18. Factorización de Matrices

18.1. Descomposición LU

No siempre es posible hallar esta factorización. Permutando adecuadamente las filas, si es posible.

El comando es **LUDecomposition[M]**. La salida está formada por tres objetos. **El primero es una matriz donde se encuentran mezcladas las matrices L y U**. El segundo es un vector de permutaciones. El tercer resultado solamente tiene interés cuando los cálculos se realizan en coma flotante. Debido a estas peculiaridades del comando, podemos pedirle la descomposición a **WolframAlpha**, escribiendo:

LU decomposition of [Matriz]

Ejercicios

Realizar la descomposición LU de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

LUDecomposition.

18.2. Descomposición QR

La descomposición QR de una matriz A consiste en encontrar dos matrices Q y R, tales que:

- $A = Q \cdot R$
- Q es una matriz ortogonal ($Q \cdot Q^t = \mathrm{Id}$)
- R es triangular superior.

El comando **QRDecomposition[M]** nos proporciona dos matrices Q y R que cumplen:

$$\textbf{Transpose[Q]} \cdot R = A$$

Para saber si una matriz es ortogonal podemos realizar el producto de la matriz por su transpuesta o también utilizar el comando **OrthogonalMatrixQ[M]**.

Ejercicios

Realizar la descomposición QR de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

QRDecompostion, OrthogonalMatrixQ.

18.3. Descomposición de Choleski

Dada una matriz simétrica y definida positiva, se puede encontrar una base ortonormal, donde la matriz se reduce a la identidad. A nivel matricial, ello implica la existencia de una matriz L que cumple:

$$L \cdot L^t = A$$

Dicha matriz L se puede elegir que sea triangular inferior. Esto es conocido como descomposición de Cholesky, que se puede obtener con **CholeskyDecomposition[M]**. El resultado de este comando es una matriz L **triangular superior** que cumple:

$$\textbf{Transpose[L]} \cdot L = A$$

Para saber si una matriz es definida positiva utilizamos **PositiveDefiniteMatrixQ[M]**

Ejercicios

Realizar la descomposición de Choleski de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

CholeskyDecomposition, PositiveDefiniteMatrixQ.

18.4. Descomposición de Schur

Dado un espacio vectorial complejo, y una matriz con coeficientes complejos A, es posible (debido a que los complejos son algebraicamente cerrados) encontrar una matriz P tal que:

$$P^* \cdot A \cdot P$$

sea triangular.

Para obtener la transpuesta conjugada empleamos **ConjugateTranspose[M]**. Para saber si una matriz es unitaria podemos multiplicar la matriz por su compleja conjugada o podemos emplear el comando **UnitaryMatrixQ[M]**.

El comando **SchurDecomposition[M]** nos proporciona una matriz unitaria U y una matriz triangular T que cumplen:

$$U \cdot T \cdot \textbf{ConjugateTranspose[U]} = A$$

Ejercicios

Realiza la descomposición de Schur de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

Nuevas funciones

ConjugateTranspose, UnitaryMatrixQ, SchurDecomposition.