5. Polinomios

5.1. Operaciones

Los operadores para realizar las operaciones con los polinomios son los habituales. Cuando le pedimos a Mathematica que realice una operación con polinomios, en principio no la realiza. Para desarrollar la expresión empleamos el comando **Expand[p]**. Se puede trabajar con polinomios en **cualquier número de variables**, aunque casi todo lo aplicaremos a polinomios en una variable.

Ejercicios

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

- $x^3 + (3x^2 + 7)(4x - 1) + (2x - 3)^4$
- $(4x^2 + 5)^2$
- $(x + y)^3$

Nuevas funciones

Expand.

5.2. División con resto

Para realizar la división con resto de dos polinomios tenemos a nuestra disposición distintos comandos, similares a los que hemos visto para números enteros. Todos ellos llevan el prefijo **Polynomial** y además como segundo argumento debemos indicar la variable del polinomio. Para calcular el cociente tenemos **PolynomialQuotient[p,q,x]**, y para el resto, **PolynomialRemainder[p,q,x]**. Para calcular ambos a la vez el comando **PolynomialQuotientRemainder[p,q,x]**.

Ejercicios

Realiza la siguiente división de polinomios, comprobando el resultado:

$$(x^3 + 5x^2 - 3x + 2) : (4x - 3)$$

Nuevas funciones

PolynomialQuotient, PolynomialRemainder, PolynomialQuotientRemainder .

5.3. Factorización

El comando para factorizar polinomios es **Factor[p]**. Si no le añadimos ninguna opción, **factoriza los polinomios en el cuerpo de los racionales** (si las raíces son números irracionales o complejos no factoriza el polinomio). Si ponemos algún coeficiente como número decimal, factoriza, en el cuerpo real, con raíces aproximadas. Para conseguir que factorice en el cuerpo complejo tenemos que poner la opción **GaussianIntegers** en *True*.

Ejercicios

Factoriza los siguientes polinomios y comprueba el resultado:

- $p = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$
- $q = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
- $x^3 + x^2 - 2x - 2$
- $x^3 + 3x^2 + x + 3$

Nuevas funciones

Factor, GaussianIntegers.

5.4. Mcd y mcm

Para calcular el *mcd* y el *mcm* con polinomios utilizamos **PolynomialGCD[p,q,...]** y **PolynomialLCM[p,q,...]**.

Ejercicios

Calcula el máximo común denominador y el mínimo común múltiplo de los polinomios p y q anteriores.

Nuevas funciones

PolynomialGCD, PolynomialLCM.

5.5. Sustitución de variables

Para sustituir letras en el polinomio, utilizamos /., escribiendo a continuación la sustitución, empleando un guión y el signo >, que se transformarán en una flecha. Esto es lo que en Mathematica se denomina una **regla**. Si queremos hacer varias sustituciones tenemos que poner las reglas en una lista.

Otro método consiste en transformar el polinomio en una función.

Ejercicios

Calcula el valor de $p(x)$ cuando x es 5 y cuando x es 1. Sustituye x por $y^2 - 1$.

5.6. Raíces de polinomios

Para obtener las raíces utilizamos **Roots[p==0,x]**. El polinomio debe estar igualado a cero (**se debe emplear un doble igual**), y como segundo argumento tenemos que escribir la variable. La solución, si es posible, es facilitada en forma exacta y con su multiplicidad. El comando encuentra tanto las raíces reales como las complejas.

Muchas veces tanta exactitud es contraproducente. En ese caso se puede utilizar **NRoots[p==0,x]**, que hace lo mismo, pero da la soluciones numéricas. La opción **PrecisionGoal** nos permite fijar el número de cifras de la solución.

Ejercicios

Encuentra las raíces, exactas o aproximadas, de los polinomios:

- $p = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$
- $x^3 - 5x^2 + 3x + 2$
- $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Nuevas funciones

Roots, NRoots, PrecisionGoal.

5.7. Polinomio interpolador de Lagrange

Fijados n puntos del plano, de tal forma que ningun par de ellos tenga la misma coordenada x (no puede estar un punto «encima» de otro), existe un polinomio de grado menor o igual que n que pasa por todos los puntos. Si los puntos estan en «posición general» el polinomio es de grado n. En particular, por dos puntos, pasa una recta, por tres puntos una parábola, ...

El comando para obtener el polinomio es **InterpolatingPolynomial[lista,x]**. La lista debe ser el conjunto de puntos por el que queremos que pase. Como segundo argumento escribimos la letra que queremos para el polinomio.

Ejercicios

Encontrar el polinomio interpolador, comprobando analíticamente que pasa por los puntos:

- Recta que pasa por $(3,4)$ y $(6,8)$.
- Parábola que pasa por $(3,6)$, $(2,7)$ y $(4,7)$.
- Polinomio por los puntos $(2,3)$, $(3,4)$ y $(4,5)$.

Nuevas funciones

InterpolatingPolynomial.

5.8. Números algebraicos y polinomio mínimo

Un número real o complejo a es un número algebraico si existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros tal que a es una raíz del polinomio. Si el número es algebraico, existen muchos polinomios que cumplen la condición. Pero existe un único polinomio de grado mínimo que lo cumple: este es el denominado polinomio mínimo del número a. Para conseguir el polinomio mínimo de a escribimos **MinimalPolynomial[a,x]**.

Para saber si un número es algebraico utilizamos el comando **Element[a, Algebraics]**.

Ejercicios

Calcula los polinomios mínimos, comprobando si son algebraicos, los siguientes números. Comprueba que efectivamente los números son raíces del polinomio mínimo:

$$a)\,3/2 \qquad b)\,\sqrt{3} \qquad c)\,\sqrt[3]{5}+8\sqrt{3} \qquad d)\,\pi(?)$$

Nuevas funciones

MinimalPolynomial, Element, Algebraics.