12. Integrales

12.1. Integrales indefinidas

Mathematica puede calcular tanto integrales definidas como indefinidas en modo exacto con el comando **Integrate[f,x]**. Para calcular la primitiva, solamente tenemos que escribir la función y como segundo argumento la variable.

Es conocido en matemáticas que no todas las integrales se pueden expresar como una expresión con funciones elementales. Por ello Mathematica puede no saber hacer algunas integrales o dar algunos resultados «sorprendentes» en algunas integrales.

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales indefinidas, derivando para comprobar algún resultado:

- $a) \int x^5 \qquad b) \int 4y^3 - 5y \qquad c) \int x\cos(x)$
- $a) \int \exp(-x^2) \qquad b) \int \frac{\sin(x)}{x}$

Nuevas funciones

Integrate.

12.2. Integrales definidas

Para las integrales definidas usamos **Integrate[f,{x,a,b}]**.

A las integrales definidas les pasa lo mismo que a las definidas. En principio, si tenemos una primitiva, basta sustituir los extremos para calcular la integral definida. **El problema es que muchas funciones no tienen primitiva, expresable en forma cerrada**. Pero en este caso se puede recurrir a la **integración numérica**, empleando el comando **NIntegrate[f,{x,a,b}]**. Para fijar el número de cifras significativas tenemos la opción **WorkingPrecision**.

Ejercicios

Calcula las integrales definidas:

- $a)\int_0^4 4x^3-4x \qquad b)\int_0^{\pi/2}\cos(x)$
- $a)\int_0^4 \frac{\sin(x)}{x} \qquad \int_0^{\pi}\sin(\sin(x))$

Nuevas funciones

NIntegrate.

12.3. Integrales impropias

Las integrales impropias se caracterizan por alguno de estos dos «problemas».

- Alguno de los límites es infinito.
- La función no está acotada en el intervalo de integración.

Mathematica también pueda calcular integrales impropias. Si la integral no converge nos informa de ello en la solución.

Ejercicios

Calcula las integrales impropias:

$a)\ \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}$ $\quad b)\ \displaystyle\int_0^{6} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad c)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}$ $\quad d)\ \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}$

12.4. Integrales de fracciones algebraicas

Las integrales de fracciones algebraicas se pueden realizar descomponiendo en fracciones simples con el comando **Apart[frac]** e integrando cada término. Naturalmente Mathematica también puede realizar la integral de manera directa.

Ejercicios

Calcula la integral de la fracción algebraica. Descompón en fracciones simples e integra:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}$$

12.5. Integrales dependientes de parámetros

Si una función tiene varias variables e integramos con respecto a una de ellas, se dice que estamos haciendo **una integral con parámetros**. No se debe confundir este concepto con la integración en varias variables.

Ejercicios

Calcula la integral:

$$\int A \cdot \cos(wt)dt$$

12.6. Cálculo de áreas

La primera aplicación de las integrales es el **cálculo de áreas**. Si la función es siempre positiva, la integral definida es el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x. **Si la función tiene partes positivas y negativas, tenemos que hacer varias integrales**, siendo los límites de integración los puntos de corte con el eje x. Siguiendo ideas similares se puede calcular el área entre dos curvas.

Ejercicios

- Calcular el área del seno en el intervalo $(0,\pi)$.
- Calcular el área entre las curvas $y = 4x$ e $y = x^2$.

12.7. Sumas de series numéricas

Sabemos que las integrales definidas son en realidad sumas a las que se les hace posteriormente un límite. La suma de series es ciertamente similar: se realiza una suma parcial y posteriormente se toma un límite. En realidad, si tomamos una medida adecuada sobre el conjunto de los naturales, **una serie no es más que un ejemplo de integral de Lebesgue**.

Dada una sucesión a_n podemos sumar algunos de sus términos o también sumar un número infinito de términos (la suma de la serie). El comando que empleamos es **Sum[a,{i,imin,imax}]**. En el último término podemos poner ∞ y sumar la serie entera. Si la serie es divergente, entonces Mathematica nos informa de ello.

Ejercicios

- Realizar las siguientes sumas:

$$a)\sum_{1}^{100} n \qquad b)\sum_{1}^{n} i \qquad c)\sum_{1}^{n} i^2 \qquad d)\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

- Estudiar las sumas parciales y la convergencia de la serie armónica.

Nuevas funciones

Sum.