Aufgabe 1. Sowas löst man mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus, der $a = -15$ und $b = 14$ liefert. (Es gibt natürlich noch unendlich viele andere Lösungen.)

21 Teilnehmer bekamen zwei Punkte, im Schnitt gab es 0,7.

Wie üblich haben einige Teilnehmer Punkte dadurch verschenkt, dass sie Klammern vergessen haben, was zu Vorzeichenfehlern führte. Man hätte auch mit einer einzigen Zeile eine Probe machen und so einen Fehler erkennen können.

Nebenbei bemerkt kann es offensichtlich keine Lösung geben, bei der sowohl a als auch b positiv sind. Und da ganze Zahlen gefragt waren, ist sowas wie $b = \sqrt{2}$ auch keine sinnvolle Antwort.

Aufgabe 2. Die homogenen Matrizen für f bzw. g sind

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und durch Multiplikation dieser beiden erhält man die gesuchte Matrizen für $f \circ g$ und $g \circ f$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

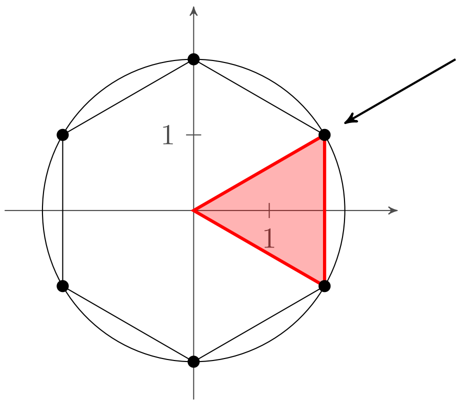
Diese Aufgabe wurde von relativ wenigen Teilnehmern bearbeitet. Die volle Punktzahl gab es in neun Fällen. Durchschnitt: 0,4.

Aufgabe 3. Eigentlich ganz einfach:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+42)n^n} = \frac{n+1}{2n+42} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}}{2}$$

Auch dieses Thema wurde offenbar von der Mehrheit „abgewählt“. Daher nur fünf Teilnehmer mit voller Punktzahl und im Schnitt 0,2 Punkte.

Aufgabe 4. Da das Sechseck regelmäßig ist, muss der Winkel des roten Dreiecks am Nullpunkt ein Sechstel des Gesamtkreises, also 60°, betragen. Die beiden vom Nullpunkt ausgehenden Seiten des Dreiecks haben als Radien des Kreises die Länge 2. Das Dreieck ist also gleichschenklig und daher sind die beiden anderen Winkel gleich groß. Somit sind alle drei Winkel gleich groß, also ist das Dreieck sogar gleichseitig und alle Seiten haben die Länge 2.



Daher ist die y-Koordinate des Punktes 1 (denn der Abstand des Punktes von der x-Achse ist offenbar die Hälfte der einen Dreiecksseite). Die x-Koordinate kann man nun mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen, wenn man die obere Hälfte des roten Dreiecks betrachtet: $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Mit 27 Teilnehmern mit voller Punktzahl und einem Schnitt von 0,9 ist diese Aufgabe insgesamt gut ausgefallen.

Gefragt war übrigens nach den *exakten* Koordinaten. Es reichte also nicht, wenn Sie mit dem Lineal ausgemessen und sowas wie „$(1.7, 1)$“ hingeschrieben haben.

Aufgabe 5. Das Ergebnis ist 70. Man kann es mit dem in der Vorlesung gelernten Verfahren machen. Etwas schneller geht es aber wohl, wenn man sieht, dass die beiden ersten Kongruenzen implizieren, dass das Ergebnis durch 10 teilbar ist. Daher muss man nur nacheinander 10, 20, 30 und so weiter als mögliche Lösungen für die dritte Kongruenz durchprobieren.

Wie erwartet war diese Aufgabe ein guter Punktelieferant. 44 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl. Durchschnitt: 1,5 Punkte.

Gefragt war nach der *kleinsten* positiven Lösung. Es reichte also nicht, z.B. 400 als Lösung anzugeben. Damit haben einige Teilnehmer noch einen Punkt verschenkt.

Aufgabe 6. Das Ergebnis ist -42. (Wegen der vielen Nullen bietet sich hier das Laplace-Verfahren an. Noch etwas schneller geht es, wenn man zuerst die erste von der vierten Zeile abzieht.)

Diese Aufgabe ist mit einem Schnitt von 1,5 und 41 Teilnehmern mit zwei Punkten ebenfalls sehr gut ausgefallen. Noch besser wäre das Ergebnis gewesen, wenn es nicht so viele einfache Rechenfehler gegeben hätte. ($6 \cdot 7 = 43$? Ich bin beleidigt!)

Aufgabe 7. Der Quotient ist $4x^3$ und der Rest ist $x^3 + 4$.

In 18 Fällen gab es zwei Punkte, im Schnitt 0,8 Punkte. Das Ergebnis wäre besser gewesen, wenn nicht so viele Teilnehmer überlesen hätten, dass in $\mathbb{Z}_5$ gerechnet werden sollte.

Aufgabe 8. Das gesuchte Polynom ist $x^2 - 42$.

20 komplett richtige Lösungen und im Schnitt 0,9 Punkte. Leider sind auch hier zu viele Punkte durch simple Rechenfehler verlorengegangen.

Aufgabe 9. Mit dem Horner-Schema kann man die *doppelte* Nullstelle -2 finden. (Wegen des Hinweises musste man nur 1, 2, -1 und -2 einsetzen.) Zum Schluss bleibt das Polynom $x^2 - 2x + 2$, dessen Nullstellen man mit quadratischer Ergänzung finden kann: $1 + \mathrm{i}$ und $1 - \mathrm{i}$.

15 Teilnehmer haben alle Nullstellen richtig berechnet. Durchschnitt: 0,7 Punkte.

Aufgabe 10. Die Lösung sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das macht man am besten mit dem Gauß-Verfahren.

Ich habe nun extra eine Aufgabe konstruiert, bei der man mit dem Gauß-Algorithmus in ganz wenigen Schritten zum Ergebnis kam und bei der weder zweistellige Zahlen noch gar Brüche vorkamen. Trotzdem hat der Fehlerteufel leider wieder mächtig zugeschlagen. Ich weiß wirklich nicht, wie man es noch signifikant leichter machen könnte...

32 Teilnehmer haben die volle Punktzahl bekommen. Das lag aber nicht daran, dass die alle keinen Fehler gemacht haben; ich habe einfach sehr viele Augen zugedrückt. Wirklich komplett richtig gerechnet haben weniger als ein Dutzend Teilnehmer. Im Schnitt gab es 1,1 Punkte.

Die Lösung ist übrigens *nicht* $1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$, wie zwei Teilnehmer meinten. Diese Aufgabe hat mit Polynomen nichts zu tun.

Aufgabe 11. Die gesuchte Permutation ist $\sigma^9 = (1\ 2\ 4\ 7)$. Da die Permutation $\pi_2 = (3\ 5\ 6)$ die Länge 3 hat, ist ihre dritte Potenz (und damit auch ihre neunte) die Identität. Da $\pi_1 = (1\ 2\ 4\ 7)$ die Länge 4 hat, ist ihre vierte Potenz (und damit auch die achte) die Identität. Die Zyklen dürfen außerdem vertauscht werden, weil sie disjunkt sind. Also ergibt sich:

$$\sigma^9 = \pi_1^9 \pi_2^9 = \pi_1^8 \pi_1 \pi_2^9 = \pi_1$$

In der Aufgabenstellung wurden Sie gebeten, die Antwort in Zyklenschreibweise anzugeben. Wer lesen konnte, war also im Vorteil...

Im Durchschnitt gab es 0,6 Punkte. 17 Teilnehmer erhielten die volle Punktzahl.

Aufgabe 12. Da man nur an den letzten beiden Ziffern interessiert ist, reicht es, in $\mathbb{Z}_{100}$ zu rechnen:

$$13^2 = 69$$

$$
\begin{aligned}
13^4 &= 13^2 \cdot 13^2 = 69 \cdot 69 = 61 \\
13^8 &= 13^4 \cdot 13^4 = 61 \cdot 61 = 21 \\
13^{16} &= 13^8 \cdot 13^8 = 21 \cdot 21 = 41
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis endet also mit der Ziffernfolge „41". (13^{16} ist übrigens 665416609183179841.)

22 Teilnehmer haben die volle Punktzahl erreicht. Im Schnitt gab es 0,9 Punkte.

Aufgabe 13. Zunächst mal gibt es nur eine Möglichkeit, die erste Zeile und die erste Spalte zu füllen. Außerdem ist dadurch klar, dass a das neutrale Element ist.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b		e			
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		
f	f				a	

Da f invers zu e ist, muss nach dem zweiten Hinweis e invers zu f sein.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b		e			
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f				a	

In der vierten Spalte fehlen noch b und f. Da b in der zweiten Zeile schon vorkommt, muss es so aussehen:

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b		e	f		
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f			b	a	

Nun kann man den ersten Hinweis anwenden. $(b \boxtimes c) \boxtimes d$ ist $e \boxtimes d = c$. Also muss $b \boxtimes (c \boxtimes d) = b \boxtimes e$ auch c ergeben.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b		e	f	c	
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f			b	a	

Nun kann man die zweite Zeile mit a und d auffüllen. a kann nicht in der letzten Spalte stehen.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c			e		
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f			b	a	

Da wir alle anderen Inversen schon kennen, kann c nur invers zu sich selbst sein. (Alternative Argumentation: In der dritten Zeile fehlt ein a, für das in allen Spalten außer der dritten kein Platz mehr ist.)

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c		a	e		
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f			b	a	

In der dritten Zeile fehlen nun noch b, d und f. Für d ist nur in der fünften Spalte Platz und daher für f nur in der zweiten.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f			b	a	

In der dritten Spalte fehlt ein d, für das nur in der letzten Zeile noch Platz ist.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d			a		
e	e	d		c		a
f	f		d	b	a	

Jetzt kann man wieder mit der Assoziativität argumentieren. Zum Beispiel ist $(f \boxtimes d) \boxtimes f = b \boxtimes f = d$. Also muss $f \boxtimes (d \boxtimes f)$ ebenfalls d sein. Daher kann $d \boxtimes f$ nur c sein.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d			a		c
e	e	d		c		a
f	f		d	b	a	

Drei weitere Felder ergeben sich nun sofort, weil wir ja ein lateinisches Quadrat brauchen.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d	e		a		c
e	e	d		c		a
f	f	c	d	b	a	e

Um die letzten vier Felder zu lösen, kann man z.B. so vorgehen: Wir wollen wissen, welchen Wert $x = d \boxtimes c$ hat. Da d zu sich selbst invers ist, kann man auf beiden Seiten von links mit d multiplizieren und erhält $d \boxtimes x = c$. Nun liefert die Tabelle für x den Wert f.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d	e	f	a		c
e	e	d		c		a
f	f	c	d	b	a	e

Der Rest ist dann klar.

$\boxtimes$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	f	a	e	d	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	d	b	c	f	a
f	f	c	d	b	a	e

Ich hatte gedacht, das sei eine nette Sudoku-Aufgabe. Aber leider hat nur ein Teilnehmer sie vollständig lösen können. Daher habe ich sie quasi aus der Wertung genommen, indem ich den Schnitt gesenkt habe. (Was natürlich nicht wirklich nötig war, da es ja trotzdem immer noch 12 Aufgaben zur Auswahl gab.)

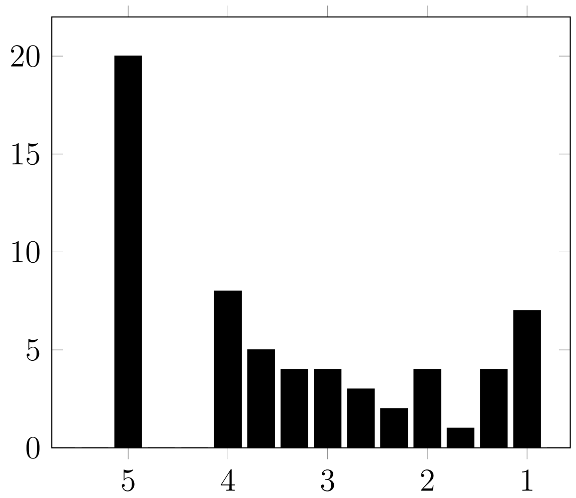
In zwei weiteren Fällen habe ich ebenfalls zwei Punkte gegeben, weil die Lösung *fast* richtig war. Drei Teilnehmer bekamen einen Punkt für einen akzeptablen Versuch.

Weitere Kommentare

- Sieben (!) glatte Einsen, davon einmal sogar 24 (!) Punkte und insgesamt vier Klausuren mit mehr als 20 Punkten. Zwölf Teilnehmer mit einer Eins vor dem Komma.
- Vier Teilnehmer, deren dritter Versuch es war, haben bestanden. Ein Teilnehmer, der im ersten Versuch eine Fünf hatte, hat im zweiten die Note 1,3 erreicht.
- Weniger als zwanzig Prozent der Teilnehmer waren Frauen. Aber: Die beste Klausur hat eine Frau geschrieben. Zwei der vier besten und drei der sechs besten Klausuren haben Frauen geschrieben. Durchschnittsnote der Frauen: 2,7; Durchschnittsnote der Frauen im zweiten Semester: 2,1.
- Es ist nicht nötig, auf der Klausur zu vermerken, dass es sich um den dritten Versuch handelt. Erstens weiß ich das aufgrund der Helios-Daten ohnehin und zweitens werden alle Klausuren selbstverständlich gleich bewertet: für vorherige Fehlversuche gibt es keinen Bonus.
- Pro Aufgabe gab es zwei Punkte, die jedoch nur vergeben wurden, wenn die Aufgabe komplett richtig gelöst wurde. Bei kleineren Fehlern oder erkennbar guten Ansätzen gab es noch einen Punkt. Bruchteile von Punkten wurden nicht vergeben.
- Man musste acht Punkte haben, um zu bestehen. (Wegen des schlechten Gesamtergebnisses und wegen der letzten Aufgabe wurde diese Zahl gegenüber anderen Klausuren abgesenkt.)
- Die sechs Aufgaben 5 bis 10 waren alle Standardaufgaben, die genau in dieser Form in jedem Jahr in den Hausaufgaben und immer wieder in Klausuren vorkommen. Man musste nicht nachdenken, sondern nur rechnen. Alleine mit vier dieser Aufgaben hätte man die Klausur bestehen können.

Ergebnisse

Von 62 Teilnehmern haben 42 – ca. 68% – bestanden. Die Durchschnittsnote war 3,4.



Und hier noch einmal wie üblich eine Version der Statistik, in der nur Studenten aus dem zweiten Semester vorkommen. Da sieht es deutlich besser aus:

Von 21 Teilnehmern haben 17 – etwa 81% – bestanden. Die Durchschnittsnote war 2,9. Die häufigste Note war 1,0.