

# Домашняя работа по общей физике

Драчов Ярослав

Факультет общей и прикладной физики МФТИ

25 марта 2021 г.

## 1 Структура и колебания кристаллической решётки, фононы

**2.20.**

*Решение.*

$$\omega = \frac{2s}{a} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

$$\Delta\varphi = k\Delta x = 10ka = \frac{\pi}{2} \implies ka = \frac{\pi}{20} \ll 1.$$

$$\omega \approx \frac{2s}{a} \frac{\pi}{40} \approx 1,05 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

**2.62.**

*Решение.* Закон сохранения энергии:  $\omega = \omega' + \Omega$  (здесь и далее прописные буквы для фононов, простые — для фотонов, штрихованные для рассеянного фотона).

Закон сохранения импульса:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{K}.$$

Так как фонон рождается в жидкости, периодичности нет и вектор обратной решётки в закон сохранения квазиимпульса в принципе вводить не надо. Впрочем, можно показать, что и в кристалле при рассеянии видимого света могут рождаться только фононы с малыми волновыми векторами.

При рассеянии на 90 градусов

$$k = K_z, \quad k' = -K.$$

$$\frac{\Omega^2}{s^2} = K^2 = k^2 + k'^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2 (\omega^2 + (\omega')^2) \approx 2\omega^2 \left(\frac{n}{c}\right)^2.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{\Omega}{\omega} \approx \frac{\sqrt{2}ns}{c} \approx 0,94 \cdot 10^{-5}.$$

**2.77.**

*Решение.* Предлагается считать граничные условия для фононов закреплёнными, при этом условие формирования стоячих волн в кристалле в форме прямоугольного параллелепипеда  $\sin(k_x L_x) \sin(k_y L_y) \sin(k_z L_z) = 0$ . Минимальное значение волнового вектора для возбуждаемой стоячей волны  $k_{\min} \simeq \frac{\pi}{L}$ , где  $L$  — характерный линейный размер (считаем форму кристалла кубиком).

Частота такого фонона (который оказывается длинноволновым)

$$\omega = k_{\min} s.$$

Её надо приравнять по закону сохранения разнице энергии спиновых подуровней. Так как по условию парамагнетик в  $s$ -состоянии, то  $g = 2$ .

$$L \simeq \frac{\pi}{k_{\min}} = \frac{\pi s \hbar}{\hbar \omega} = \frac{\pi s \hbar}{g \mu_B B} \approx 0,57 \text{ мкм.}$$

## 2.72.

*Решение.* Мы знаем, что решения для колебания в кристалле имеют вид (для цепочки)

$$\omega^2 = \omega_{\max}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

для заданной частоты получается синус больше единицы, что соответствует комплексному волновому вектору — то есть волне, амплитуда которой зависит от координаты.

$$\sin \frac{ka}{2} = 1,001.$$

$$e^{ika/2} - e^{-ika/2} = 2,002i.$$

$$\left(e^{ika/2}\right)^2 - 2,002ie^{ika/2} - 1 = 0.$$

$$e^{ika/2} = 1,001i \pm \sqrt{-(1,001)^2 + 1} = (1,001 \pm 0,045)i = \begin{cases} 1,046i \\ 0,956i \end{cases}.$$

Подставляем  $ka = \pi + i\delta$ .

$$e^{-\delta a/2} = \begin{cases} 1,046 \\ 0,956 \end{cases}.$$

$$\delta_1 a = -0,090.$$

$$\delta_2 a = 0,090.$$

Получается два решения, одно соответствует волне, растущей с ростом  $X$ , другое — убывающей с ростом  $X$ . Решения отличаются только знаком, они равны по модулю.

Выбор решения зависит от того, слева или справа от иона, на который идёт воздействие, находится интересующий нас ион. В одном случае надо выбирать решение, затухающее налево, в другом — затухающее направо. Очевидно, что так и должно быть — затухающие колебания симметрично распространяются в обе стороны.

Соответствен, для искомого отношения амплитуд

$$\frac{u_{100}}{u_0} = e^{-100 \cdot 0,090} = 1,23 \cdot 10^{-4}.$$

## 2 Теплоёмкость твёрдого тела. Модель Дебая

**2.27.**

*Решение.*

Первая зона Бриллюэна для квадратной решётки также имеет форму квадрата со стороной  $2\pi/a$ . Максимальная частота

$$\omega_{\max} = \omega\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma}{M}}.$$

Длинноволновой предел

$$\omega^2 = 2\frac{\gamma}{M} \left(2 - \left(1 - (K_x a)^2/2\right) - \left(1 - (K_y a)^2/2\right)\right) = \frac{(Ka)^2 \gamma}{M}$$

изотропен (от направления не зависит), скорость звука  $s = a\sqrt{\frac{\gamma}{M}}$ .

В модели Дебая заменяем спектр линейным изотропным  $\omega = sK$  и ограничиваем его сверху так, чтобы полное число колебаний сохранилось:

$$N = \frac{S\pi k_D^2}{(2\pi)^2}$$

где  $N$  — число атомов, а  $S$  — площадь решётки.

$$k_D^2 = \frac{4\pi}{a^2}.$$

$$k_D = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} \approx \frac{3,545}{a} > \frac{\pi}{a} = k_{Br}$$

и для частоты

$$\omega_D = \frac{2\sqrt{\pi}s}{a} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{M}} > \omega_{\max}.$$

**T2-1.**

*Решение.* Нужно, во-первых, перейти к теплоёмкости на примитивную ячейку. У NaCl гранецентрированная решётка с четырьмя формульными единицами на элементарный куб. То есть, примитивная ячейка имеет объём  $1/4$  элементарного куба:

$$C_{\text{прим}} = \frac{d^3}{4} C.$$

Считаем, что температура достаточно низка для применения низкотемпературного приближения:

$$C_{\text{прим}} = \frac{C_{\text{Дебай}}}{N} \approx \frac{12}{5}\pi^4 k_B \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3.$$

$$\Theta = T \left(\frac{48\pi^4}{5} \frac{k_B}{Cd^3}\right)^{1/3} \approx 315 \text{ K}.$$

Далее ищем скорость звука

$$\Theta = \frac{\hbar s}{k_B} (6\pi^2 n)^{1/3} = \frac{\hbar s}{k_B} \left(6\pi^2 \frac{4}{d^3}\right)^{1/3} = \frac{2\sqrt[3]{3\pi^2} \hbar s}{dk_B},$$

при вычислении дебаевской температуры не забываем, что кубическая ячейка не примитивная.

Откуда окончательно для усреднённой скорости звука

$$s = \frac{k_B \Theta d}{2\sqrt[3]{3\pi^2 \hbar}} = 3,76 \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

## 2.47.

*Решение.* При нулевых граничных условиях (закреплённая граница, т. е. амплитуда колебаний на границе равна нулю) смещение  $U$  может быть записано в виде

$$U = A e^{i\omega_n t} \sin \frac{\pi x}{L} n_x \cdot \sin \frac{\pi y}{L} n_y \cdot \sin \frac{\pi z}{L} n_z,$$

а частота  $n$ -го колебания  $\omega_n$  равна

$$\omega_n^2 = \left( \frac{\pi s}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Числа  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  принимают все целочисленные значения  $\geq 1$ . Энергия колебаний

$$\mathcal{E} = 3 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{\hbar \omega_n}{\exp \left( \frac{\hbar \omega_n}{k_B T} - 1 \right)},$$

где коэффициент «3» — это три независимые поляризации. При больших  $L$  сумма может быть заменена интегралом

$$\mathcal{E}(T) = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega \mathcal{D}(\omega) n(\omega, T) \hbar \omega, \quad \text{где } \mathcal{D}(\omega) = \frac{3}{2} \frac{V \omega^2}{\pi^2 s^3},$$

откуда энергия единицы объёма кластера

$$u_{\text{класт}}(T) = \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\pi^2 s^3} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} = \frac{3}{2} \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Здесь  $\omega_{\max} = \frac{\pi s}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)_{\max} \simeq \frac{\pi s}{L} N$ ,  $L = Na$ . Точное значение коэффициента при низких температурах несущественно. С другой стороны,

$$\omega_{\min} = \frac{\pi s}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)_{\min} = \begin{cases} 0 & \text{при } L \rightarrow 0, \\ \frac{\pi s}{L} \sqrt{3} & \text{при } L < \infty. \end{cases}$$

Кроме того, в интеграле была сделана стандартная замена переменных

$$x_{\max} = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B T} = \frac{\pi s \hbar}{a k_B T} = \frac{\theta}{T}; \quad x_{\min} = \frac{\hbar \omega_{\min}}{k_B T} = \frac{\pi s \sqrt{3}}{10 a k_B T} = \frac{\theta}{T} \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Таким образом, энергия единицы объёма кластера

$$u_{\text{класт}} = \frac{3}{2} \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{\frac{\theta}{T} \frac{\sqrt{3}}{10}}^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагрева единицы объёма кластера

$$Q_{\text{класт}} = \Delta u_{\text{класт}} = u_{\text{класт}} \left( \frac{\theta}{30} \right) - u_{\text{класт}}(0) = \frac{3}{2} \frac{(k_B \frac{\theta}{30})^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{3\sqrt{3}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Для единицы объёма большого тела

$$\Delta u_{\text{тела}} = \frac{3}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \left( \frac{k_B \theta}{30} \right)^4 \int_0^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \text{ и тогда } \frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = \frac{\Delta u_{\text{класт}}}{\Delta u_{\text{тела}}} = \frac{\int_{3\sqrt{3}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}{\int_0^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}.$$

В этих интегралах верхний предел можно заменить на бесконечность, а поскольку  $e^{3\sqrt{3}} \simeq 180 \gg 1$ , то

$$\int_{3\sqrt{3}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_{3\sqrt{3}}^{\infty} e^{-x} x^3 dx = 1,43; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6,5.$$

Отсюда

$$\frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = \frac{1,43}{6,5} = 0,22.$$

Если же непосредственно подсчитать сумму всех возможных колебаний, то ограничиваясь числами  $(n_x, n_y, n_z)$ :  $(1, 1, 1)$ ;  $(1, 1, 2)$ ;  $(1, 2, 1)$ ;  $(2, 1, 1)$ ;  $(2, 2, 1)$ ;  $(2, 1, 2)$ ;  $(1, 2, 2)$ ;  $(1, 1, 3)$ ;  $(1, 3, 1)$ ;  $(3, 1, 1)$  и  $(2, 2, 2)$ , получаем

$$\frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = 0,13.$$

## 2.58.

*Решение.* В условии даётся температура Дебая 19 К, смысл которой для жидкости странен. Тут важно, что температура много меньше ротонного минимума (который около 8 К), поэтому есть только фононы, а их спектр до энергий, соответствующий температуре 0,5 К нашей задачи, можно считать линейным. В жидкости есть единственная поляризация звуковых волн (продольная).

$$E = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d^3k = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar s)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = V \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar s)^3}.$$

$$\frac{C}{V} = \frac{2}{15} \pi^2 k_B \left( \frac{k_B T}{\hbar s} \right)^3$$

и далее по формулам термодинамики

$$\frac{S(T_1)}{V} = \int_0^{T_1} \frac{C}{T} dT = \frac{2}{45} \pi^2 k_B \left( \frac{k_B T_1}{\hbar s} \right)^3$$

для искомой удельной энтропии

$$S_{\text{уд}} = \frac{2}{45} \frac{\pi^2 k_B}{\rho} \left( \frac{k_B T}{\hbar s} \right)^3 \approx 8,5 \cdot 10^3 \frac{\text{эрг}}{\text{К} \cdot \text{г}}.$$

**2.75.**

*Решение.* Аналогично задаче 2.74 наложим закреплённые граничные условия. От граничных условий несколько меняется ответ в этой задаче, но по постановке «мысленного опыта» по определению конечной длины цепочки, для которой роль квантовых колебаний ещё неразрушительна, закреплённые граничные условия кажутся даже более логичными.

Тогда собственные моды колебаний в одномерном случае имеют вид  $u_k = A_{0k} \sin(kx) \sin(\omega t)$ ,  $k > 0$ , на одно состояние приходится объём  $\pi/L$  в одномерном  $k$ -пространстве. Для среднего квадрата смещения  $\langle\langle u^2 \rangle\rangle = \frac{1}{4} \sum A_{0k}^2$ , а из сравнения каждой моды с гармоническим осциллятором

$$\frac{\hbar\omega}{2} = E_k = \langle E_k \rangle = 2 \langle K_k \rangle = M \sum_n \langle V_n^2 \rangle = \frac{MN\omega_k^2 A_{0k}^2}{4} \text{ и } A_{0k}^2 = \frac{2\hbar}{MN\omega_k}.$$

В одномерном случае для единственной поляризации, в дебаевской модели, ограничивая нижний предел из-за конечности цепочки:

$$\frac{\langle\langle u^2 \rangle\rangle}{a^2} = \frac{L}{\pi} \frac{2\hbar}{NM a^2} \int_{k_{\min}}^{k_D} \frac{dk}{sk} = \frac{2\hbar}{\pi s M a} \ln \frac{k_D}{k_{\min}}.$$

Для однородной цепочки  $k_D = \pi/a$ , а для закреплённых граничных условий  $k_{\min} = \pi/L$ .

Окончательно

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\hbar}{\pi s M a} \ln \frac{L}{a}. \\ \ln \frac{L}{a} &= \alpha \frac{\pi s M a}{2\hbar} \approx 11,2. \\ L &\approx 22 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

**3 Электронный ферми-газ****3.44.**

*Решение.* В обоих случаях отдаётся в зону проводимости по одному электрону на атом, примитивные ячейки содержат единственный ион, так что числа электронов проводимости, примитивных ячеек и атомов совпадают.

Для электронной теплоёмкости пользуемся ферми-газовой моделью. Теплоёмкость электронов линейна по температуре при  $T \ll E_F$ , то есть вплоть до температуры плавления металла:

$$C_{el} = \frac{k_B N T m}{\hbar^2} \left( \frac{\pi}{3n} \right)^{2/3} = \frac{\pi^2 k_B^2 N T}{2 E_F}.$$

Теплоёмкость ферми-газа выводится на лекции.

Фононная теплоёмкость при высоких температурах ( $T > \theta$ ) равна  $C_{ph} = 3Nk_B$ , что в  $\sim \frac{E_F}{(k_B T)} \gg 1$  раз больше электронной. Значит сравниваются теплоёмкости при низких температурах.

При низких температурах для фононной теплоёмкости есть формула Дебая:

$$C_{ph} = \frac{12\pi^4 N k_B}{5} \left( \frac{T}{\theta} \right)^3.$$

Приравнивая, получаем

$$T^2 = \frac{5k_B\Theta^3}{24E_F\pi^2}.$$

После подстановки численных значений, получаем ответ: 3,3 К для меди и 1,5 К для натрия. Полученные числа оправдывают применение дебаевского приближения.

### 3.53.

*Решение.* В равновесии (когда пластины соединили) установится такое распределение заряда, что  $e\varphi + \mu = \text{const}$  ( $e < 0$ ), то есть выравнивается электрохимический потенциал. Электронам выгодно понижать свою энергию, переходя из натрия в медь (поверхность Ферми меди ниже по энергии), но такие переходы нарушают электронейтральность и возникает задерживающая разность потенциалов. При этом массивные металлические образцы можно считать в равновесии эквипотенциальными.

Значит разность электрических потенциалов равна  $A_{\text{Cu}} - A_{\text{Na}}/e$ , чтобы обеспечить эту разность потенциалов, перетёк заряд  $C(A_{\text{Cu}} - A_{\text{Na}})/e = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ Кл} = 1,38 \cdot 10^7 e$  (зарядов электрона), что составляет  $5,2 \cdot 10^{-16}$  от общего числа электронов в образце.

### 3.59.

*Решение.* Пусть плотность состояний на уровне Ферми для каждого из направлений спина равна  $D'$ . В модели с квадратичным законом дисперсии

$$D' = \frac{dN}{dE} = \frac{V 4\pi k_F^2 df / (2\pi)^3}{\hbar^2 k_F dk / m^*} = \frac{1}{2} \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{1}{2} \frac{m^*}{\hbar^2} \sqrt{\frac{3n}{\pi^4}},$$

или, по-другому,

$$D' = \frac{3n}{4E_F}.$$

Здесь  $n$  — полная концентрация электронов,  $D'$  вдвое меньше полной плотности состояний.

Условие, что поле мало означает, что изменение распределения электронов мало. Тогда можно считать, что плотность состояний не изменилась при приложении поля. Считаем магнетизм чисто спиновым:  $g = 2$ , магнитный момент каждого электрона равен боровскому магнетону и может быть направлен либо по полю, либо против поля.

Это значит, что электронов, магнитный момент которых направлен по полю (энергия которых понижается), стало в единице объёма больше на  $D'\mu_B H$ , а электронов, магнитный момент которых направлен против поля (энергия которых повышается) — меньше на ту же самую величину  $D'\mu_B H$ . Естественно, полное число электронов сохранилось (система осталась электронейтральной).

Таким образом

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{2D'\mu_B H}{n} = \frac{3\mu_B H}{2E_F}.$$

Для поля  $10 \text{ Тл}$   $\frac{3}{2}\mu_B H \sim 1 \text{ мэВ}$ , то есть в реальных лабораторных полях в электронном газе в типичном металле ( $E_F \sim 1 \text{ эВ}$ ) перераспределяется ничтожная доля электронов проводимости.

Магнитный момент без поля был равен 0, а в поле стал равен

$$M = \mu_B \delta n = H \mu_B^2 \frac{m^*}{\hbar^2} \sqrt{\frac{3n}{\pi^4}}.$$

Поскольку для каждой проекции спина

$$\mu_B H = \delta E = \frac{p_F \delta p}{m},$$

то

$$\frac{\delta p}{p_F} = 2m^* \frac{\mu_B H}{p_F^2} = \frac{\mu_B H}{E_F}.$$

Для восприимчивости:

$$\chi = M/H = \mu_B^2 \frac{m^*}{\hbar^2} \sqrt{\frac{3n}{\pi^4}} = 5,2 \cdot 10^{-7}.$$

### 3.87.

*Решение.* Для фононной теплоёмкости одномерной цепочки при низких температурах (на единицу длины)

$$E = 2 \int_0^\infty \frac{\hbar k s}{\exp\left(\frac{\hbar k s}{T}\right) - 1} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{T^2}{\hbar s} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi}{6} \frac{T^2}{\hbar s}$$

двойка учитывает движение фононов в обе стороны, поляризация для одномерной системы единственная. Для теплоёмкости, возвращая в запись постоянную Больцмана,

$$C_{ph} = \frac{\pi k_B^2 T}{3 \hbar s}.$$

Скорость Ферми по определению  $v_F = \left(\frac{dE}{dp}\right)_{E_F}$  независимо от вида спектра.

Для электронной теплоёмкости

$$C = \frac{\pi^2}{3} D(E_F) T$$

плотность состояний в одномерном случае, но не делая явных предположений о спектре.

$$D = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dp} \cdot \frac{dp}{dE} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{1}{v_F}$$

(учтён спиновый множитель 2 и множитель 2, учитывающий движение электронов в обе стороны), откуда электронная теплоёмкость на единицу длины с постоянной Больцмана

$$C_{el} = \frac{2\pi}{3} \frac{k_B^2 T}{\hbar v_F}.$$

Соответственно,

$$\frac{C_{el}}{C_{ph}} = \frac{2s}{v_F} \sim 2 \cdot 10^{-2}.$$

### 3.61.



*Решение.* У ферми-жидкости два свойства:

1. Концентрация и фермиевский импульс в ней соответствуют полному числу частиц
2. Вблизи Ферми-поверхности наблюдается перенормированная (изменённая) масса, соответствующая изменённой плотности состояний. Именно эта масса и определяет все термодинамические свойства.

Спин ядра гелия-3 равен  $1/2$ , электронный спин полностью заполненной  $s$ -оболочки нулевой, поэтому полный спин атома равен  $1/2$ . Атом гелия-3 является ферми-частицей и низкотемпературные свойства гелия-3 — это свойства жидкости. Тогда можно использовать результат для теплоёмкости электронного газа:

$$C_V = \frac{k_B n T m^*}{\hbar^2} \left( \frac{\pi}{3n} \right)^{2/3} = \frac{m^*}{m} \frac{k_B (nm) T}{\hbar^2} \left( \frac{\pi}{3n} \right)^{2/3}.$$

Напомним, что эта формула — на единицу объёма. Воспользуемся тем, что  $nm = \rho$ , где  $m$  — масса атома He-3. Подставляя, и помня, что в условии — молярная теплоёмкость, а нужна для вычислений теплоёмкость в единице объёма  $C_V = C_\mu \rho / (m N_a)$ , получаем после очевидных преобразований

$$\frac{m^*}{m} = \frac{C_\mu \hbar^2 \rho}{N_a k_B^2 T \rho m} \left( \frac{3\rho}{\pi m} \right)^{2/3} = 2,15.$$

### 3.28.

*Решение.* Поскольку в звезде присутствует положительный фон, который в точности равен отрицательному, то мы пренебрегаем взаимодействием и рассматриваем только кинетическую энергию электронов.

Будем считать закон дисперсии ультрарелятивистским:  $\varepsilon = pc$ , поскольку для большинства состояний  $\varepsilon \gg mc^2$ .

Полная концентрация электронов:

$$n = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi p_F^3 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Фермиевский импульс такой же как и в обычном электронном газе (он определяется только концентрацией и не зависит от закона дисперсии):

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Полная энергия электронов в единице объёма:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} c p \cdot 4\pi p^2 dp = 2\pi c p_F^4 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} = 0,25 c \hbar (9\pi n^2)^{2/3}.$$

Полная энергия всего газа

$$E_{\text{полн}} = EV = \frac{(9\pi)^{2/3}}{4} c \hbar N^{4/3} \frac{1}{V^{1/3}}.$$

$$P = -\frac{dE_{\text{полн}}}{dV} = \frac{(9\pi)^{2/3}}{12} c \hbar n^{4/3}, \quad \text{или } pV^{4/3} = \text{const.}$$

## 4 Зонная структура

**3.38.**

*Решение.* По определению групповой скорости

$$V = \frac{\partial E}{\partial p}.$$

$$V_y = \frac{\varepsilon_0 a}{\hbar} \sin\left(\frac{p_y a}{\hbar}\right) = 0 = V_z, \quad V_x = \frac{\varepsilon_0 a}{\hbar} \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\varepsilon_0 a}{2\hbar}.$$

Ускорение

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left. \frac{\partial E}{\partial p} \right|_{p=p+\frac{dp}{dt}\Delta t} - \left. \frac{\partial E}{\partial p} \right|_{p=p}}{\Delta t}.$$

По определению

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0, \quad \frac{dp_y}{dt} &= \frac{\hbar e}{c} \frac{\varepsilon_0 a}{2\hbar}, \\ \frac{dV_y}{dt} &= \frac{\hbar e}{c} \frac{\varepsilon_0^2 a^3}{2\hbar^3}, \end{aligned}$$

соответственно

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_z}{dt} = 0.$$

**3.85.**

*Решение.* Ответом в задаче будет

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} + E_F = E_F + 4,61 \text{ эВ},$$

так как красной границе фотоэффекта соответствует «выбивание» электрона с уровня Ферми.

ГЦК-решётка означает четыре атома на элементарный куб. У серебра один электрон проводимости на атом. Это значит, что на элементарный куб приходится четыре электрона. Концентрация электронов  $n = 4/a^3$ , для импульса Ферми пользуемся известным выражением

$$k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n} = \frac{\sqrt[3]{12\pi^2}}{a}.$$

Откуда имеем

$$p_F = \hbar k_F = 1,26 \cdot 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

и соответственно

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = 5,44 \text{ эВ}.$$

Добавляя расстояние от уровня Ферми до уровня свободного электрона 4,61 эВ, получим ответ  $E = 10,05 \text{ эВ}$ .

**3.57.**

*Решение.* Во втором металле закон дисперсии в той же системе координат имеет вид:

$$E_{II} = \frac{p_x^2}{2m_y^*} + \frac{p_y^2}{2m_x^*} + \frac{p_z^2}{2m_z^*}$$

(из-за поворота локальных осей кристалла движение вдоль оси  $X$  теперь характеризуется эффективной массой  $m_y$  и наоборот).

Перейдём к вычислению закона преломления. Пусть в области I был электрон с импульсом  $(p_x, p_y, 0)$ , после прохождения границы в области II он перейдёт в состояние с импульсом  $(p_{xI}, p_{yI}, 0)$ . Поскольку испускания или поглощения фононов и других неупругих процессов нет, энергия сохраняется, то есть:

$$\frac{p_x^2}{m_x^*} + \frac{p_y^2}{m_y^*} = \frac{p_{xI}^2}{m_x^*} + \frac{p_{yI}^2}{m_y^*}.$$

Другая сохраняющаяся величина это  $p_x = p_{xI}$ . Данный закон сохранения квазиимпульса связан с тем, что система трансляционно инвариантна вдоль направлений  $Ox$  и  $Oz$ . Соответственно

$$p_{yI} = \sqrt{p_x^2 \left(1 - \frac{m_x^*}{m_y^*}\right) + p_y^2 \frac{m_x^*}{m_y^*}}.$$

Данные выражения для импульсов решают задачу.

Найдём закон преломления. Пусть электрон падал под углом  $\alpha$  (отсчитываем от нормали к поверхности раздела, то есть от оси  $Y$ ),  $\operatorname{tg} \alpha = p_x/p_y$ , а вылетел под углом  $\beta$ ,  $\operatorname{tg} \beta = p_x/p_{yI}$ . Тогда, выражая всё через  $p_x$  и подставляя в закон сохранения энергии, имеем:

$$\frac{1}{m_x^*} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{m_y^*} = \frac{1}{m_y^*} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{m_x^*}.$$

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{m_y^*} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{m_x^*}.$$

$$\frac{1}{m_y^*} \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{m_x^*} \frac{\cos 2\beta}{\sin^2 \beta}.$$

Откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sqrt{\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{m_x^*}{m_y^*}}.$$

Асимптотика при малых углах

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{m_x^*}{m_y^*}}.$$

#### 4.54.

*Решение.* Основное свойство кристаллов — их трансляционная симметрия. Поэтому для описания кристалла можно воспользоваться следующим приёмом: взять кристалл конечных размеров и транслировать его для получения кристаллов произвольных размеров. При этом размер этого кристалла

(т. н. основная область) должен быть выбран так, чтобы сохранилась трансляционная симметрия, т. е. на основных направлениях трансляции укладывалось целое число элементарных (примитивных) ячеек. При этом набег фазы волновой функции электрона вдоль соответствующего направления будет кратен  $2\pi$ . Это приводит к дискретным значениям проекций квазиимпульса в зоне Бриллюэна, определяемым размерами основной области кристалла. Поскольку размер зоны Бриллюэна однозначно определяется размерами примитивной ячейки, число разрешённых значений квазиимпульса в зоне Бриллюэна равно числу примитивных ячеек. Если кристалл графена состоит из  $N$  атомов, а в примитивной ячейке графена содержится два атома, то число разрешённых значений будет равно  $N/2$ . Каждому значению квазиимпульса, как следует из закона дисперсии, соответствует два уровня энергии: один в валентной зоне, другой — в зоне проводимости. Поэтому число мест для электронов с учётом спинового вырождения будет равно  $2 \cdot 2 \cdot N/2 = 2N$ . Из них  $N$  мест будет в валентной зоне и  $N$  — в зоне проводимости. Т. к. на один атом приходится по одному «свободному» электрону, то всего делокализованных электронов будет  $N$ . При нулевой температуре электроны занимают наинизшие энергетические состояния, поэтому вследствие симметричного характера спектра вся валентная зона будет заполнена, а зона проводимости будет пустой. Таким образом для указанного вида спектра химический потенциал графена, отсчитываемый от уровня энергии электрона в атоме, равен нулю и уравнение для определения формы ферми-поверхности имеет вид

$$1 + 4 \cos p_x a \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = 0.$$

Т. к.  $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} \neq 0$ , то уравнение можно переписать так:

$$-4 \cos p_x a = 4 \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}}}.$$

Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом, правая часть уравнения  $\geq 4$  при  $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} > 0$ , либо  $\leq -4$  при  $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} < 0$ .

Поскольку левая часть уравнения ограничена  $-4 \leq 4 \cos p_x a \leq 4$ , то равенство возможно только если одновременно

$$\begin{cases} \cos p_x a = 1 \\ \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos p_x a = -1 \\ \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} p_x a = 2\pi m \\ \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x a = \pi + 2\pi n \\ \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{3}\pi + 2\pi l. \end{cases}$$

Подставляя данные, получаем, что

$$\begin{cases} p_x = \frac{4\pi\hbar}{3b}m \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}b}s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \frac{2\pi\hbar}{3b} + \frac{4\pi\hbar}{3b}m \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}b}l. \end{cases}$$

Отбирая только те значения квазиимпульса, которые попадают в первую зону Бриллюэна, получаем уравнение прямых линий в  $\mathbf{p}$ -пространстве:

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \pm \frac{2\pi\hbar}{3b} \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} \end{cases}.$$

Пересечение указанных линий даёт вершины шестиугольника. Таким образом, поверхность Ферми графена состоит из шести точек и её площадь равна нулю.

Как видно из закона дисперсии, для любого направления в обратном пространстве кроме диагоналей шестиугольника, на границе зоны Бриллюэна возникает щель (запрещённая зона) в спектре электронов. Она максимальна в середине сторон шестиугольника и уменьшается в стороны вершин, где исчезает вовсе (зона проводимости соприкасается с валентной зоной). С точки зрения своих электронных свойств, графен можно считать либо бесщелевым полупроводником, либо полуметаллом с нулевым перекрытием зон.

**T4-2.**

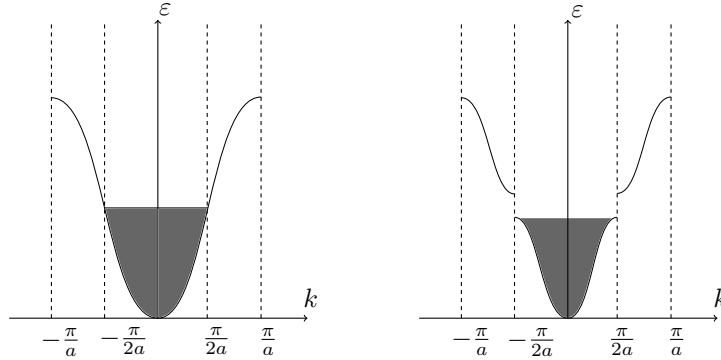


Рис. 1: Схема заполнения электронных состояний до (слева) и после (справа) димеризации цепочек

*Решение.* В исходной цепочке один электрон на примитивную ячейку и первая зона Бриллюэна одномерной цепочки оказывается заполнена ровно на половину — поэтому это и будет проводником (металлом). После димеризации объём, занимаемый электронами в  $k$ -пространстве не меняется, а первая зона Бриллюэна уменьшается вдвое. Изменение периодичности кристалла приводит к появлению дополнительного вклада в создаваемый им потенциал с периодом  $2a$ , этот вклад мал в силу малости смещения ионов и может быть учтён в рамках приближения слабой связи.

Точный расчёт задач не требуется, но результат применения приближения слабой связи очевиден — на границе новой зоны Бриллюэна образуется разрыв спектра и запрещённая зона. При этом вблизи границы энергия

электронов из нижней ветви станет ещё немного ниже. В результате суммарная кинетическая энергия электронов понизится. Таким образом, в этом фазовом переходе выигрыш в энергии возникает за счёт уменьшения суммарной кинетической энергии электронов и оказывается, что в одномерном случае он всегда больше проигрыша в упругой энергии при деформации (проигрыш  $\propto \delta^2$ , выигрыш  $\propto \delta^2 \ln \delta$ ).

После димеризации нижняя энергетическая зона окажется заполнена полностью и система станет диэлектриком.

#### Т4-3.

*Решение.* Для простой кубической решётки обратная решётка также простая кубическая с периодом  $2\pi/a$ . Фермиевский волновой вектор  $k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n} \approx 3,09/a < \pi/a$ , поэтому ферми-сфера полностью уместается в первой зоне Бриллюэна. В силу слабости взаимодействия (по условию) искажением ферми-поверхности от идеальной сферической формы пренебрегаем.

В силу слабости взаимодействия электронов с периодическим потенциалом кристалла изменение спектра можно считать слабым, запрещённые зоны узкими и за исключением непосредственной окрестности границ зоны Бриллюэна можно считать спектр квадратичным

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Импульс кванта света в УФ-диапазоне много меньше фермиевского, поэтому в рамках приведённой зонной схемы переход происходит «вертикально» — без изменения импульса электрона. Мы можем добавить вектор обратной решётки, чтобы перейти к расширенной или периодической зонной схеме. Необходимо после такого перехода «вверх» на  $\hbar\omega$  и «вбок» на  $\mathbf{G}$  попасть на квадратичный спектр с минимальным приростом энергии. Очевидно, что минимальному изменению энергии будет соответствовать смещение на вектор обратной решётки минимальной длины, например,  $(2\pi/a; 0; 0)$  из точки в  $k$ -пространстве  $(-k_F; 0; 0)$ . Так как  $k_F$  всё же близко к границе зоны Бриллюэна, то и оттранслированная точка оказывается близка к границе:

$$\frac{2\pi}{a} - k_F \approx \frac{3.19}{a}.$$

Отсюда искомая энергия кванта

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \left( \frac{2\pi}{a} - k_F \right)^2 - k_F^2 \right) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \left( \frac{(2\pi)^2}{(3\pi^2)^{2/3}} - 2 \frac{2\pi}{(3\pi^2)^{1/3}} \right) \approx \\ &\approx 0,068 E_F = 0,2 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Это энергия кванта ИК-диапазона, она существенно меньше типичных значений работы выхода для металла.

## 5 Кинетические и электрические явления в твёрдых телах и металлах

### 2.65.

*Решение.* Для фононов можно использовать оценочную формулу для газовой кинетической теории

$$\kappa_{ph} = \frac{1}{3} C s \Lambda.$$

При низких температурах  $C \propto T^3$ . Рассеяние фононов может происходить на других фононах, краях образца, дефектах. Время рассеяния на других фононах будет обратно пропорционально их концентрации ( $T^3$ ). Следовательно, данный процесс будет вымерзать при понижении температуры, что и происходит ниже 7 К, согласно условию задачи. По-видимому также образцы содержат мало дефектов, раз теплопроводность зависит от толщины образца.

По аналогии с кнудсеновским течением газа длину свободного пробега  $\Lambda$  надо принять равной расстоянию между границами кристалла. Тогда увеличение толщины кристалла в 4 раза увеличит и  $\Lambda$  и  $\kappa$  тоже в 4 раза.

### 3.77.

*Решение.* При  $T > \Theta$  можно для каждого атома применить теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы, считая, что каждый атом находится в изотропном гармоническом потенциале, описываемом «жесткостью»  $k$ :

$$\frac{3}{2} k_B T = k \frac{\overline{\xi^2}}{2} = k \frac{\overline{x^2 + y^2 + z^2}}{2}.$$

Коэффициент упругости «отдельной пружинки»  $k$  можно оценить, зная модуль Юнга. Действительно, если мы растягиваем весь кристалл с относительным удлинением  $\varepsilon$ , то мы просто растягиваем  $n_{at} = a^{-3}$  «пружинок» в единице объема на величину  $a\varepsilon$ . Приравняем две упругие энергии:

$$E \frac{\varepsilon^2}{2} = k n_{at} \frac{(a\varepsilon)^2}{2}.$$

Отсюда  $k = Ea$ . Соответственно

$$\overline{\xi^2} = \frac{3k_B T}{Ea}.$$

Длина свободного пробега

$$\Lambda = \frac{1}{n_{at}\sigma} = \frac{1}{n_{at}\pi\overline{\xi^2}} = \frac{Ea^4}{3\pi k_B T} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Из этого решения следует, что

$$\rho \equiv \frac{m}{ne^2\tau} = m \frac{v_F}{ne^2\Lambda} \propto T,$$

что наблюдается в большинстве металлов.

Ответ отличается от того, что в задачнике заменой  $n_e$  на  $n_{at}$  и цифрой 3 в знаменателе, возникающей из-за равнораспределения.

### 3.79.

*Решение.* Характерное время  $t$ , через которое пластинка «почувствует» изменение температуры, оценивается как  $d^2/D$ , где  $D$  — коэффициент диффузии. Это время также известно, как время «выравнивания».

Коэффициент диффузии есть отношение коэффициентов теплопроводности кристалла  $\kappa$  к его теплоёмкости  $C$ . При комнатных температурах теплоёмкость кристалла практически равна решёточной  $C_{\text{реш}}$  и согласно закону Дюлонга-Пти  $C = C_{\text{реш}} = 3nk_{\text{Б}}T$ , где  $n$  — плотность атомов. Таким образом

$$D = \frac{\kappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\kappa}{nk_{\text{Б}}}.$$

Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  для переноса тепла в газе со средней скоростью частиц  $v$  и длиной свободного пробега  $\Lambda$  равен

$$\kappa = \frac{1}{3}C_V\Lambda v,$$

где  $C_V$  — теплоёмкость единицы объёма газа. При комнатных температурах в большинстве металлов почти весь тепловой поток переносят электроны. В применении к электронному газу в качестве  $v$  разумно взять  $v_F$ , а

$$C_V = C_{\text{эл}} = \frac{\pi^2}{2}nk_{\text{Б}}^2\frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{\pi^2nk_{\text{Б}}^2T}{m_ev_F}\Lambda.$$

Таким образом, коэффициент диффузии

$$D = \frac{\kappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\pi^2}{9}\frac{k_{\text{Б}}T\Lambda}{m_ev_F},$$

откуда искомое время

$$t \simeq \frac{d^2}{D} \approx \frac{9}{\pi^2}\frac{d^2m_ev_F}{k_{\text{Б}}T\Lambda} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ с},$$

где  $v_F \simeq \frac{\hbar}{m_e a} (3\pi^2)^{1/3} \sim 10^8 \text{ см/с}$  (рассчитано для постоянной решётки  $a \simeq 3 \text{ \AA}$ ).

### 3.80.

*Решение.* В стержне можно считать что тепловое равновесие поперёк устанавливается мгновенно по сравнению с тепловым равновесием вдоль и перенос тепла подчиняется одномерному уравнению теплопроводности:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Отсюда из размерности сразу понятно, какое будет время установления:

$$\tau \sim \frac{cL^2}{\kappa}.$$

Поскольку температура много больше дебаевской, применима классическая теория теплоёмкости:  $c = 3R\rho/\mu$  (здесь речь идёт о теплоёмкости на единицу объёма,  $R$  — газовая постоянная,  $\mu = 64 \text{ г/моль}$  — молярная масса меди).

Имеем ответ

$$\tau = 3R \frac{\rho L^2}{\kappa \mu} = 92 \text{ с}.$$



### 3.88.

*Решение.* Квазиклассическое описание (импульс как квантовое число) и понятие длины свободного пробега применимы только когда на длине свободного пробега укладывается несколько длин волн де-Бройля. Минимальная металлическая проводимость реализуется, когда длина свободного пробега равна  $2\pi/k_F$ .

Подставляем в формулу Друде:

$$\sigma_{\min} = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2 \cdot 2\pi\hbar}{p_F v_F m} = \frac{ne^2 \cdot 2\pi}{\hbar k_F^2} = \frac{2\pi ne^2}{\hbar (3\pi^2 n)^{2/3}} = 2n^{1/3} (9\pi)^{-1/3} \frac{e^2}{\hbar}.$$

С точностью до численного множителя порядка 1 это совпадает с ответом задачника и даёт  $2,8 \cdot 10^{-4}$  Ом · см.

## 6 Объёмные полупроводники

### 4.7.

*Решение.* Договоримся отсчитывать химпотенциал от дна зоны проводимости. Раз полупроводник собственный — будет электронейтральность и число электронов будет равно числу дырок:  $n_e = n_h$ .

Когда  $\Delta \gg T$ , уровень химпотенциала лежит внутри щели и числа заполнения для электронов и дырок  $\langle n \rangle \ll 1$ , так что можно пренебречь 1 в знаменателе распределения Ферми. Это даёт:

$$n_h = 2 \left( \frac{m_h T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{(\mu+\Delta)/T},$$

$$n_e = 2 \left( \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\mu/T}.$$

Приравнивая две концентрации и сокращая, получаем:

$$\left( \frac{m_e}{m_h} \right)^{3/2} = e^{(2\mu+\Delta)/T}.$$

Это даёт ответ:

$$\mu = -\frac{\Delta}{2} + 0,75T \ln \frac{m_h}{m_e}.$$

Обсудим этот ответ. При низких температурах химпотенциал находится посередине щели. Это объясняется тем, что электронные и дырочные возбуждения могут родиться только парами и являются равновыгодными. При повышении температуры, если масса дырок больше, то химпотенциал едет в электронную сторону, если больше масса электронов — наоборот. Это связано с тем, что чем больше масса, тем больше плотность состояний, и чтобы удовлетворить равенству концентраций, необходимо, при прочих равных условиях, сдвинуть химпотенциал дальше от носителей с большей массой.

Надо заметить, что, при наличии сколь угодно малого количества легирующей примеси одного типа, ситуация при низких температурах изменится: химпотенциал при  $T = 0$  окажется посередине между примесным уровнем и соответствующей зоной (зоной проводимости для донорной примеси и валентной зоной для акцепторной).

#### Т6-1.

*Решение.* Так как длина волны видимого света много больше межатомного расстояния, то импульс такого фотона много меньше бриллюэновского. Это означает, что при поглощении фотона видимого света электрон в кристалле переходит между разрешёнными состояниями «вертикально» — практически без изменения своего квазиимпульса.

Соответственно, в непрямозонном полупроводнике при поглощении фотона переход электрона с потолка валентной зоны на дно зоны проводимости возможен только с поглощением или излучением дополнительного фонона, такие процессы менее вероятны, чем прямые переходы из неэкстремального положения в валентной зоне в неэкстремальное положение в зоне проводимости. Процесс с поглощением фонона дополнительно запрещён низкими температурами (фононов мало).

Для поиска минимальной энергии фотона, с которой такие вертикальные переходы становятся разрешёнными, рассмотрим разность энергий электрона в валентной зоне и зоне проводимости вдоль прямой, соединяющей экстремумы в  $k$ -пространстве. Ноль отсчёта импульса поместим на потолок валентной зоны, если  $\delta$  — расстояние в  $k$ -пространстве между экстремумами и  $\xi$  — координата точки, то

$$E(\xi) = \frac{\hbar^2 (\delta - \xi)^2}{2m} + \Delta + \frac{\hbar^2 \xi^2}{2m}.$$

Ищем минимум, он достигается при  $\xi = \delta/2$  и равен

$$E_{\min} = \Delta + \frac{\hbar^2 \delta^2}{4m}.$$

Откуда

$$\delta^2 = \frac{4m}{\hbar^2} (E - \Delta).$$

#### 4.50.

*Решение.* Вопрос этой задачи можно переформулировать так: при каких концентрациях примеси легирование нельзя считать слабым? При повышении концентрации примеси электроны начинают чувствовать не только потенциал своего донора, но и соседних. Это становится существенным, когда характерное расстояние между примесями становится меньше удвоенного боровского радиуса. При этом мы будем подразумевать, что длина экранирования будет большой по сравнению с межпримесным расстоянием, чтоб считать потенциал взаимодействия электрона и примеси кулоновским.

Поиску боровского радиуса в InSb была посвящена задача 4.2. Ответ там примерно 60 нм ( $a_B^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = a_B \epsilon m / m^*$ ). Приравнявая  $n_{\text{donors}} = (2a_B)^{-3}$  находим искомую концентрацию  $n = 5,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

По полупроводниковым меркам это очень маленькая концентрация: концентрация атомов в твёрдом теле  $\sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , то есть речь идёт об относительной концентрации примесей на уровне  $10^{-8}$ . В кремнии, например, из-за большей эффективной массы эта величина будет на 4 порядка больше. Данный ответ показывает насколько сложно работать с узкозонными полупроводниками (в которых малая эффективная масса): даже маленькое количество примеси может привести к образованию примесной зоны.

#### 4.12.

*Решение.* Из-за электронейтральности концентрации (а значит и  $p_F$ ) электронов ( $n_e$ ) и дырок ( $n_h$ ) равны между собой. Будем для простоты считать температуру нулевой. Тогда перекрытие зон равно сумме энергии Ферми электронов (отсчитанной от дна зоны проводимости) и дырок (отсчитанной от потолка валентной зоны).

Пользуясь тем, что  $p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$ , запишем

$$\frac{1}{2}\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} \right) = \Delta E.$$

Отсюда напрямую получаем

$$n = \left( 2\Delta E \frac{m_e m_h}{m_e + m_h} \right)^{3/2} \frac{1}{3\pi^2 \hbar^2} = 9,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Энергии Ферми делят перекрытие зон обратно пропорционально массам, соответственно  $E_{F,e} = 0,015 \text{ эВ}$ ,  $E_{F,h} = 0,025 \text{ эВ}$ .