7. Ecuaciones y sistemas

- **En Mathematica el signo igual de las ecuaciones se escribe con dos signos iguales.**
- **Los sistemas de ecuaciones se escriben entre llaves y separados por comas.**

7.1. Los comandos fundamentales

El principal comando para resolver ecuaciones de modo exacto es **Solve[p==q,x]**. Si los números no tienen decimales, el programa intenta devolver el resultado exacto. **Si algún número es decimal, nos da la solución en formato decimal**.

Para transformar las soluciones en una lista utilizamos las reglas de sustitución.

A veces la solución exacta no nos es de mucha utilidad, pues puede contener gran cantidad de radicales. Si queremos la solución decimal utilizamos el comando **NSolve[p==q,x]**. Con la opción **WorkingPrecision** podemos fijar el número de cifras significativas de las soluciones (también lo podemos poner como tercer argumento).

El comando **Reduce[p==q,x]** se utiliza del mismo modo, pero a veces puede ser más útil que el comando **Solve**.

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

- $3x+6=0$
- $\frac{3-x}{3}+\frac{4x-1}{7}=4$
- $ax+b=0$

Nuevas funciones

Solve, NSolve, Reduce, WorkingPrecision.

7.2. Ecuaciones algebraicas

Una ecuación es algebraica, si se puede reducir a **resolver un polinomio igualado a cero**. Desde el Renacimiento se conocen fórmulas exactas que nos permiten resolver **cualquier ecuación de grado igual o menor a cuatro**. Pero desde los trabajos de Abel, Ruffini y Galois sabemos que, en general, a partir del quinto grado no existen fórmulas semejantes para su resolución. Debido a ello, Mathematica no puede resolver de modo exacto dichas ecuaciones.

Mathematica calcula soluciones reales y complejas. Si la ecuación tiene alguna solución múltiple, aparecen las soluciones repetidas

Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$ (dos soluciones reales)
- $x^2 + 2x + 1 = 0$ (una solución doble)
- $x^2 - 4x + 5 = 0$ (soluciones complejas conjugadas)
- $ax^2 + bx + c = 0$
- $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 9x - 4 = 0$
- $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 4 = 0$

7.3. Sistemas con nº variables = nº ecuaciones

Los sistemas más elementales tienen el **mismo número de ecuaciones que de incógnitas**. Mathematica puede resolver sistemas lineales y saber si son **compatibles** o **incompatibles**. Si el sistema es **indeterminado** también nos da el conjunto de soluciones. Además puede resolver sistemas no lineales de cualquier dimensión. También podemos utilizar **NSolve** para obtener las soluciones aproximadas.

Si el número de variables es igual al número de ecuaciones, podemos omitir el segundo argumento y no escribir las variables.

Ejercicios

Resuelve los sistemas, de modo exacto y aproximado:

- $\begin{cases} 3x+7y=9 \\ -5x+9y=5 \end{cases}$ (una única solución)
- $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ (sin solución)
- $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x+2y=18 \end{cases}$ (infinitas soluciones)
- $\begin{cases} x^2-46x=8 \\ -6x+7y=-3 \end{cases}$ (sistema no lineal)

7.4. Sistemas con más incógnitas que ecuaciones

En este caso, como tenemos más letras que ecuaciones, debemos indicarle a Mathematica que letras son las que queremos resolver. Si no le decimos nada, Mathematica toma esa decisión por nosotros.

Ejercicios

Resuelve para distintas incógnitas

$$\begin{cases} 6x + 9y - 3z = 8 \\ 3x - 8y + 9z = 7 \end{cases}$$

7.5. Otros tipos de ecuaciones algebraicas

Algunas ecuaciones, en principio, no parecen ecuaciones algebraicas, pues en ellas aparecen radicales, fracciones algebraicas, ... Sin embargo, en algunos casos, se pueden transformar en ecuaciones algebraicas «casi» equivalentes. Lo de casi equivalentes significa que con esos procedimientos pueden aparecer soluciones de la ecuación algebraica que no son soluciones de la ecuación de partida. Las mas simples son las ecuaciones con radicales cuadráticos. Si dejamos sola una raíz y elevamos al cuadrado, vamos eliminando uno a uno todos los radicales. También entran en este bombo las ecuaciones con fracciones algebraicas: mediante operaciones algebraicas se reduce a una única fracción algebraica y después se «resuelve el numerador».

Ejercicios

Resuelve:

- $1+\sqrt{3x+4}=x+1$
- $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=2-\dfrac{x+4}{x-1}$

7.6. Ecuaciones no algebraicas

La mayor parte de las ecuaciones no algebraicas (transcendentes) **no se pueden resolver por métodos exactos**. Para resolver dichas ecuaciones se emplean métodos numéricos. En general, los métodos numéricos no encuentran todas las soluciones, sino que tenemos que darle una «semilla» y el método encontrará una solución próxima a la semilla.

El comando para resolver sistemas por métodos numéricos es **FindRoot[p==q,{x,s}]**. Además de la ecuación y la variable, debemos proporcionarle una semilla. Tanto la variable como la semilla van en el segundo argumento en forma de lista. Con la opción de **WorkingPrecision** tendremos mayor precisión. Este comando se puede utilizar también para sistemas, pero ahora debemos fijar una semilla para cada variable.

Ejercicios

- Resuelve las ecuaciones con distintas semillas.

$$a)\, x^2 - 1 = 0 \qquad b)\, \cos(x^2) - 6x = \tan(x)$$

- Resuelve el sistema con semillas $x = 1$, $y = 2$.

$$\begin{cases} y = \exp(x) \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Nuevas funciones

FindRoot.

7.7. Inecuaciones

El comando **Reduce[p,x]** se puede utilizar para ecuaciones en lugar del comando **Solve**. Sin embargo el comando **Solve** no se puede utilizar para inecuaciones, que se resuelven con **Reduce**. El resultado de la inecuación aperece escrito como una expresión boolena, que debemos traducir al lenguaje de los intervalos.

Le expresión boolena está escrita en el lenguaje de Mathematica. Con el comando **TraditionalForm** podemos escribirla en un lenguaje más matemático.

Ejercicios

Resuelve las inecuaciones:

- $4x-5>9$
- $x^2-5x+6\geq 0$
- $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\geq 0$

Nuevas funciones

TraditionalForm.

7.8. El método de sustitución

Uno de los primeros métodos que se estudian para resolver sistemas es el método de sustitución. Si tenemos dos ecuaciones, despejamos una letra en una de las ecuaciones y sustituimos en la otra. En Mathematica podemos hacer esto con el comando **Eliminate[p==q,x]**. Le facilitamos el sistema y la letra que queremos eliminar.

Cada vez que eliminamos una letra se elimina una ecuación. Podemos eliminar varias letras a la vez, situando la lista de ellas como segundo argumento.

Ejercicios

Eliminar cada una de las letras en el sistema:

$$\begin{cases} 3x+7y=9 \\ -5x+9y=5 \end{cases}$$

Nuevas funciones

Eliminate.