Aufgabe 1. Kreuzen Sie von den folgenden Zahlen die an, die durch 8 teilbar sind.

☐ $3^{4000} + 15$

☐ $3^{4001} + 5$

☐ $3^{4000} + 5$

☐ $3^{400} + 15$

☐ $3^{400} + 7$

Lösung: 3^4 ist 81, modulo 8 also kongruent zu 1. Damit sind auch 3^{400} und 3^{4000} kongruent zu 1 modulo 8 und $3^{4001} = 3 \cdot 3^{4000}$ ist kongruent zu 3. Man musste also alle außer dem mittleren Kästchen ankreuzen.

Aufgabe 2. Geben Sie die *kleinste* positive Lösung x des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 6 \pmod{7} \\ x &\equiv 5 \pmod{9} \end{aligned}$$

Lösung: Die kleinste positive Lösung ist 41.

Aufgabe 3. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung in $\mathbb{C}$ an:

$$x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = 0$$

Lösung: Mit dem Horner-Schema findet man die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Es verbleibt das Polynom $x^2 + 9$ mit den beiden Nullstellen $x_3 = 3\mathrm{i}$ und $x_4 = -3\mathrm{i}$.

Aufgabe 4. Geben Sie das Polynom zweiten Grades an, das durch die folgenden Punkte geht:

$$P_0 = (-1, 9) \qquad P_1 = (1, -1) \qquad P_2 = (2, 3)$$

Lösung: Die gesuchte Lösung ist $3x^2 - 5x + 1$.

Aufgabe 5. Gegeben sei die folgende Permutation:

$$\sigma = (1\ 8\ 4\ 2)\ (3\ 5\ 6)\ (7\ 9\ 10)$$

Geben Sie σ^{13} in Zyklenschreibweise an.

Lösung: σ^{13} ist dieselbe Permutation wie σ.

Aufgabe 6. Geben Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_5$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Lösung ist $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 4, 2)$.

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Inverse sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. Welchen Wert muss man für a einsetzen, damit die Matrix $\boldsymbol{M}$ die Determinante 0 hat?

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Determinante von $\boldsymbol{M}$ ist $6(a - \mathrm{i})$. Damit dieser Wert verschwindet, muss also $a = \mathrm{i}$ gelten.

Aufgabe 9. Geben Sie das Ergebnis (inklusive Rest, falls es einen gibt) der folgenden Division an:

$$(4x^6 + 8x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 10x^2 + x) : (2x^2 - 1)$$

Lösung: Der Quotient ist $2x^4 + 4x^3 + 5$ und der Rest $x + 5$.

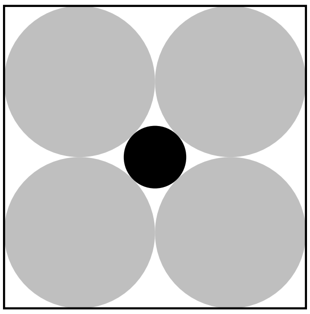
Aufgabe 10. Geben Sie den Grenzwert dieser Folge an:

$$\left(\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n-1}} \cdot \frac{5}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)$$

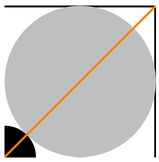
Lösung: Der zweite Summand geht offenbar gegen null. Für den ersten gilt:

$$\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n-1}} \cdot \frac{5}{n^3} = 5 \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}} = 5 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \longrightarrow 5 \cdot \mathrm{e} \cdot 1 = 5\mathrm{e}$$

Aufgabe 11. In der Skizze unten sehen Sie ein Quadrat der Seitenlänge 4, in dem vier gleich große (graue) Kreise liegen. Jeder dieser Kreise berüht zwei der anderen grauen Kreise und zwei Seiten des Quadrats in jeweils genau einem Punkt. Der kleine (schwarze) Kreis in der Mitte berüht jeden der vier großen Kreise in genau einem Punkt. Welchen Radius hat der kleine Kreis?



Lösung: Wir betrachten ein Viertel des Quadrats:



Dieses kleine Quadrat hat die Seitenlänge 2. Die orange Diagonale hat nach Pythagoras dann die Länge $4/\sqrt{2}$. Da der Durchmesser des grauen Kreises sicher ebenfalls 2 ist und der Radius des kleinen Kreises offenbar die Hälfte dessen ausmacht, was übrigbleibt, wenn man von der Diagonale den Durchmesser entfernt, erhält man diese Lösung:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 2 \right) = \sqrt{2} - 1$$