$$P_{\vec k} = C_{g_{\vec k}}^{n_{\vec k}} = \frac{g_{\vec k}!}{n_{\vec k}!(g_{\vec k}-n_{\vec k})!}; \quad \ln P_{\vec k} = g_{\vec k}(\ln g_{\vec k} - \cancel{1}) - n_{\vec k}(\ln n_{\vec k} - \cancel{1}) - (g_{\vec k}-n_{\vec k})(\ln(g_{\vec k}-n_{\vec k}) - \cancel{1}) =$$

$$\Rightarrow g_{\vec k}\ln g_{\vec k} - n_{\vec k}\ln n_{\vec k} - (g_{\vec k}-n_{\vec k})\ln(g_{\vec k}-n_{\vec k})$$

$$\delta \ln P_{\vec k} = -\delta n_{\vec k}\ln n_{\vec k} + \delta n_{\vec k}\ln(g_{\vec k}-n_{\vec k}) =$$

$$\Rightarrow \delta n_{\vec k}\left(\ln\left(\frac{g_{\vec k}}{n_{\vec k}}-1\right)\right) - \lambda\varepsilon_{\vec k}\delta n_{\vec k} - \beta\delta n_{\vec k} = 0$$

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}; \quad -\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1\right)^2}\right) = \frac{1}{T\left(2ch\frac{\varepsilon-\mu}{2T}\right)^2} \qquad n_{\vec k} = \frac{g_{\vec k}}{e^{\lambda\varepsilon_{\vec k}+\beta}+1} \qquad \lambda = \frac{1}{T}; \quad \beta = -\frac{\mu}{T}$$

Неделя 3. Электронный ферми-газ.

$$\bar\varepsilon = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2m};$$

Задача 3.13 (на семинар)

Ультрахолодные нейтроны содержатся в ловушке при низкой температуре, так что их газ вырожден. Как изменится их средняя кинетическая энергия, если включить магнитное поле, полностью их поляризующее. Пренебречь процессами распада нейтронов.

Комментарий: Также на семинаре должна быть обсуждена связь этой задачи с домашней задачей 3.59 про парамагнетизм Паули и дано качественное объяснение того, что происходит в 3.59 (частичная поляризация).

$$n_e = \frac{1}{V}N_e = 2\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \frac{\sqrt2}{\pi^2\hbar^3}m^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \frac{\sqrt2 m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{2}{3}\int d\varepsilon\, \varepsilon^{3/2}\left(-\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{2\sqrt2 m^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty} T dx(\mu+Tx)^{3/2}\frac{1}{T\left(2ch\frac{x}{2}\right)^2} =$$

Средняя кинетическая энергия ферми-газа равна $0.6 E_F$ для вырожденного фермионного случая. Вычисляется прямолинейно:

$$= \frac{2\sqrt2 m^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\mu^{3/2}\left(1 + \left(\frac{T}{\mu}\right)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x}{2ch\frac{x}{2}}\right)^2 dx}_{=\frac{\pi^2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt2 m^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}\mu^{3/2}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\right)$$

$$\bar E = \frac{1}{n}2\int_0^{k_F}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{3\hbar^2}{2m(3\pi^2 n)}\frac{1}{5}k_F^5 = \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = 0.6\, E_F$$

$$\delta n_e = 0 = \frac{(2m)^{3/2}}{\ldots}\left(\frac{3}{2}\sqrt\mu\,\delta\mu + \frac{\pi^2}{3}\frac{T^2}{\ldots}\right) = 0 \qquad \delta\mu = -\frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\mu$$

В задаче сохраняется полное число частиц которое пропорционально $g_s E_F^{3/2}$, где g_s - спиновое вырождение (2 для нулевого поля и 1 для сильного поля).

Соответственно при спиновой поляризации энергия Ферми и средняя энергия возрастут в $2^{2/3} \approx 1.6$ раз.

$$\frac{1}{V}E = 2\int_0^\infty \frac{p^2}{2m}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \frac{1}{2m\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{p^4 dp}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1} = \frac{\sqrt2 m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{2}{5}\int_0^\infty\varepsilon^{5/2}d\varepsilon\left(-\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\right) =$$

Задача 3.5 (на семинар, качественно решена в задачнике, возможно строгое решение)

$$= \frac{(2m)^{3/2}}{5\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu+Tx)^{5/2}dx}{\left(2ch\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{(2m)^{3/2}}{5\pi^2\hbar^3}\cdot\mu^{5/2}\left(1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{3}\right) =$$

Оценить, каково относительное увеличение средней энергии электронов в металле с $E_F = 5$ эВ при увеличении температуры от 0 до комнатной.

$$= \frac{(2m)^{3/2}}{5\pi^2\hbar^3}\mu^{5/2}\left(1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\right); \quad \frac{1}{V}\delta E = \frac{(2m)^{3/2}}{5\pi^2\hbar^3}\left(\frac{5}{2}\mu^{3/2}\delta\mu + \frac{5\pi^2}{8}\cdot\sqrt\mu\, T^2\right) = \frac{(2m)^{3/2}\mu^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\left(\delta\mu + \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{T^2}{\mu}\right) =$$

Комментарий: Качественное решение исходит из понимания, что в вырожденном ферми-газе при повышении температуры меняется только функция распределения вблизи поверхности Ферми. Эта оценка может отличаться множителями. Возможно и более строгое решение, приводимое ниже.

$$= \frac{(2m\mu)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\mu\left(-\frac{2\pi^2}{9}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{T}{\mu}\right)^2 = \frac{(2m\mu)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\mu\cdot\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2 =$$

$$k_F^3 = 3\pi^2 n_e$$

Оценка:

$$= \frac{k_F^3}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\mu = \frac{3\pi^2 n_e}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{T}{\mu}\right)^2\mu = \frac{\pi^2}{24}n_e\mu\left(\frac{T}{\mu}\right)^2 = \frac{5\pi^2}{72}\bar E\left(\frac{T}{\mu}\right)^2 = 0{,}7\bar E\left(\frac{T}{\mu}\right)^2$$

$$\bar\varepsilon = \frac{3}{5}\mu, \qquad n_e\mu = \frac{5}{3}n_e\bar\varepsilon = \frac{5}{3}\bar E$$

Средняя энергия в ферми-газе (см. 3.13 выше) $\bar E = \frac{3}{5}E_F$

При нагреве меняется примерно на T энергия частиц в приповерхностном слое, размытом по энергии на T. Число таких частиц $\Delta N \simeq D(E_F)T$, где плотность состояний на поверхности Ферми (получено на лекции) $D(E_F) = \frac{3}{2}\frac{N}{E_F}$. Отсюда для искомого отношения

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}82$$

$$\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^x+1} = \sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty x\,dx(-1)^n e^{-x(n+1)} = \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{(2k+2)^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right) = 0{,}75+0{,}05 = 0{,}8$$

$$1{,}4\cdot 0{,}6\cdot n_e\mu\frac{T^2}{\mu^2} = 0{,}84\cdot n_e\frac{T}{\mu}$$

$$0{,}84$$

$$240\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 = 0{,}84\frac{T}{\varepsilon_F} \qquad 290\frac{T^2}{\ldots} = \frac{\Theta_D^3}{\varepsilon_F}; \quad T = \frac{1}{17}\Theta_D\sqrt{\frac{\Theta_D}{\varepsilon_F}} =$$

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\overline{E}} \simeq \frac{1}{N}\frac{\Delta N\, T}{\overline{E}} = \frac{3/2}{3/5}\left(\frac{T}{E_F}\right)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{T}{E_F}\right)^2 = 2{,}5\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2$$

Это вдвое отличается от оценки в задачнике, можно исправить словами, что «изменяются состояния частиц в слое размытому (по энергии) на $\pm T$, но это уже превышение точности качественного рассмотрения.

Строгое рассмотрение проще всего провести на языке квазичастиц (вводилось на лекции). Рассмотрим эффект размытия распределения вблизи поверхности Ферми как рождение частиц и античастиц. Химпотенциал этих квазичастиц нулевой (они рождаются до достижения теплового равновесия), плотность состояний вблизи нулевой энергии равна плотности состояний для электронов на поверхности Ферми. Вклад в энергию от частиц и античастиц одинаков для Ферми-газа. Отсюда сразу приращение энергии ферми-газа

$$\Delta E \approx 2 D(E_F)\int_0^\infty \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T}+1} = 2\frac{3}{2}\frac{N}{E_F}T^2\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$$

Множитель 2 связан с учётом вкладов частиц и античастиц (интегрируем только по частицам), плотность состояний вынесена из-под интегрирования, что оправдано для $T \ll E_F$, интеграл табличный и равен $\frac{\pi^2}{12}$.

Подстановкой и нормировкой на среднюю энергию получаем для искомого отношения

$$\frac{1}{N}\frac{\Delta E}{\overline{E}} = \frac{5}{12}\pi^2 \approx 4.1\left(\frac{T}{E_F}\right)^2$$

отличается множителем от качественной оценки.

Задача 3.22 (на семинар)

Определить давление и сжимаемость электронного газа в меди при $T=0$. $n=8\cdot 10^{22}\ см^{-2}$. Масса равна массе свободного электрона.

Давление в нерелятивистском газе ищется по формуле:

$E=\frac{3}{2}PV$, где E - полная кинетическая энергия электронов в объёме V. Альтернативно, можно вычислить полную энергию в лоб и воспользоваться тем что $dE=-P\,dV$.

$$P=\frac{2}{3}\times\frac{E}{V}=\frac{2}{3}\times 0.6\mathrm{n}\frac{p_F^2}{2\mathrm{m}}=0.2\frac{\hbar^2}{m}n(3\pi^2 n)^{2/3}=0.2\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}\frac{n^{5/3}}{m}$$

Это составляет $2.71\cdot 10^6\ см^{-1}с^{-2}г = 2.71\cdot 10^7\ Па = 271\ атм$.

Сжимаемость считается по определению $\beta=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$:

Поскольку $n=N/V$, то $n\frac{\partial}{\partial n}=-V\frac{\partial}{\partial V}$ и $\beta=-\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)}=\frac{0.6}{P}$

Задача Т.3.1 (на семинар)

Найти радиус нейтронной звезды с массой M, равной двум массам Солнца, и температурой не выше $T=10^9 K$. Радиационным давлением пренебречь.

Нейтронную звезду сжимает гравитационное давление, а распирает — фермиевское (и радиационное, которым по условию пренебрегаем).

Пусть характерная концентрация нейтронов n. Тогда плотность звезды nm, будем считать, что она постоянна. Здесь $m=1.67\cdot10^{24}$ г - масса нейтрона.

Концентрацию выразим через полную массу и радиус звезды $nm=\frac{3M}{4\pi R^3}$.

Радиус найдётся из условия минимума энергии. Гравитационная энергия отрицательна, её вычисление аналогично вычислению электростатической энергии равномерно заряженного шара через теорему Гаусса(задача 3.43 из второй части задачника под ред. Овчинкина)

$$E_G=-\frac{3GM^2}{5R}$$

$-G\int_0^R \frac{4\pi}{3}\rho r^3\cdot\frac{1}{r}4\pi r^2 dr\rho = -G\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{4\pi}{5}\rho^2 R^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

Теперь выразим полную кинетическую энергию через радиус звезды (используя результаты задач 3.2, 3.3 из 3 тома задачника):

$$E_K=N\cdot 0.6 E_F=\frac{M}{m}\cdot 0.6\frac{p_F^2}{2m}=0.3\frac{M}{m^2}\hbar^2(3\pi^2 n)^{2/3}=0.3\frac{M}{m^2}\hbar^2\left(\frac{9\pi M}{4mR^3}\right)^{2/3}$$

Минимизируем полную энергию:

$$E=-\frac{3}{5}GM^2\frac{1}{R}+\frac{3}{10}\hbar^2\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{M^{5/3}}{m^{8/3}}\frac{1}{R^2}$$

откуда

$$R=\frac{\hbar^2}{GM^{1/3}m^{8/3}}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\approx 8.4\ км$$

для проверки применимости нерелятивистского подхода вычислим скорость Ферми:

$$\frac{V_F}{c}=\frac{\hbar k_F}{mc}=\frac{\hbar\sqrt[3]{3\pi^2 n}}{mc}=\frac{\hbar}{mc}\frac{\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}\frac{M}{m}}}{R}\simeq\frac{1}{3}$$

т.е. релятивистские поправки ещё невелики.

Оценка энергии Ферми $E_F=\frac{mV_F^2}{2}\simeq\frac{1}{20}mc^2=50\ МэВ$ показывает, что система остаётся вырожденной при температуре $10^9 K$ (т. е. 100 кэВ).

<u>*Комментарий (С.Н.Жабин)*</u>: Возможна другая оценка. Если по аналогии с оболочечной моделью ядра считать, что нейтроны движутся в гравитационном потенциале, создаваемом внутренними слоями звезды, то получим квадратичную потенциальную яму $U(r)=\frac{1}{2}G\frac{mM}{R^3}r^2$ внутри звезды. Зная уровни трёхмерного осциллятора и кратности их вырождения, можно получить уравнение на радиус. Ответ отличается множителем порядка 1.

Задача 3.44 (на дом)

Для значений параметров металлов первой группы Na ($E_F = 3.22$ *эВ ,* $\theta = 158\,K$ *) и Cu (* $E_F = 7$ *эВ ,* $\theta = 347\,K$ *) определить температуру, при которой сравниваются электронная и решёточная теплоёмкости.*

Задача учит характерным числам и проверяет знание предыдущих тем.

В обоих случаях отдаётся в зону проводимости по одному электрону на атом, примитивные ячейки содержат единственный ион, так что числа электронов проводимости, примитивных ячеек и атомов совпадают.

Для электронной теплоёмкости пользуемся ферми-газовой моделью. Теплоёмкость электронов линейна по температуре при $T \ll E_F$, то есть вплоть до температуры плавления металла:

$$C_{el} = \frac{k_B N T m}{\hbar^2}\left(\frac{\pi}{3n}\right)^{2/3} = \frac{\pi^2 k_B^2 N T}{2 E_F}$$

Теплоёмкость ферми-газа выводится на лекции.

Фононная теплоёмкость при высоких температурах ($T > \theta$) равна $C_{ph} = 3 N k_B$, что в $\sim \frac{E_F}{(k_B T)} \gg 1$ раз больше электронной. Значит сравниваются теплоёмкости при низких температурах.

При низких температурах для фононной теплоёмкости есть формула Дебая:

$$C_{ph} = \frac{12\pi^4 N k_B}{5}\left(\frac{T}{\theta}\right)^3$$

Приравнивая, получаем:

$$T^2 = \frac{5 k_B \Theta^3}{24 E_F \pi^2}$$ $$T = \frac{1}{7}\theta_D\sqrt{\frac{\theta_D}{\varepsilon_F}}$$

После подстановки численных значений, получаем ответ: 3.3K для меди и 1.5K для натрия. Полученные числа оправдывают применение дебаевского приближения.

Комментарий: Математически внимательные студенты могут заметить, что формально линейный график теплоёмкости вырожденного ферми-газа должен пересечь дебаевскую кривую не только при низких температурах (когда T^3 обгонит линейный закон), но и при высоких температурах, когда дебаевская теплоёмкость станет постоянна. Это, однако, будет происходить при температуре порядка фермиевской — что для металлов не имеет физического смысла, а кроме того нарушит предположение о вырождении, существенное для линейности теплоёмкости. Кроме того, при абстрактном рассмотрении, вопрос о пересечении высокотемпературного (т. е. классического) предела электронной теплоёмкости $\frac{3}{2}k_B$ на электрон с пределом Дюлонга-Пти $3k_B$ на атом зависит от числа электронов проводимости, приходящихся на атом. В условиях задачи натрий и медь отдают по одному электрону — так что этого пересечения не будет вовсе.

Задача 3.53 (на дом)

Два образца натрия и меди объёмом 1.5 см³ каждый имеют взаимную ёмкость C=1 пФ. Образцы соединили проволокой. На сколько (относительно) изменилась концентрация электронов в натрии при этом, если работы выхода $A_{Na}=2.3\,эВ$, $A_{Cu}=4.5\,эВ$ *и концентрация электронов в натрии* $n=2.65\cdot 10^{22}\,см^{-3}$.

Комментарий: Данная задача иллюстрирует установление равновесия в электронном газе в присутствии электрического поля, показывает смысл работы выхода как положения энергии Ферми относительно уровня минимальной энергии электрона в вакууме, является «предвестником» правила Андерсона при обсуждении гетероструктур.

В равновесии (когда пластины соединили) установится такое распределение заряда, что $e\phi+\mu=const$ ($e<0$), то есть выравняется электрохимпотенциал. Электронам выгодно понижать свою энергию, переходя из натрия в медь (поверхность Ферми меди ниже по энергии), но такие переходы нарушают электронейтральность и возникает задерживающая разность потенциалов. При этом массивные металлические образцы можно считать в равновесии эквипотенциальными.

Значит разность электрических потенциалов равна $(A_{Cu}-A_{Na})/e$, чтобы обеспечить эту разность потенциалов, перетёк заряд $C(A_{Cu}-A_{Na})/e=2.2\cdot 10^{-2}\,Кл=1.38\cdot 10^{7}\,e$ (зарядов электрона), что составляет $5.2\cdot 10^{-16}$ от общего числа электронов в образце.

Комментарий к обсуждению задачи: данные условия позволяют также найти и энергию Ферми (концентрация дана, эффективная масса в щелочных металлах близка к массе электрона) и полностью восстановить картину распределения электронов в зоне проводимости по энергии.

Задача 3.59 (на дом)

Задача про парамагнетизм Паули в натрии в малом поле. Дано $m^*/m_e=0.8$, $n=2.65\cdot 10^{22}\,см^{-3}$, $\mu_B H \ll E_F$. *Найти намагниченность,* $\delta p_F/p_F$, $\delta n/n$.

Пусть плотность состояний на уровне Ферми для каждого из направлений спина равна D' . В модели с квадратичным законом дисперсии $D'=\frac{dN}{dE}=\frac{V\,4\pi k_F^2\,dk/(2\pi)^3}{\hbar^2 k_F\,dk/m^*}=\frac{1}{2}\frac{m^* p_F}{\pi^2\hbar^3}=\frac{1}{2}\frac{m^*}{\hbar^2}\sqrt[3]{\frac{3n}{\pi^4}}$, или, по-другому, $D'=\frac{3n}{4E_F}$. Здесь n - полная концентрация электронов, D' вдвое меньше полной плотности состояний.

Условие, что поле мало означает, что изменение распределения электронов мало. Тогда можно считать, что плотность состояний не изменилась при приложении поля. Считаем магнетизм чисто спиновым: $g=2$, магнитный момент каждого электрона равен боровскому магнетону и может быть направлен либо по полю, либо против поля.

Это значит, что электронов, магнитный момент которых направлен по полю (энергия которых понижается), стало в единице объёма больше на $D'\mu_B H$, а электронов, магнитный момент которых направлен против поля(энергия которых повышается) - меньше на ту же самую величину $D'\mu_B H$. Естественно, полное число электронов сохранилось (система осталась электронейтральной).

Таким образом $\frac{\delta n}{n} = \frac{2D'\mu_B H}{n} = \frac{3\mu_B H}{2E_F}$.

Для поля 10Тл $\frac{3}{2}\mu_B H \sim 1\, мэВ$, то есть в реальных лабораторных полях в электронном газе в типичном металле ($E_F \sim 1\, эВ$) перераспределяется ничтожная доля электронов проводимости.

Магнитный момент без поля был равен 0, а в поле стал равен $M = \mu_B \delta n = H \mu_B^2 \frac{m^*}{\hbar^2} \sqrt[3]{\frac{3n}{\pi^4}}$.

Поскольку для каждой проекции спина $\mu_B H = \delta E = \frac{p_F \delta p}{m}$, то $\frac{\delta p}{p_F} = 2m^* \frac{\mu_B H}{p_F^2} = \frac{\mu_B H}{E_F}$.

Для восприимчивости: $\chi = M/H = \mu_B^2 \frac{m^*}{\hbar^2} \sqrt[3]{\frac{3n}{\pi^4}} = 5.2 \cdot 10^{-7}$.

Задача 3.87 (на дом)(!ответ в задачнике с ошибкой!)

Считая, что электронные и решёточные свойства нанотрубки описываются одномерной моделью, найти отношение электронной и решёточной теплоёмкостей. Скорость звука $s = 10^6\, см/с$, скорость Ферми $v_F = 10^8\, см/с$.

Комментарий 1 Спектр электронов в углеродной нанотрубке может быть линеен или даже иметь щель в зависимости от того как «склеен» в нанотрубку графеновый лист (см. задачу 4.56, решённую в задачнике). Кроме того, как и в чистом графене, положение уровня Ферми может существенно определяться дефектами (в чистом графене поверхность Ферми попадает в вершину дираковского конуса, но небольшая концентрация донорной или акцепторной примеси сместит поверхность ферми вверх или вниз и получится полуметалл электронного или дырочного типа). Наконец, необходимо для разговора о теплоёмкости считать, что движение электронов в трубке не баллистическое, что позволяет электронному газу термализоваться. Однако среди всего разнообразия нанотрубок существуют и такие, которые удовлетворяют этим требованиям. А задание скорости Ферми автоматически снимает вопрос о конкретном виде спектра (см. решение).

Комментарий 2 Задача знакомит с низкоразмерным объектом, в котором реально применимы изученные модели и закрепляет 3.44. Примечательна тем, что в 1D обе теплоёмкости пропорциональны температуре (фермиевская пропорциональна температуре в любой размерности, а фононная - в связи с одномерностью фазового пространства и линейным законом дисперсии). Поэтому можно сразу сказать ответ (с точностью до числового множителя) : s/v_F , так как теплоёмкость пропорциональна плотности состояний, а та, в свою очередь, обратно пропорциональна скорости.

Для фононной теплоёмкости одномерной цепочки при низких температурах (на единицу длины)

$E=2\int\limits_0^\infty \frac{\hbar k s}{e^{\hbar k s/T}-1}\frac{dk}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{T^2}{\hbar s}\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1}=\frac{\pi}{6}\frac{T^2}{\hbar s}$ двойка учитывает движение фононов в обе стороны, поляризация для одномерной системы единственная. Для теплоёмкости, возвращая в запись постоянную Больцмана,

$$C_{ph}=\frac{\pi k_B^2 T}{3\hbar s}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}6$$

Скорость Ферми по определению $v_F=\left(\frac{dE}{dp}\right)_{E_F}$ независимо от вида спектра.

Для электронной теплоёмкости

$$C=\frac{\pi^2}{3}D(E_F)T$$

плотность состояний в одномерном случае, но не делая явных предположений о спектре!

$D=\frac{dN}{dE}=\frac{dN}{dp}\times\frac{dp}{dE}=2\times 2\times\frac{1}{\hbar}\frac{L}{2\pi}\times\frac{1}{v_F}$ (учтён спиновый множитель 2 и множитель 2, учитывающий движение электронов в обе стороны)

откуда электронная теплоёмкость на единицу длины, с постоянной Больцмана.

$$C_{el}=\frac{2\pi}{3}\frac{k_B^2 T}{\hbar v_F}$$

Соответственно,

$$\frac{C_{el}}{C_{ph}}=\frac{2s}{v_F}\sim 2\cdot 10^{-2}$$

Задача 3.61 (на дом)

Оценить эффективную массу квазичастиц ферми-жидкости ^3He, если при $T=3\,мК$, $C=4.5\cdot 10^5\,эрг/(моль\cdot К)$, а плотность $\rho=0.115\,г/см^3$.

Задача даёт представление о том, что при низких температурах может существовать такая ферми-жидкость, в которой масса квазичастиц не равна массе атомов.

У ферми-жидкости два свойства: (i) концентрация и фермиевский импульс в ней соответствуют полному числу частиц и (ii) вблизи Ферми-поверхности наблюдается перенормированная (изменённая) масса, соответствующая изменённой плотности состояний. Именно эта масса и определяет все термодинамические свойства. (См. например Лифшиц, Питаевский, теоретическая физика, том 9)

Спин ядра гелия-3 равен 1/2, электронный спин полностью заполненной s-оболочки нулевой, поэтому полный спин атома равен 1/2. Атом гелия-3 является ферми-частицей и низкотемпературные свойства гелия-3 — это свойства ферми-жижкости. Тогда можно использовать результат для теплоёмкости электронного газа:

$$C_V = \frac{k_B n T m^*}{\hbar^2}\left(\frac{\pi}{3n}\right)^{2/3} = \frac{m^*}{m}\frac{k_B (n m) T}{\hbar^2}\left(\frac{\pi}{3n}\right)^{2/3}$$

Напомним, что эта формула — на единицу объёма. Воспользуемся тем, что $nm = \rho$, где m - масса атома He-3. Подставляя, и помня, что в условии - молярная теплоёмкость, а нужна для вычислений теплоёмкость в единице объёма $C_V = C_\mu \rho / (m N_a)$, получаем после очевидных преобразований:

$$\frac{m^*}{m} = \frac{C_\mu \hbar^2 \rho}{N_A k_B^2 T \rho m} \cdot \left(\frac{3\rho}{\pi m}\right)^{2/3} = 2.15 \quad .$$

Задача 3.28 (на дом)

В плотном холодном веществе белых карликов есть ядра и электроны, образующие вырожденный Ферми-газ. Найти уравнение состояния этого газа в осях (P, V) *для сильного сжатия, такого, что* $E_F \gg m_e c^2$

Комментарий: Задача даёт пример того, где помимо всем теперь известного графена можно наблюдать вырожденные релятивистские фермионы. Исторически задача про вырожденные фермионы в звёздах старше задачи о спектре графена. «Релятивистскость» электронов в графене является условностью: спектр электронов в окрестности точки Дирака $E = \hbar V_F k$ похож на спектр ультрарелятивистских частиц $E = c p = \hbar c k$, но $V_F \ll c$. Однако формально описание свойств электронов вблизи точки Дирака и ультрарелятивистских двумерных частиц оказывается одинаковым.

Поскольку в звезде присутствует положительный фон, который в точности равен отрицательному, то мы пренебрегаем взаимодействием и рассматриваем только кинетическую энергию электронов.

Будем считать закон дисперсии ультрарелятивистским: $\epsilon = pc$, поскольку для большинства состояний $\epsilon \gg mc^2$.

Полная концентрация электронов: $n = 2 \times \frac{4}{3}\pi p_F^3 \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$

Фермиевский импульс такой же как и в обычном электронном газе (он определяется только концентрацией и не зависит от закона дисперсии): $p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3}$

Полная энергия электронов в единице объёма:

$$E = 2 \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_F} c\, p\, 4\pi p^2\, dp = 2\pi c\, p_F^4 \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} = 0.25 c\hbar (9\pi n^2)^{2/3}$$

Полная энергия всего газа

$$E_{полн}=E\,V=\frac{(9\pi)^{2/3}}{4}c\hbar N^{4/3}\frac{1}{V^{1/3}}$$

$$P=-\frac{dE_{полн}}{dV}=\frac{(9\pi)^{2/3}}{12}c\hbar n^{4/3}$$, или $pV^{4/3}=Const$