

Propuesta de trabajo de desarrollo para la obtención de la forma modal de vibración de una estructura a partir de fotogrametría estroboscópica

Hugo E. Sosa¹

¹Div. Investigación Aplicada en Métodos No Destructivos - IAMEND
Laboratorio de óptica - ENDE, CNEA Centro Atómico Constituyentes
`hsosa@cnea.gov.ar`

8 de agosto de 2022

1. Resumen

El presente trabajo busca explorar un método de bajo costo para la obtención de la forma modal de vibración de una estructura. Para esto se adquiere mediante fotogrametría estereoscópica, una nube de puntos láser proyectados sobre la pieza bajo estudio. Dicha nube de puntos es generada por un diodo láser que pasa a través de una red de difracción 2D comercial. De esta manera podría obtenerse la forma modal de una estructura utilizando cámaras de alta velocidad. Sin embargo, al agregar un obturador sobre el láser y ajustando su frecuencia a un valor similar a la frecuencia modal o un sub-múltiplo de esta, se podría prescindir de cámaras de alta velocidad ya que se estaría midiendo dicho modo a una frecuencia menor por efecto estroboscópico. Esta técnica permitiría la utilización de cámaras convencionales, de un costo considerablemente mas bajo, en la medición de modos normales mediante fotogrametría. El presente trabajo busca explorar las virtudes y desventajas en la implementación de esta última opción.

2. Modelo básico de fotogrametría estereoscópica

Las técnicas de fotogrametría son muy utilizadas en metrología dimensional gracias a su versatilidad y fácil implementación. Si bien la determinación de la posición espacial de un punto a través de esta técnica requiere de la posición y orientación relativa de al menos dos cámaras, en este trabajo se opta por la versión estereoscópica de dos cámaras que difieran solo en su posición relativa. La ventaja de esta opción es que no es necesario agregar a la escena ninguna plantilla patrón de la que se pueda extraer por pos-procesado la orientación de las cámaras. Sin embargo, no se descarta la utilización de plantillas para una calibración previa.

En este caso la orientación relativa y la altura de ambas cámaras coincide, por lo que la información acerca de la posición en el plano X e Y se obtiene por triangulación dependiendo de la diferencia de coordenadas en pixeles captadas por cada cámara. En la Figura 1 se muestra un

diagrama que describe las características geométricas del problema.

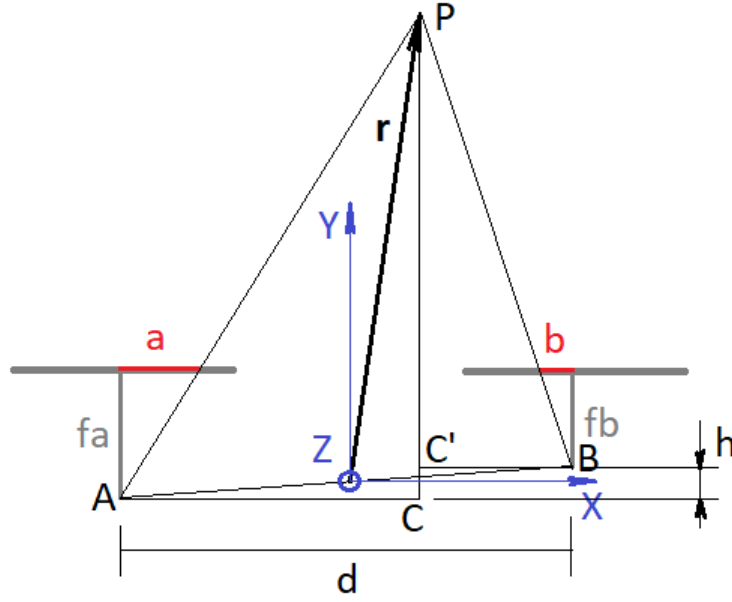


Figura 1: Método de triangulación de un punto en el plano XY.

En la Figura 1 puede verse una vista superior en la ubicación de instrumentos y el punto P a medir. Ambas cámaras se posicionan a una distancia d entre sus centros. Cada cámara tendrá una distancia focal f que será obtenida mediante una calibración previa descrita mas adelante en la sección 2.1. Cabe aclarar que lo que en este trabajo se menciona como distancia focal no es la dada por la lente formadora de imagen, sino que se trata de un punto de fuga proyectivo para los píxeles ubicado detrás de cada sensor CCD o CMOS.

La posición del punto P, es decir las coordenadas X e Y del vector \vec{r} puede obtenerse por semejanza de triángulos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\frac{AC}{CP} = \frac{r_x - (-\frac{d}{2})}{r_y + \frac{h}{2}} = \frac{a}{f_a}$$

$$\frac{BC'}{C'P} = \frac{r_x - \frac{d}{2}}{r_y - \frac{h}{2}} = \frac{b}{f_b}$$

Escrito de manera matricial nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{f_a} \\ 1 & -\frac{b}{f_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ah}{f_a^2} - \frac{d}{2} \\ -\frac{bh}{f_b^2} + \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{xy} = \frac{1}{\frac{a}{f_a} - \frac{b}{f_b}} \begin{pmatrix} -\frac{b}{f_b} & \frac{a}{f_a} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ah}{f_a^2} - \frac{d}{2} \\ -\frac{bh}{f_b^2} + \frac{d}{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Notar que si $h = 0$, es decir las cámaras poseen la misma distancia focal, el modulo de \vec{r}_{xy} solo depende inversamente de la diferencia $a - b$, donde a y b son las distancias del píxel de registro de las cámaras izquierda y derecha respectivamente, medidas desde el centro de cada sensor

con signo positivo a derecha.

$$\begin{aligned} \text{si } h = 0 &\longrightarrow f_a = f_b = f \\ \vec{r}_{xy} &= \frac{f}{a-b} \begin{pmatrix} -\frac{b}{f} & \frac{a}{f} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\implies \vec{r}_{xy} = \frac{d}{a-b} \left(\frac{a+b}{2}, f \right) \quad (3)$$

Como las cámaras poseen la misma orientación, la altura en Z del punto P puede calcularse por triangulación con cualquiera de las dos cámaras. Con el objeto de aprovechar toda la información disponible, se promedian ambas triangulaciones en la obtención de la coordenada Z.

$$\begin{aligned} \frac{b_z}{\sqrt{b^2 + f_b^2}} &= \frac{r_z}{\sqrt{(r_x - \frac{d}{2})^2 + (r_y - \frac{h}{2})^2}} \\ \frac{a_z}{\sqrt{a^2 + f_a^2}} &= \frac{r_z}{\sqrt{(r_x + \frac{d}{2})^2 + (r_y + \frac{h}{2})^2}} \end{aligned}$$

donde a_z y b_z son las alturas en píxeles registradas por cada cámara

Despejando r_z de ambas ecuaciones y promediando nos queda:

$$\begin{aligned} r_z &= \frac{1}{2} \left[a_z \sqrt{\frac{(r_x + \frac{d}{2})^2 + (r_y + \frac{h}{2})^2}{a^2 + f_a^2}} + b_z \sqrt{\frac{(r_x - \frac{d}{2})^2 + (r_y - \frac{h}{2})^2}{b^2 + f_b^2}} \right] \\ \text{si } h = 0, \text{ entonces } f_a &= f_b = f \\ r_z &= \frac{1}{2} \left[a_z \sqrt{\frac{(r_x + \frac{d}{2})^2 + r_y^2}{a^2 + f^2}} + b_z \sqrt{\frac{(r_x - \frac{d}{2})^2 + r_y^2}{b^2 + f^2}} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

De esta manera, con las ecuaciones 3 y 4 podemos obtener la posición \vec{r} del punto P en el espacio.

2.1. Calibración de la distancia focal

Para obtener la distancia focal f de cada cámara se tomarán fotos de una pieza de dimensiones conocidas en dos posiciones cuya profundidad también sea conocida.

Por ejemplo se puede medir la altura en píxeles de una pieza en dos posiciones cuya distancia al sensor sea distinta. En la Figura 2 se muestra este mismo ejemplo.

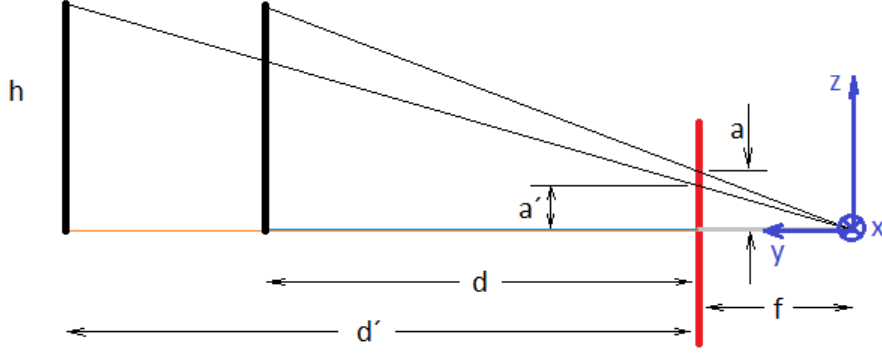


Figura 2: Método de calibración para la obtención de la distancia focal f .

De la Figura 2 se puede ver que la distancia focal f viene dada por:

$$\frac{h}{d+f} = \frac{a}{f} \rightarrow hf = a(d+f)$$

$$\frac{h}{d'+f} = \frac{a'}{f} \rightarrow hf = a'(d'+f)$$

restando las últimas dos ecuaciones nos queda que:

$$0 = ad + af - a'd' - a'f$$

$$a'd' - ad = (a - a')f$$

$$\Rightarrow f = \frac{a'd' - ad}{a - a'} \quad (5)$$

Una vez obtenida la distancia focal f para cada cámara, se pueden posicionar las cámaras a una distancia d en el Eje X, para luego obtener la primer nube de puntos de la pieza bajo estudio en reposo. La posición de cada punto \vec{r}_P en estas condiciones servirá como el vector de referencia entorno al cual oscila cada punto P cuando se excita un modo normal m .

2.2. Zona de inspección y resolución espacial

Por otro lado, hay que tener en cuenta que la disposición de las cámaras impone una restricción geométrica sobre los puntos del espacio que son medibles con este método. Dicha restricción está determinada por parámetros como la separación d entre cámaras y la distancia focal f . Asignando al espacio, una escena de captura de puntos o zona de medición dada por el cruce de rectas en la Figura 3.

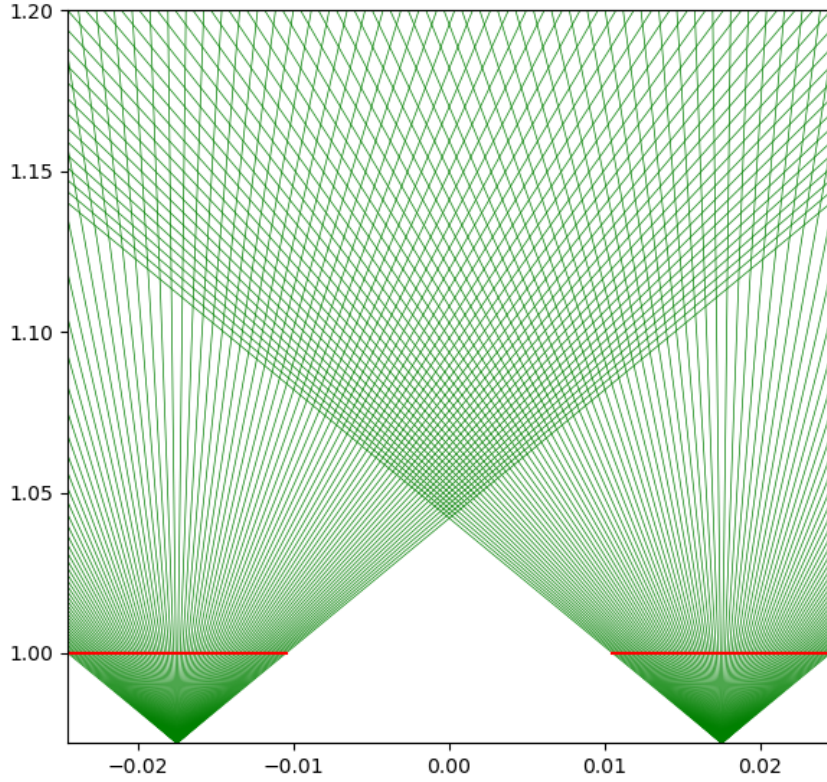


Figura 3: Zona de medición y reticulado de incertidumbre.

Cada recta en la Figura 3 representa la proyección desde el foco de los bordes laterales de cada píxel, de modo que dentro de la zona de medición, el patrón de rejilla formado determina la resolución espacial del método. Es decir que, cada romboide formado en la rejilla de medición da una idea de la incertidumbre en la posición de un punto ubicado dentro de cada romboide.

3. Sincronización temporal de obturación del láser

La pieza que estamos estudiando será sometida a vibraciones con una frecuencia de extinción conocida f_e mediante un excitador electrodinámico de vibraciones EEV. A su vez, sobre la pieza se proyectará un patrón periódico de puntos generados por la difracción del haz de un diodo láser a través de una red de difracción bidimensional. Al obturar dicho haz mediante una rueda ranurada tipo encoder como se muestra en la Figura 4 podemos conseguir que la frecuencia con la que se proyectan los puntos sobre la pieza difiera levemente de la frecuencia de extinción f_e . Esto genera que los puntos sobre la pieza oscilen con una frecuencia f_b proporcional a la diferencia de frecuencias, es decir $f_b \propto |f_e - f_o|$ donde f_o es la frecuencia de obturación del haz.

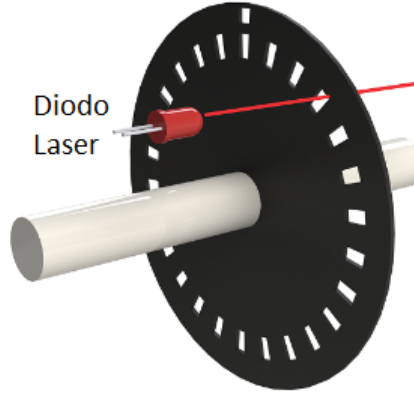


Figura 4: Obturación del haz emisor para la sintonización temporal.

Si dicha frecuencia f_b es mucho menor que los FPS con los que adquieren las cámaras, se podrá registrar la evolución temporal de cada punto en el espacio. Como la frecuencia f_b es una función de la frecuencia f_o , depende de que tan bien podamos controlar la frecuencia de obturación f_o para lograr que $f_b < \text{FPS}$.

Ahora bien, que la velocidad con la que se mueven los puntos sea medible, no es el factor mas limitante. También hay que garantizar que la frecuencia de obturación f_o no sea muy cercana a la frecuencia de adquisición FPS, ya que esto podría provocar que las cámaras vean los puntos láser antes de que lleguen a la pieza, o que no los registren si la intensidad del haz es baja. Este aspecto nos impone una cota superior para la frecuencia de obturación y por ende para las frecuencias modales que podemos medir.

Sin embargo, podemos extender esta cota si la frecuencia de obturación f_o es un sub-múltiplo par de la frecuencia del modo. Suponiendo que estamos excitando un modo, es decir f_e coincide con la frecuencia del modo, la frecuencia de obturación debería ser cercana a $f_e/2n$. De esta manera estaremos viendo como oscilan los puntos cada $2n$ periodos con $n \geq 1$ entero. Dejar ciclos sin medir no nos impide de-sintonizar de manera conveniente la frecuencia de obturación del sub-múltiplo de excitación para obtener el efecto estroboscópico deseado, pero aumenta considerablemente la sensibilidad a dicha de-sintonización. Es decir, al dejar ciclos sin medir, la precisión con la que tenemos que acercarnos a la frecuencia del sub-múltiplo es mayor.

De esta manera, mientras mas chico sea el sub-múltiplo, mas difícil será el ajuste en la frecuencia de obturación para lograr el efecto estroboscópico deseado. Mas adelante se detalla como afecta el orden del sub-múltiplo a la máxima desviación que podemos cometer al sincronizar la frecuencia de obturación de dicho sub-múltiplo.

3.1. Sincronización de un sub-múltiplo par de la frecuencia modal

Si sincronizamos la obturación del láser con un sub-múltiplo par de la frecuencia de oscilación, veríamos inmóvil el patrón de puntos proyectados sobre la pieza. Sin embargo, al de-sincronizarnos de este sub-múltiplo veríamos los puntos moverse a una frecuencia proporcional a la diferencia que introducimos. Con el objeto de esquematizar la idea propuesta, se expone en la Figura 5 un ejemplo en donde se compara la secuencia temporal medida con el método sobre un punto de la pieza mientras se excita un modo normal, con lo que ocurre realmente en dicho punto.

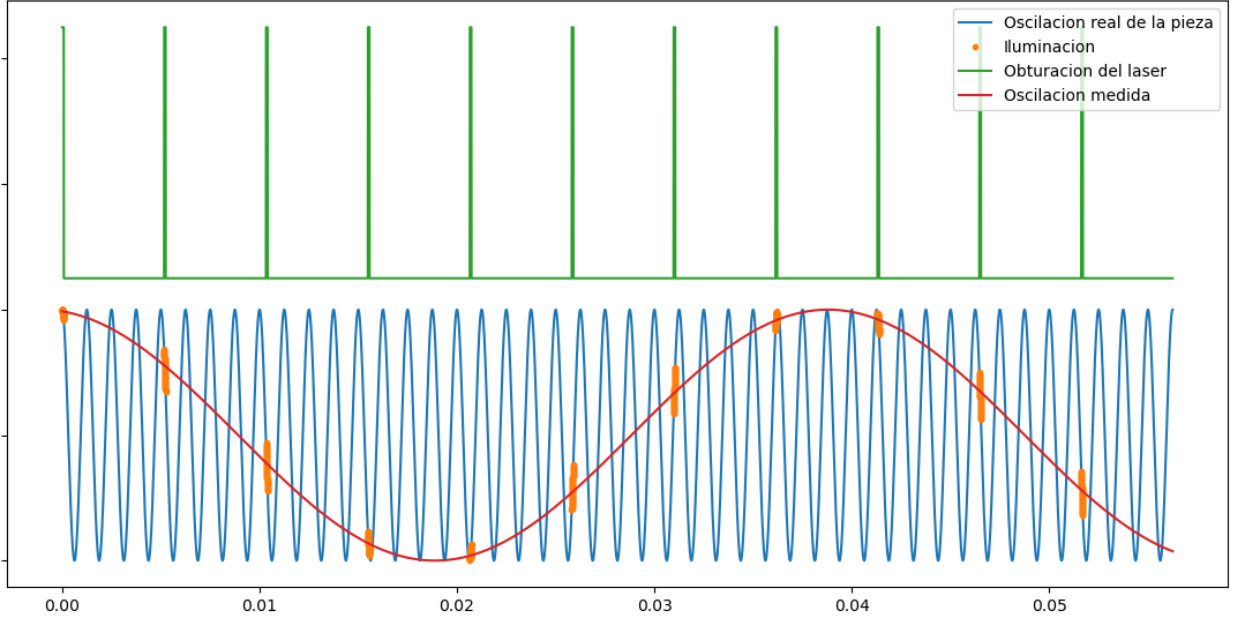


Figura 5: Comparación entre la señal medida y la vibración real.

Si queremos dejar pasar $2n$ ciclos para volver a medir, el periodo de obturación deberá ser similar a $\frac{2n}{f_e}$ con f_e la frecuencia de excitación. En la siguiente expresión se simboliza con δ la variación en frecuencia que podemos introducir al sub-múltiplo sin que la diferencia entre el periodo de obturación y los $2n$ periodos T_e supere $T_e/4$. Esto garantizara la medición de al menos 4 puntos distintos de una oscilación real.

$$\begin{aligned}
 |T_o - 2nT_e| &< \frac{T_e}{4} \\
 \left| \frac{1}{\frac{f_e}{2n} + \delta} - \frac{2n}{f_e} \right| &< \frac{1}{4f_e} \\
 -\frac{1}{4f_e} &< \frac{1}{\frac{f_e}{2n} + \delta} - \frac{2n}{f_e} < \frac{1}{4f_e} \\
 \frac{2n}{f_e} - \frac{1}{4f_e} &< \frac{1}{\frac{f_e}{2n} + \delta} < \frac{2n}{f_e} + \frac{1}{4f_e} \\
 \left(2n - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{f_e} &< \frac{1}{\frac{f_e}{2n} + \delta} < \left(2n + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{f_e}
 \end{aligned}$$

donde T_e es el periodo de oscilación de la pieza,
y T_o el periodo de obturación

Operando sobre la desigualdad anterior podemos obtener un máximo valor de δ para el cual se cumple dicha desigualdad.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2n - \frac{1}{4}}\right) f_e &> \frac{f_e}{2n} + \delta > \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{4}}\right) f_e \\
 \left(\frac{1}{2n - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2n}\right) f_e &> \delta > \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2n}\right) f_e
 \end{aligned}$$

observando la diferencia entre los dos extremos de la desigualdad podemos acotar $|\delta|$ como:

$$\begin{aligned} |\delta| &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2n + \frac{1}{4}} \right) f_e \\ \implies |\delta| &< \frac{4}{(8n)^2 - 1} f_e \end{aligned} \quad (6)$$

Esta última expresión nos muestra que la máxima variación que podemos introducir, al sincronizar la frecuencia de obturación con la del sub-múltiplo $\frac{f_e}{2n}$, decrece con n^{-2} . Es decir que mientras más chico sea el sub-múltiplo elegido (por ejemplo para $n > 1$), menos variación δ podemos introducir al sincronizar la frecuencia de obturación con ese sub-múltiplo si queremos seguir garantizando la medición de cuatro puntos distintos de una oscilación real.

Esto es entendible ya que el periodo de obturación crece cuando elegimos sub-múltiplos más chicos. Finalmente, siguiendo lo anterior, si admitimos una variación de $\alpha\delta_{max}$ con $\alpha \in (-1, 1)$ en la frecuencia del sub-múltiplo, el periodo de obturación nos queda como:

$$T_o = \left(\frac{1}{\frac{1}{2n} + \frac{4\alpha}{(8n)^2 - 1}} \right) \frac{1}{f_e} = \frac{T_e}{\frac{1}{2n} + \frac{4\alpha}{(8n)^2 - 1}} \quad (7)$$

Recordemos además, que si queremos que cada frame adquirido registre un solo destello de puntos sobre la pieza, $f_o = 1/T_o$ no puede ser mayor que los FPS de las cámaras. Por lo que el periodo de obturación T_o deberá ser mayor que la duración de exposición de cada frame. Esto es:

$$T_o = \left(\frac{1}{\frac{1}{2n} + \frac{4\alpha}{(8n)^2 - 1}} \right) \frac{1}{f_e} > \frac{1}{FPS} \quad (8)$$

$$\implies f_e < \frac{FPS}{\frac{1}{2n} + \frac{4\alpha}{(8n)^2 - 1}} \quad (9)$$

Esta última expresión nos da una cota superior mas amplia para las frecuencias que podemos observar con el método. Como puede observarse en la ecuación 9, para n grande la pendiente es prácticamente 2FPS. En la Figura 6 se muestran las frecuencias modales máximas alcanzadas por el método según el sub-múltiplo elegido para distintas FPS del sistema.

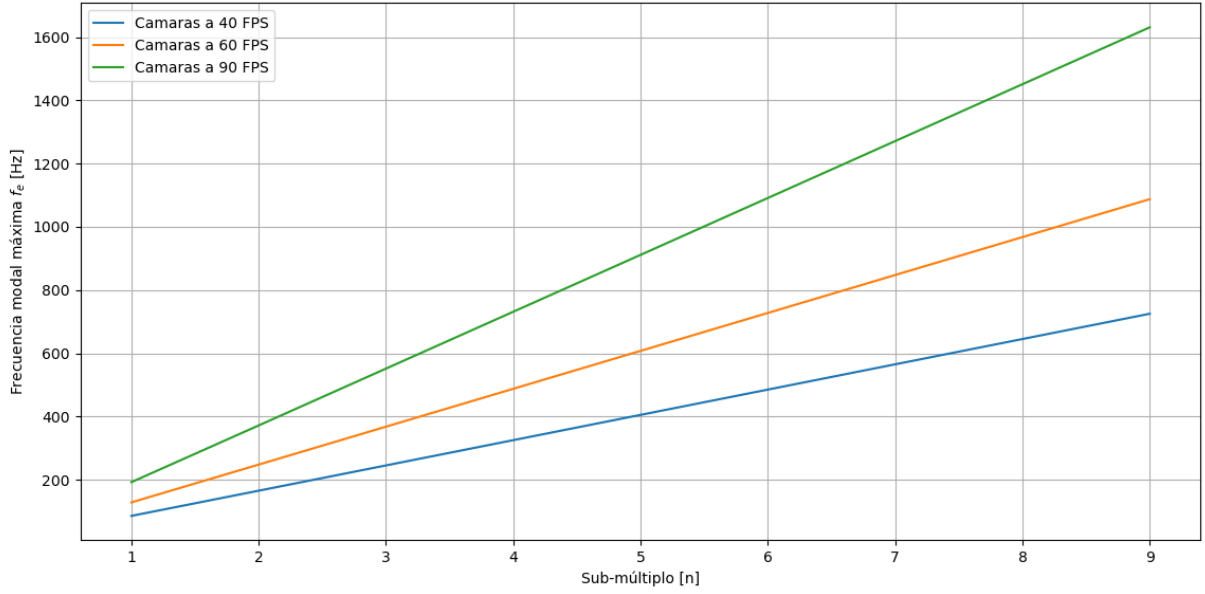


Figura 6: Frecuencia máxima en función del sub-múltiplo para cámaras de distinto FPS.

Hasta ahora no hemos dicho mucho acerca del tiempo en el que la pieza permanece iluminada en cada obturación dada por la apertura de cada ranura del disco tipo encoder. Esto es importante ya que el tiempo de iluminación deberá representar bien cada punto medido sobre los ciclos de oscilación real. Es decir, si el tiempo en el que la pieza permanece iluminada en cada obturación supera $T_e/4$, puede que el punto triangulado por las cámaras no corresponda ni a un valle ni a una cresta de oscilación, si no a un promedio espacial de estos. Para garantizar que los puntos medidos representen bien una porción de oscilación podemos tomar un octavo del periodo de excitación como tiempo de iluminación.

Siguiendo esto último, la apertura de cada ranura del disco tipo encoder viene dado por:

$$\begin{aligned}
 a &= \omega_o t_o \\
 \text{donde } a &\text{ es la apertura de cada ranura en radianes,} \\
 \omega_o &= 2\pi f_o \text{ y } t_o = \frac{1}{8f_e} \text{ el tiempo de iluminación} \\
 \Rightarrow a &= \frac{2\pi \left(\frac{1}{2n} + \frac{4\alpha}{(8n)^2 - 1} \right) f_e}{8f_e} = \pi \left(\frac{1}{8n} + \frac{\alpha}{(8n)^2 - 1} \right) \quad (10)
 \end{aligned}$$

En la ecuación 10 podemos ver que la apertura de una única ranura en el disco de obturación, depende del sub-múltiplo n y de la variación α introducida. Si queremos k ranuras en el disco, la frecuencia de giro del disco será $f_g = f_o/k$ por lo que en este caso, la apertura será k veces más chica que la de la ecuación 10.

4. Reconstrucción de la señal real a partir de la señal medida

Para poder reconstruir el movimiento real de la nube de puntos debemos saber cuanto vale la frecuencia de la señal medida. Para esto, tenemos en cuenta que el apartamiento $\alpha\delta_{max}$ introducido garantiza que la diferencia entre el periodo de obturación y los $2n$ periodos de excitación sea de un cuarto de periodo de excitación. Es decir que la frecuencia medida estará dada por cuatro veces la diferencia entre el sub-múltiplo $\frac{f_e}{2n}$ y la frecuencia de obturación f_o .

$$f_m = 4 \left| \frac{f_e}{2n} - f_o \right| = 4 \left| \frac{f_e}{2n} - \left(\frac{f_e}{2n} + \frac{4\alpha f_e}{(8n)^2 - 1} \right) \right| = \frac{4^2 |\alpha| f_e}{(8n)^2 - 1} \quad (11)$$

Por cada frame obtenido en modo global obtendremos una nube de puntos distinta cuya oscilación en el espacio vendrá dada por:

$$\vec{r}_{P,m}(t) = \vec{r}_P + \vec{u}_{P,m} \sin \left(2\pi \frac{4^2 |\alpha| f_e}{(8n)^2 - 1} + \phi_{P,m} \right) \quad (12)$$

donde \vec{r}_P es la posición de un punto P con la pieza en reposo,

$\vec{u}_{P,m}$ es el vector amplitud modal para ese punto, dado por:

$$\vec{u}_{P,m} = \vec{r}_{P_{max},m} - \vec{r}_P \quad (13)$$

donde $\vec{r}_{P_{max},m}$ es la posición máxima alcanzada por el punto P para el modo m

La señal real se diferencia de la ecuación 12 solo en la frecuencia, puesto que la fase $\phi_{P,m}$ es la misma tanto para la señal medida como para la señal real. Además, dicha fase contiene la información completa de la forma modal buscada.