Bitte tragen Sie zunächst in Druckschrift Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Benutzen Sie die zusammengehefteten Aufgabenzettel für Ihre Lösungen und schreiben Sie falls nötig auf den Rückseiten.

Andere Zettel, die ggf. von Ihnen abgegeben werden, werden nicht bewertet!

Als Hilfsmittel sind eigenhändig angefertigte handschriftliche Notizen erlaubt, und zwar maximal vier Seiten DIN A4, d.h. **zwei** Blätter, die beidseitig beschrieben sind. **Nicht** erlaubt sind elektronische Geräte jeglicher Art – Taschenrechner, Computer, Tablet-PCs, aber auch Mobiltelefone, MP3-Player, Spielekonsolen, usw. **Nicht** erlaubt sind außerdem gedruckte oder kopierte Unterlagen, insbesondere Bücher.

Überprüfen Sie, dass Sie insgesamt 10 Seiten mit 13 Aufgaben bekommen haben!

Um die Note 1,0 zu erreichen, müssen Sie lediglich 10 Aufgaben komplett lösen.

Name:		Vorname:	
Matrikelnummer:			

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Σ	Max
Punkte:															**26**

Aufgabe 1. Finden Sie ganze Zahlen a und b, für die $139a + 149b = 1$ gilt.

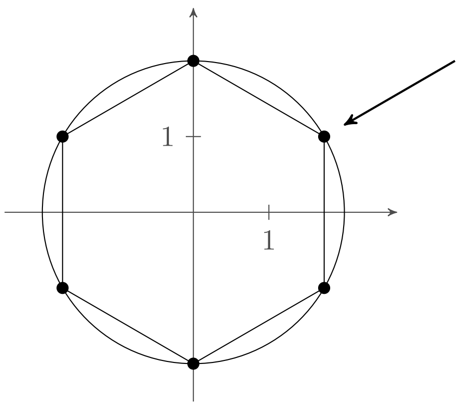
Aufgabe 2. Sei f die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die die Spiegelung an der Hauptdiagonalen $y = x$ beschreibt. g sei die Translation, die jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ den Punkt $\vec{x} + (2, 3)^T$ zuordnet.

Geben Sie sowohl für $f \circ g$ als auch für $g \circ f$ jeweils die homogene 3×3-Matrix an, die die Komposition beschreibt. (Sie müssen also *zwei* Matrizen angeben!)

Aufgabe 3. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+42)n^n}$$

Aufgabe 4. Auf einen Kreis mit Radius 2, dessen Mittelpunkt der Ursprung des Koordinatensystems ist, wird ein regelmäßiges Sechseck so gelegt, dass alle sechs Ecken auf dem Kreis liegen und zwei gegenüberliegende Ecken auf der y-Achse. Geben Sie die *exakten* Koordinaten der Ecke an, auf die der Pfeil zeigt.



Aufgabe 5. Geben Sie die *kleinste* positive Lösung x des folgenden Kongruenzsystems an:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod 2 \\ x &\equiv 0 \pmod 5 \\ x &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

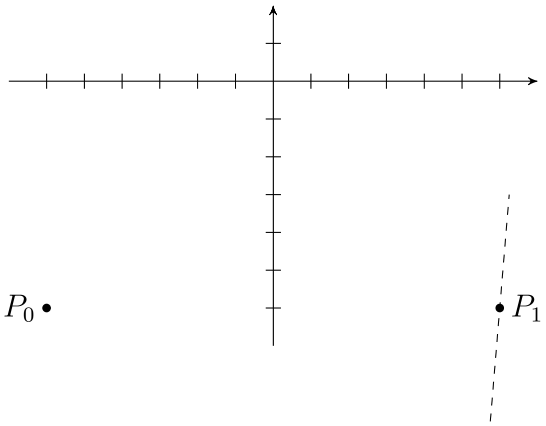
Aufgabe 6. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & \frac{9}{2} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. Geben Sie das Ergebnis (inklusive Rest, falls es einen gibt) der folgenden Division an. Dabei soll in $\mathbb{Z}_5$ gerechnet werden!

$$(4x^7 + 4) : (x^4 + 1)$$

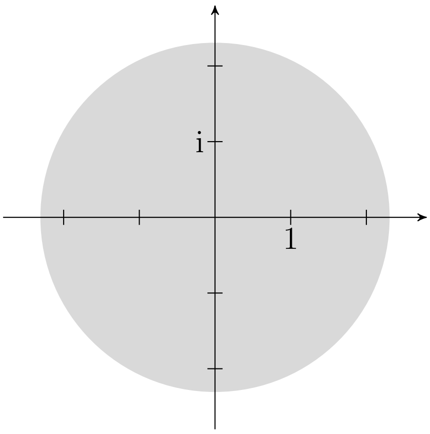
Aufgabe 8. Geben Sie das Polynom zweiten Grades an, das durch die Punkte $P_0 = (-6, -6)$ und $P_1 = (6, -6)$ geht und das im Punkt P_1 die Steigung 12 hat.



Aufgabe 9. Geben Sie *alle* Lösungen der folgenden Gleichung in $\mathbb{C}$ an:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8 = 0$$

[Hinweis: Alle Lösungen liegen innerhalb der unten skizzierten Kreisscheibe.]



Aufgabe 10. Geben Sie die eindeutig bestimmte Lösung dieses linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\
2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\
4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1
\end{aligned}$$

Aufgabe 11. In der symmetrischen Gruppe S_7 sei die folgende Permutation (in Zyklenschreibweise) gegeben:

$$\sigma = (1\ 2\ 4\ 7)\,(3\ 5\ 6)$$

Geben Sie die Permutation σ^9 ebenfalls in Zyklenschreibweise an.

Aufgabe 12. Geben Sie die letzten beiden Ziffern der Dezimaldarstellung von 13^{16} an. (Hinweis: Rechnen Sie in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ und verwenden Sie die Technik der binären Exponentiation.)

Aufgabe 13. Vervollständigen Sie die Tabelle so, dass sich die Verknüpfungstafel einer Gruppe ergibt. Es gibt nur eine Möglichkeit, das zu machen.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a		b		d	e	f
b	b		e			
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		
f					a	

Hinweise:

(i) Da es eine Gruppe sein soll, muss $(b \boxtimes c) \boxtimes d = b \boxtimes (c \boxtimes d)$ gelten.

(ii) In jeder Gruppe gilt: Ist x invers zu y, dann ist y auch invers zu x.

(iii) Beachten Sie, dass die Gruppe nicht notwendig kommutativ sein muss!