22. Ecuaciones diferenciales

22.1. Solución de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una igualdad donde aparece, al menos, una derivada de una función. En general la función desconocida se denota por la letra y. Sus derivadas, o bien por $y', y'', \ldots$ o bien por $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$, donde la x es la variable de la que depende la función. **Una solución de una ecuación diferencial es cualquier función que al sustituirla en la ecuación nos proporcione una identidad**. En general las ecuaciones diferenciales tienen infinitas soluciones.

Ejercicios

Comprobar que las siguientes funciones son solución de las ecuaciones diferenciales escritas a su derecha.

$$\begin{array}{rcl}
\exp(x) & \hookrightarrow & y' = y \\
7\exp(x) & \hookrightarrow & y' = y \\
\cos(x) & \hookrightarrow & y'' = -y \\
\sin(x) & \hookrightarrow & y'' = -y \\
a\sin(x) + b\cos(x) & \hookrightarrow & y'' = -y
\end{array}$$

22.2. Ecuaciones de primer orden

El comando para obtener la solución general es:

DSolve[ecuación, y,x]

- **Es importante escribir la dependencia de la variable en todas las apariciones de la función y sus derivadas.**
- **Para extraer la solución se pueden utilizar los corchetes dobles**.
- **El resultado es una «función pura».**
- **Las infinitas soluciones dependen de una constante, que se denota C[1].**

Ejercicios

Resuelve y comprueba la solución:

$$a)\, \frac{dy}{dx} = y \qquad\qquad b)\, y' = 2x + 3y$$

Nuevas funciones

DSolve

22.3. Ecuaciones de mayor orden

En las ecuaciones de orden mayor que uno, aparecen tantas constantes como orden tenga la ecuación. Las derivadas sucesivas se van indicando con más apóstrofes.

La mayor parte de las ecuaciones diferenciales no las puede resolver Mathematica de modo exacto y en muchas de ellas aparecen las llamadas **funciones especiales**.

Ejercicios

Resuelve y comprueba alguna solución:

$$a)\, y'' = y \qquad\qquad b)\, x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - 9) \cdot y = 0$$

22.4. Ecuaciones con valor inicial

Dada una ecuación diferencial de primer grado, si fijamos el valor en un punto de la solución, estamos eligiendo una de las infinitas soluciones de la ecuación general. **El teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales, nos dice que, bajo supuestos muy generales, dicha solución es única**. Para dar la condición inicial la escribimos junto con la ecuación diferencial en forma de lista.

DSolve[{ecuación, condición}, y,x]

Naturalmente si la ecuación es de grado mayor debemos dar tantas condiciones como orden tenga la ecuación.

Ejercicios

- Resuelve y dibuja $y' = y$ con $y(0) = 3$.
- Resuelve y dibuja $y'' = y$ con las condiciones $y(3) = 4$ e $y'(0) = 2$.

22.5. El campo vectorial asociado a la ecuación

Dada una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ el campo vectorial $\{1, f(x,y)\}$ es el campo asociado la ecuación diferencial. Para dibujar el campo utilizamos:

VectorPlot[campo,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

Las curvas que son soluciones de la ecuación se adaptan al campo en el siguiente sentido: el vector velocidad de la curva en el punto es también el vector del campo vectorial.

Ejercicios

Dada la ecuación diferencial $y' = y$, dibuja el campo vectorial y una solución de la ecuación diferencial, todo en la misma gráfica.

Nuevas funciones

VectorPlot.

22.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

En un sistema, existen varias funciones desconocidas, todas dependiendo de la misma variable. También existen varias ecuaciones y se pueden establecer condiciones iniciales para varias funciones. La solución general dependerá de varios parámetros y en cuanto vayamos añadiendo condiciones iniciales, se irán reduciendo las constantes de integración.

Ejercicios

- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = t^2 \end{cases}$$

- Añadir la condiciones iniciales $x(0) = 1$ e $y(2) = 3$.

22.7. Resolución numérica

Normalmente una ecuación diferencial no admite una solución explícita en términos de funciones, ya sean elementales o especiales. En este caso debemos recurrir a la integración numérica.. El comando para hacer esta aproximación es:

NDSolve[ecuación, y,{x,xmin,xmax}]

Es imprescindible dar las condiciones iniciales, de modo que la solución sea única. La solución será una función definida únicamente en el dominio $(xmin, xmax)$. Para extraer la solución volvemos a emplear el doble corchete. Con la solución no podemos hacer muchas cosas, puesto que no tiene una fórmula explícita. Podemos, eso si, **calcular valores de la función en puntos del dominio y graficar la función, también en puntos del dominio**.

Ejercicios

Resuelve de modo aproximado la ecuación $y' + y = 0$ con la condición inicial $y(0) = 1$, en el intervalo $(0, 2\pi)$. Grafica la solución.

Nuevas funciones

NDSolve.