

Bitte tragen Sie zunächst **in Druckschrift** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Geben Sie am Ende der Klausur **nur** die zusammengehefteten Aufgabenzettel ab und schreiben Sie die Lösungen deutlich lesbar in die dafür vorgesehenen Felder. In die Bewertung geht ausschließlich ein, ob Ihre Antworten korrekt sind oder nicht. Geben Sie daher bitte **keine** Schmierzettel mit Lösungsversuchen ab und benutzen Sie die Aufgabenzettel **nicht** für Notizen.

Als Hilfsmittel sind eigenhändig angefertigte handschriftliche Notizen erlaubt, und zwar maximal zwei Seiten DIN A4, d.h. **ein** Blatt, das beidseitig beschrieben ist. Sie dürfen außerdem den Ihnen zur Verfügung gestellten Computer benutzen, auf dem Sie mit PYTHON arbeiten können. Dort finden Sie auch ein PDF des Skripts zur Vorlesung.

**Nicht** erlaubt sind eigene elektronische Geräte jeglicher Art: Taschenrechner, Computer, Tablet-PCs, aber auch Mobiltelefone, MP3-Player, Spielekonsolen, usw. **Nicht** erlaubt sind außerdem gedruckte oder kopierte Unterlagen, insbesondere Bücher. Sie dürfen außerdem mit dem oben genannten Computer **keine** Verbindung zum Internet herstellen oder ein anderes als das voreingestellte Betriebssystem starten.

Wenn Sie eine Aufgabe nicht verstanden haben oder sich nicht sicher sind, melden Sie sich bitte!

Überprüfen Sie, dass Sie insgesamt 4 Seiten mit 20 Aufgaben bekommen haben.

Name:	[Redacted]	Vorname:	[Redacted]
Matrikelnummer:	[Redacted]		05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ
X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	19

- ✗ 1. Geben Sie die dreißigste Nachkommastelle von  $\sqrt{21}$  an.

8 ✓

2. Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare und tragen Sie sie in die Tabelle ein.

$$A = \{38, 40\}$$

$$B = [38, 40) \cup (38, 40]$$

$$C = [38, 43) \cup \{38, 40, 43\}$$

$$D = [40, 43] \setminus \{40\}$$

$$E = [38, 43] \setminus (40, 43]$$

$$F = [38, 43] \cap (40, 43]$$

$$G = [38, 40] \cup [40, 43]$$

$$H = [40, 40] \setminus (40, 43]$$

$$I = [38, 40] \cap [40, 43]$$

$$J = [38, 40] \setminus (38, 40)$$

Die Menge...	A	B	C	D	H
ist identisch mit der Menge...	3	E	G	F	I

3. Geben Sie die Polarkoordinaten des Punktes  $(-1, \sqrt{3})$  an. (Winkel  $\varphi$  in Bogenmaß und  $|\varphi| \leq \pi$ )

$$r = \boxed{2}$$

$$\varphi = \boxed{2,09}$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

4. In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie sie an:

☐  $[3, 5] \cap [4, 6]$

☒  $(4, 6) \cap [3, 5]$

☐  $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐  $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐  $[4, 6] \cup [3, 5]$

☐  $[3, 5] \cup [4, 6]$

5. Geben Sie den Grenzwert der Folge  $\left(\left(\frac{n^2}{n^2 + 6n + 9}\right)^n\right)$  an.

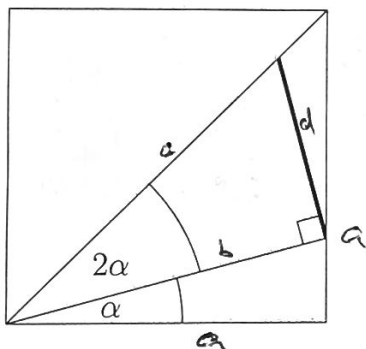
$$\boxed{e^{-6}}$$

6. Welchen Wert muss  $a$  haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1}$$

7. Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 30. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.



$$\boxed{12,68}$$

8. Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐  $f \circ g$

☐  $g \circ f$

☐  $f + g$

☒  $f \cdot g$

9. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren  $(-4, -3, -2)^T$  und  $(-1, 1, -4)^T$  steht und der außerdem normiert ist.

$$\boxed{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T}$$

10. Welchen Wert muss  $a$  haben, damit die folgende Matrix singular ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1}$$

11. Die durch  $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 7v_2, v_1 + 3v_2)^T$  definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

$4\pi$

12.  $A$  sei die Matrix der Spiegelung an der  $y$ -Achse.  $B$  und  $C$  seien  $2 \times 2$ -Matrizen mit den Determinanten 3 und 27. Geben Sie die Determinante von  $A \cdot B^{-1} \cdot C^T$  an.

$-9$

13. Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

☐  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

☐  $[-4, \infty) \setminus (-\infty, 5]$

☒  $\{a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ und } b \leq 42\}$

☐  $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0 \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

☒  $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

14. Sei  $f$  die Spiegelung an der  $y$ -Achse,  $g$  die durch  $v \mapsto v + (3, 2)^T$  definierte Translation und  $h$  die Drehung um den Nullpunkt um  $90^\circ$ . Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung  $f \circ g \circ h$  repräsentiert.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Die folgende Generator-Funktion soll alle Primzahlen rekursiv aufzählen, wenn man sie als `foo()` aufruft. Was muss im Kasten stehen, damit das funktioniert? (Sie dürfen *keine* Funktionen verwenden, die man erst importieren müsste.)

```
from math import sqrt
```

```
def foo (n = False):
```

```
    k = 2
```

```
    while not n or k <= n:
```

```
        X = True
```

```
        for p in foo(sqrt(k)):
```

```
            if  $k \% p == 0$  :
```

```
                X = False
```

```
                break
```

```
        if X:
```

```
            yield k
```

```
        k += 1
```

16. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

☒  $(\log n)^2 \in \mathcal{O}(n^2)$

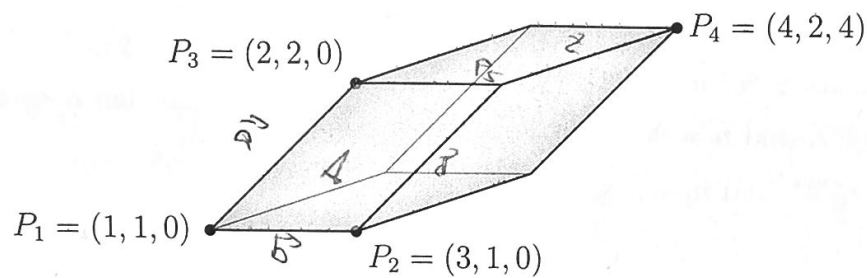
☒  $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

☒  $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$

☐  $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$

☐  $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$

17. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:



8

(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

18. Ermitteln Sie in  $\mathbb{Z}_7$  die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$3x + 2y + z = 1$$

$$x + 5y + 4z = 0$$

$$2x + y + z = 4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19. Die Gerade  $g$  steht senkrecht auf dem Vektor  $(1, 2)^T$  und enthält den Punkt  $(4, 5)$ . Geben Sie den Abstand von  $(7, 8)$  zu  $g$  auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

4,02

4,02

20. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wahr sind:

☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^{-1}$  auch regulär.

☐ Wenn  $A$  und  $B$  regulär sind, dann ist  $A + B$  auch regulär.

☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^2 = A \cdot A$  auch regulär.

☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^T$  auch regulär.

☒ Wenn  $A$  und  $B$  regulär sind, dann ist  $A \cdot B$  auch regulär.

☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $42 \cdot A$  auch regulär.

Bitte tragen Sie zunächst **in Druckschrift** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Geben Sie am Ende der Klausur **nur** die zusammengehefteten Aufgabenzettel ab und schreiben Sie die Lösungen deutlich lesbar in die dafür vorgesehenen Felder. In die Bewertung geht ausschließlich ein, ob Ihre Antworten korrekt sind oder nicht. Geben Sie daher bitte **keine** Schmierzettel mit Lösungsversuchen ab und benutzen Sie die Aufgabenzettel **nicht** für Notizen.

Als Hilfsmittel sind eigenhändig angefertigte handschriftliche Notizen erlaubt, und zwar maximal zwei Seiten DIN A4, d.h. **ein** Blatt, das beidseitig beschrieben ist. Sie dürfen außerdem den Ihnen zur Verfügung gestellten Computer benutzen, auf dem Sie mit PYTHON arbeiten können. Dort finden Sie auch ein PDF des Skripts zur Vorlesung.

**Nicht** erlaubt sind eigene elektronische Geräte jeglicher Art: Taschenrechner, Computer, Tablet-PCs, aber auch Mobiltelefone, MP3-Player, Spielekonsolen, usw. **Nicht** erlaubt sind außerdem gedruckte oder kopierte Unterlagen, insbesondere Bücher. Sie dürfen außerdem mit dem oben genannten Computer **keine** Verbindung zum Internet herstellen oder ein anderes als das voreingestellte Betriebssystem starten.

Wenn Sie eine Aufgabe nicht verstanden haben oder sich nicht sicher sind, melden Sie sich bitte!

Überprüfen Sie, dass Sie insgesamt 4 Seiten mit 20 Aufgaben bekommen haben.

Name:	[Redacted]	Vorname:	[Redacted]
Matrikelnummer:	[Redacted]		14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X	X	X	18

1. Geben Sie die dreißigste Nachkommastelle von  $\sqrt{21}$  an.

8

2. Jeweils zwei der unten aufgeführten Mengen sind gleich. Finden Sie die entsprechenden Paare und tragen Sie sie in die Tabelle ein.

$$A = [40, 40] \setminus (40, 43]$$

$$B = [38, 43) \cup \{38, 40, 43\}$$

$$C = [38, 40) \cup (38, 40]$$

$$D = [40, 43] \setminus \{40\}$$

$$E = [38, 43] \setminus (40, 43]$$

$$F = [38, 43] \cap (40, 43]$$

$$G = [38, 40] \cup [40, 43]$$

$$H = \{38, 40\}$$

$$I = [38, 40] \cap [40, 43]$$

$$J = [38, 40] \setminus (38, 40)$$

Die Menge...	A	B	C	D	H
ist identisch mit der Menge...	I	<del>AG</del>	E	F	J

3. Geben Sie die Polarkoordinaten des Punktes  $(-1, \sqrt{3})$  an. (Winkel  $\varphi$  in Bogenmaß und  $|\varphi| \leq \pi$ .)

$$r = \boxed{2} \quad \varphi = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$$

4. In der folgenden Liste kommt eine Menge nur einmal vor. Kreuzen Sie sie an:

☒  $(4, 6] \cap [3, 5]$

☐  $(3, 5] \cap [4, 6]$

☐  $[3, 5] \cap [4, 6]$

☐  $[3, 5) \cup [4, 6]$

☐  $(3, 5) \cap [4, 6]$

☐  $[4, 6) \cup [3, 5]$

5. Geben Sie den Grenzwert der Folge  $\left(\left(\frac{n^2}{n^2 + 2n + 1}\right)^n\right)$  an.

$$\boxed{e^{-2}}$$

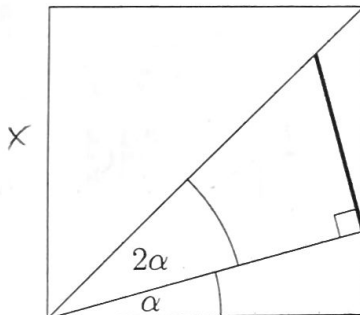
6. Welchen Wert muss  $a$  haben, damit die folgende Matrix orthogonal ist?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1}$$

7. Die Länge der Diagonale in dem Quadrat unten ist 45. Geben Sie die Länge der fett eingezeichneten Strecke auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

$$\boxed{19,02}$$



8. Gegeben seien diese beiden Funktionen:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionen injektiv sind:

☐  $f + g$

☐  $g \circ f$

☒  $f \cdot g$

☐  $f \circ g$

9. Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf den beiden Vektoren  $(-4, -3, -2)^T$  und  $(-1, 1, -4)^T$  steht und der außerdem normiert ist.

$$\boxed{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T}$$

10. Welchen Wert muss  $a$  haben, damit die folgende Matrix singular ist?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-1}$$



11. Die durch  $(v_1, v_2)^T \mapsto (v_1 + 3v_2, 2v_1 + v_2)^T$  definierte lineare Abbildung bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab. Welche Fläche hat diese Ellipse?

5π ✓

12.  $A$  sei die Matrix der Spiegelung an der  $y$ -Achse.  $B$  und  $C$  seien  $2 \times 2$ -Matrizen mit den Determinanten 3 und 21. Geben Sie die Determinante von  $A \cdot B^{-1} \cdot C^T$  an.

-7 ✓

13. Kreuzen Sie von den folgenden Mengen die an, die beschränkt sind:

☒  $\{a \bmod b : a, b \in \mathbb{N}^+ \text{ und } b \leq 42\}$

☐  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

☒  $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

☐  $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0 \text{ und } m + n \leq 1\,000\,000\}$

☒  $[-4, \infty) \cap (-\infty, 5]$

14. Sei  $f$  die Spiegelung an der  $y$ -Achse,  $g$  die durch  $v \mapsto v + (3, 2)^T$  definierte Translation und  $h$  die Drehung um den Nullpunkt um  $-90^\circ$ . Geben Sie die homogene Matrix an, die die Abbildung  $f \circ g \circ h$  repräsentiert.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Die folgende Generator-Funktion soll alle Primzahlen rekursiv aufzählen, wenn man sie als `foo()` aufruft. Was muss im Kasten stehen, damit das funktioniert? (Sie dürfen *keine* Funktionen verwenden, die man erst importieren müsste.)

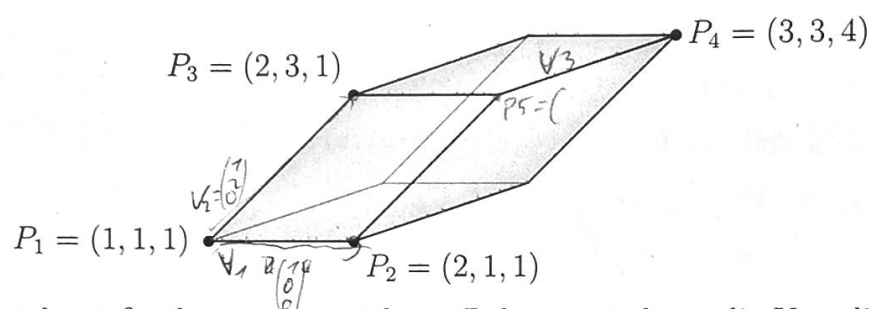
```
from math import sqrt

def foo (n = False):
    k = 2
    while not n or k <= n:
        X = True
        for p in foo(sqrt(k)):
            if k % p == 0 :
                X = False
                break
        if X:
            yield k
        k += 1
```

16. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die wahr sind:

- ☐  $n^2 2^n \in \mathcal{O}(2^n)$   
☒  $2^{n+42} \in \mathcal{O}(3^n)$   
☒  $n^2 2^n \in \mathcal{O}(3^n)$   
☐  $3^n \in \mathcal{O}(2^{n+42})$   
☒  $(\log n)^2 \in \mathcal{O}(n^2)$

17. Berechnen Sie das Volumen des folgenden Spats:



(Der Spat wurde *nicht* maßstabsgetreu gezeichnet. Relevant sind nur die Koordinaten.)

18. Ermitteln Sie in  $\mathbb{Z}_5$  die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ x + 4y + 4z &= 0 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

19. Die Gerade  $g$  steht senkrecht auf dem Vektor  $(1, 3)^T$  und enthält den Punkt  $(4, 6)$ . Geben Sie den Abstand von  $(7, 8)$  zu  $g$  auf zwei Stellen nach dem Komma genau an.

$$2,85$$

20. Kreuzen Sie von den folgenden Aussagen die an, die für alle Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wahr sind:

- ☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^2 = A \cdot A$  auch regulär.  
☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $42 \cdot A$  auch regulär.  
☒ Wenn  $A$  und  $B$  regulär sind, dann ist  $A \cdot B$  auch regulär.  
☐ Wenn  $A$  und  $B$  regulär sind, dann ist  $A + B$  auch regulär.  
☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^T$  auch regulär.  
☒ Wenn  $A$  regulär ist, dann ist  $A^{-1}$  auch regulär.