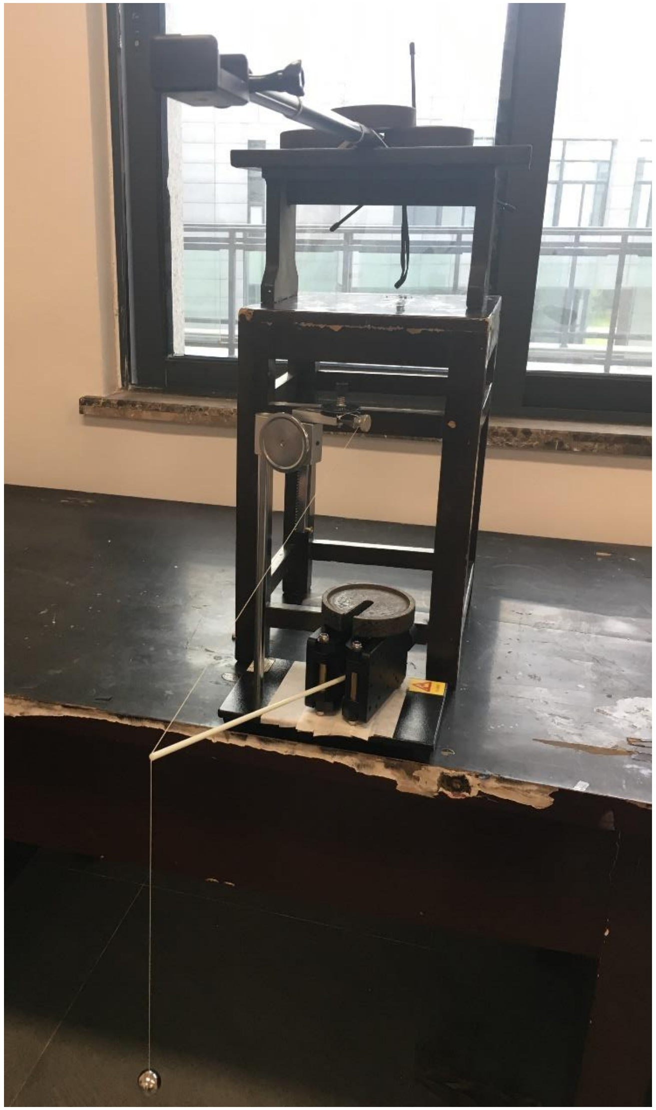
No.11 Azimuthal-Radial Pendulum

重庆大学代表队

马祥芸

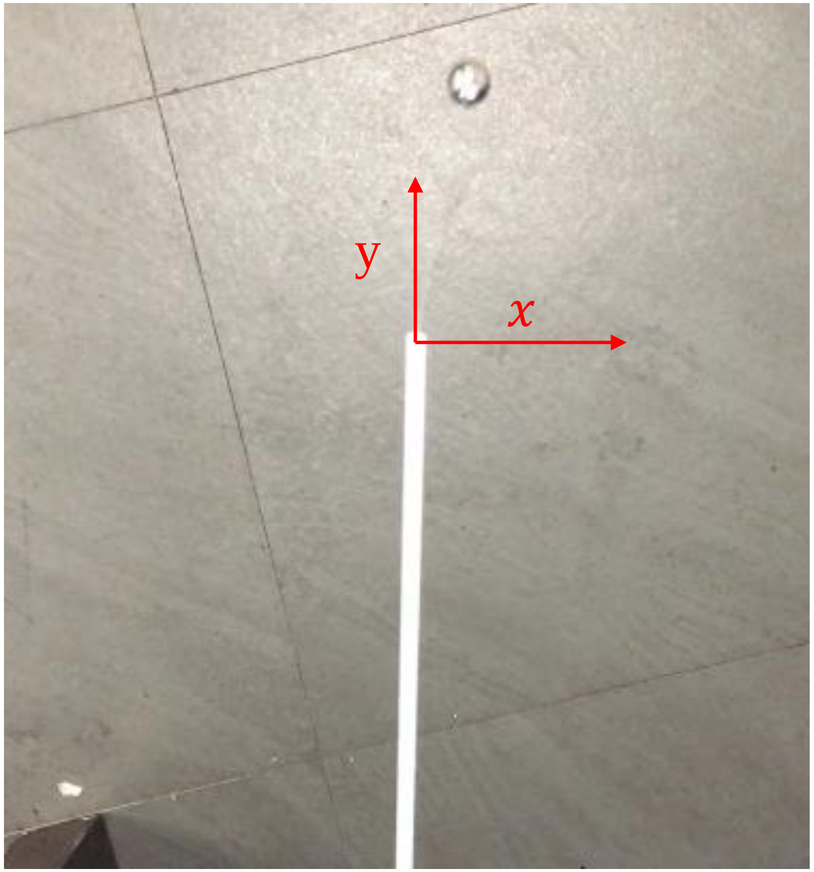
Problem 题目



Fix one end of a horizontal **elastic** rod to a rigid stand. Support the other end of the rod with a taut string to avoid vertical deflection and suspend a bob from it on another string . In the resulting pendulum the radial oscillations (**parallel to the rod**) can spontaneously **convert into azimuthal oscillations** (perpendicular to the rod) and vice versa. Investigate the phenomenon.

将水平弹性杆的一端固定在刚性支架上。用一根紧绷的绳子支撑弹性杆的另一端以避免垂直偏转，并将另一个摆从一根弦上悬挂下来(见图)。在产生的钟摆中，径向振荡(平行于杆)可以自发地转变为方位振荡(垂直于杆)，反之亦然。研究这个现象。

Experimental Phenomenon 实验现象

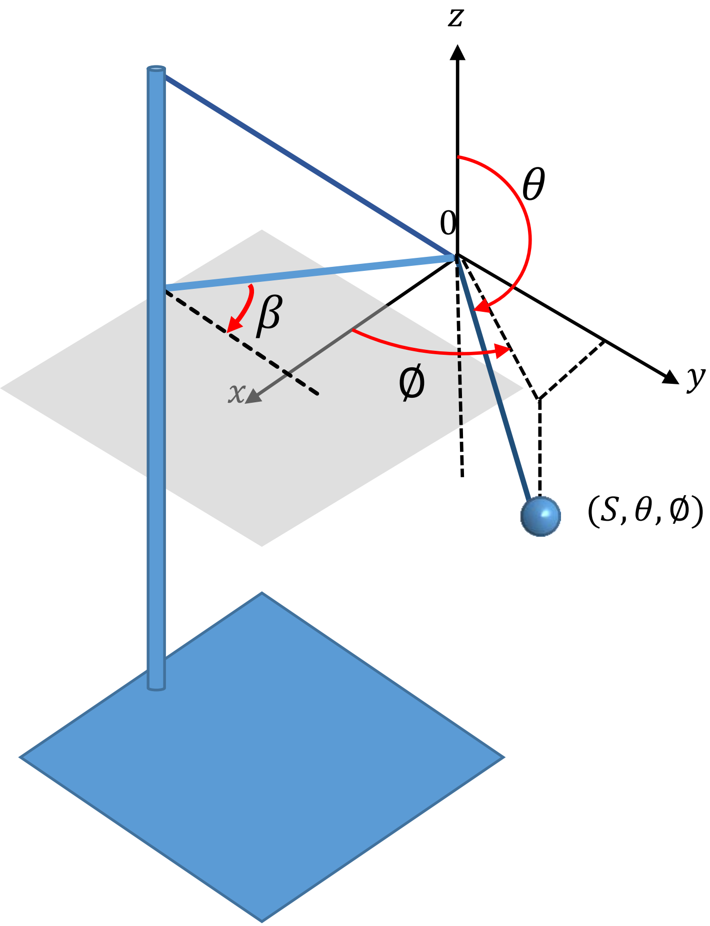


- 沿杆**径向释放**摆球
- 摆球在径向方向近似单摆运动
- 摆球与弹性杆**相互作用**
- **弹性杆仅在x轴方向有明显振荡**
- **弹性杆的振荡对摆球在x**方向有相位**调制作用**

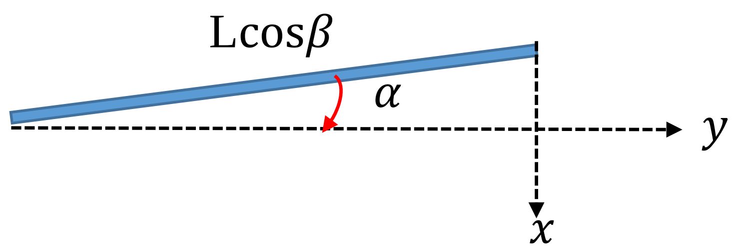
Theoretical Analysis
理论分析

- 抽象模型
- 拉格朗日方程
- 数值求解

Abstract Model 抽象模型



- 弹性杆的摆动为小角度摆动



$$\Delta y = S - S\cos(\alpha) \approx 0$$

符号说明	
L	杆长
S	绳长

- 以杆的端点为原点建立球坐标系
  - 忽略在y方向上的位移
  - 弹性杆在x方向上振荡并储存弹性势能
  - 弹性杆端点的位移函数$x(t)$

- 摆球的位置矢径可以描述为：

$$\vec{r} = (x(t) + S\sin(\theta)\cos(\emptyset)\ , L\sin(\theta)\sin(\emptyset)\ , -L\cos(\theta))$$

Theoretical Analysis 理论分析

- 利用拉格朗日力学求解：
  - 该动力学系统为**受完整约束的含耗散系数的拉格朗日力学系统**
  - 能量：
    - ➢ 小球动能：
      - $E_{k1} = \frac{1}{2} m\vec{r}^2$
    - ➢ 杆动能：
      - 直杆转动近似：
        - $E_{k2} = \frac{1}{6} M\dot{x}^2$

$$T = \frac{1}{2} m\vec{r}^2 + \frac{1}{6} M\dot{x}^2$$

    - ➢ 小球势能：
      - $V_1 = mgL_0\cos(\theta)$
    - ➢ 弹性杆势能：
      - V_2

$$V = V_1 + V_2$$

  - 拉氏量：
    - $Le^{-\lambda t} = T - \mathrm{V}$

系统能量耗散系数

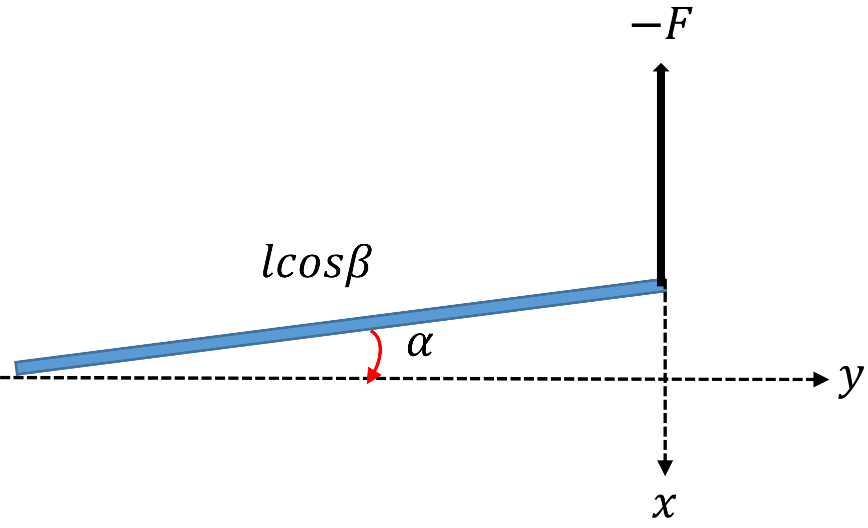
符号说明	
m	摆球质量
M	杆质量

- 广义坐标：$x, \theta, \emptyset$
- 保守系拉氏方程：
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\emptyset}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \emptyset} = 0$

Elastic Potential Energy 弹性势能

符号说明	
E	弹性模量
I	惯性矩

- 纯弯曲
  - 纤维间无正应力
  - 平面假设
  - 线弹性



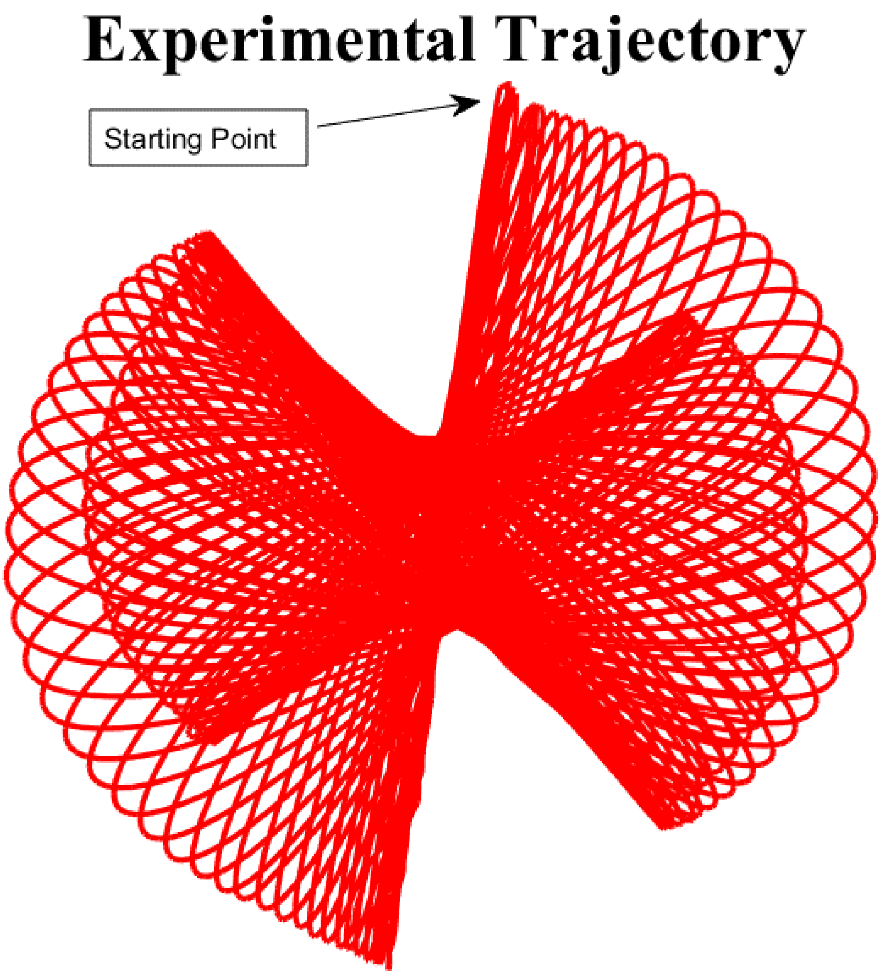
$$\frac{d^2x}{d^2y}=\frac{-F(L-y)}{EI}\quad \begin{cases} x|_{y=0}=0 \\ \dfrac{dx}{dy}|_{y=0}=0 \end{cases} \Longrightarrow F=\frac{3EIx}{L^3}$$

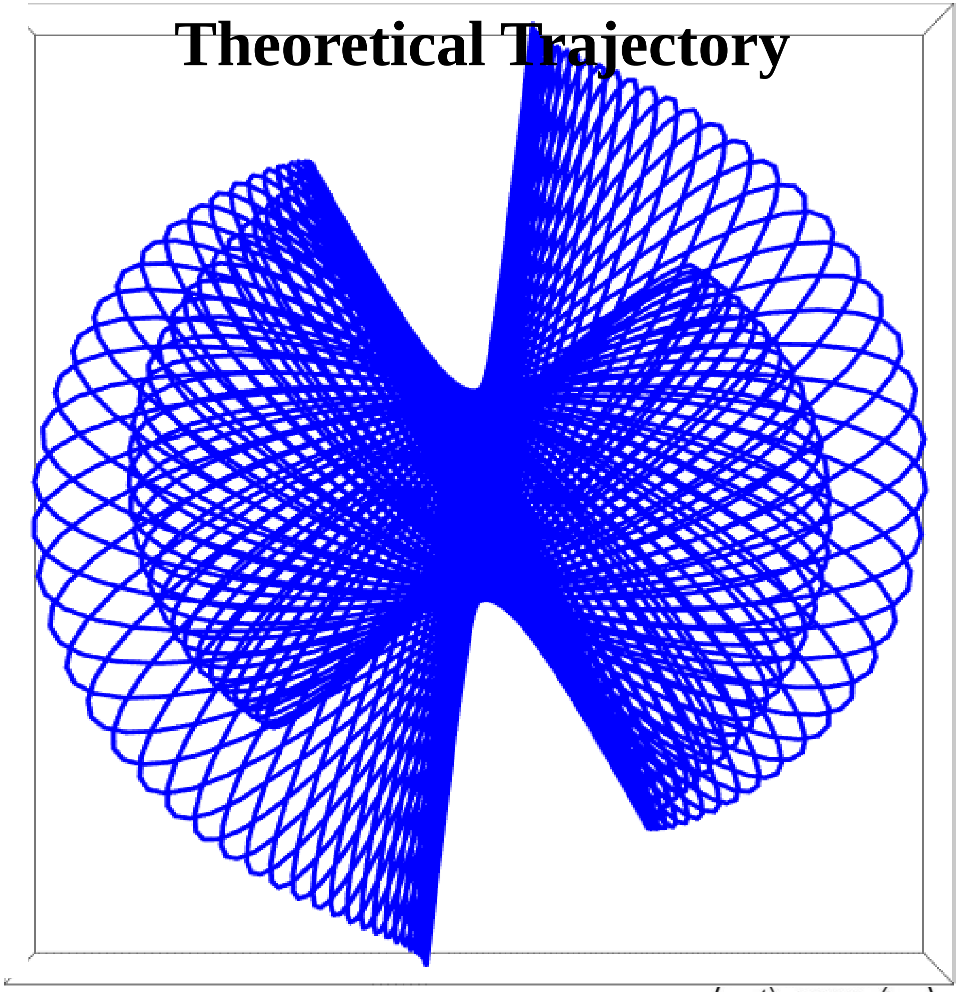
$$V_2=\int_0^L \frac{(F(L-y))^2}{2EI}dy$$

- 解出弹性势能关于x的函数：

$$V_2=\frac{EIx_{(t)}^2}{4L^8}$$

Numerical Solution 数值求解





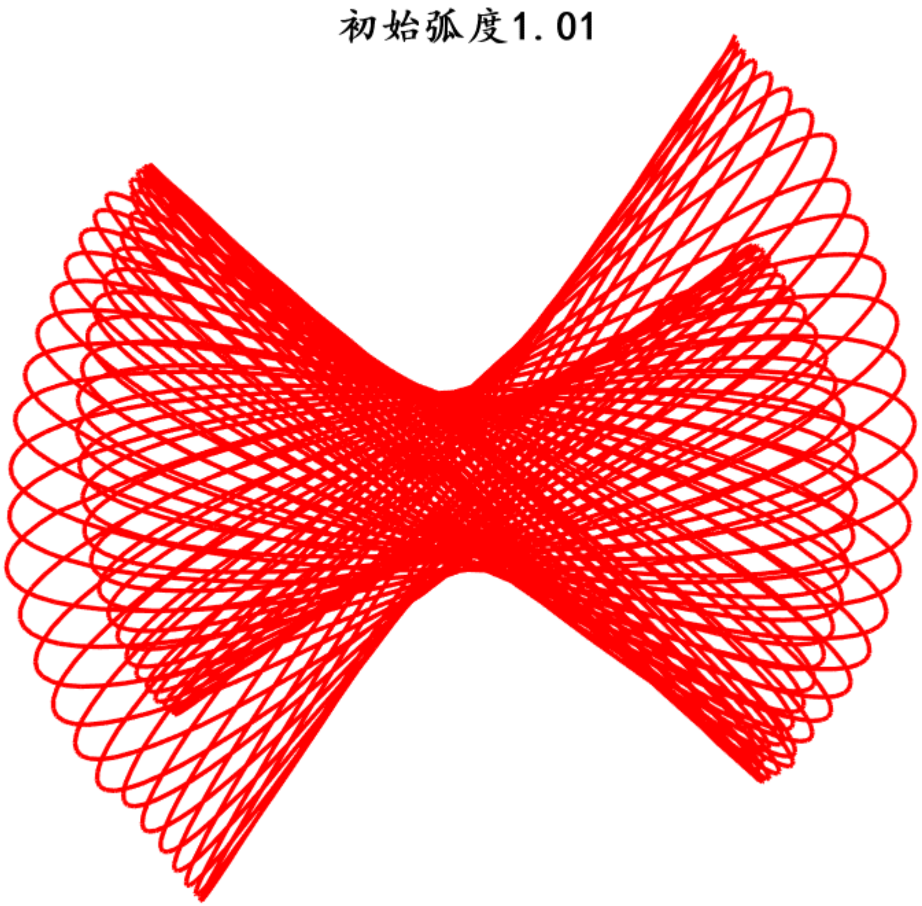
$E(\text{方位角变化误差}) = 8.7\%$

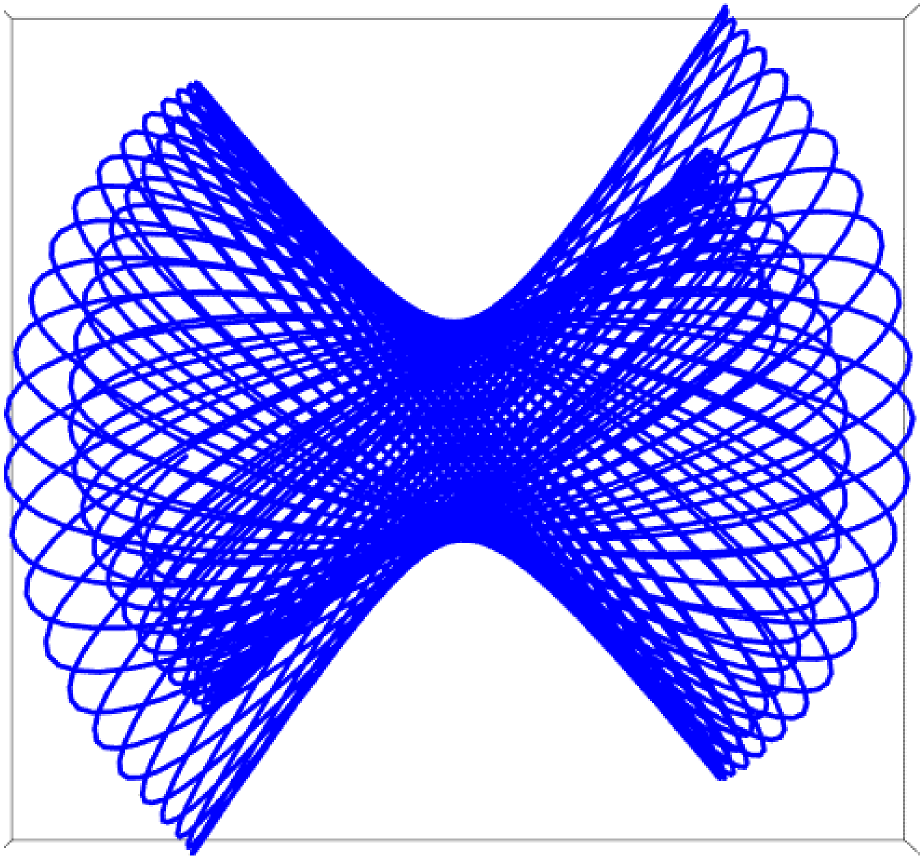
$E(\text{同步误差}) = 4.3\%$

Investigate Parameters
研究参数

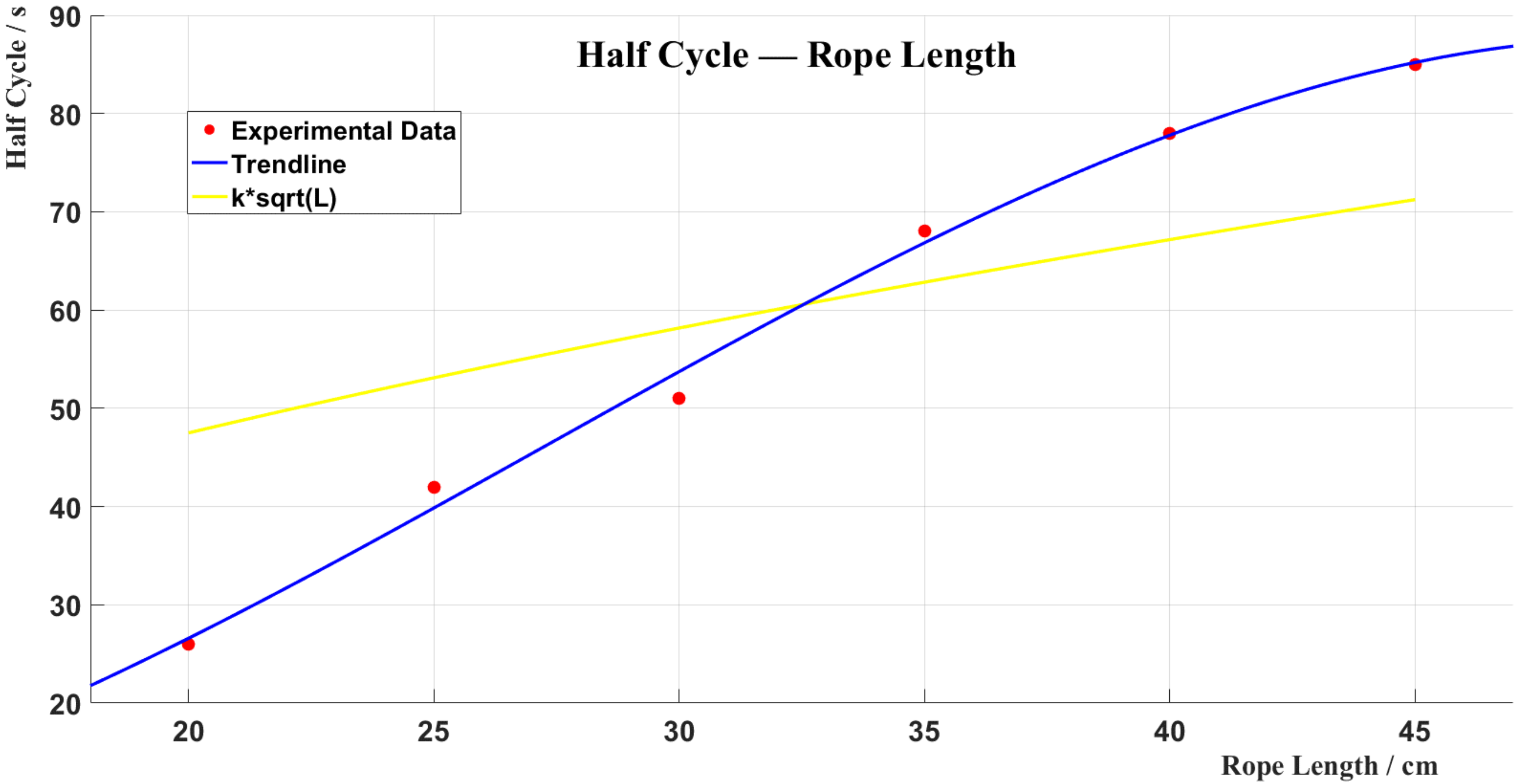
- 初始方位角
- 绳长

Initial Azimuth 初始方位角





Half Cycle — Rope Length 半周期与绳长关系



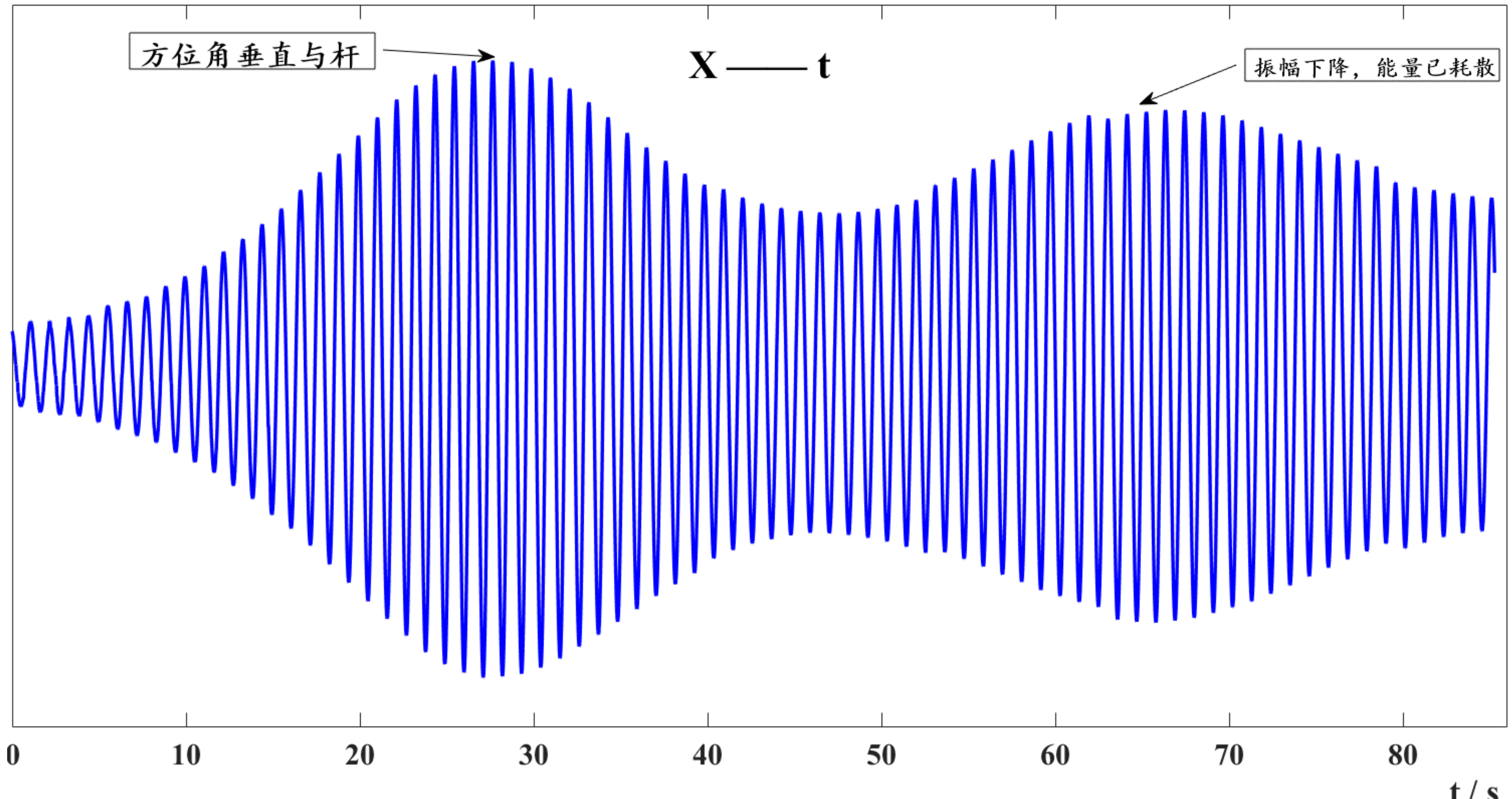
- 随着绳长的增加，周期增加，增长速率随着绳长的增长而下降
- 其周期的函数形式并不近似于$k\sqrt{s}$，因此并不近似于单摆的周期函数形式

Deep Analysis
深入分析

- X—t 振荡分析
- Ø—t 方位角调制分析
- 周期分析

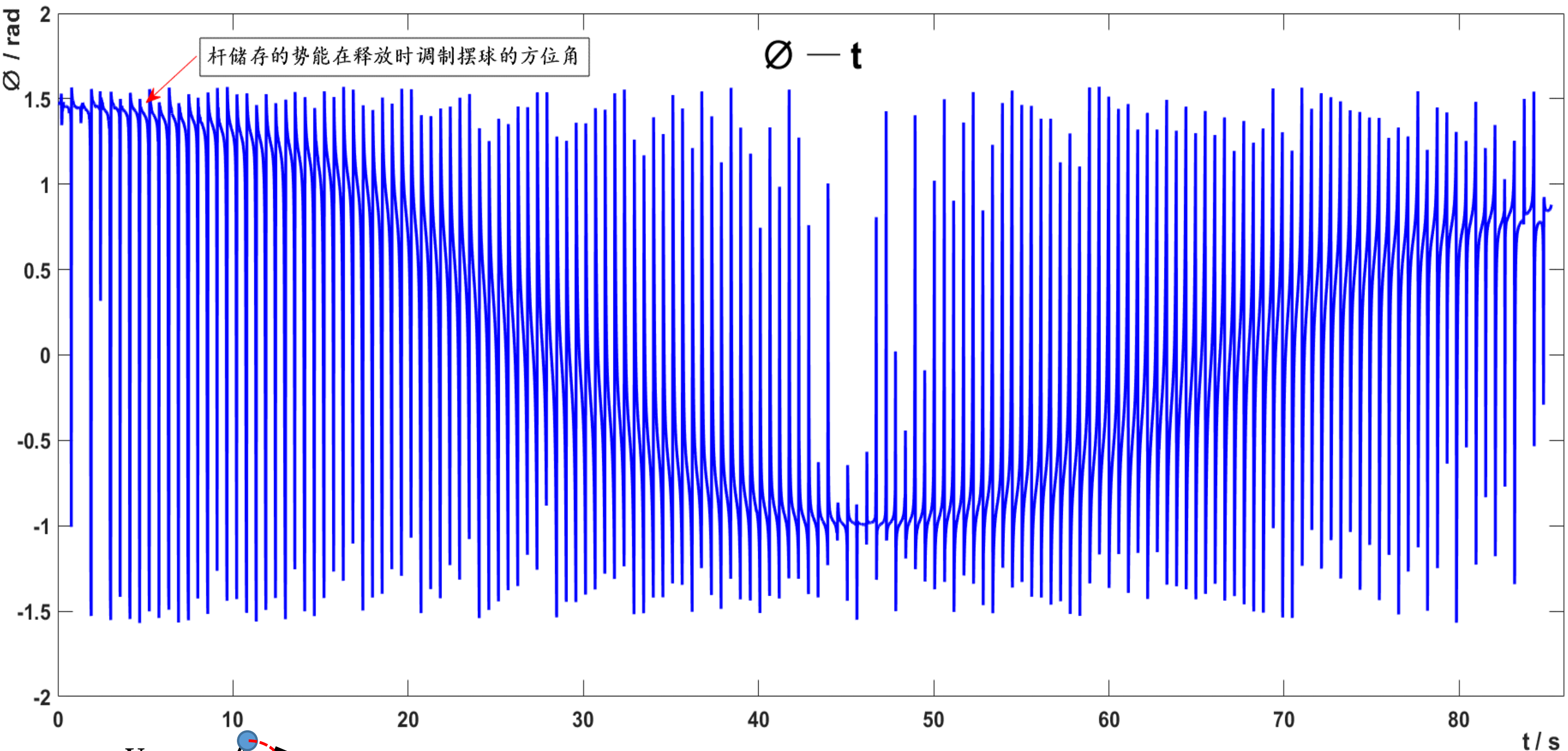
$X-t$

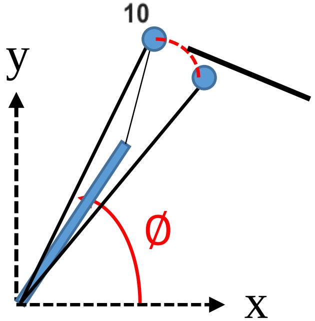
方位角变化与能量耗散



- 方位角在正负振荡的同时，由 沿杆 趋向于 垂直 于杆
- 在振荡过程中，系统能量在不断损失

Ø — t　　方位角调制作用





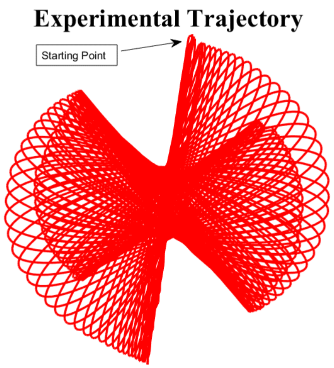
杆的能量释放调制方位角

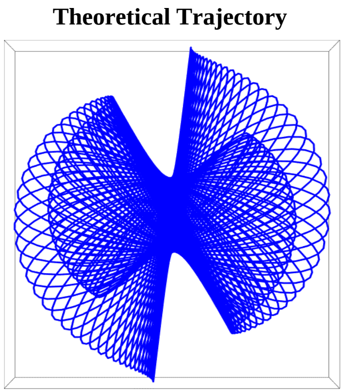
- 摆球并不立刻沿原路摆回
  而是在杆的调制下，方位角发生大小改变

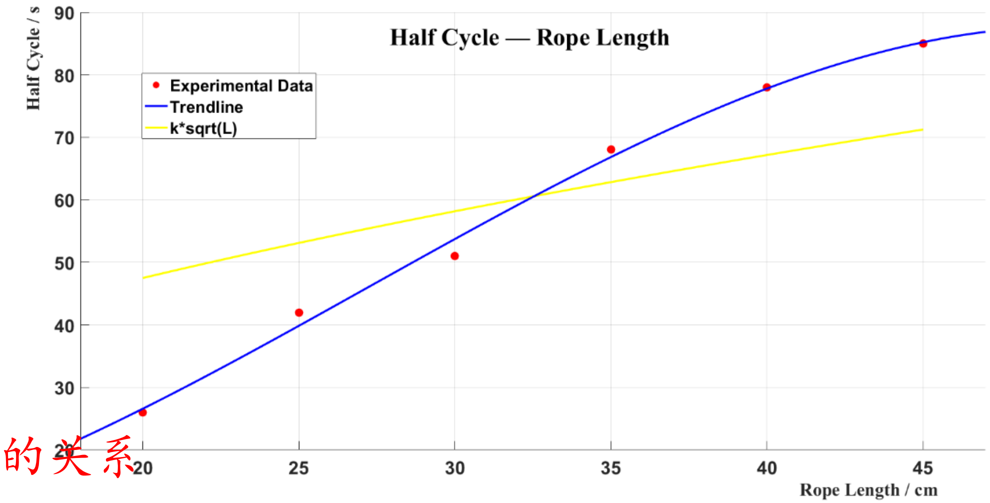
- 这种调制作用在动能的衰减下减弱

总结

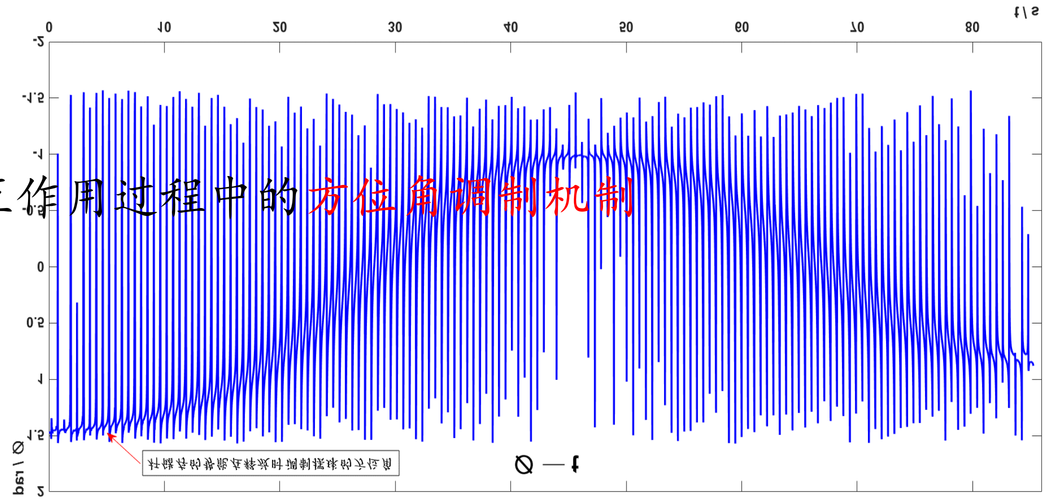
- 利用带能量损耗系数的拉格朗日方程数值求解了摆球系统
- 并与一个周期的实验数据进行了对比，符合程度较高







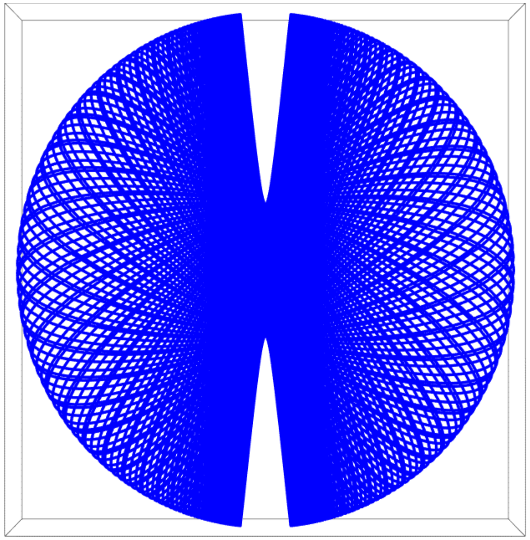
- 研究了初始方位角改变与半周期与摆长的关系
  - 蝴蝶张角增大
  - 区别于单摆系统

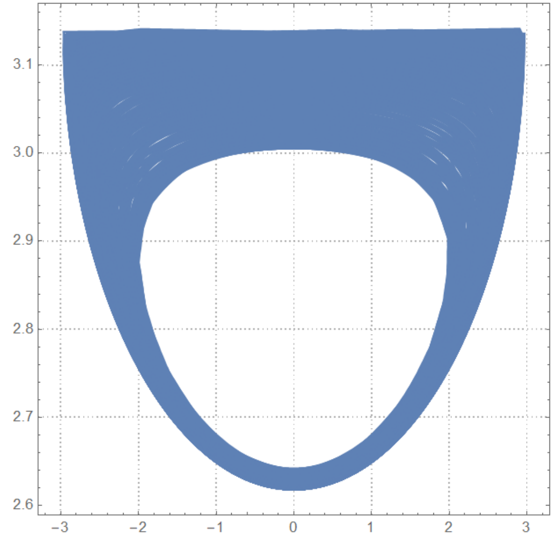


- 深入分析了摆球与杆相互作用过程中的方位角调制机制

相图 $\dot{\phi}-\phi$

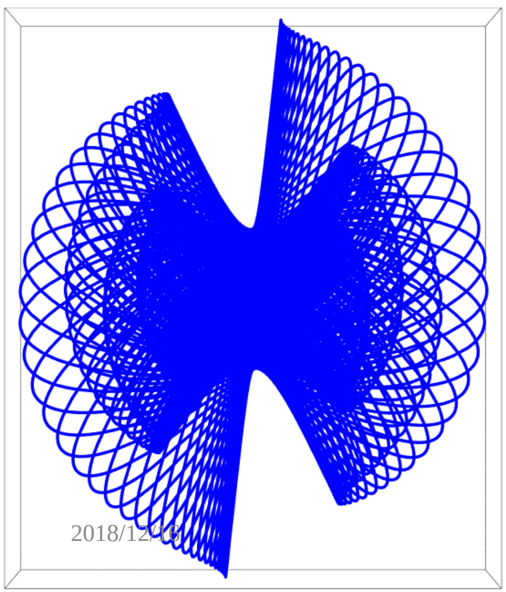
不含损耗函数的运动轨迹与相图

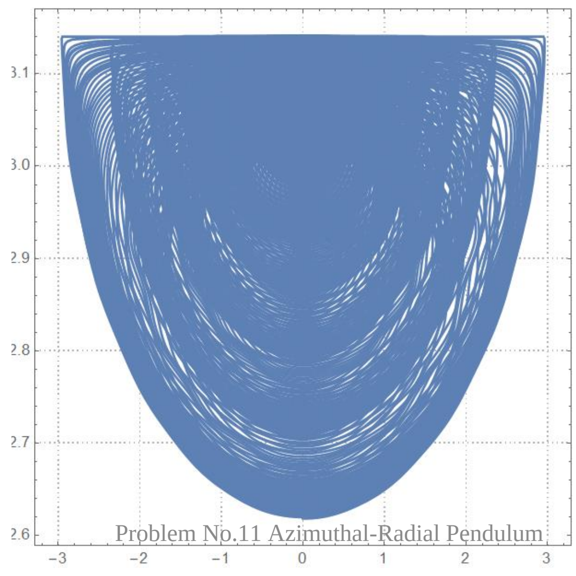




- 运动振幅**不随时变化**
- 相图呈带状分布
- 奇点类型为**中心**

含时损耗函数的运动轨迹与相图

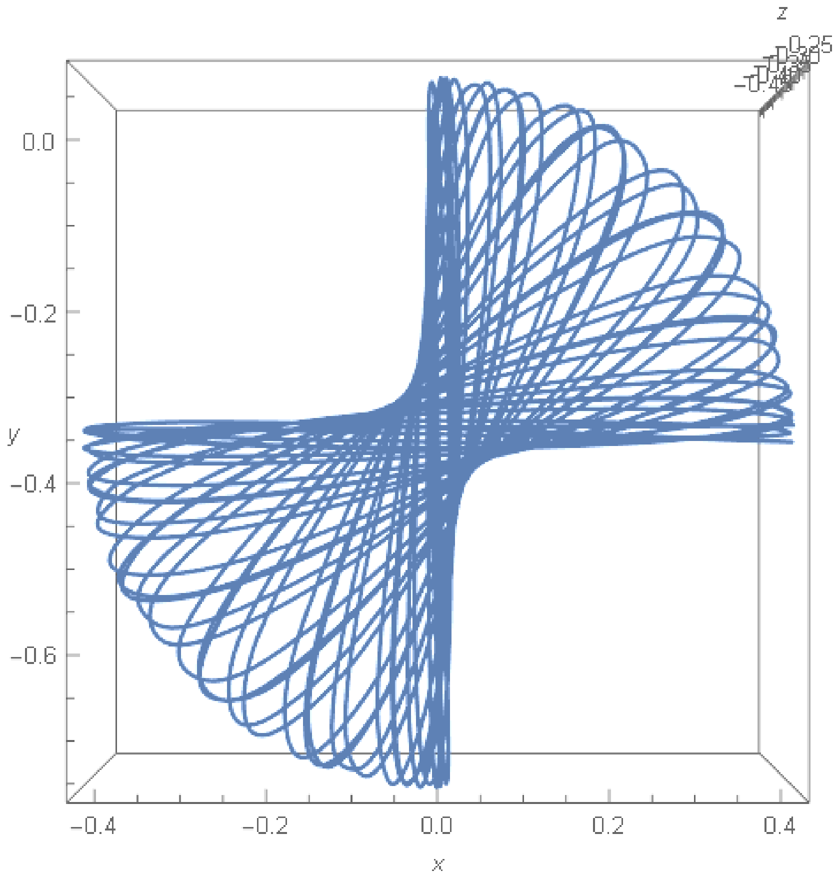




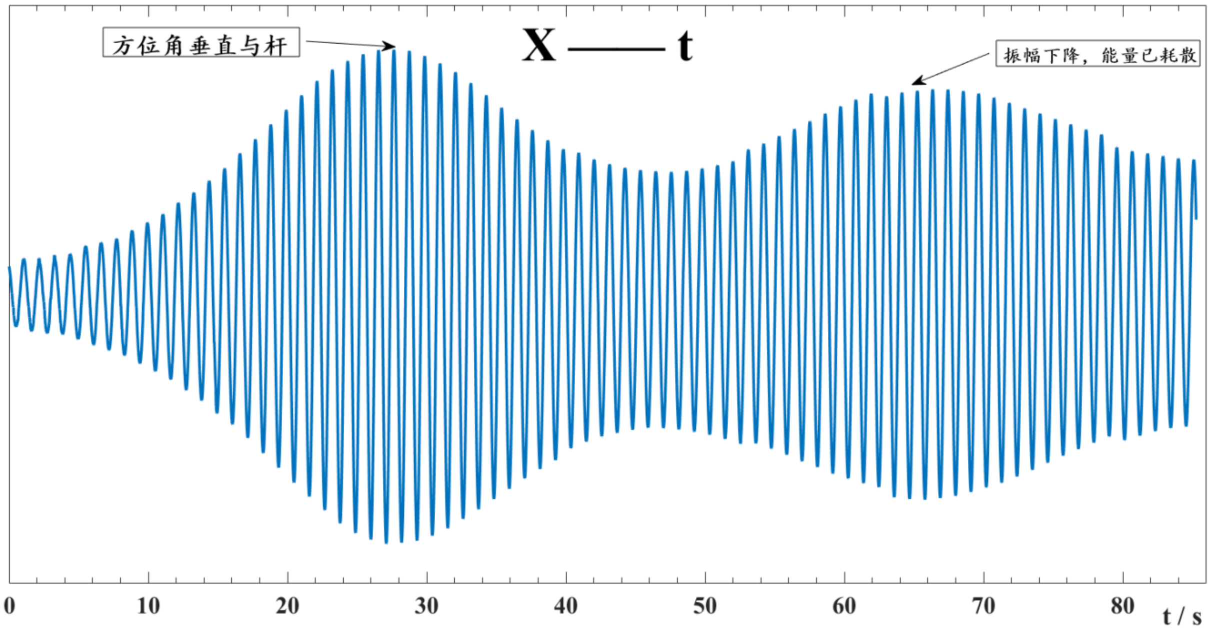
- 运动振幅**随时变化**
- 相图呈带状分布
- 奇点类型为**焦点**

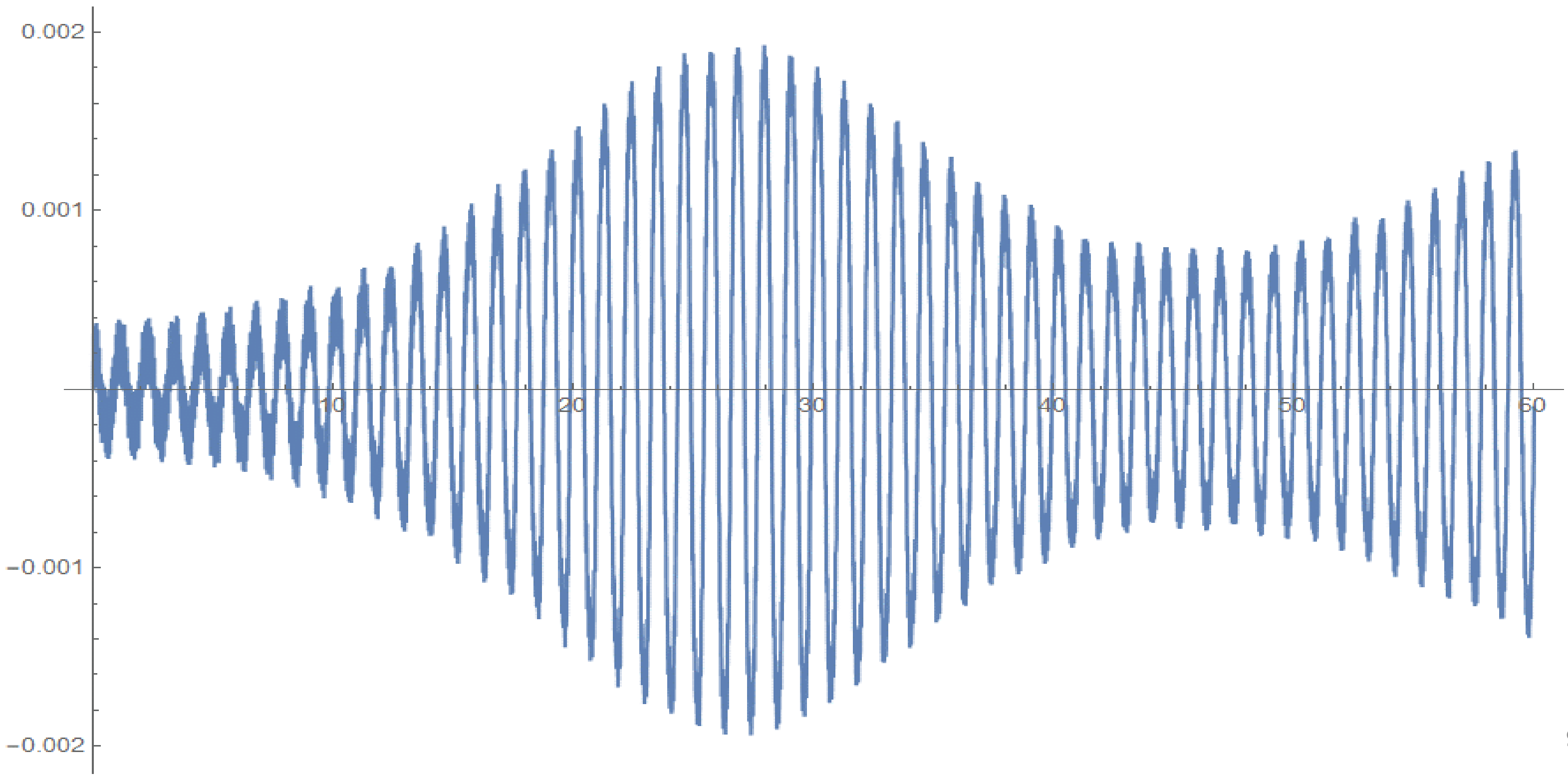
Thanks For Listening !

讨论



- 在垂直杆释放时，杆在第一个模型中是一维线振荡，不在适用
- 应将杆的近似模型的广义坐标x，改为转动模型的广义坐标α
- 在此模型下，垂直杆释放自发转变成沿杆释放


方位角垂直与杆
X —— t
振幅下降，能量已耗散
0
10
20
30
40
50
60
70
80
t / s


0.002
0.001
−0.001
−0.002
10
20
30
40
50
60

Experiment 实验

- 弹性模量测量：

$$E = \frac{FL^3}{3xI}$$