Неделя 5. Кинетические и электрические явления в твёрдых телах и металлах.

Задача 3.65 (на семинар)

Характерная величина удельного сопротивления металлов при комнатной температуре $\rho=10^{-5}$ Ом·см. Оценить длину свободного пробега Λ, приняв постоянную решётки $a=3Å$

<u>*Комментарий:*</u> Простая задача, знакомит с формулой Друде и попутно ещё раз напоминает, как устроен металл.

Подставляем $\Lambda=v_F\tau$, $p_F=mv_F$ и $p_F=\hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$ в формулу Друде: $\frac{1}{\rho}=\sigma=\frac{ne^2\tau}{m}=\frac{ne^2\Lambda}{p_F}=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2/3}\frac{e^2\Lambda}{\hbar\sqrt[3]{3}}$

Будем считать, что в металле имеется один электрон проводимости на ячейку, то есть $n=a^{-3}$.

Тогда получаем ответ: $\Lambda=\frac{\hbar 3^{1/3}\pi^{2/3}a^2}{\rho e^2}\approx 1.1\cdot 10^{-6}$ *см*

Обращаем внимание на внесистемные единицы – *Ом·см*, перед тем как вычислять по этой формуле, лучше проверить размерность. Формула Друде верна и в СИ и в СГС, в СИ размерность удельного сопротивления *Ом·м*, в СГС — *сек*, $1\,Ом\cdot м=\frac{1}{9}10^{-9}\,сек$

Задача 3.75 (на семинар)

Удельное сопротивление сплава Ag +1% Ni при $T\simeq 0$ равно $\rho=10^{-6}$ Ом·см. Считая, что рассеяние происходит только на атомах никеля, оценить величину сечения рассеяния. Серебро кристаллизуется в ГЦК решётку с a=4.1Å.

<u>*Комментарий:*</u> Данная задача иллюстрирует, откуда берётся сопротивление, связанное с рассеянием электронов на примесях.

Вспомним 2-ой семестр: $\Lambda=\frac{1}{s n_{\mathrm{Ni}}}$, где s - искомое сечение рассеяния, а n_{Ni} - концентрация рассеивающих центров (атомов никеля). Для относительной концентрации 1%, концентрация рассеивающих центров на атом серебра $n_{\mathrm{Ni}}=0.01\frac{4}{a^3}$

Далее, ГЦК решётка содержит четыре атома на кубическую элементарную ячейку. Так как каждый атом серебра имеет один валентный электрон, то имеется 4 электрона проводимости на кубическую ячейку. То есть концентрация электронов проводимости $n_e=\frac{4}{a^3}$.

...рактерная скорость электронов равна фермиевской (ферми-поверхность серебра в целом ...лизка к сферической, хотя и имеет «перетяжки» на границе зоны Бриллюэна), поэтому $\Lambda = v_F \tau = \frac{\hbar}{m}\sqrt[3]{3\pi^2 n_e}\;\tau$.

С учётом вышесказанного пишем формулу Друде

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = \left(\frac{4}{a^3}\right)^{2/3} \frac{\Lambda e^2}{\hbar \sqrt[3]{3\pi^2}}$$

Подставляем:

$$s = \frac{1}{n_{\mathrm{Ni}}\Lambda} = \frac{1}{n_{\mathrm{Ni}}}\left(\frac{4}{a^3}\right)^{2/3} \frac{e^2}{\sigma \hbar \sqrt[3]{3\pi^2}} = 100\frac{1}{\sqrt[3]{12\pi^2}}\frac{a e^2}{\sigma \hbar} = 100\frac{1}{\sqrt[3]{12\pi^2}}\frac{\rho a e^2}{\hbar} \approx 2\cdot 10^{-16}\,см^2$$

сечение оказывается порядка атомного — это находится в согласии с тем, что поле примесного иона быстро экранируется в металле.

Задача 3.9 (на семинар)

На какой максимальный угол может отклониться электрон при поглощении или испускании фонона в металле с простой кубической решёткой, хорошо описываемой моделью Дебая.

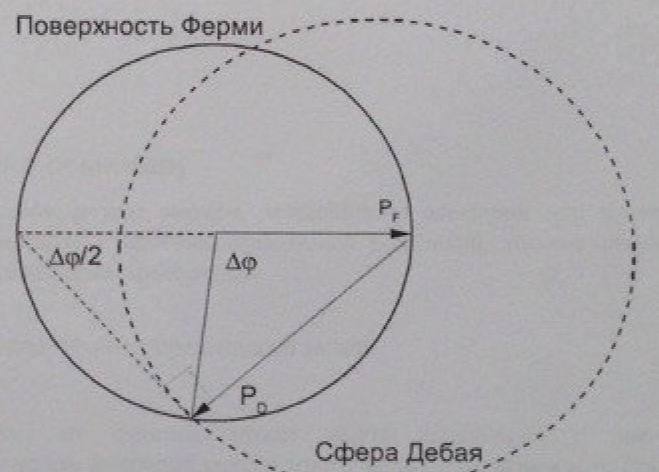

Рисунок 11: К задаче 3.9. Сфера радиусом $\hbar k_D$ построена из одной из точек ферми-поверхности. Точки пересечения этой сферы с поверхностью Ферми соответствуют максимальным углам отклонения.

Комментарий: Данная задача иллюстрирует процесс рассеяния электронов на фононах. Она показывает, что при электрон-фононном взаимодействии фонон — это частица, которая может сильно изменить квазиимпульс электрона (фермиевский и дебаевский квазиимпульсы одного порядка), но почти не изменяет энергию (дебаевская энергия много меньше кой).

дновалентном металле с простой кубической решёткой поверхность Ферми представляет обой сферу радиусом $k_F=(3\pi^2)^{1/3}/a\approx 3.09/a$, где a - параметр решётки.

Максимальный импульс фонона в дебаевской модели $\hbar k_D$.

Согласно модели Дебая $\frac{4}{3}\pi(k_D)^3=\frac{(2\pi)^3}{a^3}$ (полное число мод колебаний одной поляризации для простой решётки равно числу атомов), откуда $k_D=6^{1/3}\pi^{2/3}/a\approx 3.90/a$. Дебаевский импульс оказывается несколько больше фермиевского.

При рассеянии электрона на фононе исходное и конечное состояния электрона должны быть на поверхности Ферми. По закону сохранения квазиимпульса, разница между этими положениями должна быть равна импульсу фонона (с точностью до вектора обратной решётки помноженного на постоянную Планка, но минимальный вектор обратной решётки на простой кубической решётке $G=\frac{2\pi}{a}>2k_F$).

Соответственно, максимальный угол отклонения $\Delta\phi$ можно определить пользуясь известным геометрическим свойством опирающегося на диаметр внутреннего угла (см. рисунок 11) (либо по теореме косинусов)

$$\sin\frac{\Delta\phi}{2}=\frac{\omega_D/s}{2\hbar k_F}=\frac{\sqrt[3]{6\pi^2}}{2\sqrt[3]{3\pi^2}}=\frac{1}{2^{2/3}}$$

$$\Delta\phi\approx 78^0$$

Задача Т.5.1 (на семинар)

На какой максимальный угол может отклониться электрон при поглощении фотона в одновалентном металле с простой кубической решёткой, хорошо описываемом моделью Дебая и моделью свободных электронов.

<u>*Комментарий:*</u> задача-антипод предыдущей задачи.

Фотон, в отличие от фонона, может иметь сравнимую с электроном энергию (электронвольты), но его волновой вектор много меньше фермиевского (так как в видимом и УФ диапазонах длина волны фотона много больше атомного масштаба), поэтому он практически не меняет квазиимпульс электрона.

Внутри одной зоны процесс излучения или поглощения фотона вообще невозможен, так как противоречит закону сохранения импульса и энергии. Испускание фотона большой энергии дополнительно запрещено принципом Паули — все глубокие состояния уже заняты. Испускание и поглощение фотона маленькой энергии вблизи поверхности Ферми также невозможно: изменение энергии электрона $\delta E_e\approx V_F\hbar\delta k$, а требуемый по сохранению квазиимпульса фотон будет иметь энергию $E_{ph}=c\hbar\delta k\gg\delta E_e$.

Межзонный переход (т.н. вертикальный переход) возможен. При этом квазиимпульс

...ки не изменится, однако направление распространения (направление групповой ...и) может измениться сильно в зависимости от вида ветви спектра, на которую ...ошёл переход.

...адача 3.74 (на семинар) (!в ответах опечатка в численных параметрах и оценка выходит из низкотемпературного приближения для фононной теплоёмкости!)

В тонких проволочках длины свободного пробега лимитируются диаметром проволочки, поэтому совпадают у электронов и фононов. Оценить, при какой температуре сравняются электронная и решёточная теплопроводности.

Комментарий: это задача-побратим задач 3.44 и 3.87 (из недели 3) для теплоёмкости.

Сразу заметим, что хотя проволочки и тонкие, задача является трёхмерной, так как существенно для рассеяния движение в перпендикулярном направлении.

Для электронного вклада в теплопроводность $\kappa=\frac{1}{3}v_F C^{(V)}\Lambda=\frac{\pi^2}{3}\frac{n_e\Lambda}{p_F}k_B^2 T$ (было на лекции), где Λ ограничивающий размер (диаметр проволочки).

Можно получить тот же результат, пользуясь законом Видемана-Франца (применимому для рассеяния на границах) $\frac{\kappa}{\sigma T}=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2$, а проводимость $\sigma=\frac{n_e e^2\tau}{m}=\frac{n_e e^2\Lambda}{\hbar k_F}$.

Таким образом, электронная теплопроводность проволочки $\kappa_{el}=\frac{\pi^2}{3}\frac{k_B^2 n_e\Lambda}{\hbar k_F}T$.

Для фононов априори не ясно в какой области температур мы окажемся в ответе: будет ли применим закон Дебая, высокотемпературный предел или получится промежуточный случай.

Используем формулу газового приближения: $\kappa_{ph}=\frac{1}{3}C s\Lambda$

Для низкотемпературного дебаевского предела $C=\frac{12\pi^4}{5}n_{ячеек}k_B\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3$. Для одновалентного металла с примитивной ячейкой, содержащей единственный атом, концентрации электронов проводимости, атомов и ячеек равны

Приравниваем две теплопроводности:

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{k_B^2 T n_e\Lambda}{\hbar k_F}=\frac{12\pi^4}{5}n_{ячеек}k_B\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3\times\frac{s\Lambda}{3}$$

Сокращаем, что сокращается:

$$T^2=\frac{5k_B\Theta^3}{12\pi^2 m v_F s}\approx(70\text{K})^2$$

Численный ответ получен для параметров меди $s=3.7\cdot10^5\, см/сек$, скорость Ферми

... $10^8 см/сек$ температура Дебая $\Theta=347К$ (*Внимание:* в задачнике в ответах на два ...а ошибочно указана фермиевская скорость).

...*мание:* Полученная температура всего в несколько раз меньше дебаевской, поэтому ...одель T^3 уже неприменима. При $T/\Theta=1/5$ вычисленное по низкотемпературной зависимости значение теплоёмкости составляет уже около 60% от максимального значения. Точное решение задачи (с учётом точной дебаевской функции для теплоёмкости) является громоздким. Для оценки сравним результат с высокотемпературным пределом, когда фононная теплоёмкость $C=n_{at}3k_B$:

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{k_B^2 T n_e \Lambda}{\hbar k_F}=n_{at}3k_B\times s\Lambda/3$$

$$T=\frac{3mv_F s}{\pi^2 k_B}\approx 120К$$

Полученный ответ опять оказывается вне пределов используемого приближения (теперь температура слишком низка для высокотемпературного предела). Отсюда следует, что, не решая задачу точно, мы можем лишь получить оценку $T\simeq 100К$.

Задача 2.65 (на дом)

Измерения коэффициента теплопроводности κ образца фторида лития показали, что при температурах ниже 7 К величина κ/T^3 не зависит от температуры, а зависит только от толщины образца. Во сколько раз изменится величина κ/T^3 для пластинки толщиной $\delta=1\,мм$ при увеличении толщины в 4 раза?

Простая устная задача на закрепление темы кинетики фононов.

Для фононов можно использовать оценочную формулу для газовой кинетической теории $\kappa_{ph}=\frac{1}{3}Cs\Lambda$. При низких температурах $C\propto T^3$. Рассеяние фононов может происходить на других фононах, краях образца, дефектах. Время рассеяния на других фононах будет обратно пропорционально их концентрации (T^3). Следовательно, данный процесс будет вымерзать при понижении температуры, что и происходит ниже 7 К, согласно условию задачи. По-видимому также образцы содержат мало дефектов, раз теплопроводность зависит от толщины образца.

По аналогии с кнудсеновским течением газа длину свободного пробега Λ надо принять равной расстоянию между границами кристалла. Тогда увеличение толщины кристалла в 4 раза увеличит и Λ и κ тоже в 4 раза.

...дача 3.77 (на дом)(!избыточное условие, решение отличается ...ножителем!)

Эффективное сечение рассеяния электронов на фононах при высоких температурах $T>\Theta$ можно считать равным $\sigma=\pi\overline{\xi^2}$, где $\sqrt{\overline{\xi^2}}$ - амплитуда тепловых колебаний атомов. Оценить для одновалентного металла с $n=5\cdot10^{22}\,см^{-3}$ и постоянной решётки $a\sim3Å$ при комнатной температуре среднюю длину пробега электрона Λ, обусловленную электрон-фононным взаимодействием. Модуль Юнга $E=10^{12}\,дин/см^2$.

Комментарий: Условие несколько избыточно. Ответ определяется концентрацией рассеивающих центров (атомов), которая с точностью оценки задаётся межатомным расстоянием. Информация о концентрации электронов и одновалентности при этом не используется. Задача очень важная, так как даёт возможность относительно просто получить температурную зависимость сопротивления металлов $\rho\propto T$.

При $T>\Theta$ можно для каждого атома применить теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы, считая, что каждый атом находится в изотропном гармоническом потенциале, описываемом «жёсткостью» k:

$$\frac{3}{2}k_B T=k\frac{\overline{\xi^2}}{2}=k\frac{\overline{x^2+y^2+z^2}}{2}$$

Коэффициент упругости «отдельной пружинки» k можно оценить, зная модуль Юнга. Действительно, если мы растягиваем весь кристалл с относительным удлинением ϵ, то мы просто растягиваем $n_{at}=a^{-3}$ «пружинок» в единице объёма на величину $a\epsilon$. Приравняем две упругие энергии:

$$E\frac{\epsilon^2}{2}=k\,n_{at}\frac{(a\epsilon)^2}{2}$$

Отсюда $k=Ea$. Соответственно $\overline{\xi^2}=\frac{3k_BT}{Ea}$. Длина свободного пробега

$$\Lambda=\frac{1}{n_{at}\sigma}=\frac{1}{n_{at}\pi\overline{\xi^2}}=\frac{Ea^4}{3\pi k_B T}=2\cdot10^{-6}\,см$$

Из этого решения следует, что $\rho\equiv\frac{m}{ne^2\tau}=m\frac{v_F}{ne^2\Lambda}\propto T$, что наблюдается в большинстве металлов.

Ответ отличается от того, что в задачнике заменой n_e на n_{at} и цифрой 3 в знаменателе, возникающей из-за равнораспределения.

Комментарий (С.Гуденко): Можно решить задачу более строго, вычислив амплитуду колебаний интегрированием по всем фононным модам (лекция 2, в формулах постоянная Больцмана равна единице)

$$\langle A^2\rangle=3\frac{2\hbar}{\rho}\int_0^{\omega_D}\frac{1}{\omega}\frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}\frac{4\pi\omega^2d\omega}{(2\pi)^3s^3}=\frac{3}{\pi^2}\frac{\hbar}{\rho s^3}\int_0^{\omega_D}\frac{\omega\,d\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}=\frac{3}{\pi^2}\frac{T^2}{\hbar\rho s^3}\int_0^{\hbar\omega_D/T}\frac{x\,dx}{e^x-1}$$

...котемпературном пределе

$$\langle A^2\rangle=\frac{3}{\pi^2}\frac{T\omega_D}{\rho s^3}=\frac{3}{\pi^2}\frac{\hbar}{\rho s^2}T\sqrt[3]{6\pi^2 n_{яч}}$$

Из теории упругости $s^2=\frac{E}{\rho}$, считаем решётку простой кубической. Откуда

$\Lambda=\frac{1}{n_{ат}\pi\langle A^2\rangle}=\frac{\pi}{3}\frac{Ea^4}{\hbar T\sqrt[3]{6\pi^2}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}\frac{Ea^4}{\hbar k_B T}$, в последнем равенстве вернули постоянную Больцмана. Ответ отличается множителем порядка 1 от оценки по теореме о равнораспределении.

Задача 3.79 (на дом)(разобрана в задачнике)

На поверхности пластины одновалентного металла с $a=3\,\mathring{A}$ толщиной 1 мм выделяется тепловая мощность. Полагая, что длина пробега электрона 10^{-6} см оценить, за какое время противоположная сторона пластины почувствует изменение температуры.

Задача напоминает, что на микроуровне движение электрона представляет собой диффузию.

Задача 3.80 (на дом)

Оценить эффективное время выравнивания температуры в медном стержне длиной $L=10\,см$ в вакууме. Температура много больше дебаевской, плотность меди $\rho=8.96\,г/см^3$. Коэффициент теплопроводности $\kappa=3.8\,Вт/(см\cdot К)$.

Задача иллюстрирует противоположный 3.79 случай. Она должна напомнить студенту, как используется подсчитанное из микроскопических соображений значение теплопроводности, а также для представления о масштабах времён.

В стержне можно считать что тепловое равновесие поперёк устанавливается мгновенно по сравнению с тепловым равновесием вдоль и перенос тепла подчиняется одномерному уравнению теплопроводности: $c\frac{\partial T}{\partial t}=-\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Отсюда из размерности сразу понятно, какое будет время установления: $\tau\sim\frac{cL^2}{\kappa}$

Поскольку температура много больше дебаевской, применима классическая теория теплоёмкости: $c=3R\frac{\rho}{\mu}$ (здесь речь идёт о теплоёмкости на единицу объёма, R - газовая постоянная, $\mu=64\,г/моль$ - молярная масса меди.)

Имеем ответ:

$$\tau=3R\frac{\rho L^2}{\kappa\mu}=92\,сек$$

ача 3.70 (на дом)(!численный ответ отличается от задачника!)

пределить толщину скин-слоя в меди при ($\sigma=0.6\cdot10^{6}\,Ом^{-1}\cdot см^{-1}$) на частоте 10 ГГц. Считать электрическое поле параллельным поверхности и $\omega\tau\ll1$.

Для электромагнитного поля в веществе справедливы уравнения Максвелла и материальные уравнения. Поскольку толщина скин-слоя много меньше длины волны[5], пренебрегаем током смещения:

$$rot(\vec{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$rot(\vec{H})=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

Ищем периодическое во времени решение для поля внутри металла $\vec{E}=\vec{E}(z)e^{-i\omega t}$, $\vec{H}=\vec{H}(z)e^{-i\omega t}$, тогда

$$rot(\vec{H})=\frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

$$rot(\vec{E})=i\frac{\omega H}{c}$$

Считаем, что $\vec{E}$ лежит всё время в плоскости, перпендикулярной z . Беря ротор от второго уравнения и подставляя туда $rot(\vec{H})$ из второго, пользуясь формулой $rot(rot(\vec{E}))=grad(\mathrm{div}(\vec{E}))-\Delta\vec{E}$, а также тем, что для такой геометрии поля $\mathrm{div}(\vec{E})=0$, имеем:

$$-\Delta\vec{E}=i\frac{4\pi}{c^{2}}\omega\sigma\vec{E}$$

Окончательно получаем, что решением является:

$$E=E_{0}e^{-i\omega t}e^{(i-1)z/\delta}$$

где $\delta=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}=\frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma\nu}}$ и есть искомая глубина скин-слоя (формула совпадает с ответом).

Формула записана в СГС, необходимо пересчитать проводимость $1\,Ом^{-1}см^{-1}=100\,Ом^{-1}м^{-1}=100\times9\cdot10^{9}\,сек$.

Подставляя числа, имеем $\delta=6\cdot10^{-5}\,см=0.6\,мкм$ (численный ответ различается с задачником).

В этой задаче важна функциональная зависимость глубины скин-слоя от частоты ($\delta\propto\frac{1}{\sqrt{\omega}}$). В достаточно чистом металле с повышением частоты рано или поздно глубина

5 Длина волны на этой частоте 3 см. В то же время, из опыта каждый знает про микроволновку, работающую на частоте 2.4ГГц и успешно экранирующуюся тонкой фольгой на дверце, на втором курсе есть лабораторная работа, в которой определяется глубина скин-слоя в меди на частоте 30кГц и она оказывается порядка сантиметра.

...проникновения должна стать меньше длины свободного пробега, а это значит, что материальное уравнение $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ будет неприменимо (аномальный скин эффект).

Малое время свободного пробега позволяет в этой задаче пренебречь зависимостью проводимости от частоты. Малое изменение электрического поля на длине пробега позволяет применять закон Ома в его локальной формулировке (а не суммировать вклады по всей длине пробега электрона).

Задача 3.88 (на дом)

Оценить максимальное металлическое сопротивление разупорядоченного металла с концентрацией электронов проводимости $n=10^{22}\,см^{-3}$ *(Предел Иоффе-Регеля).*

Идея простая: квазиклассическое описание (импульс как квантовое число) и понятие длины свободного пробега применимы только когда на длине свободного пробега укладывается несколько длин волн де-Бройля. Минимальная металлическая проводимость реализуется, когда длина свободного пробега равна $2\pi/k_F$.

Подставляем в формулу Друде:

$$\sigma_{min}=\frac{ne^2\tau}{m}=\frac{ne^2 2\pi\hbar}{p_F v_F m}=\frac{ne^2 2\pi}{\hbar k_F^2}=\frac{2\pi ne^2}{\hbar(3\pi^2 n)^{2/3}}=2n^{1/3}(9\pi)^{-1/3}\frac{e^2}{\hbar}$$

С точностью до численного множителя порядка 1 это совпадает с ответом задачника и даёт $2.8\cdot10^{-4}\,Ом\cdot см$. Это на 10 порядков меньше проводимости хорошего металла (например медь в предыдущей задаче)