



No.9 Candle in Water

谢忠纽

题目回顾

Add some weight to a candle such that it **barely floats** in water. As the candle **burns**, it may **continue to float**. Investigate and explain this phenomenon.

一支蜡烛，添加一些重量使其**几乎漂浮**在水中。当蜡烛**燃烧**的时候，它会**继续漂浮**。调查并解释这种现象。



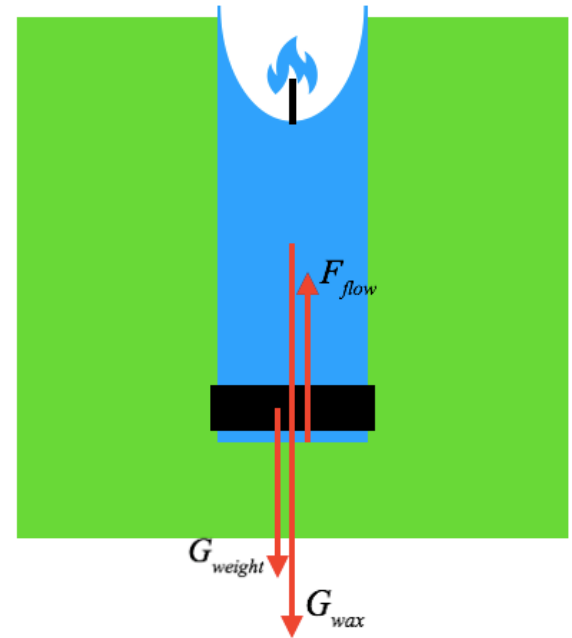
理论分析

过程描述：将铜丝均匀地绕在蜡烛底部，将蜡烛置于水面上，使之恰好漂浮于水面，点燃蜡烛，最上方蜡烛融化，形成液池，液蜡通过毛细作用到达棉线顶端，进而发生汽化，石蜡蒸汽在空气中燃烧，燃烧到一定程度，蜡烛熄灭。

初始条件：

$$G_{weight} + G_{wax} = F_{flow}$$
$$(M_{Cu} + \rho_{wax}V_{wax})g = \rho_l g V_{wax}$$

V_{wax} : 蜡烛体积
 V : 蜡烛上方空腔体积
 ρ_{wax} : 蜡烛密度
 M_{Cu} : 铜的质量



漂浮条件

①点燃后能继续漂浮，满足的条件

$$(M_{Cu} + \rho_{wax} V_{wax})g \leq \rho_l g(V + V_{wax}) + F$$

$$M_{Cu} \leq (\rho_l - \rho_{wax})H\pi R^2 + \rho_{wax}V + \frac{F}{g}$$

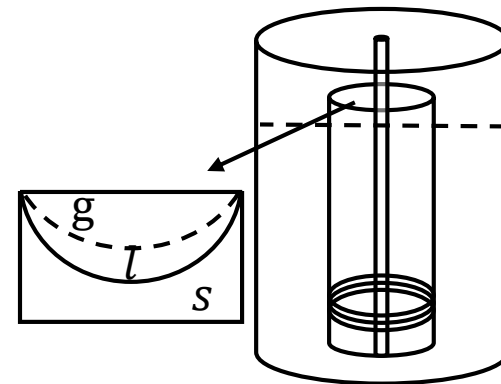
其中 $V_{wax} = H\pi R^2 - \Delta V - V$

$$\frac{\rho_l - \rho_{wax}}{\rho_{wax}} \cdot \Delta V \leq V$$

②蜡烛熄灭时，满足的条件：

$$(M_{Cu} + \rho_{wax} V_{wax})g = \rho_l g(V + V_{wax}) + F$$

$$M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$$



V_{wax} : 蜡烛体积
 V : 蜡烛上方空腔体积
 ΔV : 已燃烧的蜡烛体积
 H : 蜡烛高度
 R : 蜡烛半径
 F : 表面张力

热场分布

系统满足傅里叶导热定律： $q = -k\nabla T$

稳态温度场，有内热源，满足泊松方程： $\nabla^2 T = -\frac{\dot{\phi}}{\lambda}$

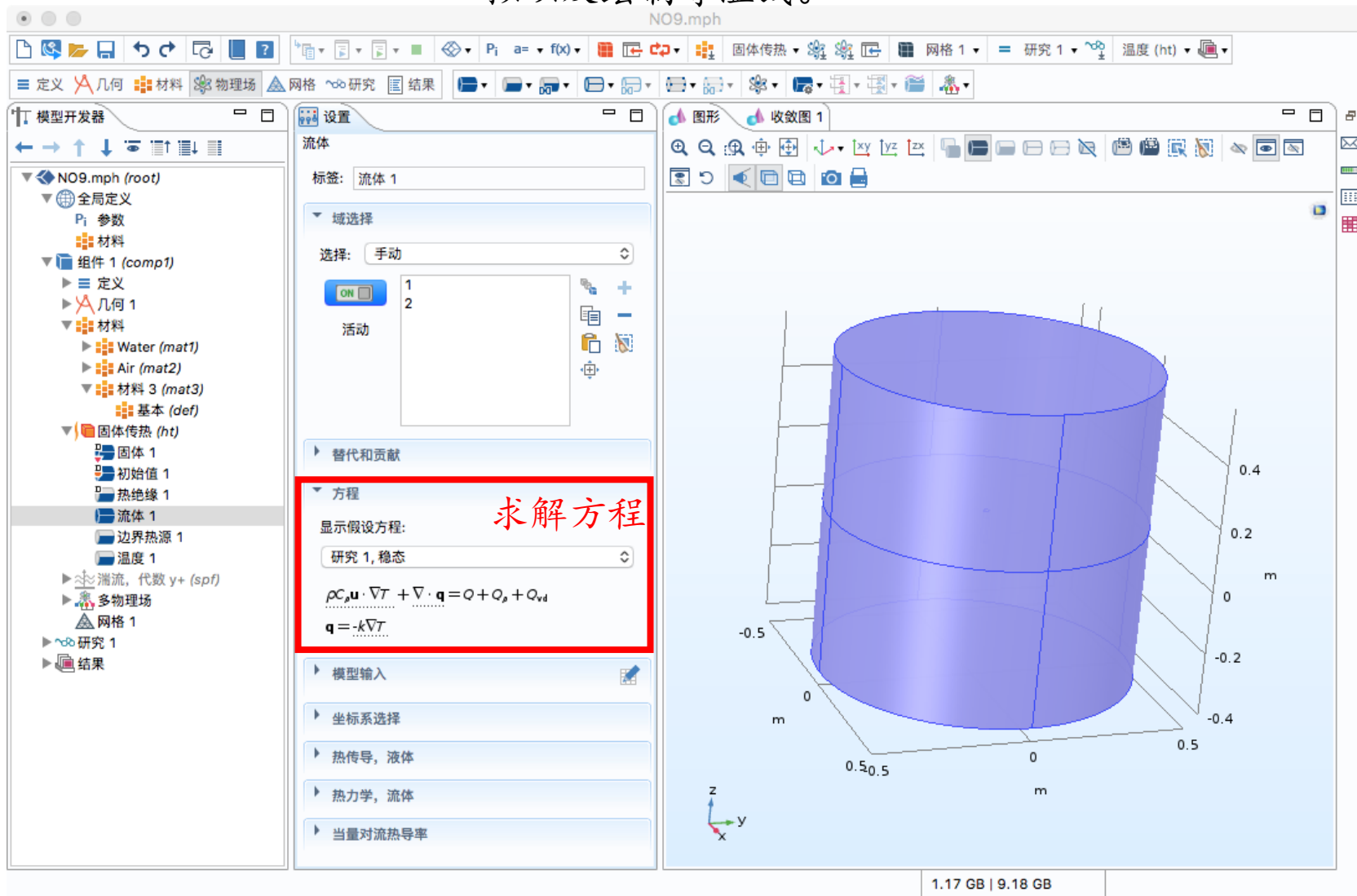
$\dot{\phi}$ ：单位时间内单位体积中产生的热能

固液相变瞬态过程：

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_P u \cdot \nabla T + \nabla \cdot q = Q + Q_p + Q_{ted}$$

模拟计算

Comsol建模，采用固体传热接口模拟热传导和热对流，考虑非等温流动多物理场耦合，定义温度方程对应于傅里叶导热定律，考虑固液相变瞬态过程，对温度分布进行模拟以及绘制等温线。

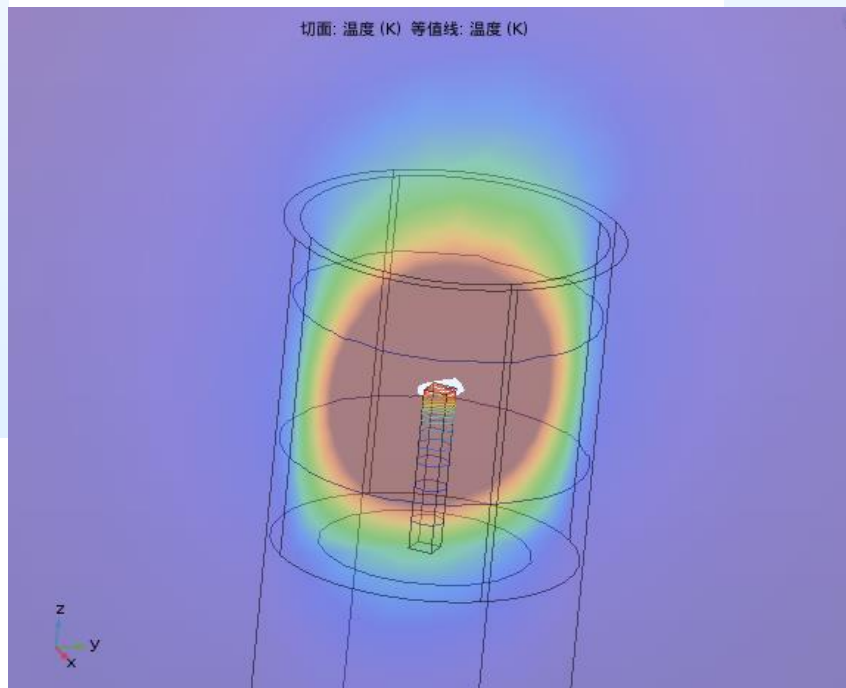


热场分布

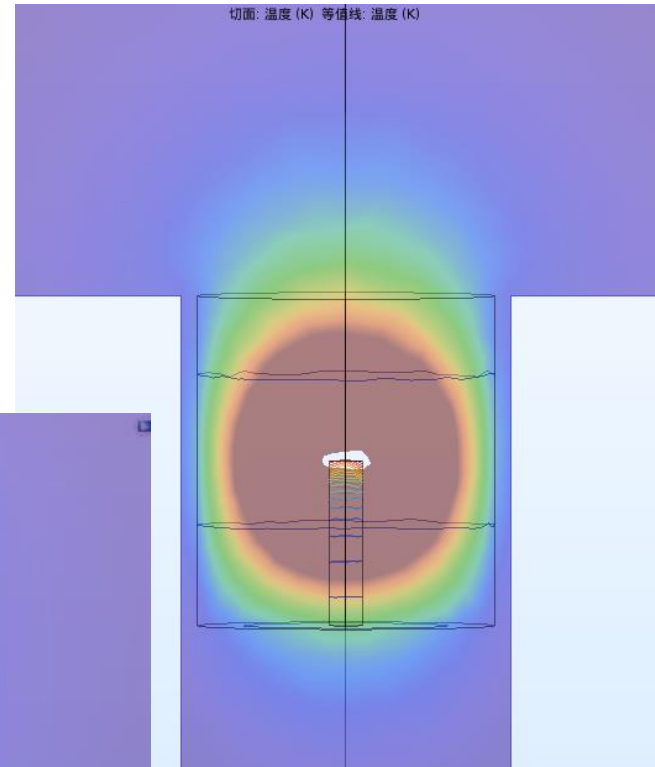
燃烧时，蜡烛的
温度分布



切面: 温度 (K) 等值线: 温度 (K)



切面: 温度 (K) 等值线: 温度 (K)



周围空气等温线

实验过程



实验用品:

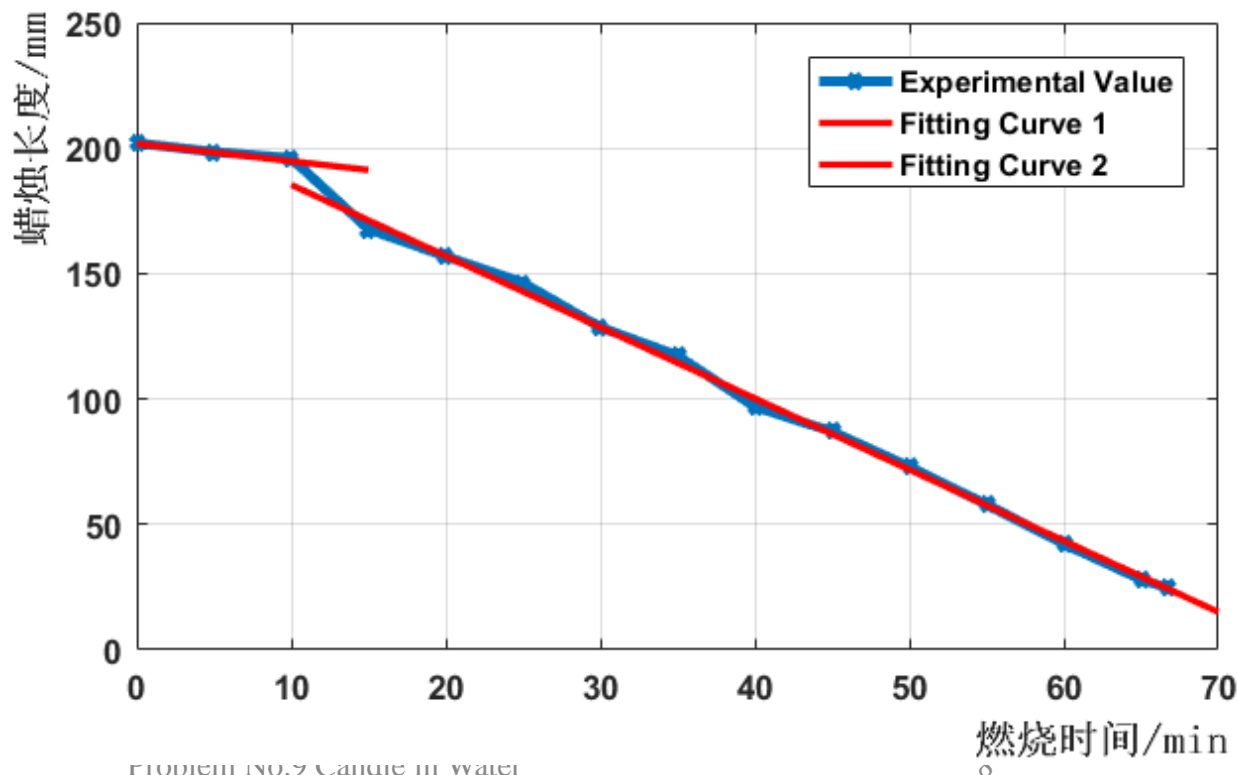
10/14/18/20mm半径的蜡烛
3mm铜丝

操作步骤:

在蜡烛的最下方均匀地绕上铜线，
将其放入水中，使其悬浮于水面；
点燃蜡烛，观察其燃烧状况；
熄灭后取出蜡烛，记录剩余长度。

燃烧过程:

刚点燃，蜡烛燃烧缓慢；
形成较多液蜡，达到稳态；
蜡烛均匀燃烧，直到熄灭。

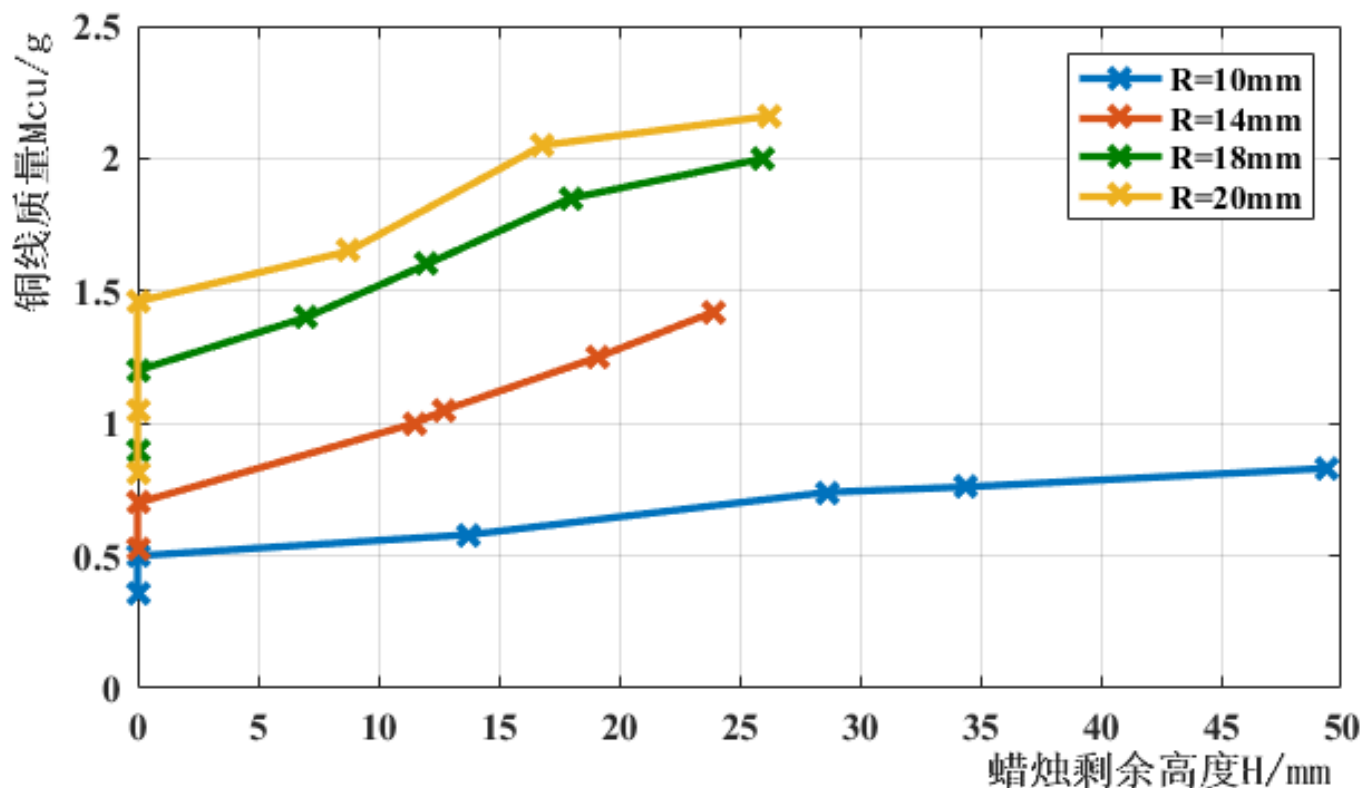


熄灭条件

熄灭时蜡烛漂浮于水面，满足方程：

$$M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$$

因此： $M_{Cu} \propto H$

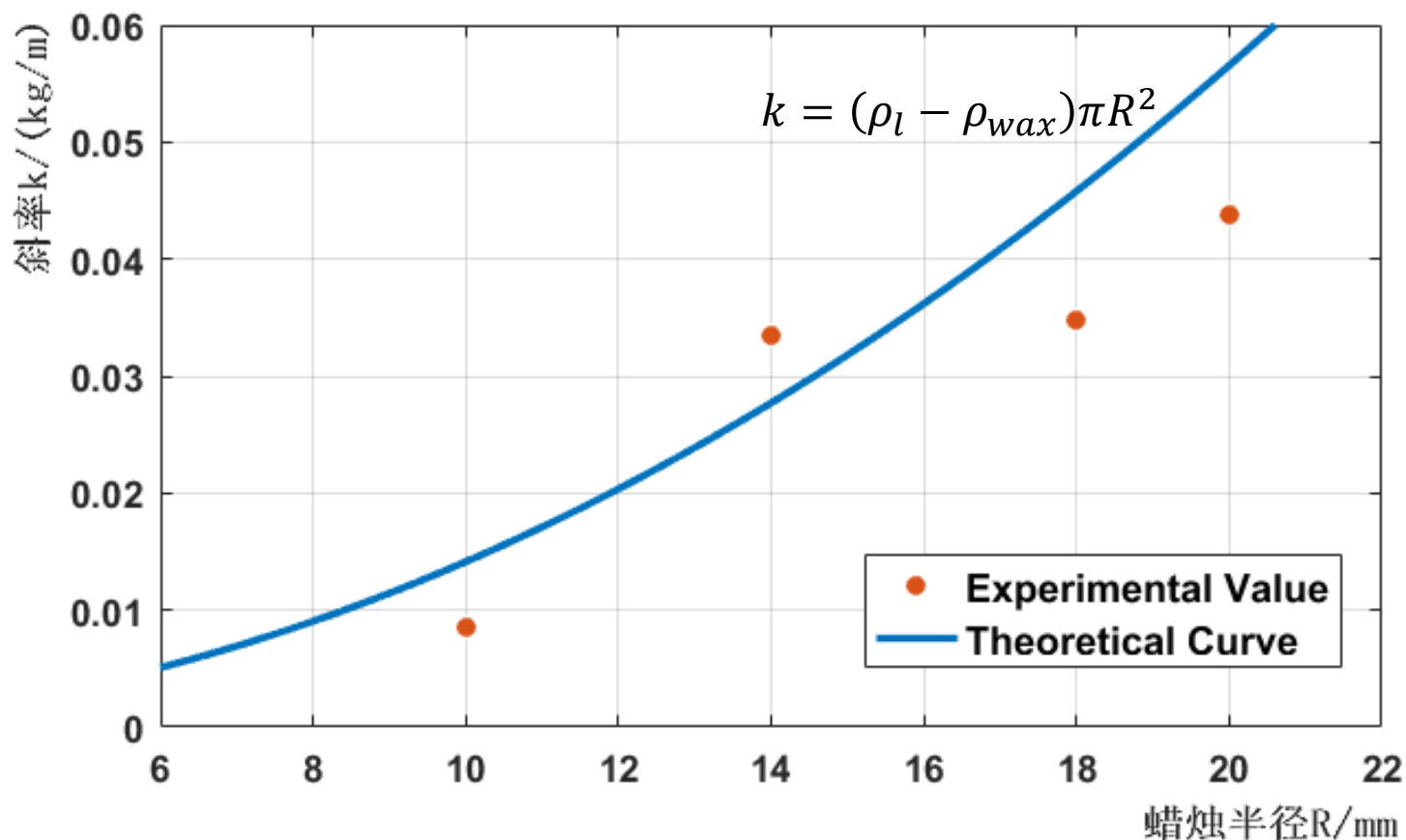


若蜡烛剩余高度越大，则表明所加铜线质量越大，表明初始时水面上方蜡烛长度较小。

熄灭条件

根据方程: $M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$

其中: $k = (\rho_l - \rho_{wax})\pi R^2$

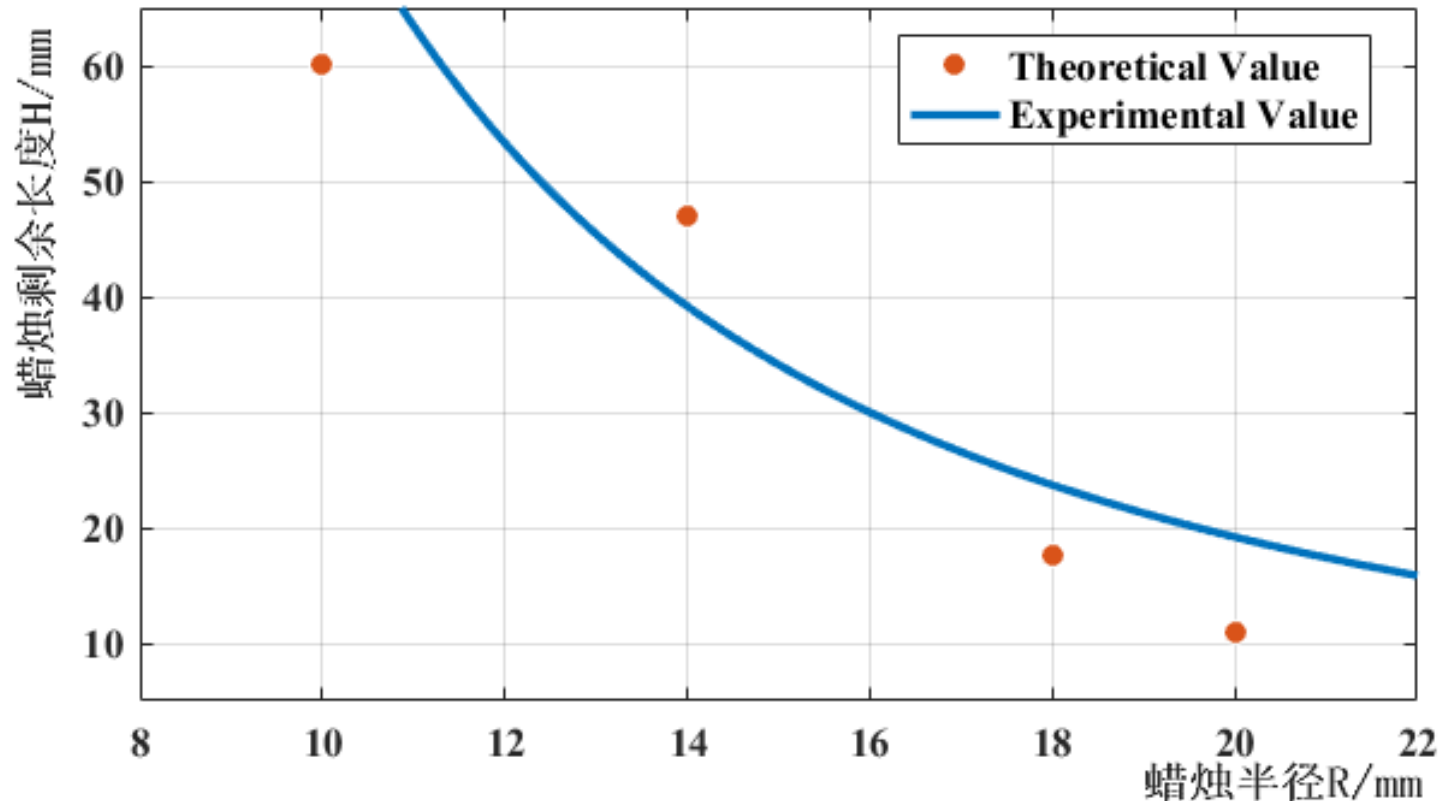


斜率与蜡烛半径 R 的二次方成正比，理论与实验符合较好。

熄灭条件

根据方程: $M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$

其中: $H \propto \frac{1}{R^2}$



在保证所加重物质量相同的情况下, 蜡烛半径越大, 初始时水面以上蜡烛部分长度明显增加, 蜡烛剩余长度越小。

表面张力

现象描述:

蜡烛燃烧过程中，液蜡溢出，在水面凝固

根据方程:

$$M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$$

$$F = \sigma L$$

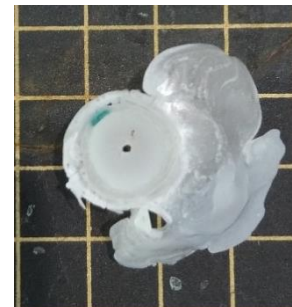
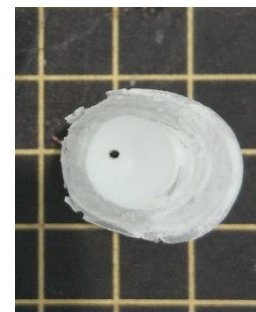
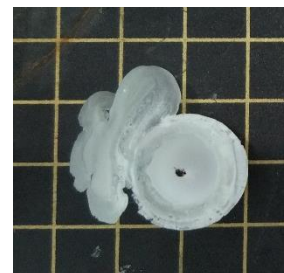
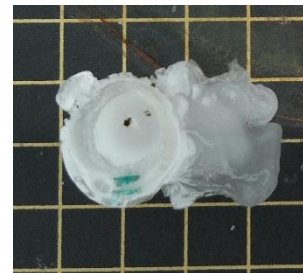
室温下水的表面张力系数 $7.2 \times 10^{-2} \text{N/m}$

长度L/m	表面张力F/m
0.0765	0.00551
0.0737	0.00531
0.0838	0.00603
0.0314	0.00226
0.0737	0.00531

$$M_{Cu}g = 0.0147\text{N}$$

$$F \approx \frac{1}{2} M_{Cu}g$$

燃烧末期，表面张力所占的权重增大，必须考虑在内。

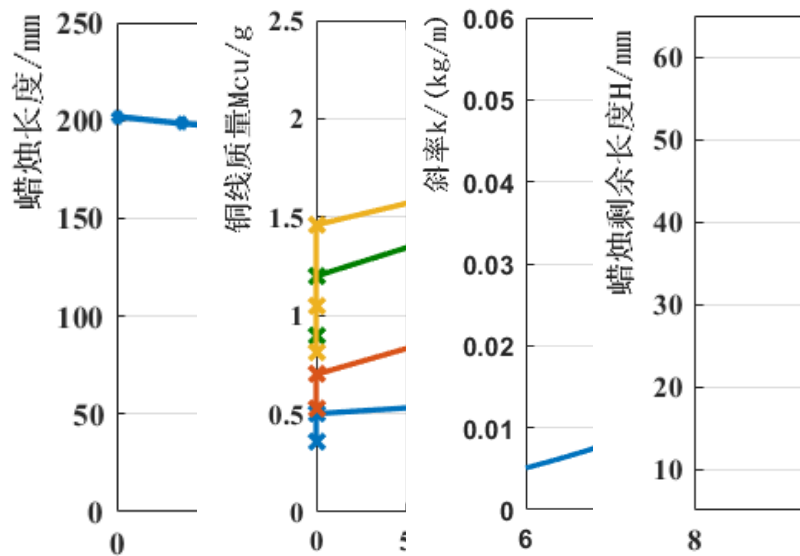
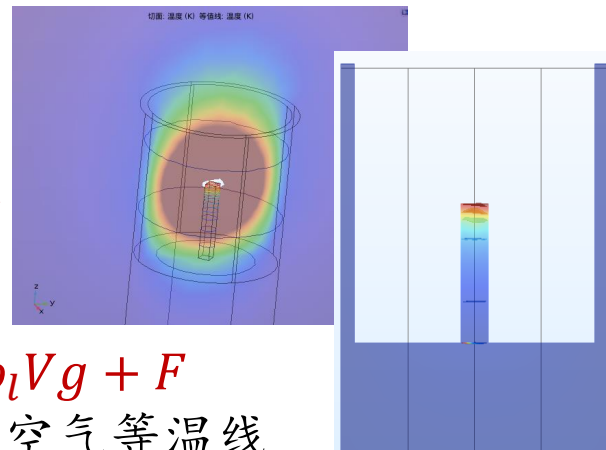


结论

- 对蜡烛进行受力分析，构建适当的物理模型
- 给出燃烧后继续漂浮于水面条件： $\frac{\rho_l - \rho_{wax}}{\rho_{wax}} \cdot \Delta V \leq V$
- 熄灭时蜡烛漂浮于水面，满足方程：

$$M_{Cu}g = (\rho_l - \rho_{wax})(H\pi R^2 - V)g + \rho_l Vg + F$$

- 对燃烧时的蜡烛温度分布进行模拟，并绘制了周围空气等温线
- 进行多组实验， $H-t$ 、 $M_{Cu}-H$ 、 $k-R$ 、 $H-R$ ，验证理论公式的正确性
- 测出蜡烛熄灭时，表面张力的影响程度，证明理论的正确性



长度L/m	表面张力F/m
0.0765	0.00551
0.0737	0.00531
0.0838	0.00603
0.0314	0.00226
0.0737	0.00531



$$F \approx \frac{1}{2} M_{Cu}g$$

蜡烛半径R/mm

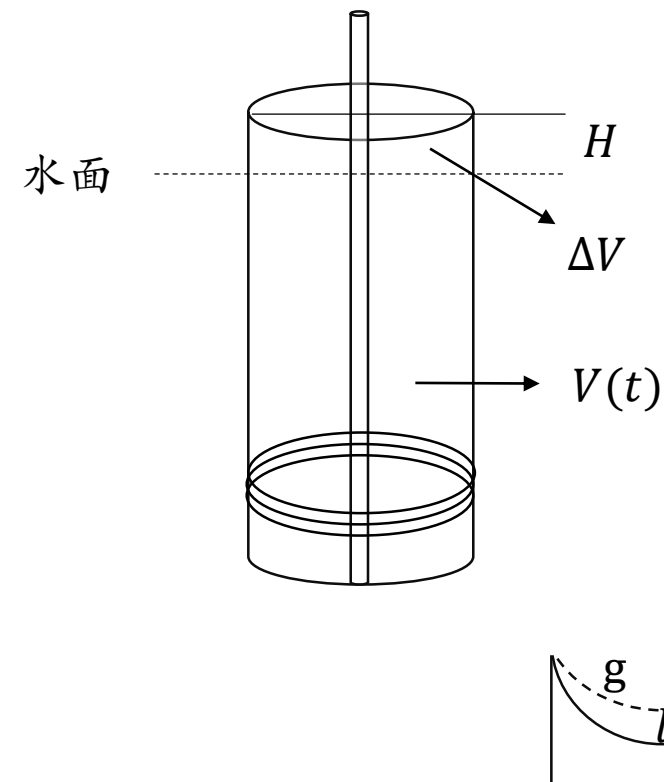
参考文献

- J. Walker. The Physics and Chemistry Underlying the Infinite Charm of a Candle Flame: Amateur Scientist. Sci. Am. 238, 4, 154-162 (1978)
- K. Rezaei, T. Wang, and L. A. Johnson. Combustion characteristics of candles made from hydrogenated soybean oil. J. Am. Oil Chem. Soc. 79, 8, 803-808 (2002)
- A. P. Hamins, M. F. Bundy, and S. E. Dillon. Characterization of candle flames. J. Fire Protection Eng. 15, 4, 265-285 (2005)
- S. Theodorakis and C. Aristidou. The paradox of the floating candle that continues to burn. Am. J. Phys. 80, 657-663 (2012)
- M. Faraday. A Course of Six Lectures on the Chemical History of a Candle (Griffin, Bohn & Co., 1861)
- Brian Rohring. The captivating chemistry of candles (myteacherpages.com)

Thanks For Watching !

总结

公式

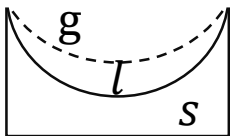
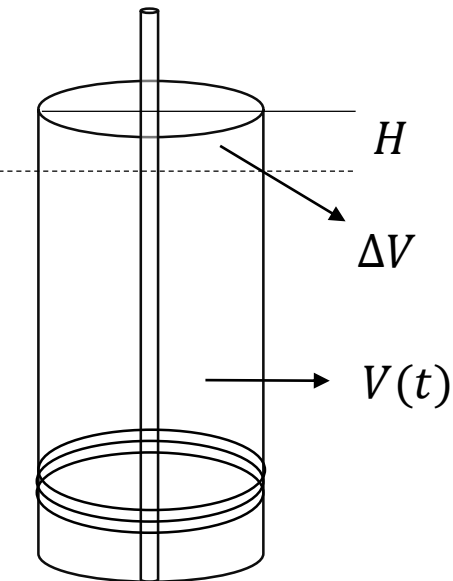


操作步骤：将铜丝绕在蜡烛底部，使之恰好浮于水面，并将其固定

$$(M_{Cu} + \rho_{wax} V_{wax})g \leq \rho_l g(V + V_{wax}) + F$$

$$M_{Cu} \leq (\rho_l - \rho_{wax})H\pi R^2 + \rho_{wax}V + F/g$$

理论分析



作近似处理：

I. 忽略水面以上体积 ΔV

II. 气-液接触面为二（三）次曲面 $z = f(x, y)$

III. $\rho_{wax(s)} = \rho_{wax(l)} = \rho_{wax}$

动态平衡：

$$\begin{aligned}\rho_w g V(t) &= [M_{wax}(t) + M_{Cu}]g \\ \rho_w g V(t) &= \rho_{wax} [V(t) + \Delta V]g + M_{Cu}g \\ V(t) &= \frac{M_{Cu} + \rho_{wax} \Delta V}{\rho_w - \rho_{wax}}\end{aligned}$$

燃烧方程

石蜡蒸汽的燃烧属于化学动力燃烧，燃烧时间近似等于氧化反应时间，燃烧过程将强烈地受到化学反应动力学因素的控制，例如：气体性质、温度、反应物浓度等。

石蜡蒸汽燃烧公式： $C_{25}H_{52}(g) + 38O_2(g) \rightarrow 25CO_2 + 26H_2O \quad \Delta H = -4.3 \times 10^4 kJ/kg$

火焰分为焰心、内焰和外焰，火焰温度由内向外依次增高。

石蜡的各项性质	
固蜡密度	$0.9g/cm^3$
液蜡密度	$0.75g/cm^3$
熔点	$48 - 68^\circ C$
熔化热	$200 - 220J/g$
着火点	$238 - 263^\circ C$