

Bitte tragen Sie zunächst **in Druckschrift** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Geben Sie am Ende der Klausur **nur** die zusammengehefteten Aufgabenzettel ab und schreiben Sie die Lösungen deutlich lesbar in die dafür vorgesehenen Felder. In die Bewertung geht ausschließlich ein, ob Ihre Antworten korrekt sind oder nicht. Geben Sie daher bitte **keine** Schmierzettel mit Lösungsversuchen ab und benutzen Sie die Aufgabenzettel **nicht** für Notizen.

Als Hilfsmittel sind eigenhändig angefertigte handschriftliche Notizen erlaubt, und zwar maximal zwei Seiten DIN A4, d.h. **ein** Blatt, das beidseitig beschrieben ist. Sie dürfen außerdem den Ihnen zur Verfügung gestellten Computer benutzen, auf dem Sie mit PYTHON arbeiten können. Dort finden Sie auch ein PDF des Skripts zur Vorlesung.

Nicht erlaubt sind eigene elektronische Geräte jeglicher Art: Taschenrechner, Computer, Tablet-PCs, aber auch Mobiltelefone, MP3-Player, Spielekonsolen, usw. **Nicht** erlaubt sind außerdem gedruckte oder kopierte Unterlagen, insbesondere Bücher. Sie dürfen außerdem mit dem oben genannten Computer **keine** Verbindung zum Internet herstellen oder ein anderes als das voreingestellte Betriebssystem starten.

Wenn Sie eine Aufgabe nicht verstanden haben oder sich nicht sicher sind, melden Sie sich bitte!

Überprüfen Sie, dass Sie insgesamt 4 Seiten mit 20 Aufgaben bekommen haben.

Name:	
Matrikelnummer:	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		Σ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--	----------

- ① Wie viele Teilmengen von $\{4, \underline{5}, 6, \underline{7}, 8, 9, 10, \underline{11}, 12, \underline{13}, 14, 15, 16\}$ gibt es, die mindestens eine Primzahl enthalten?

--	--

2. Den Ausdruck $(1+x)^{19}$ kann man auch als $\sum_{k=0}^{19} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_{13} , der vor x^{13} steht, an. (Hinweis: Binomischer Lehrsatz.)

--	--

- ③ In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie sie an:

☐ $[3, 5] \cap [4, 6]$

☐ $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐ $[3, 5) \cup [4, 6]$

☐ $(4, 6] \cap [3, 5]$

☐ $(3, 5] \cap [4, 6]$

☐ $[4, 6] \cup [3, 5]$

- ④ Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2}{n^2 + 6n + 9}\right)^n\right)$ an.

--

5. Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☐ $n \log n \in \mathcal{O}(n^2)$

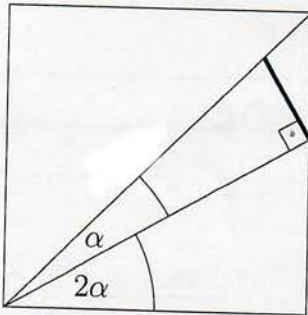
☐ $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$

☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

☐ $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$

7. Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 50. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



8. Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 4 \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x - 4 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f + g$

☐ $f \circ g$

☐ $f \cdot g$

☐ $g \circ f$

9. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(3, -4, 2)^T$ und $(-1, -1, 4)^T$ steht und der außerdem normiert ist.

10. Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix singular ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Die durch $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$ definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

12. A sei die Matrix der Spiegelung an der y -Achse. B und C seien 2×2 -Matrizen mit den Determinanten 4 und 24. Geben Sie die Determinante von $A \cdot B^{-1} \cdot C^T$ an.

13. Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

- ☐ $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$
☐ $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0 \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$
☐ $[-4, \infty) \cap (-\infty, 4]$
☐ $\{a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ und } b \leq 42\}$
☐ $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$

14. Sei f die Spiegelung an der x -Achse, g die durch $v \mapsto v + (2, 3)^T$ definierte Translation und h die Drehung um den Nullpunkt um -90° . Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung $f \circ g \circ h$ repräsentiert.

0	0	1

15. Wenn man in den Kasten unten True einsetzt, wird foo eine Generator-Funktion, die die Menge $A = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1\}$ rekursiv aufzählt. Was muss man in den Kasten einsetzen, damit in dieser Aufzählung jedes Element aus A nur einmal vorkommt?

```

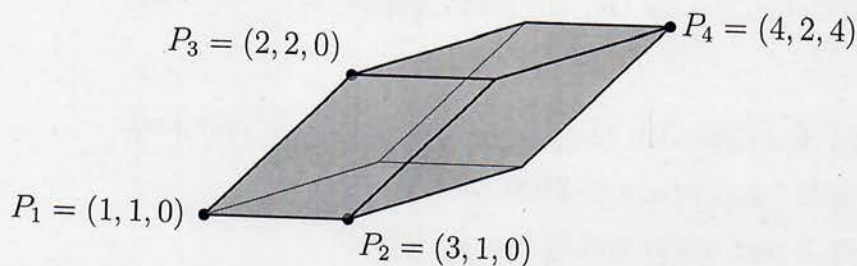
from fractions import Fraction
from math import *                                # <-- Das ist ein Hinweis...

def foo ():
    i = 3
    while True:
        for m in range(1, ceil(i / 2)):
            n = i - m
            if [ ]:
                yield Fraction(m, n)
        i += 1

```

16. Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von genau vier (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 24 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^4 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$.)

17. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:



(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

18. Ermitteln Sie in \mathbb{Z}_7 die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$3x + 2y + z = 2$$

$$x + 5y + 4z = 0$$

$$2x + y + z = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

19. Die Ebene E steht senkrecht auf dem Vektor $(1, 2, 3)^T$ und enthält den Punkt $(4, 5, 6)$. Geben Sie den Abstand von $(7, 8, 9)$ zu E auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

20. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wahr sind:

- ☐ Wenn A und B regulär sind, dann ist $A \cdot B$ auch regulär.
- ☐ Wenn A regulär ist, dann ist $42 \cdot A$ auch regulär. ?
- ☐ Wenn A regulär ist, dann ist A^{-1} auch regulär.
- ☐ Wenn A regulär ist, dann ist A^T auch regulär.
- ☐ Wenn A regulär ist, dann ist $A^2 = A \cdot A$ auch regulär.
- ☐ Wenn A und B regulär sind, dann ist $A + B$ auch regulär.

Bitte tragen Sie zunächst **in Druckschrift** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Geben Sie am Ende
die Lösungen
ein, ob Ihre
Lösungsversuch

Als Hilfsmittel
zwei Seiten DI
Verfügung ges
Sie auch ein P

Nicht erlaubt
PCs, aber auc
druckte oder k
ten Computer
Betriebssystem starten.

Schreiben Sie
ausschließlich
nierzettel mit

zwar maximal
den Ihnen zur
1. Dort finden

puter, Tablet-
außerdem ge-
oben genann-
voreingestellte

Lösungen

Wenn Sie eine Aufgabe nicht verstanden haben oder sich nicht sicher sind, melden Sie sich bitte!

Überprüfen Sie, dass Sie insgesamt 4 Seiten mit 20 Aufgaben bekommen haben.

Name:	
Matrikelnummer:	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		Σ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--	---

1. Wie viele Teilmengen von $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ gibt es, die mindestens eine Primzahl enthalten?

7680

2. Den Ausdruck $(1+x)^{19}$ kann man auch als $\sum_{k=0}^{19} a_k x^k$ schreiben. Geben Sie den Koeffizienten a_{13} , der vor x^{13} steht, an. (Hinweis: Binomischer Lehrsatz.)

X

3. In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie sie an:

☐ $[3, 5] \cap [4, 6]$

☐ $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐ $[3, 5] \cup [4, 6]$

☒ $(4, 6] \cap [3, 5]$

☐ $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐ $[4, 6] \cup [3, 5]$

✓

4. Geben Sie den Grenzwert der Folge $\left(\left(\frac{n^2}{n^2 + 6n + 9}\right)^n\right)$ an.

e^{-6}

✓

5. Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1

6. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☒ $n \log n \in \mathcal{O}(n^2)$? ✓

☐ $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$ ~

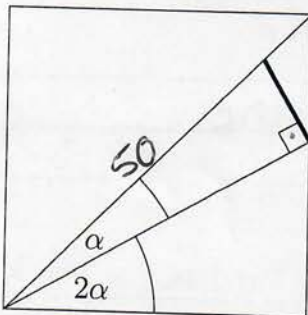
☐ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$ ~

☒ $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$ ✓

☒ $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$ ✓

✓

7. Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 50. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



8. Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 4 \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x - 4 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐ $f + g$

☒ $f \circ g$

☐ $f \cdot g$

☒ $g \circ f$ ✓

9. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren $(3, -4, 2)^T$ und $(-1, -1, 4)^T$ steht und der außerdem normiert ist.

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T$$

✓

10. Welchen Wert muss a haben, damit die folgende Matrix singular ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

✓

11. Die durch $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$ definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

4π

12. A sei die Matrix der Spiegelung an der y -Achse. B und C seien 2×2 -Matrizen mit den Determinanten 4 und 24. Geben Sie die Determinante von $A \cdot B^{-1} \cdot C^T$ an.

✓ -6

13. Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

☒ $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

☐ $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0 \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

☒ $[-4, \infty) \cap (-\infty, 4]$ ~

☒ $\{a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ und } b \leq 42\}$

☐ $\mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$

14. Sei f die Spiegelung an der x -Achse, g die durch $v \mapsto v + (2, 3)^T$ definierte Translation und h die Drehung um den Nullpunkt um -90° . Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung $f \circ g \circ h$ repräsentiert.

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✗

15. Wenn man in den Kasten unten True einsetzt, wird foo eine Generator-Funktion, die die Menge $A = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < 1\}$ rekursiv aufzählt. Was muss man in den Kasten einsetzen, damit in dieser Aufzählung jedes Element aus A nur einmal vorkommt?

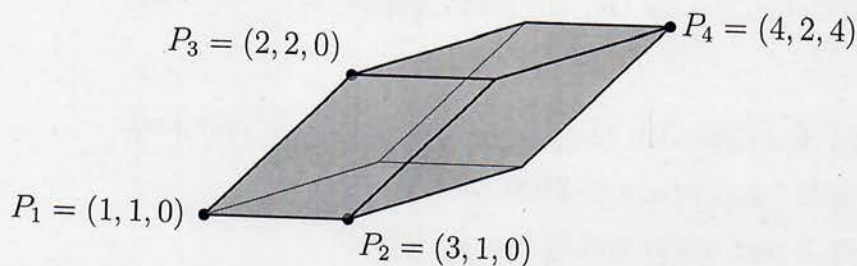
```
from fractions import Fraction
from math import *                                # <-- Das ist ein Hinweis...

def foo ():
    i = 3
    while True:
        for m in range(1, ceil(i / 2)):
            n = i - m
            if :
                yield Fraction(m, n)
            i += 1
```

16. Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, die man als Produkt von genau vier (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen unter 24 darstellen kann? (Beispiele für solche Zahlen sind 2^4 oder $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23$.)

✓ 495

17. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:



(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

18. Ermitteln Sie in \mathbb{Z}_7 die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$3x + 2y + z = 2$$

$$x + 5y + 4z = 0$$

$$2x + y + z = 2$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. Die Ebene E steht senkrecht auf dem Vektor $(1, 2, 3)^T$ und enthält den Punkt $(4, 5, 6)$. Geben Sie den Abstand von $(7, 8, 9)$ zu E auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



20. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wahr sind:

☒ Wenn A und B regulär sind, dann ist $A \cdot B$ auch regulär.

☒ Wenn A regulär ist, dann ist $42 \cdot A$ auch regulär. ?

☒ Wenn A regulär ist, dann ist A^{-1} auch regulär.

☒ Wenn A regulär ist, dann ist A^T auch regulär.

☒ Wenn A regulär ist, dann ist $A^2 = A \cdot A$ auch regulär.

☐ Wenn A und B regulär sind, dann ist $A + B$ auch regulär.

