20. Cálculo vectorial

20.1. Dibujo de campos vectoriales

Una función $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **se puede entender como un conjunto de n funciones de n variables**. Sin embargo también podemos pensarlo de otro modo: dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$, $f(a)$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto es un vector. **Si dibujamos dicho vector $f(a)$, «naciendo» en el punto a, tenemos un campo vectorial: en cada punto de $\mathbb{R}^n$ tenemos un vector dibujado**. Para dibujar estos campos vectoriales se emplea el comando

VectorPlot[campo, {x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

y el análogo en tres dimensiones **VectorPlot3D**

Ejercicios

Dibuja el campo vectorial bidimensional $V = yi - xj$ y el campo tridimensional $V = (2xy, 4x, 5zy)$.

Nuevas funciones

VectorPlot, VectorPlot3D.

20.2. Gradiente, laplaciano y hessiano

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diversas combinaciones de derivadas parciales tienen sentido geométrico. El gradiente de una de esta funciones se calcula con **Grad[f,{$x_1, \ldots, x_n$}]** y el laplaciano con **Laplacian[f,{$x_1, \ldots, x_n$}]**. Si no indicamos nada en contra, **Mathematica supone que estamos utilizando coordenadas cartesianas**.

Como el gradiente y la divergencia no son más que combinaciones de derivadas parciales, se pueden obtener con el operador **D**. El gradiente se calcula con (ojo a la doble llave):

D[f[x,y,z],{{x,y,z}}]

El **hessiano** es la matriz de las derivadas segundas y no tiene comando específico en Mathematica. Lo podemos calcular con:

D[f[x,y,z],{{x,y,z},2 }]

Ejercicios

Calcula el gradiente,el laplaciano y el hessiano de una función general y de:

$$f = x^2 + y^2 + z^2 \qquad\qquad g = xyz^6 + 3(x+y)z^2$$

Nuevas funciones

Grad, Laplacian.

20.3. Divergencia, rotacional y jacobiano

Los campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$, una vez fijadas unas coordenadas, se pueden entender como funciones vectoriales de varias variables. Para definir una función vectorial creamos una lista (entre llaves) con cada una de las funciones coordenadas. La divergencia se calcula con **Div[{$f_1,\ldots,f_n$},{$x_1,\ldots,x_n$}]** y el rotacional con **Curl[{$f_1,\ldots,f_n$},{$x_1,\ldots,x_n$}]**

El **jacobiano** no tiene comando asignado en Mathematica, pero lo calculamos con:

D[V[x,y,z],{{x,y,z}}]

Ejercicios

Calcula la divergencia,el rotacional y el jacobiano del campo:

$$V = \{3(x+y)z, 5xyz^3, 8x^2+3z-7y\}$$

Nuevas funciones

Div, Curl.

20.4. Identidades vectoriales

En el cálculo vectorial existen muchas identidades que nos permiten realizar los cálculos de manera más sencilla. Con Mathematica podemos comprobar con ejemplos la veracidad de dichas fórmulas. Además de eso, y gracias al cálculo simbólico, se pueden «demostrar» estas identidades.

Ejercicios

Comprueba las siguientes identidades vectoriales:

- $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$
- $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{lap}(f)$
- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(V)) = 0$

20.5. Otros sistemas de coordenadas

Además de en coordenadas cartesianas, Mathematica realiza cálculos en **distintos sistemas de coordenadas**. Las más típicas son las esféricas y las cilíndricas (o las polares en dimensión 2). Para decirle a Mathematica que realice los cálculos en estas coordenadas debemos especificar **"Spherical"** y **"Cylindrical"**, **'Polar"** como un argumento extra (es necesario escribir las comillas). Las variables pueden tener cualquier nombre, pero si queremos seguir la notación matemáticas podemos utilizar la tecla "Esc".

Ejercicios

Calcula en coordenadas esféricas el gradiente de:

$$r\cos(\theta)\sin(\phi)$$

Nuevas funciones

Spherical, Cylindrical, Polar.