Problemas de Primeiro Grau (Modelados Por (Restrições de) Funções Afins ou de Primeiro Grau)

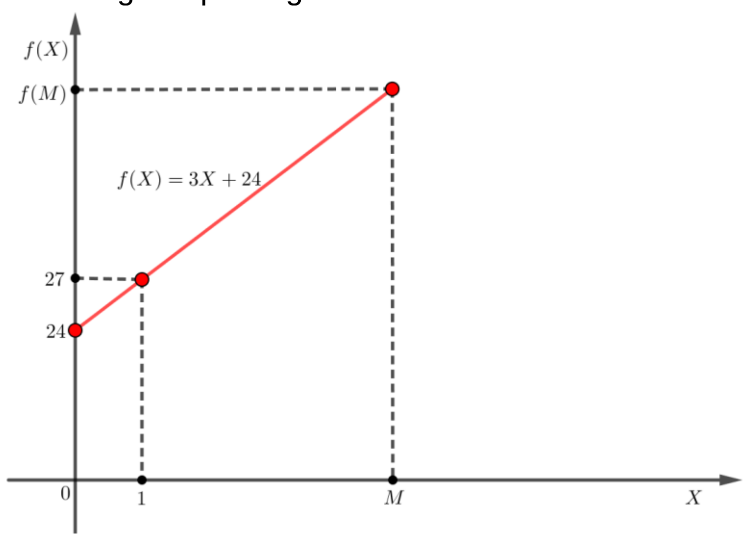
1) Em uma corrida de táxi, é cobrado a bandeirada mais um valor fixo por quilômetro percorrido. Por uma corrida de $8km$ paga-se $R\$70{,}00$ e por uma corrida de $5km$ paga-se $R\$46{,}00$. Fazendo $f(x)$ =valor (em reais) a ser pago por uma corrida de xkm, resolva os itens que seguem:
a) A afirmação: "A relação matemática entre os valores de x e $f(x)$ é do tipo $f(x) = ax + b$, onde a, b são números reais positivos" é verdadeira? Justifique a sua resposta. b) Qual é o valor pago por quilômetro? c) Qual é o valor da bandeirada? d) Quanto se paga por uma corrida de $67{,}9km$? e) De quanto é o percurso de uma corrida que tenha custado $R\$108{,}43$? e) Expresse graficamente como variam os valores de $f(x)$ em função dos valores de x.

2) "Em fevereiro, o governo da cidade do México, (...) passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia (...) e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra." Fazendo $f(x)$ =valor (em dólar) da anuidade a ser paga por x horas anuais excedentes, resolva os itens que seguem:
a) De quanto deve ser a anuidade de alguém que tenha utilizado a bicicleta por $3{,}2h$ anuais excedentes?
Solução: Aqui queremos $f(3{,}2)$, que é calculado da seguinte forma

$$f(3{,}2) = 24 + 3 \cdot 3{,}2 = 33{,}6 \text{ dólares.}$$

b) Quantas horas anuais excedentes foi utilizada por alguém que pagou uma anuidade de 58 dólares?
Solução: Aqui queremos x, tal que $3x = \underbrace{58 - 24}_{34h\ excedentes}$. Assim, $x = \frac{34}{3} \Longrightarrow x \cong 11{,}3h$.

c) Expresse graficamente como varia os valores de $f(x)$ em função dos valores de x.
Solução: Como $f(x)$ aumenta 3 unidades quando x aumenta de uma unidade e $f(0) = 24$, tem-se que $f(x) = 3x + 24$. Supondo que x admite um valor máximo M, tem-se que o gráfico que expressa a variação dos valores de $f(x)$ em função dos valores de x é o segmento que tem origem no ponto $(0{,}24)$, contem, por exemplo, o ponto $(1, f(1) = 3 \cdot 1 + 24) = (1{,}27)$ e tem extremidade no ponto $(M, f(M))$, conforme mostra a figura que segue.



3) Duas pessoas combinam de se encontrar entre $13h$ e $14h$. No exato instante em que a posição do ponteiro dos minutos do relógio coincide com a posição do ponteiro das horas. Dessa forma, calcule o horário do encontro.

4) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. Sabendo que inicialmente o reservatório A está com 720 litros de água e que o reservatório B está com 60 litros, em quanto tempo eles conterão o mesmo volume? Nesse instante, qual será o volume de ambas as caixas?

5) Um experimento da área de agronomia mostra que a temperatura mínima do solo, em ºC, é determinada em função do resíduo de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela.

Calcule a temperatura mínima para um resíduo de 107 g/m^2.

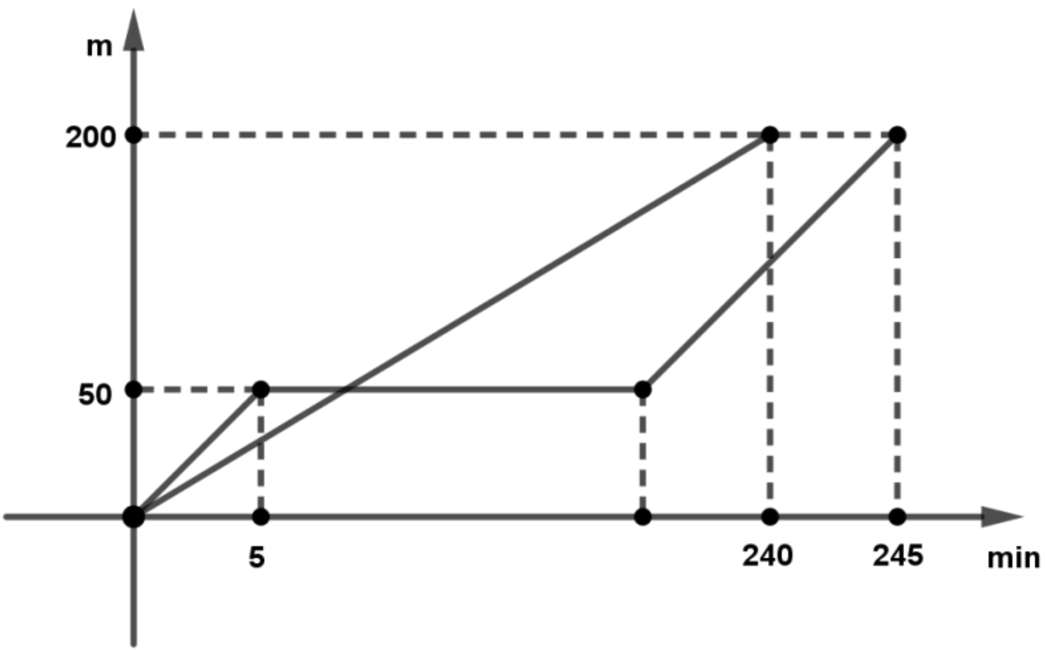
g/m^2	10	20	30	40	50	60	70
ºC	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Solução: Fazendo $f(x)$ =temperatura mínima do solo (em ºC) para um resíduo de biomassa de x g/m^2, tem-se que queremos obter $f(107)$. Como $\frac{7,30-7,24}{20-10} = \frac{7,36-7,30}{30-20} = \frac{7,42-7,36}{40-30} = \frac{7,48-7,42}{50-40} = \frac{7,54-7,48}{60-50} = \frac{7,60-7,54}{70-60} = 0,006$ e, supondo que essa taxa de variação se mantenha constante para valores quaisquer de x, tem-se que $f(x) = 0,006x + b$. Como, por exemplo, $f(10) = 7,24$, tem-se que $\underbrace{0,006 \cdot 10}_{0,06} + b = 7,24 \Leftrightarrow b = 7,24 - 0,06 = 7,18$ e $f(x) = 0,006x + 7,18$.

Finalizando, $f(107) = 0,006 \cdot 107 + 7,18 = 7,822$.

Resposta: $7,822$ ºC.

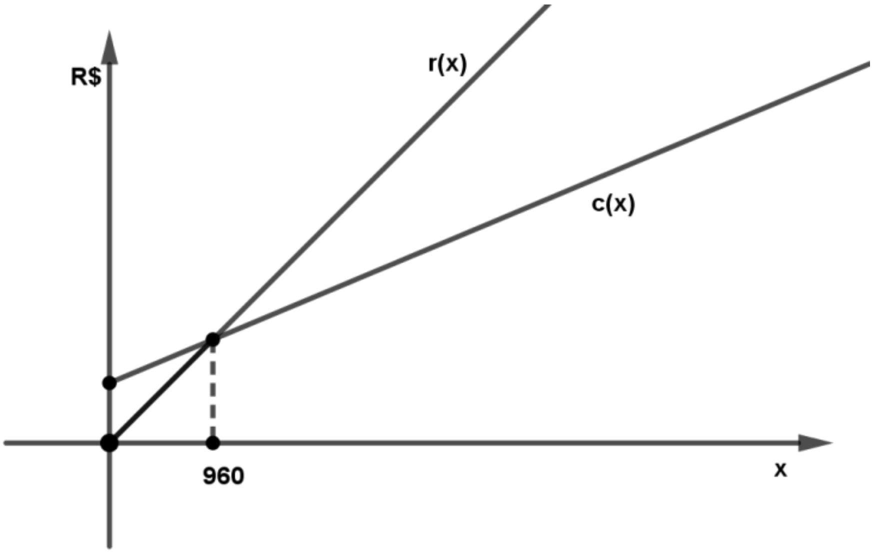
6) A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico (abaixo) para descrever os deslocamentos dos animais.



a) Determine após quanto tempo a tartaruga alcançou a lebre.
b) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.
Observação: A velocidade da lebre após acordar é a mesma de antes de dormir.

7) O custo total, por mês, de um serviço de fotocópias consiste em um custo fixo acrescido de um custo variável. O preço da cópia por página é fixo. Em um mês em que esse serviço fez 5000 cópias, seu custo total foi de $R\$21000,00$. Num outro mês, ao fazer 2000 cópias, o custo foi de $R\$19200,00$. Qual é o custo por página?

8) O gráfico abaixo descreve a receita $(r(x))$ e o custo $(c(x))$ correspondente a produção de x CDs de uma determinada fábrica.



a) Qual é o lucro pela venda de 2000 CDs?
b) Para que valores de x tem-se prejuízo?

9) Sabendo que na loja A, um aparelho custa $R\$3800,00$ mais uma taxa mensal de manutenção de $R\$20,00$ e, na loja B, o mesmo aparelho custa $R\$2500,00$ porém a taxa de manutenção é de $R\$50,00$ por mês, pergunto:
a) Quais são as grandezas (variáveis) envolvidas no enunciado da questão?
b) Qual o custo do aparelho após sete meses de uso, se este foi comprado na loja A? E se foi comprado na loja B?
c) Qual das duas opções é mais vantajosa (custa menos) após 2 anos de uso?
d) Em quanto aumenta o custo do aparelho comprado na loja A quando aumentamos o tempo de uso em um mês? Em quanto aumenta o custo do aparelho comprado na loja B quando aumentamos o tempo de uso em um mês?
e) Fazendo a(x)=custo do aparelho comprado na loja A após x meses de uso e b(x)=custo do aparelho comprado na loja B após x meses de uso, obtenha as expressões a(x) e b(x) e responda a seguinte pergunta: o custo do aparelho é função do número de meses de uso? As funções a e b são funções afins?
f) Em quanto aumenta o custo do aparelho comprado na loja A quando aumentamos o tempo de uso em um mês? Em quanto aumenta o custo do aparelho comprado na loja B quando aumentamos o tempo de uso em um mês? O que esses valores são na expressão a(x) e b(x) obtidas no item e)?
g) Qual é o custo do aparelho comprado na loja A antes de completar um mês de uso? E se comprado na loja B? O que esses valores são na expressão a(x) e b(x) obtidas no item e)?
h) Para quantos meses de uso (para que valores de x) o custo do aparelho comprado na loja A é o mesmo se comprado na loja B?
i) Para quantos meses de uso (para que valores de x) é mais vantajoso (o custo é menor) comprar na loja A? E na loja B?

10) A escala N de temperatura foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçú. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

^0N	^0C
0	18
100	43

Em que temperatura ferve a água na escala N?

Solução: Como a água ferve a $100\ ^0C$, fazendo $f(x)$ =temperatura na escala ^0N correspondente a $x\ ^0C$, tem-se que queremos calcular $f(100)$. Como o espaçamento entre dois valores em uma escala termométrica é constante, tem-se que a taxa média de variação dos valores de $f(x)$ em relação aos correspondentes valores de x é constante, $f(x) = ax + b$, $a = \frac{100-0}{43-18} = 4$ e $f(18) = 0$.

Assim, tem-se que

$f(18) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 18 + b = 0 \Leftrightarrow b = -72$, $\quad f(x) = 4x - 72$ e, finalmente, $f(100) = 4 \cdot 100 - 72 = 328$.

Resposta: $328\ ^0N$.

11) Um supermercado está fazendo a seguinte promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nas compras de $3kg$ ou mais. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de $R\$4{,}00$, pede-se:

a) O gráfico do total pago em função da quantidade comprada.

b) O gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.

c) A determinação de quais consumidores poderiam ter comprado mais alcatra pagando o mesmo preço.

12) Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?

13) Estuda-se a implantação da chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma da idade com o numero de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com queidade se aposentaria?

14) Em uma escola há duas provas mensais, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não alcançar média 7 nessa provas, fará prova final. Sua média final será então a média entre a nota da prova final, com peso 2 e a média das provas mensais, com peso 3. João obteve 4 e 6 nas provas mensais. Se a média final para a aprovação é 5, quanto ele precisa obter na prova final para ser aprovado?

15) Um carro sai de A para B e outro de B para A, simultaneamente em linha reta, com velocidades constantes e se cruzam em um ponto situado a $720m$ do ponto de partida mais próximo. Completada a viagem, cada um deles para por 10 minutos e regressa com a mesma velocidade da ida. Na volta, cruzam-se em um ponto situado a $400m$ do outro ponto de partida. Qual a distância de A até B?

16) Certa locadora de automóveis oferce um serviço de aluguel de um carro por R$70,00 por dia, mais R$0,80 por quilômetro percorrido.

a) Calcule o valor a ser pago pelo aluguel desse carro por dia para as seguintes quilometragens: 18km; 40km; 75km; 100km.

b) Sabendo que uma pessoa pagou R$119,60 no aluguel desse carro por um dia, quantos quilômetros foram percorridos?

c) A locadora oferece uma segunda opção de aluguel de um carro semelhante por R$210,00 por dia sem adicionais por quilômetro percorrido. A partir de quantos quilômetros percorridos por dia se torna mais vantajosa a segunda opção?

17) Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da terra aumenta, aproximadamente, 3°C a cada 100m de profundidade. Num certo local, a 100m de profundidade, a temperatura é de 25°C. Nessas condições, pede-se:

a) Calcule a temperatura a 1.500m de profundidade.

b) Calcule a profundidade em que a temperatura atinge 46°C.

18) O valor de uma moto nova é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, calcule o valor de uma moto com 1 ano e meio de uso. Idem para 3 anos e 4 meses.

19) Uma pessoa, pesando atualmente 70kg, deseja voltar ao peso normal de 56kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200g por semana. Fazendo essa dieta, calcule após quanto tempo a pessoa alcançará seu objetivo.

20) A Companhia de Abastecimento de Água de uma cidade cobra mensalmente, pela água fornecida a uma residência, de acordo com a seguinte tabela: Pelos primeiros 12m³ fornecidos, R$15,00 por m³; pelos 8m³ seguintes, R$50,00 por m³; pelos 10m³ seguintes, R$90,00 por m³ e, pelo consumo que ultrapassar 30m³, R$100,00 o m³. Calcule o montante a ser pago por um consumo de 32m³. Fazendo f(x)=valor cobrado pelo consumo de xm³ de água, defina a função f e faça o seu gráfico.

21) Um vendedor recebe mensalmente um salário fixo de R$800,00 mais uma comissão de 5% sobre as vendas do mês. Em geral, cada duas horas e meia de trabalho, ele vende o equivalente a R$500,00.

a) Qual seu salário mensal em função do número x de horas trabalhadas por mês?

b) Se ele costuma trabalhar 220 horas por mês, o que é preferível: um aumento de 20% no salário fixo, ou um aumento de 20% (de 5% para 6%) na taxa de comissão?

22) A taxa de inscrição num clube de natação é de R$150,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. Calcule quanto uma pessoa pagou ao se inscrever 5 semanas após o início do curso.

23) Um gerente de uma loja de bolsas verificou que quando se produziam 500 bolsas por mês, o custo total da empresa era R$ 25.000,00 e quando se produziam 700 bolsas o custo mensal era R$ 33.000,00.

a) Admitindo que o gráfico do custo mensal (C) em função do número de bolsas produzidas por mês (x) seja formado por pontos de uma reta, obtenha C em função de x.

b) Se a capacidade máxima de produção da empresa for de 800 unidades por mês, obtenha o custo médio de produção de uma bolsa, em função de x e determine o custo médio mínimo.

24) Faça um esboço do gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ definida em cada item que segue:
a) $f(2) = 5$ e $f(4) = 7$
b) $b = 1$ e $f(3) = -2$
c) $a = 6$ e $f(-2) = -4$
d) $a = 11$ e $f(0) = 3$
e) $\theta = 45^0$ e $(2{,}1; 5{,}7) \in G_f$
f) $TVM_{f:[\sqrt{6};7{,}45]} = -4$ e $\sqrt[3]{f(3)} = 2$
g) $f(8) - f(7) = -3$ e $f(5) = 6$

25) O gráfico de uma função afim contem os pontos $(0{,}5), (m, 8), (6{,}14)$ e $(7, k)$. Calcule k e m.

26) A reta r (gráfico de uma função afim!) contem os pontos $(1{,}3)$ e $(6{,}2)$. Pergunta-se: o ponto $(7{,}1)$ pertence a r? Em qual ponto r corta o eixo OX? E o eixo OY? Quem é o ponto de r cuja abcissa é 5? Quem é o ponto de r cuja ordenada é -8? Qual é o ângulo que o r faz com o eixo OX? E com o eixo OY?

27) Para resolver os itens que seguem, considere as retas r e s, gráficos, respectivamente, das funções afins f e g são tais que $f(x) = x + 5$ e $g(x) = \sqrt{3}x - 4$
a) Faça um esboço de r e s no mesmo plano cartesiano.
b) Calcule o ângulo entre r e s.
c) Dê exemplo de uma reta c que seja paralela a s.
d) Obtenha a reta d, paralela a r pelo ponto $D = (1{,}6)$.
e) Obtenha a equação do feixe de retas paralelas (de todas as infinitas retas paralelas) a s.
f) Dê exemplo de uma reta que concorre com r no ponto $F = (-5{,}0)$.
g) Obtenha a equação do feixe de retas concorrentes (todas as infinitas retas concorrentes) com r no ponto $G = (0{,}5)$.
h) Obtenha a reta h, perpendicular a s no ponto $H = (\sqrt{3}, -1)$.
i) Obtenha a equação do feixe de retas perpendiculares a r.
j) Calcule a área do triângulo definido por r, s e Ox.

28) Calcule $f(5)$, sabendo que f é uma função afim, cujo gráfico forma um ângulo de 60^0 com o eixo Ox e corta o eixo Oy no ponto $(0{,}3)$.

29) Calcule $f(3)$, sabendo que f é uma função afim, cujo gráfico é paralelo ao eixo Ox e que $f(-4{,}5) = 15$.

30) Esboce o gráfico da função afim f, sabendo que $f(x)$ cresce 5 unidades sempre que x cresce uma unidade e que 3 é a raiz da f.

31) $ABCD$ é um quadrilátero onde, $A = (-1{,}2)$, $B = (5{,}0)$, $C = (4{,}5)$ e $D = (2, k)$, com $k > 1$.
a) Se $ABCD$ é um trapézio de bases AB e CD, determine o vértice D e a altura do trapézio.
b) Determine o vértice D do quadrilátero $ABCD$ sabendo que a sua área é 27 $u.a.$.
c) Para que valores de k, $ABCD$ é convexo?

32) Considere a reta $r: y = 2x + 1$, gráfico da função afim g.
a) Calcule a distância de $P = (0{,}0)$ à r.
b) Calcule a distância de $Q = (1{,}2)$ à r.