

$$4.1 \quad \frac{1}{r_3^2} = \frac{4\pi n_e e^2}{\epsilon k_B T} \quad n_e = 10^{19} \text{ cm}^{-3}, \epsilon = 15, T = 350^\circ \text{K}$$

$$r_3 = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{4\pi n_e}} = \frac{1}{4.8 \cdot 10^{10}} \sqrt{\frac{15 \cdot 1.4 \cdot 350 \cdot 10^{-16}}{12.6 \cdot 10^{19}}} = \frac{10^{-15}}{4.8 \cdot 10^{10}} \sqrt{\frac{15 \cdot 500}{12.6}} = \frac{10^{-15}}{5} \cdot 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ cm} =$$

v. 30.10.2016 = 5000 \AA

Только для преподавателей. Бесконтрольно не распространять.

$$4.3 \quad \epsilon = 16, m_e^* = 0.013 m_e, m_l^* = 0.4 m_e \quad r = \frac{0.013 \cdot 0.4}{0.413} \approx 0.0125 \text{ m}_e \quad \frac{m_e^*}{2\epsilon k^2} = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{16} \cdot 13.6 \text{ eV} =$$

Неделя 6. Объёмные полупроводники.

$$\epsilon = 12, m_e^* = 0.07 m_e, m_l^* = 0.6 m_e$$

$$\text{Задача 4.2 (на семинар)} \quad r = \frac{0.07 \cdot 0.6}{0.67} = 0.06 \text{ m}_e \quad \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} \cdot 13.6 \text{ eV} \approx \frac{13}{16} = 1/13 \cdot 0.07 = 0.083 \text{ eV} = 1000^\circ \text{K}$$

Получить величину эффективной постоянной Ридберга и боровский радиус для электронов в InSb с $\epsilon = 16$ и $m_e^* = 0.013 m_e$.

$$E_0 = \frac{E}{\epsilon} \quad 4.4 \quad \text{Толст. пл. ин в вак. } T = 300^\circ \text{K. Вн. нап. } E = 10^5 \text{ В/м, } \epsilon = 10 \quad n = ? \quad (вн. нап.)$$

$$j = 2E_0 + eD \frac{dn}{dx} = 0, \quad \rho = ne^2, \quad r = \frac{eD}{k_B T}, \quad -neE_0 = K_B T \frac{dn}{dx} \quad \text{Пуасс. div} \vec{E}_0 = -\frac{q}{\epsilon} ne$$

$-ne = \frac{\epsilon dE}{4\pi dx}$ Данная задача важна для знакомства с полупроводниками, так как показывает, что в полупроводнике эффективные энергии связи уменьшаются, а размеры связанных состояний увеличиваются.

$$E_0 dE_0 = \frac{4\pi k_B T}{\epsilon} dn \quad n_{\text{ноб}} = \frac{\epsilon E_0}{8\pi k_B T m_e^4} = \frac{E^2}{\epsilon \cdot 8\pi k_B T} = \frac{(10^5/300)^2}{10 \cdot 25 \cdot 1.4 \cdot 300 \cdot 10^{-16}} = \frac{25 \cdot 10^8 \cdot 10^{-16}}{9 \cdot 2.8 \cdot 1.4 \cdot 10^{-16}} \approx 1.1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Из курса атомной физики $Ry = \frac{\hbar^2}{2m_e^2}$ и $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$.

Строгое решение требует поиска состояний электрона с учётом его взаимодействия с «родительским» атомом и со всеми окружающими атомами. Мы пользуемся известным из опыта фактом, что существуют примеси с «мелкими» уровнями, электроны с которыми связаны слабо. В таком случае ожидается, что дебройлевская длина волны такого электрона будет большой по сравнению с межатомным расстоянием, а «траектория» электрона будет проходить в матрице полупроводника. Тогда можно пользоваться приближением непрерывной среды и учитывать наличие среды множителем диэлектрической проницаемости. В системе с отличной от единицы ϵ , все электростатические взаимодействия (которые пропорциональны e^2) будут в ϵ раз слабее, то есть надо все e^2 , входящие в ответ, заменить на $\frac{e^2}{\epsilon}$. Электрон, движущийся в матрице

полупроводника за счёт взаимодействия с матрицей приобретает эффективную массу. Дополнительно нужно отметить, что длина экранирования при малой концентрации примеси и понижении температуры может быть сколь угодно большой. Поэтому можно считать в области движения электрона потенциал кулоновским.

Для эффективной постоянной Ридберга имеем:

$$Ry^* = \frac{m^* e^4}{\epsilon^2 2\hbar^2} = Ry \times \frac{m^*}{m} \times \frac{1}{\epsilon^2} = 5.1 \cdot 10^{-5} Ry \approx 0.7 \text{ мэВ} = 7 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \theta = 84^\circ \text{K}$$

Для радиуса Бора имеем:

$$a_B^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = a_B \times \epsilon \times \frac{m}{m^*} = 1231 a_B \approx 65 \text{ нм} = 650 \text{ \AA}$$

что почти на 3 порядка больше постоянной решётки.

Полученные оценки соответствуют сделанным приближениям.

$$4.5 \quad n_e = ? \quad t \cdot \Omega_p = \Sigma_F \quad m_e^* = 0.015 m_e \quad \epsilon = 16$$

$$\Sigma_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{\epsilon m_e^*}; \quad \Sigma_F = \frac{t^2}{2m_e^*} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$$

$$t \cdot \sqrt{\frac{4\pi n_e}{\epsilon m_e^*}} = \frac{t^2}{2m_e^*} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$$

$$e^6 \cdot \left(\frac{4\pi n_e}{\epsilon m_e^*} \right)^3 = \frac{t^6}{(2m_e^*)^6} \cdot (3\pi^2 n_e)^6$$

$$\approx (36 \cdot 10^3)^3 \cdot \frac{1}{2500} \cdot \frac{1}{10} \approx \frac{36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 10^9}{2500 \cdot 100} =$$

$$= 0.6 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$$

(стр 68 из 150)

$$n_e = \left(\frac{e}{t} \right)^6 \left(\frac{4\pi}{2m_e^*} \right)^6 \cdot \left(\frac{4\pi}{\epsilon m_e^*} \right)^3 \cdot \frac{1}{(3\pi^2)^4} = \left(\frac{e}{t} \cdot 2\sqrt{m_e} \right)^6 \cdot \left(\frac{4\pi}{\epsilon \cdot 3\pi^2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3\pi^2} = \left(\frac{4.8 \cdot 10^{-16}}{10^{-22} \cdot 1.68} \cdot 10^{-12} \right)^6 \cdot \left(\frac{1}{0.91 \cdot 10^{-22}} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \right) \cdot \frac{1}{3\pi^2} \approx$$

$$7.6 \quad n(z) = \frac{1}{e^{\frac{z-\varepsilon}{T}}} \times e^{\frac{\varepsilon-\xi}{T}} \quad n_+ = 2 \frac{V_{\text{eff}}}{(2\pi)^3} \int_{\text{окр. } k} \text{нек. } k \cdot e^{-\frac{\xi}{T}} = \frac{8\pi e^{\frac{\xi}{T}} (2m_e^*)^{3/2}}{(2\pi k)^3} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{T}} d\xi = \\ = 2 \frac{(2\pi m_e^* T)^{3/2}}{(2\pi k)^3} \cdot e^{\frac{\xi}{T}} = Q_- e^{\frac{\xi}{T}}$$

олько для преподавателей. Бесконтрольно не распространять. v.30.10.2016

$$n_+ = Q_+ e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}}, Q_+ \Rightarrow Q_+ \rightarrow m_c^* \rightarrow m_b^* \quad n_- n_+ = Q_- Q_+ e^{-\frac{\xi}{T}} = n_0^2 \\ n_- = n_+ = n_0 \quad Q_+ e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}} = Q_- e^{\frac{\xi}{T}} = \frac{-(\xi+\Delta)}{T} + \ln \frac{Q_+}{Q_-} = \frac{\xi}{T}$$

Задача 4.40 (на семинар)

На рисунке (рис.85) в задачнике изображено, что при температуре $T=600\text{K}$ химпотенциал собственного полупроводника типа InSb находится в зоне проводимости 0.025эВ от дна зоны. Ширина запрещённой зоны 0.125эВ . Массы электронов и дырок равны $m_e=0.05m_0$, $m_h=0.4m_0$. Найти концентрации электронов и дырок.

$$4.8 \quad \text{Ge} \quad m_{+1}=0.04m_e, m_{+2}=0.34m_e \quad \alpha = \frac{n_{+1}}{n_{+1}+n_{+2}} = \frac{m_{+1}}{m_{+1}^3 + m_{+2}^3} \approx \frac{1}{1+(8.5)^3} \approx \frac{1}{25} = 0.04$$

$$4.9 \quad n_d = 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3} \gg n_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$$

$$n_d + n_+ = n_- \quad \text{при } n_0 \gg n_d \\ n_+ n_- = n_0^2 \quad n_- \approx n_0 + \frac{n_d}{2} \\ n_+ = \frac{n_0^2}{n_-}; \quad n_d + \frac{n_0^2}{n_-} = n_- \quad n_+ \approx n_0 - \frac{n_d}{2}$$

$$n_-^2 - n_d n_- - n_0^2 = 0$$

$$n_- = \frac{n_d}{2} + \sqrt{\frac{n_d^2}{4} + n_0^2} \approx n_d$$

$$n_+ \approx \frac{n_0^2}{n_d} = \frac{4 \cdot 10^{22}}{6 \cdot 10^{17}} = 0.67 \cdot 10^{5} \text{ см}^{-3}$$

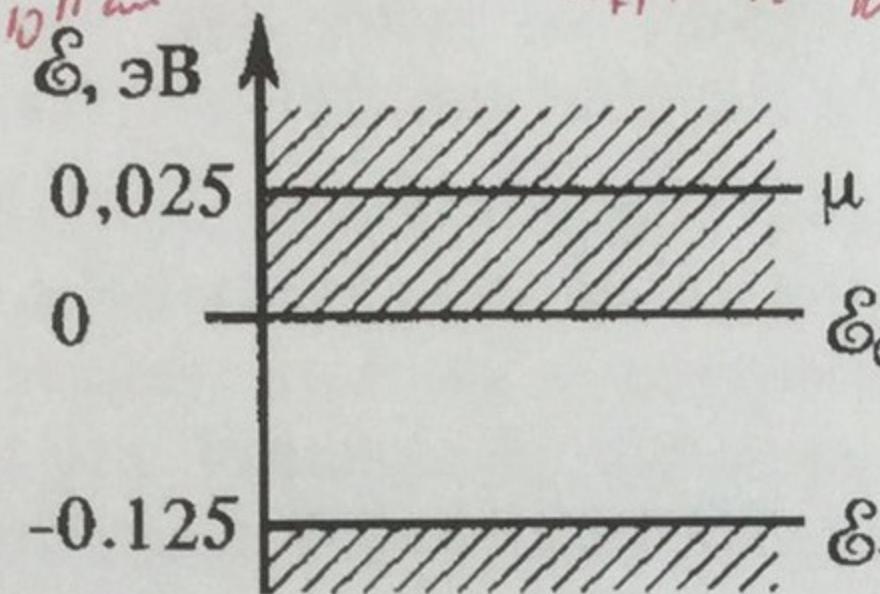


Рис. 85

$$4.10 \quad \varepsilon_d \ll \Delta \quad n_-(T) = n_+(T) + n_{d+} \\ n_d^+ = n_d(1-n) = \frac{n_d}{1 + \exp(\frac{\varepsilon_d + \xi}{T})}$$

$$Q_- e^{\frac{\xi}{T}} = Q_+ e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}} + \frac{n_d}{1 + e^{\frac{\varepsilon_d + \xi}{T}}}, e^{\frac{\xi}{T}} = x$$

$$x^2 + x e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}} - \left(\frac{n_d}{Q_-} e^{-\varepsilon_d/T} + \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\Delta/T} \right) x - \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}} = 0$$

$$x^2 + x e^{-\frac{\xi-\Delta}{T}} - \frac{n_d}{Q_-} e^{-\varepsilon_d/T} = 0$$

Рисунок 12: К задаче 4.40

Эта задача интересна прежде всего тем, что в узкозонном собственном полупроводнике уровень Ферми может лежать в зоне проводимости, когда температура сопоставима с шириной запрещённой зоны. При этом, естественно, число электронов будет равно числу дырок. Данный факт контрастирует с кремнием (широкозонным полупроводником).

Причина этого в том, что сильно различны массы электронов и дырок в InSb (в 8 раз), поэтому статфакторы зон тоже существенно разные, плотность состояний в зоне проводимости низкая и единственный способ уравнять число электронов и дырок при высоких температурах - сдвинуть химпотенциал в зону проводимости.

Когда уровень Ферми лежит в зоне проводимости, уже нельзя применять правило рычага, основным условием при выводе которого являлось $\Delta \gg T$. Точное вычисление фермиевского интеграла для концентрации электронов как минимум технически сложно. Поэтому удобно вычислить концентрацию дырок.

При вычислении концентрации дырок пользуемся тем, что числа заполнений малы (поскольку $\Delta + \mu = 0.15\text{эВ} > T \approx 0.05\text{эВ}$). Тогда можно сразу воспользоваться готовым ответом, полученным на лекциях или в учебнике, с поправкой что из-за переноса начала отсчёта энергии в экспоненте должно стоять расстояние от потолка валентной зоны до химпотенциала $(\mu + \Delta)$: $n_-(T) = n_d^2 \gg n_d$ $x = \sqrt{\frac{Q_+}{Q_-}} e^{-\Delta/T}$, $\xi = -\frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4}T \ln \frac{Q_+}{Q_-}$, $n_-(T) = Q_- x = n_0(T)$

$$n_d = 2 \left(\frac{m_h k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-(\mu+\Delta)/(k_B T)} \approx (1.8 \cdot 10^{19}) \times e^{-3} \text{ см}^{-3} \approx 1.0 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

$$1) T \rightarrow 0 \quad n_-(T) = \sqrt{n_d Q_-} e^{-\Delta/T} \quad 2) T \gtrsim \varepsilon_d \quad n_-(T) = n_d = \text{const} \quad 3) \Delta \gg T \gg \varepsilon_d \quad n_- = n_0$$

При прямом вычислении концентрации дырок из-за отличного (по сравнению с выбором нуля отсчёта энергии на лекции) выбора ноля отсчёта энергии надо быть аккуратным, во избежание путаницы лучше просто прямо вычислить концентрацию вакансий в валентной зоне.

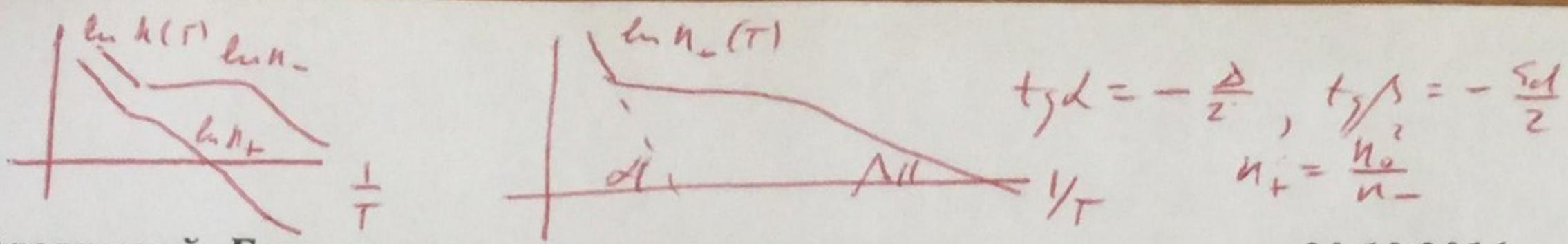
$$x = -\frac{1}{2} e^{-\varepsilon_d/T} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{-2\varepsilon_d/T} + \frac{n_d}{Q_-} e^{-\varepsilon_d/T}} \quad \frac{n_d}{Q_-} \gg \frac{1}{4} e^{-\varepsilon_d/T}, x \approx \sqrt{\frac{n_d}{Q_-}} e^{-\frac{\varepsilon_d}{T}}, \xi = -\frac{\varepsilon_d}{2} + \frac{T}{2} \ln \frac{n_d}{Q_-}$$

$$\text{при } \frac{n_d}{Q_-} \ll \frac{1}{4} e^{-\varepsilon_d/T}, n_d \gg Q_+ e^{-\frac{\Delta-\varepsilon_d}{T}}, x \approx \frac{n_d}{Q_-}, \xi \approx T \ln \frac{n_d}{Q_-} < 0, \ln \frac{n_d}{Q_-} < \frac{\varepsilon_d}{T} - 2\varepsilon_d$$

$$n_- = Q_- x = n_d$$

$$n_+ = \frac{n_0^2}{n_d} \quad n_d \gg Q_+ e^{-\frac{\Delta-\varepsilon_d}{T}}$$

$$x = e^{\xi/T} \rightarrow 0 \quad (\xi < 0), e^{-\xi/T} \ll 1 \quad \text{стр 69 из 150} \quad x \ll x^2 e^{-\xi/T} \quad \text{7.11. } \Delta \gg \varepsilon_d \\ x^2 - \frac{n_d}{Q_-} x - \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\frac{\Delta}{T}} = 0; x = \frac{n_d}{2Q_-} + \sqrt{\frac{n_d^2}{4Q_-^2} + \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\Delta/T}} \quad \text{если } \frac{n_d^2}{4Q_-^2} \gg \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\Delta/T}, \xi = \frac{n_d}{Q_-}$$



лько для преподавателей. Бесконтрольно не распространять.

$$n_h = n_{vac} = 2 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{(-\Delta - \hbar^2 q^2/(2m) - \mu)/T} + 1} \right) \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi)^3} = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{(\Delta + \hbar^2 q^2/(2m) + \mu)/T} + 1} \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \approx \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-(\Delta + \hbar^2 q^2/(2m) + \mu)/T} q^2 dq = \frac{1}{\pi^2} e^{-(\Delta + \mu)/T} \left(\frac{2mT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx$$

$$t \beta d = -\frac{\Delta}{2}, \quad t \beta / k_B = -\frac{\epsilon_{el}}{2}$$

$$\begin{aligned} v.30.10.2016 \\ 1) n_+(\tau) &= Q_+ \sqrt{\frac{Q_-}{n_h}} e^{-\frac{\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}} \\ 2) n_+(\tau) &= \frac{Q_+ Q_-}{n_h} e^{-\Delta/k_B T} \\ 3) n_+^{(\Gamma)} &= n_0(\tau) \end{aligned}$$

Комментарий: Задача переопределена. Поскольку мы знаем химпотенциал и знаем что полупроводник собственный, то мы уже решили задачу из информации о дырках - никакой дополнительной информации про электроны не требуется. Информация про свойства электронов в этой системе нужна не для решения задачи, а для иллюстрации.

Комментарий 2: Переопределённость задачи возникла исторически (А.О.Раевский). Закон дисперсии электронов в InSb не совсем квадратичный и не может быть описан одной массой. При составлении задачи масса электронов была «подкручена» таким образом, чтобы число электронов совпало с числом дырок. Указание на эффективную массу дано для того, чтобы можно было бы по таблицам интегралов Ферми проверить, что действительно концентрации электронов и дырок равны.

Задача 4.25 (на семинар)(решена в задачнике)

В германий (ширина запрещённой зоны 0.7 эВ) введены примеси золота (в малом количестве $n_{Au} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$), которые могут захватить один (Au^- , энергия 0.15 эВ от потолка валентной зоны) или два электрона (Au^{2-} , энергия 0.5 эВ от потолка валентной зоны) и сурьмы ($n_{Sb} = 1.5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$) (энергия 0.01 эВ от дна зоны проводимости). Статистические факторы зоны проводимости и валентной зоны равны между собой и равны 10^{18} см^{-3} . Найти концентрацию носителей и тип проводимости при $T = 77 \text{ K}$.

$$n_- + n_{Au}^{1-} + 2n_{Au}^{2-} = n_{Sb} \quad n_{Au}^{1-} + n_{Au}^{2-} = n_{Au} \quad n_- + n_{Au}^{2-} = n_{Sb} - n_{Au}$$

Задача должна дать комплексное представление о примесных уровнях. Если разобрать такую задачу на семинаре, то все остальные будут лишь частным случаем.

В решении ноль отсчёта энергии помещён на дно зоны проводимости.

Интересной особенностью ответа для химпенсиала является совпадение химпенсиала с уровнем энергии двухвалентного золота при $T = 0$. Ответ имеет простой наглядный смысл: так как на этом уровне есть вакансии при $T = 0$ химпенсиал обязан с ним совпадать. Похожая картина будет встречаться при решении задачи о заполнении уровней Ландау позднее.

$$\begin{aligned} \text{если } n_{Sb} < n_{Au} \text{ то } y_p. Au^{2-} \text{ с } \overset{n_{Sb} > n_{Au}}{-\Delta + \epsilon_{el} \text{ начем}} \text{ ж. а. } T.k. n_- = Q_- e^{-\epsilon/k_B T}, \text{ то } x = e^{-\epsilon/k_B T}: \\ Q_- x + n_{Au} \frac{x}{x + \exp(-\frac{\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T})} = n_{Sb} - n_{Au}, \quad x^2 + x \left[e^{\frac{\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}} - \frac{n_{Sb} - 2n_{Au}}{Q_-} \right] - \frac{n_{Sb} - n_{Au}}{Q_-} e^{\frac{-\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}} = 0 \\ e^{\frac{-\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}} \approx e^{-30} \approx 10^{-13} \ll \frac{n_{Sb} - 2n_{Au}}{Q_-} \sim 10^{-4} \text{ то } x = \frac{2n_{Au} - n_{Sb}}{2Q_-} + \sqrt{\left(\frac{2n_{Au} - n_{Sb}}{2Q_-} \right)^2 + \frac{n_{Sb} - n_{Au}}{Q_-} e^{\frac{-\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}}} \approx \\ \approx \frac{n_{Sb} - n_{Au}}{2n_{Au} - n_{Sb}} e^{-\frac{\Delta + \epsilon_{el}}{k_B T}}, \quad \int = -\Delta + \epsilon_{el} + T \ln \frac{n_{Sb} - n_{Au}}{2n_{Au} - n_{Sb}} \end{aligned}$$

$$9.26) n_e = \frac{N}{2\pi k^2} \left(\frac{m_e T}{2\pi k^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta}{2T}}, E = \frac{3}{2} n_e T, C_e = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2} n_e + \frac{1}{2} (\Delta + ST) \frac{\partial n_e}{\partial T} =$$

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e T}{2\pi k^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\Delta}{2T}}, E = \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{3}{2} T \right) n_e, = \frac{3}{2} n_e + \frac{1}{2} (\Delta + ST) \cdot \left(\frac{\Delta}{2T^2} + \frac{3}{2T} \right) n_e =$$

лько для преподавателей. Бесконтрольно не распространять. v.30.10.2016 S.

$$\frac{C_e}{C_{ph}} = \frac{n_e}{N} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 + \frac{\Delta}{2T} + 1 \right), T = 10^3 K, n_e = 1.5 \cdot 10^{18} cm^{-3}, \Delta = 0.75 eV, \Theta_D = 540 K,$$

Задача 4.21 (на семинаре)

При освещении электронного полупроводника вблизи его поверхности образуются дырки, которые диффундируют в объем и рекомбинируют с электронами. Температура 300 K. Подвижность дырок $\mu = 2000 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{сек})$. Время жизни дырок $\tau = 10^{-3}$ сек. Оценить глубину проникновения дырок.

$$n_+ = n_+ = Q_+ \exp\left(-\frac{E - \varepsilon_v}{T}\right) = 0.9 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}, Q_+ = 2.5 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_e}{m_e}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{300}\right), \frac{E - \varepsilon_v}{T} \approx 3$$

Эта задача должна дать представление о кинетике носителей заряда в полупроводнике.

При рекомбинации дырок происходит люминесценция — процесс обратный рождению электрон-дырочных пар на поверхности. Времена свободного пробега носителей в полупроводнике порядка пикосекунд. Поэтому время жизни дырок до рекомбинации очень большое и движение дырок представляет собой диффузию (происходит много актов рассеяния до рекомбинации). Поскольку полупроводник электронный, число дырок очень мало, а значит их статистика заведомо Больцмановская.

Глубину проникновения дырок можно посчитать как $\sqrt{D\tau}$, где D — коэффициент диффузии.

Коэффициент диффузии D может быть найден из соотношения Эйнштейна (вспоминаем 2-ой семестр): $D = k_B T \mu / e$.

Внимание: в отличие от формулы второго семестра в знаменателе возник заряд электрона, так как в этом разделе физики подвижностью называется не отношение дрейфовой скорости к силе, а отношение дрейфовой скорости к полю.

Итого получаем ответ: $l \approx \sqrt{k_B T \mu \tau / e} \approx 0.2 \text{ см}$

Iu 58 $\Sigma = 17, m_e^* = 0.015 m_e$,

Задача 4.7 (на дом)

Найти зависимость химпотенциала μ от температуры T в невырожденном собственном полупроводнике с шириной запрещенной зоны Δ . Параметры носителей m_e, n_e, m_h, n_h .

Комментарий: Условие не полно: в задаче неявно подразумевается, что $\Delta \gg T$ — в противном случае задачу не решить, как ясно из 4.40: в общем случае интеграл Ферми не берется.

Задача закрепляет тему собственные полупроводники. Вывод есть в лекционных материалах.

Договоримся отсчитывать хим势ential от дна зоны проводимости. Раз полупроводник собственный — будет электронейтральность и число электронов будет равно числу дырок:

$$n_e = n_h.$$

Когда $\Delta \gg T$, уровень химпотенциала лежит внутри щели и числа заполнения для электронов и дырок $\langle n \rangle \ll 1$, так что можно пренебречь 1 в знаменателе распределения Ферми. Это даёт:

$$n_h = 2 \left(\frac{m_h T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{(\mu + \Delta)/T}$$

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\mu/T}$$

Приравнивая две концентрации и сокращая, получаем:

$$\left(\frac{m_e}{m_h} \right)^{3/2} = e^{(2\mu + \Delta)/T}.$$

Это даёт ответ:

$$\mu = -\Delta/2 + 0.75 T \ln \frac{m_h}{m_e}$$

Обсудим этот ответ. При низких температурах химпотенциал находится посередине щели. Это объясняется тем, что электронные и дырочные возбуждения могут родиться только парами и являются равноневыгодными. При повышении температуры, если масса дырок больше, то химпотенциал едет в электронную сторону, если больше масса электронов - наоборот. Это связано с тем, что чем больше масса, тем большее плотность состояний, и чтобы удовлетворить равенству концентраций, необходимо, при прочих равных условиях, сдвинуть химпотенциал дальше от носителей с большой массой.

Надо заметить, что, при наличии сколь угодно малого количества легирующей примеси одного типа, ситуация при низких температурах изменится: химпотенциал при $T=0$ окажется посередине между примесным уровнем и соответствующей зоной (зоной проводимости для донорной примеси и валентной зоной для акцепторной).

Задача Т.6.1 (на дом)

В непрямозонном полупроводнике с малым смещением дна зоны проводимости относительно потолка валентной зоны эффективные массы электронов и дырок одинаковы $m_e = m_h = m^*$, а определённая из измерения температурной зависимости сопротивления ширина запрещённой зоны равна Δ . При изучении внутреннего фотoeffекта при низких температурах в видимой части спектра в образце этого полупроводника обнаружен резкий рост проводимости при энергии кванта света $E > \Delta$. Считая, что форму дна зоны проводимости и потолка валентной зоны можно описывать квадратичной параболой, оценить по этим данным расстояние в k -пространстве между минимумом энергии в зоне проводимости и максимумом энергии в валентной зоне.

Комментарий: задача на понимание энергетического спектра полупроводника и сравнение импульса фотона видимого света с бриллюэновским волновым вектором.

Так как длина волны видимого света много больше межатомного расстояния, то импульс такого фотона много меньше бриллюэновского. Это означает, что при поглощении фотона видимого света электрон в кристалле переходит между разрешёнными состояниями

вертикально» - практически без изменения своего квазимпульса.

Соответственно, в непрямозонном полупроводнике при поглощении фотона переход электрона с потолка валентной зоны на дно зоны проводимости возможен только с поглощением или излучением дополнительного фона, такие процессы менее вероятны, чем прямые переходы из неэкстремального положения в валентной зоне в неэкстремальное положение в зоне проводимости. Процесс с поглощением фона дополнительно запрещён низкими температурами (фононов мало).

Для поиска минимальной энергии фотона, с которой такие вертикальные переходы становятся разрешенными, рассмотрим разность энергий электрона в валентной зоне и зоне проводимости вдоль прямой, соединяющей экстремумы в k -пространстве. Ноль отсчёта импульса поместим на потолок валентной зоны, если δ — расстояние в k -пространстве между экстремумами и ξ — координата точки, то

$$E(\xi) = \frac{\hbar^2(\delta-\xi)^2}{2m} + \Delta + \frac{\hbar^2\xi^2}{2m}$$

Ищем минимум, он достигается при $\xi=\delta/2$ и равен $E_{min} = \Delta + \frac{\hbar^2\delta^2}{4m}$.

$$\text{Откуда } \delta^2 = \frac{4m}{\hbar^2}(E - \Delta)$$

Задача 4.50 (на дом)

У кристалла InSb статистическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon=17$, усреднённое значение эффективной массы электрона $m^*=0.015m_0$. Оценить при какой минимальной концентрации донорных атомов начнётся образование примесной зоны при $T=0$.

В предыдущих задачах мы исследовали собственные либо слаболегированные примесные полупроводники. Вопрос этой задачи можно переформулировать так: при каких концентрациях примеси легирование уже нельзя считать слабым? При повышении концентрации примеси электроны начинают чувствовать не только потенциал своего донора, но и соседних. Это становится существенным, когда характерное расстояние между примесями становится меньше удвоенного боровского радиуса. При этом мы будем молчаливо подразумевать, что длина экранирования будет большой по сравнению с межпримесным расстоянием, чтобы считать потенциал взаимодействия электрона и примеси кулоновским.

Поиску боровского радиуса в InSb была посвящена задача 4.2. Ответ там примерно 60 нм ($a_B^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = a_B \times \epsilon \times \frac{m}{m^*}$). Приравнивая $n_{donors} = (2a_B)^{-3}$ находим искомую концентрацию $n = 5.8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

По полупроводниковым меркам это очень маленькая концентрация: концентрация атомов в твёрдом теле $\sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$, то есть речь идёт об относительной концентрации примесей на уровне 10^{-8} ! В кремнии, например, из-за большей эффективной массы эта величина будет на 4 порядка больше. Данный ответ показывает на сколько сложно работать с узкозонными полупроводниками (в которых малая эффективная масса): даже маленькое количество примеси может привести к образованию примесной зоны.

Задача 4.12 (на дом) (!численный ответ отличается в 3 раза от задачника!)

Найти концентрацию электронов и дырок в полуметалле, их энергии Ферми если величина перекрытия зон $\Delta E = 0.04 \text{ эВ}$, эффективная масса электрона $m_e = 0.05 m_0$, дырки $m_h = 0.03 m_0$.

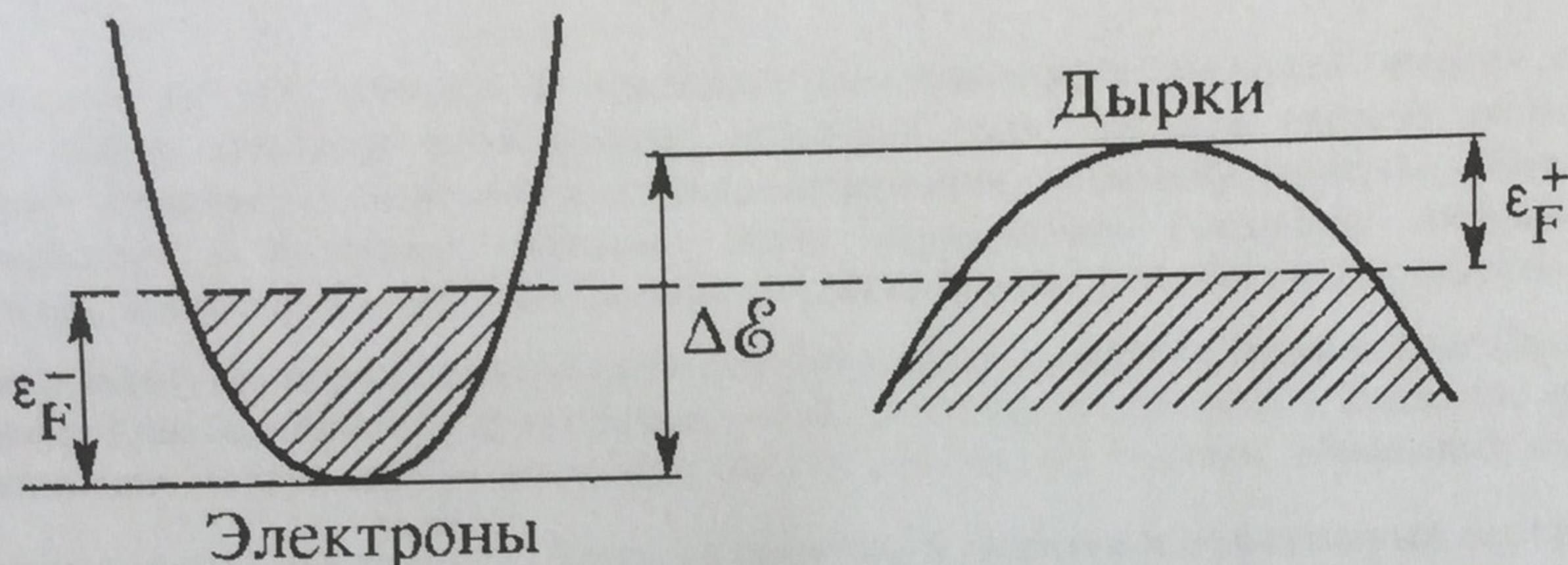


Рис. 78

Рисунок 13: К задаче 4.12

Задача знакомит студентов с полуметаллами.

Из-за электронейтральности концентрации (а значит и p_F) электронов (n_e) и дырок (n_h) равны между собой. Будем для простоты считать температуру нулевой. Тогда перекрытие зон равно сумме энергии Ферми электронов (отсчитанной от дна зоны проводимости) и дырок (отсчитанной от потолка валентной зоны).

Пользуясь тем, что $p_F = \frac{\hbar}{2} (3\pi^2 n)^{1/3}$, запишем:

$$\frac{1}{2} \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} \times \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} \right) = \Delta E$$

Отсюда напрямую получаем:

$$n = \left(2 \Delta E \frac{m_e m_h}{m_e + m_h} \right)^{3/2} \times \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} = 9.3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$$

Энергии Ферми делят перекрытие зон обратно пропорционально массам, соответственно $E_{F,e} = 0.015 \text{ эВ}$, $E_{F,h} = 0.025 \text{ эВ}$.

Примерами полуметаллов являются графит, висмут, высокотемпературные сверхпроводники в нормальном состоянии.

Задача 4.3 (на дом)

Найти энергию связи, радиус и эффективную массу экситона, если даны массы электрона

и дырки m_h , а также диэлектрическая проницаемость ϵ .

Задача знакомит студентов с экситоном и закрепляет задачу 4.2.

Экситон — это связанное состояние электрона и дырки. Образование экситона является важным свойством полупроводников, определяющим оптические характеристики (поглощение, люминисценцию), поскольку образование экситона требует энергии фотона не Δ , а $\Delta - E_{ex}$.

В узкозонных полупроводниках и некоторых низкоразмерных системах энергия связи экситона может оказаться ниже потолка валентной зоны, тогда в системе возможно спонтанное образование экситонов и их бозе-конденсация (поскольку экситоны — бозоны). Взаимодействуя с фотонами, экситоны могут образовывать связанные состояния — поляритоны, что может сделать закон дисперсии света в полупроводнике очень сложным.

Вспомним задачу движения в центральном поле (например, движении Земли вокруг Солнца). По теореме Кёнига, движение представляет собой движение центра масс и движение обоих тел происходит вокруг центра масс, при этом в ответы для частоты обращения входит приведённая масса $\mu = \frac{m_h m_e}{m_h + m_e}$. Здесь, аналогично, в энергию и эффективный боровский

радиус будет входить эффективная масса, а полная масса экситона определяется движением его центра масс и равна сумме масс электрона и дырки.

По аналогии с разбирающейся в классе задачей 4.2, всякое e^2 , входящее в ответы должно быть поделено на диэлектрическую постоянную.

Указанные соображения позволяют нам сразу написать ответ:

$$E_{ex} = \frac{\mu e^4}{2 \epsilon^2 \hbar^2}$$

$$r_{ex} = \frac{\epsilon \hbar^2}{\mu e^2}$$