

В кристалле спектр электронов меняется — на границе зоны Бриллюэна должна зануляться составляющая групповой скорости, нормальная к границе. В результате непрерывный спектр свободных электронов $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ разбивается на ветви, разрывы между которыми образуют запрещённые зоны. В трёхмерном случае разные ветви спектра могут перекрываться по энергии. Кроме того, при формировании зон из p и d электронов зонная структура может частично сохранять вырождение по проекции момента импульса, «унаследованное» от электронов.

В представлении приведённой зонной схемы все ветви могут быть отображены в первую зону Бриллюэна. Объём первой зоны Бриллюэна равен $(2\pi)^3/V_{\text{прим}}$, где $V_{\text{прим}}$ — объём примитивной элементарной ячейки. При периодических граничных условиях на одно уникальное состояние в k-пространстве приходится объём $(2\pi)^3/V$, где V — объём кристалла. С учётом спинового вырождения получаем, что на каждой ветви энергетического спектра есть $(2V)/V_{\text{прим}} = 2N_{\text{прим}}$ уникальных состояний для электронов, где $N_{\text{прим}}$ — число примитивных ячеек в образце. Отметим, что ровно такой же ответ получился бы и для двумерного и одномерного случая.

Заполнение зонной структуры электронами однозначно связано с классификацией металл-диэлектрик. Если в веществе имеются частично заполненные зоны, то слабое электрическое поле сможет перераспределить электроны и возникнет ток, то есть это металл. Если все зоны полностью заполнены, то перестройка распределения электронов по зонам приобретает конечную «цену» — необходимо сообщить энергию, равную ширине запрещённой зоны, слабое поле не может вызвать ток носителей, и мы имеем дело с диэлектриком.

Таким образом, с точки зрения зонной картины, при нечётном числе валентных электронов на примитивную элементарную ячейку вещество будет металлом, чётном — диэлектриком. Это простое рассуждение предполагает, что энергетические зоны (ветви спектра) заполняются поочерёдно (не перекрываются), что вообще говоря неверно в реальных соединениях, где перекрытие зон является скорее правилом, чем исключением.

В итоге:

- Медь — один валентный электрон на примитивную ячейку — металл.
- Алмаз — 2 четырехвалентных атома на примитивную ячейку (структура алмаза обсуждается на лекциях), т.е. 8 электронов — диэлектрик.
- Висмут представляет из себя более сложный пример. На атом приходится 5 валентных электронов, 2 атома на ячейку — должен быть диэлектриком, но верхние зоны (проводимости и валентная) перекрываются и висмут оказывается полуметаллом.

Уже пример с висмутом показывает, что простые соображения работают не всегда.

Комментарий: рассмотрение упрощено, предполагает невырожденность образующихся зон.

$$V_0 = a^3 \cdot \frac{V_c}{\epsilon_F} \sim ? \quad 2 \int_0^{\frac{2\pi}{a}} \frac{V_c \epsilon_F^3}{(2\pi)^3} \epsilon_F (1 - \epsilon_F) = \frac{a^3}{\pi^2} \cdot \frac{\epsilon_F^3}{2\epsilon_F} = \frac{(k_F a)^3}{\pi^2 \cdot 2\epsilon_F} = \frac{3\pi^2}{\pi^2 \cdot 2\epsilon_F} = \frac{3}{2\epsilon_F}$$

$$\Delta \Psi = 4\pi n_0 e (\epsilon_F) \left(-\frac{2\pi}{\epsilon_F} \right) = \frac{4\pi n_0 e^2}{\epsilon_F} \cdot \frac{3}{2\epsilon_F} = \frac{6\pi n_0 e^2}{\epsilon_F^2} = \frac{6\pi \cdot 10^{22} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{(1.35 \cdot 10^{-10})^2} = \frac{9.6 \cdot 10^{-5}}{1.82 \cdot 10^{-20}} = 5.27 \cdot 10^{15} \text{ В/м}^2$$

для преподавателей. Бесконтрольно не распространять.

Задача 3.4 (на семинар)

Металлический натрий кристаллизуется в ОЦК решётку с расстоянием между ближайшими атомами $d=0.37$ нм. Найти среднюю кинетическую энергию электронов, предполагая их закон дисперсии квадратичным.

$$\frac{e^2}{\epsilon_F} = \frac{1}{9} \cdot 1.35 = 0.15$$

Задача на комплексное применение знаний об обратном пространстве и распределении Ферми.

Кубическая ячейка ОЦК решётки не является примитивной и содержит два эквивалентных атома - центральный и угловой. Поэтому расстояние между ближайшими атомами в условии это половина главной диагонали куба и $d = \sqrt{3}a/4 = a\sqrt{3}/2$.

Из того, что закон дисперсии квадратичный, следует, что поверхность Ферми предлагается считать сферической (для щелочных металлов оправдано, на лекции показывались примеры).

Натрий является элементом первой группы, то есть в нём приходится один валентный электрон на атом. Значит в «море» электронов проводимости будет по два электрона от каждой ячейки объёмом a^3 . Электронные состояния двукратно вырождены по спину.

Посчитаем какой должен быть импульс Ферми при такой концентрации электронов:

$$2 \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{a^3}$$

Получаем:

$$p_F = \frac{\sqrt{3}}{2d} \hbar (6\pi^2)^{1/3}$$

В задаче спрашивается про среднюю энергию, которая, как известно из задачи 3.13, есть $3/5$ от фермиевской

Итого имеем ответ как в задачке:

$$\langle E \rangle = 0.6 \frac{3\hbar^2}{8d^2 m} (6\pi^2)^{2/3} = \frac{1.8\hbar^2}{8d^2 m} \cdot \frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{3.7} \cdot 2 \cdot 1.35 \cdot 10^{-16} = 7.1 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$$

Задача 3.35 (на семинар) (решение в задачке, есть комментарии!)

Задача о построении ферми контуров (2D) для закона дисперсии $E(k) = -\epsilon_0 (\cos(k_x a) + \cos(k_y a))$ с одним электроном на атом на простой квадратной решётке. Нахождение распределения скоростей по контурам.

$$\cos k_x a + \cos k_y a = 0 \quad 2 \cos \frac{k_x + k_y}{2} a \cos \frac{k_x - k_y}{2} a = 0$$

Задача разобрана в задачке. Нужно, чтобы продемонстрировать, как отличие закона дисперсии от квадратичного искажает форму Ферми-поверхности.

Комментарий 1: Решение задачи стоит предварить построением обратной решётки, чтобы было понятно как считается площадь первой зоны Бриллюэна.

Комментарий 2: В этой задаче (и родственных задачах в задачке) не совсем корректно

$$k_x + k_y = \frac{\pi}{a} (1 + 2m) \quad |k_x|, |k_y| \leq \frac{\pi}{a} \quad (\text{стр 51 из 150})$$

$$k_x - k_y = \frac{\pi}{a} (1 + 2n)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \vec{k}} \perp S_F$$

$$v_x = \frac{\epsilon_0 a}{\hbar} \sin k_x a = v_y = \frac{\epsilon_0 a}{\hbar} \sin k_y a$$

$$k_x + k_y = \pm \frac{\pi}{a}$$

$$k_x - k_y = \pm \frac{\pi}{a}$$

$$7. \text{ т.к. } k_x a + k_y a = \pi$$

в.30.10.2016

Только для преподавателей. Бесконтрольно не распространять.

говорится «в силу симметричного характера спектра половинное заполнение спектра соответствует $E_F=0$ ». При этом вид симметрии не уточняется — например квадратичный спектр тоже симметричный. Дело в том, что область с $E<0$ занимает половину площади первой зоны Бриллюэна и соответственно эти состояния и окажутся заполнены при $T=0$. Именно это свойство спектра важно. Например, при произвольной трансформации заданного спектра $E'(\vec{k})=F(\vec{k})E(\vec{k})$, где множитель $F(\vec{k})>0$, но меняется произвольно, форма поверхности Ферми не изменится, хотя всякая «симметрия» будет потеряна.

Задача 3.38 (на дом)

Металл с простой кубической решеткой и законом дисперсии $E(\vec{k})=\epsilon_0(3-\cos(k_x a)-\cos(k_y a)-\cos(k_z a))$ помещен во внешнее магнитное поле \vec{H} , направленное вдоль оси z . Найти скорость и ускорение электрона с квазиимпульсом $\vec{p}=5\pi\hbar/(6a)$, направленным вдоль оси x . Использовать $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$

Задача заставляет вспомнить, что квазиимпульс и скорость электрона в твердом теле не связаны соотношением $\vec{p}=m\vec{v}$.

По определению групповой скорости

$$V_x = \frac{\epsilon_0 a}{\hbar} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\epsilon_0 a}{2\hbar}$$

Ускорение

$$\frac{dV}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial E}{\partial p}|_{p=p+\frac{\hbar}{m}\Delta t} - \frac{\partial E}{\partial p}|_{p=p}}{\Delta t}$$

По определению: $\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0$, $\frac{dp_y}{dt} = \frac{\hbar e \epsilon_0 a}{c 2\hbar}$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\hbar e \epsilon_0 a^3}{c 2\hbar^3}$$

соответственно $\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_z}{dt} = 0$

Задача 3.85 (на дом)

Серебро, ГЦК решетка с периодом $a=4.1 \text{ \AA}$. Красная граница фотоэффекта $\lambda_0=2680 \text{ \AA}$. Оценить (в эВ) положение дна зоны проводимости относительно вакуума.

Массу электрона принять равной массе свободного электрона.

$$-i\omega \left(-\omega^2 + \left(\frac{e}{c} \right)^2 \frac{H_x^2}{m_x^2} \right) - \frac{e}{c} \frac{H_x}{m_x} \left(\left(\frac{e}{c} \right)^2 \frac{H_x H_y}{m_x m_y} + i\omega \frac{e}{c} \frac{H_y}{m_x} \right) - \frac{e}{c} \frac{H_y}{m_y} \left(i\omega \frac{e}{c} \frac{H_x}{m_x} - \left(\frac{e}{c} \right)^2 \frac{H_x H_y}{m_x m_y} \right) = 0$$

Данная задача на комплексную проверку знаний данной и предыдущей тем.

$$\omega^2 - \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{H_x^2}{m_x^2} + \frac{H_y^2}{m_y^2} + \frac{H_z^2}{m_z^2} \right) = 0$$

$$\omega_x = \frac{e}{c} \frac{H_x}{m_x}, \quad \omega_y = \frac{e}{c} \frac{H_y}{m_y}, \quad \omega_z = \frac{e}{c} \frac{H_z}{m_z}$$

Ответом в задаче будет $E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} + E_F = E_F + 4.61 \text{ эВ}$, так как красной границе фотоэффекта соответствует «выбивание» электрона с уровня Ферми.

ГЦК - решётка означает четыре атома на элементарный куб. У серебра один электрон проводимости на атом. Это значит, что на элементарный куб приходится четыре электрона.

Концентрация электронов $n = \frac{4}{a^3}$, для импульса Ферми пользуемся известным выражением

$$k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n} = \frac{\sqrt[3]{12\pi^2}}{a} \quad \text{откуда имеем} \quad p_F = \hbar k_F = 1.26 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с} \quad \text{и соответственно}$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = 5.44 \text{ эВ}.$$

Добавляя расстояние от уровня Ферми до уровня свободного электрона 4.61 эВ, получим ответ $E = 10.05 \text{ эВ}$.

Комментарий (А.О.Раевский, В.Н.Глазков): Интересно сравнить найденное положение дна зоны проводимости и уровня Ферми с энергией ионизации одиночного атома серебра, равной 7.57 эВ. То есть положение дна зоны относительно уровня электрона в вакууме оказывается ниже (по энергии) положения уровня энергии 5s электронов в изолированном атоме, из которых эта зона построена. Положение же уровня Ферми оказывается выше уровня энергии 5s электронов. Если вспомнить результат приближения сильной связи, в этом нет ничего удивительного: в приближении сильной связи уровень «размывается» в зону симметрично, так что дно зоны проводимости оказывается ниже «родительского» уровня. С другой стороны, можно отметить, что при расчёте зонной структуры зоны, образуемые более высокими оболочками (6s и 6p, например), могут начать перекрываться, что уменьшит расстояние между «родительским» уровнем зоны проводимости и началом непрерывного спектра. Возможно, этот эффект в случае серебра (серебро — хороший металл с одним электроном на атом, то есть с половинным заполнением зоны проводимости, в приближении сильной связи уровень Ферми совпадал бы с «родительским» уровнем) частично ответствен за то, что уровень Ферми оказывается выше уровня 5s электронов в изолированном атоме.

Задача 3.57 (на дом) (ошибка в ответе задачника!)

Плоскость (Oxz) отделяет металл с законом дисперсии $E_i = \frac{p_x^2}{2m_x^*} + \frac{p_y^2}{2m_y^*} + \frac{p_z^2}{2m_z^*}$ от точно такого же металла, повернутого на $\pi/2$ относительно оси Oz. Найти закон дисперсии в другом металле и закон преломления электронных волн на границе для электронов, движущихся в плоскости (Oxy) .

Комментарий: Задача иллюстрирует то, что эффективная масса электрона может быть анизотропной и даёт пример краевого эффекта. Описываемая граница двух металлов может реализовываться как граница кристаллографических доменов в реальном кристалле.

Во втором металле закон дисперсии в той же системе координат имеет вид:

$$E_{II} = \frac{p_x^2}{2m_x^*} + \frac{p_y^2}{2m_y^*} + \frac{p_z^2}{2m_z^*}$$

(из-за поворота локальных осей кристалла движение вдоль оси X теперь характеризуется эффективной массой m_y^* и наоборот)

Перейдём к вычислению закона преломления.

Пусть в области I был электрон с импульсом $(p_x, p_y, 0)$, после прохождения границы в области II он перейдёт в состояние с импульсом $(p_{xI}, p_{yI}, 0)$. Поскольку испускания или поглощения фононов и других неупругих процессов нет, энергия сохраняется, то есть:

$$\frac{p_x^2}{m_x^*} + \frac{p_y^2}{m_y^*} = \frac{p_{xI}^2}{m_x^*} + \frac{p_{yI}^2}{m_y^*}$$

Другая сохраняющаяся величина это $p_x = p_{xI}$. Данный закон сохранения квазиимпульса связан с тем, что система трансляционно инвариантна вдоль направлений Ox и Oz .

$$\text{Соответственно, } p_{yI} = \sqrt{p_x^2 \left(1 - \frac{m_x^*}{m_y^*}\right) + p_y^2 \frac{m_x^*}{m_y^*}}.$$

Данные выражения для импульсов решают задачу.

Найдём закон преломления. Пусть электрон падал под углом α (отсчитываемом от нормали к поверхности раздела, то есть от оси Y), $\text{tg}(\alpha) = p_x / p_y$, а вылетел под углом β , $\text{tg}(\beta) = p_x / p_{yI}$. Тогда, выражая всё через p_x и подставляя в закон сохранения энергии, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_x^*} + \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{m_y^*} &= \frac{1}{m_x^*} + \frac{\text{ctg}^2 \beta}{m_y^*} \\ \frac{\text{ctg}^2 \alpha - 1}{m_y^*} &= \frac{\text{ctg}^2 \beta - 1}{m_x^*} \\ \frac{1}{m_y^*} \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1}{m_x^*} \frac{\cos 2\beta}{\sin^2 \beta} \end{aligned}$$

Откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \times \sqrt{\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{m_x^*}{m_y^*}}$$

асимптотика при малых углах

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{m_x^*}{m_y^*}}$$

Внимание: ответ отличается от задачника перевёрнутой дробью под корнем. Такое поведение правильно. Если $m_x^* > m_y^*$, то по закону сохранения энергии при почти нормальном (вдоль Y) падении импульс должен увеличиться по модулю, что при сохранении тангенциальной компоненты означает, что направление распространения ещё больше «прижимается» к нормали, то есть $\alpha > \beta$.

Задача 4.54 (на дом) (!решена в задачнике!)

Разобранная верно в задачнике задача про Ферми поверхность графена. Примечательна ответом: Ферми поверхность стягивается в точку и имеет нулевую площадь.

Комментарий: в решении используются слова про «симметрию спектра» («вследствие симметрии спектра вся валентная зона будет заполнена, а вся зона проводимости останется пустой»). Эти слова не совсем корректны — не ясно о какой симметрии речь. Реально важен тот факт, что валентная зона и зона проводимости не пересекаются и тогда из имеющегося числа электронов следует полное заполнение валентной зоны.

Задача Т.4.2 (на дом)

Однородная цепочка (период a) одновалентных атомов формирует одномерный проводник. Известно, что при некоторой температуре в такой цепочке происходит фазовый переход (пайерсовский переход) при котором атомы поочередно смещаются влево и вправо вдоль цепочки (смещение n -ого атома $u_n = \delta(-1)^n$, $\delta \ll a$) и период цепочки удваивается (цепочка димеризуется). В рамках приближения слабой связи объяснить, почему энергия электронов в димеризованной цепочке ниже, чем в однородной? Как изменятся проводящие свойства системы после димеризации?

Комментарий: задача на комплексное использование знаний о формировании зонной структуры при учёте взаимодействия электронов с периодическим потенциалом и связи заполнения зон с проводимостью материала (см. Т.4.1)

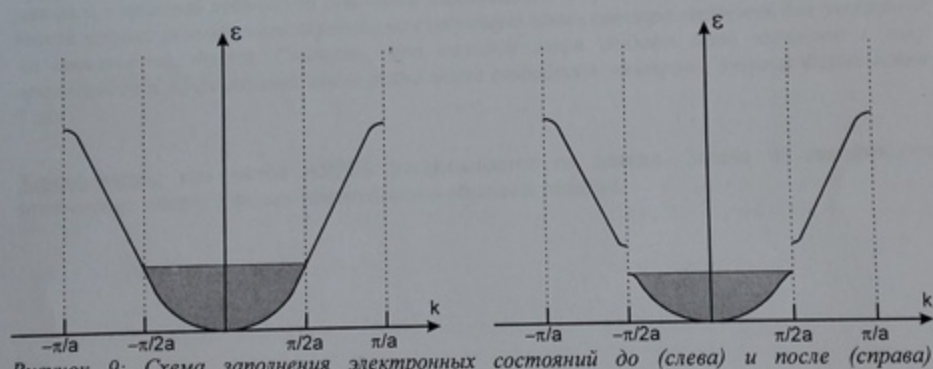


Рисунок 9: Схема заполнения электронных состояний до (слева) и после (справа) димеризации цепочек.

В исходной цепочке один электрон на примитивную ячейку и первая зона Бриллюэна одномерной цепочки оказывается заполнена ровно на половину — поэтому это и будет проводником (металлом). После димеризации объём, занимаемый электронами в k -пространстве не меняется, а первая зона Бриллюэна уменьшается вдвое. Изменение периодичности кристалла приводит к появлению дополнительного вклада в создаваемый им потенциал с периодом $2a$, этот вклад мал в силу малости смещения ионов и может быть учтён в рамках приближения слабой связи.

Точный расчёт задачей не требуется, но результат применения приближения слабой связи

очевиден — на границе новой зоны Бриллюэна образуется разрыв спектра и запрещённая зона. При этом вблизи границы энергия электронов из нижней ветви станет ещё немного ниже. В результате суммарная кинетическая энергия электронов понизится. Таким образом, в этом фазовом переходе выигрыш в энергии возникает за счёт уменьшения суммарной кинетической энергии электронов и оказывается, что в одномерном случае он всегда больше проигрыша в упругой энергии при деформации (просто для сведения: проигрыш $\propto \delta^2$, выигрыш $\propto \delta^2 \ln \delta$).

После димеризации нижняя энергетическая зона окажется заполнена полностью и система станет диэлектриком.

Комментарий по решению: вычисление точного ответа не такое сложное и посильное для студентов, предоставляется по запросу. Задача может быть легко развёрнута в интересный вопрос по выбору, примеры экспериментального наблюдения такого перехода известны.

Задача Т.4.3 (на дом)

При фотоэффекте в металле возможно резонансное увеличение фототока, если после поглощения кванта света электрон попадёт точно на следующую ветвь спектра: такой электрон может распространяться в кристалле на большое расстояние и вероятность того, что электрон достигнет поверхности, сохранив избыточную энергию, увеличивается. Эта возможность используется в методе ARPES для изучения спектра электронов в металле. Считая взаимодействие электронов с кристаллом слабым, определить для металла с простой кубической решёткой минимальную энергию кванта света, для которой такой процесс резонансного перехода на следующую ветвь спектра возможен для электрона на поверхности Ферми. Считать, что каждый атом отдаёт один электрон в зону проводимости, эффективная масса равна массе свободного электрона, энергия Ферми равна 3 эВ.

Комментарий: про метод ARPES рассказывается на лекции. Задача на комплексное применение знаний о ферми-поверхности и обратной решётке.

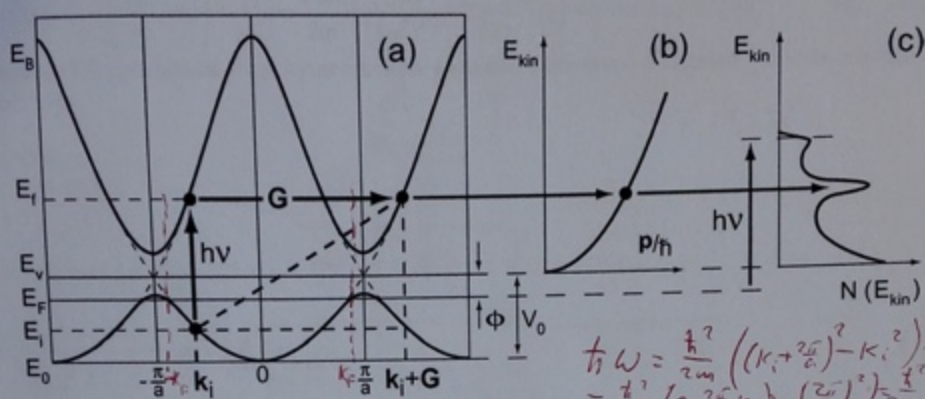


Рисунок 10: Схема резонансного поглощения фотона. (a) Переход электрона в более высокую энергетическую зону в представлении периодической зонной схемы. (b) Квадратичный спектр электрона в вакууме. (c) Схема распределения фотоэлектронов по энергии с резонансным пиком. Обозначения: E_0 - дно зоны проводимости, E_i - энергия исходного состояния электрона, E_f - энергия конечного состояния электрона, E_F - уровень Ферми, E_v - положение нуля энергии электрона в вакууме, G - вектор обратной решётки, $h\nu$ - энергия фотона. Из статьи Andrea Damascelli, Probing the Electronic Structure of Complex Systems by ARPES, Physica Scripta, 109, 61(2004).

Для простой кубической решётки обратная решётка также простая кубическая с периодом $\frac{2\pi}{a}$. Фермиевский волновой вектор $k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n} \approx \frac{3.09}{a} < \frac{\pi}{a}$, поэтому ферми-сфера полностью уместается в первой зоне Бриллюэна. В силу слабости взаимодействия (по условию) искажением ферми-поверхности от идеальной сферической формы пренебрегаем. В силу слабости взаимодействия электронов с периодическим потенциалом кристалла изменение спектра можно считать слабым, запрещённые зоны узкими и за исключением непосредственной окрестности границ зоны Бриллюэна можно считать спектр квадратичным

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

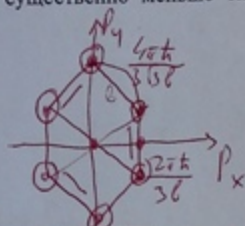
Импульс кванта света в УФ-диапазоне много меньше фермиевского, поэтому в рамках приведённой зонной схемы переход происходит «вертикально» - без изменения импульса электрона. Мы можем добавить вектор обратной решётки, чтобы перейти к расширенной или периодической зонной схемам (рисунок 10). Необходимо после такого перехода «вверх» на $\hbar\omega$ и «вбок» на \vec{G} попасть на квадратичный спектр с минимальным приростом энергии.

Очевидно, что минимальному изменению энергии будет соответствовать смещение на вектор обратной решётки минимальной длины, например, $((2\pi)/a; 0; 0)$ из точки в k -пространстве $(-k_F; 0; 0)$. Так как k_F всё же близко к границе зоны Бриллюэна, то и оттранслированная точка оказывается близка к границе: $\frac{2\pi}{a} - k_F \approx \frac{3.19}{a}$.

Отсюда искомая энергия кванта

$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{2\pi}{a} - k_F \right)^2 - k_F^2 \right) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \left(\frac{(2\pi)^2}{(3\pi^2)^{2/3}} - 2 \frac{2\pi}{(3\pi^2)^{1/3}} \right) \approx 0.068 E_F = 0.2 \text{ эВ}$. Это энергия кванта ИК-диапазона, она существенно меньше типичных значений работы выхода для металла.

4.54



$$\ell = 1.41 \text{ \AA}$$

$$\varepsilon(\vec{p}) = \varepsilon_0 \pm A \left[1 + 4 \cos p_x a \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}} \right]$$

$$A = 2.8 \text{ эВ}$$

$$1 + 4 \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} \left(\cos p_x a + \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} \right) = 0$$

$$a = \frac{3\ell}{2\pi}$$

$$\varepsilon_F = \varepsilon_0 = 0$$

$$-4 \cos p_x a = 4 \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}}} \geq 4 \text{ при } \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} > 0$$

$$\leq -4 \text{ при } \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} < 0$$

$$\begin{cases} \cos p_x a = 1 \\ \cos p_y a = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos p_x a = -1 \\ \cos p_y a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x a = 2\pi m \\ p_y a = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x a = \pi + 2\pi k \\ p_y a = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = \frac{4\pi\hbar}{3\ell} m \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}\ell} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}\ell} s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \frac{2\pi\hbar}{3\ell} + \frac{4\pi\hbar}{3\ell} n \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}\ell} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}\ell} l \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}\ell} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\ell} \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}\ell} \end{cases}$$

(стр 58 из 150)

4.55

$$\varepsilon_0 = 0$$

$$\rho = 1.47 \text{ \AA} \quad \nabla \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$\delta \varepsilon(s p_x, s p_y) = \pm A \frac{3\ell}{2\hbar} \sqrt{s p_x^2 + s p_y^2} = \pm c^x s p$$

$$c^x = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s p} = A \cdot \frac{3\ell}{2\hbar} = 10^8 \text{ cm/e} = 10^3 \text{ K.u/e}$$

$$dN_p = 2 \frac{S}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 2\pi s p d s p = 2 \frac{S}{2\pi (\hbar c)^3} \cdot 2 |S \varepsilon| d s \varepsilon$$

$$\frac{dN_p}{d s \varepsilon} \rightarrow |S \varepsilon| \quad S \varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{dN_p}{d s \varepsilon} \rightarrow 0$$