacer un análisis del coeficiente de determinación para cada caso.

El valor de  $h$  obtenido mediante la energía del fotón, usando los valores medios de  $h$  de cada LED presenta un error absoluto menor al de  $h$  obtenida mediante el ajuste lineal de la longitud de onda versus el voltaje de activación. Los residuos de cada modelo son  $2.0553e - 35$  y  $1.4691 - 34$ , respectivamente. Dichos valores sugieren que es posible que existan errores propagados que no fueron considerados en el ajuste lineal de la longitud de onda versus el voltaje de activación, pues se esperaba que este modelo proporcionara mejores valores, debido a la solidez de las hipótesis del modelo físico.

Además, se propone la utilización de elementos resistivos que puedan proporcionar una cantidad discreta de valores predefinidos, de manera que se pueda hacer un estudio del ruido y errores de calibración de los instrumentos.

## 6. CONCLUSIONES

Concluimos que los valores de la constante de Planck obtenidos son buenas estimaciones del valor real, pero para obtener resultados notables es necesario ampliar el rango de valores de los datos experimentales para cada LED y esto puede ser llevado a cabo mejorando la fuente de energía o mediante la utilización de otros elementos resistivos (como por ejemplo la utilización de un potenciómetro de  $20K\Omega$ ). Además debido a la dependencia de las variables es imperativo controlar los errores sistemáticos y presentar medidas repetidas para cada variable, de manera que se pueda llevar a cabo una revisión de posibles errores instrumentales.

Se cumplieron los objetivos planteados, además se lograron observar las fuentes de errores y posibles mejoras al experimento.

## 7. APENDICE

Imágenes del experimento.

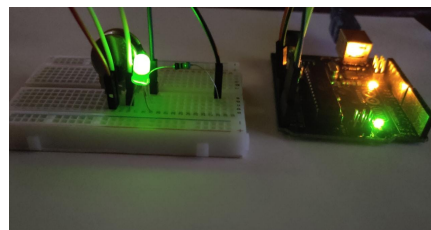


Fig. 33. Fotografía del LED verde encendido

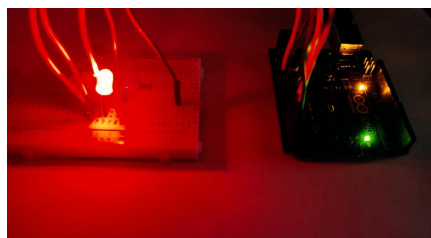


Fig. 34. Fotografía del LED rojo encendido

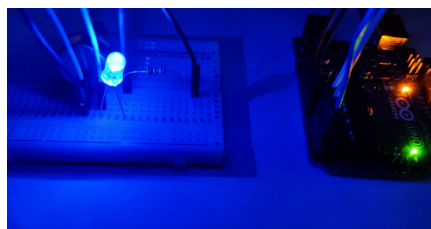


Fig. 35. Fotografía del LED azul encendido

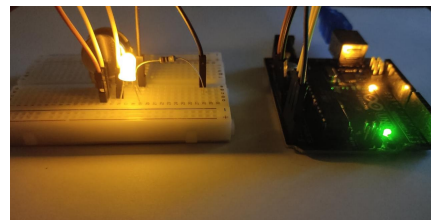


Fig. 36. Fotografía del LED amarillo encendido

---

## 8. REFERENCIAS

### BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Planck, “Ueber das thermodynamische gleichgewicht von gasgemengen,” *Annalen der Physik*, vol. 255, no. 6, pp. 358–378, 1883.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics*. Wiley, 1977.
- [3] O’CONNOR and L. O’CONNOR), “Measuring planck’s constant using a light emitting diode,” *Phys. Teach*, no. 12, pp. 423–425, 1974.
- [4] C. T. Kelley, *Iterative methods for optimization*. Frontiers in applied mathematics, SIAM, 1999.