19. Diagonalización de matrices

19.1. Los autovectores y autovalores

Dada una matriz A cuadrada, consideramos la matriz $A - \lambda\mathrm{Id}$. Al calcular el determinante se obtiene un polinomio en λ. Las soluciones de dicho polinomio son los **autovalores** de A. Si λ es un autovalor, la matriz $A - \lambda\mathrm{Id}$ es singular y tiene un núcleo no nulo. Los vectores del núcleo son los **autovectores** asociados al autovalor λ. Si conseguimos tantos autovectores linealmente independientes com dimensión tenga la matriz, la matriz es diagonalizable.

Ejercicios

- Encuentra los autovalores y autovectores de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Comprueba que los autovectores efectivamente lo son.

19.2. Los comandos de diagonalización

Para saber si una matriz es diagonalizable tenemos el comando **DiagonalizableMatrixQ[M]**. Una vez que sabemos que es diagonalizable con **CharacteristicPolynomial[M,x]** tenemos el polinomio característico. Las raíces de este polinomio son los valores propios, que podemos conocer con **Eigenvalues[M]**. Los vectores propios asociados se obtienen con **Eigenvectors[M]**. **Si llamamos P a la matriz transpuesta que proporciona EigenVectors** entonces se cumple:

$$\text{Inverse[P]} \cdot M \cdot P = D$$

siendo D la matriz diagonal formada por los valores propios. Con **Eigensystem[M]** tenemos los valores propios y los vectores propios.

Ejercicios

Diagonaliza la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

DiagonalizableMatrixQ, CharacteristicPolynomial, Eigenvalues, Eigenvectors, Eigensystem.

19.3. La descomposición en valores singulares

Dada una matriz rectangular A, entonces $A \cdot A^t$ es una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva y por lo tanto tiene todos los autovalores positivos. La raíz cuadrada de dichos autovalores son **los valores singulares de** A. Se pueden obtener con **SingularValueList[A]**. El comando **SingularValueDecomposition[A]** devuelve tres matrices (U,V,W), donde v es diagonal y tiene los valores singulares en la diagonal y además:

$$A = U \cdot V \cdot W^t$$

La matrix A debe estar escrita con números decimales, pues en caso contrario devuelve todo en función de números algebraicos.

Ejercicios

Encuentra los valores singulares y la descomposición en valores singulares de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3. & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

SingularValueList, SingularValueDecomposition.

19.4. La forma de Jordan

Si la matriz no es diagonalizable, lo más que podemos hacer con la matriz es reducirla a la **forma normal de Jordan** (también se llama **forma canónica** de la matriz). **Si la matriz es diagonalizable la forma normal de Jordan es la matriz diagonal**.

El comando **JordanDecomposition[A]** realiza la descomposición. El resultado de este comando son dos matrices. La primera es la matriz P de cambio de base y el segundo J es la forma de Jordan de la matriz. Todas las matrices que hemos calculado están ligadas por la expresión.

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

Ejercicios

Realiza la descomposición de Jordan de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

JordanDecomposition.