

# Caracterización de un cristal piezoeléctrico de cuarzo modelando su respuesta eléctrica a partir de un circuito RLC equivalente.

Hugo Ernesto Sosa, Bautista Martín Bello

Laboratorio IV - Dto. de Física - Universidad de Buenos Aires

huguito.ernest@gmail.com, bautistamartinbello@gmail.com

11 de octubre de 2022 - Informe N°2

*En el presente trabajo se estudian las características resonantes de un cristal de cuarzo a través de su respuesta eléctrica utilizando barridos en frecuencia y respuesta al impulso. De esta manera se pudo encontrar la frecuencia de resonancia del cristal y se observó una relación de esta con uno de los modos normales de vibración estructural de la pieza. Además, se verificó que la existencia de una anti-resonancia puede ser modelada como una capacidad adicional aportada por las terminales.*

## 1. Introducción

La piezoelectricidad es un fenómeno que puede encontrarse en cristales como el cuarzo. Cuando son sometidos a tensiones mecánicas, estos adquieren una polarización interna que provoca una diferencia de potencial en su superficie. Este fenómeno también ocurre a la inversa, es decir, al someterlo a un campo eléctrico, dicho cristal adquiere una cierta deformación provocada por la polarización misma del cristal. Los materiales piezoeléctricos son muy utilizados en osciladores y relojes electrónicos altamente precisos, ya que este proceso de transferencia de energía electro-mecánica sucede con un factor de calidad muy alto. Un ejemplo de aplicación tecnológica de los cristales de cuarzo es su utilización como filtros pasa-banda de alta calidad, puesto que se pueden pensar como un circuito RLC.

El presente trabajo busca estudiar el comportamiento dinámico de dicha relación electro-mecánica a través de la respuesta en frecuencia de un cristal piezoeléctrico. Particularmente se busca modelar la respuesta resonante de dicho cristal con un circuito RLC equivalente, debido a que la respuesta en frecuencia de estos materiales no es plana, es decir, hay ciertas frecuencias para las cuales la transferencia de energía eléctrica-mecánica es máxima, y otras para las cuales ésta es mínima. En un cristal piezoeléctrico la relación entre el tensor de tensiones mecánicas  $\sigma$  y su polarización interna  $\vec{P}$  está mediada por un tensor  $d$  de rango 3 de la siguiente manera:

$$P_i = \sum_{j,k} d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (1)$$

Por otro lado las deformaciones mecánicas en el material debidas a una tensión son mediadas

también por el mismo tensor  $d$ , es decir:

$$\epsilon_{ij} = \sum_k d_{ijk} E_k \quad (2)$$

Si bien, no se pretende obtener experimentalmente el tensor  $d$ , la importancia de las ecuaciones 1 y 2 radica en que ambas están mediadas por el mismo tensor  $d$ . Esto hace que estén acopladas las deformaciones a las tensiones y viceversa. [1]

Ahora bien, como todos los materiales tienen asociada una velocidad de propagación de ondas mecánicas, la misma geometría del material actúa como condiciones de contorno para dichas ondas dando lugar a la aparición de modos normales de oscilación. En estos modos cada parte del material oscila en fase.

Estos modos tendrán frecuencias bien definidas en donde el sistema mecánico absorbe energía de manera eficiente. Por otro lado como en este caso las deformaciones son máximas, también lo serán los valores de tensión eléctrica entregados debido a su característica piezoeléctrica.

El objetivo principal de esta experiencia es caracterizar la respuesta en frecuencia de cristal de cuarzo bajo la hipótesis de que se comporta como un circuito RLC. Mediante un barrido en frecuencia y una respuesta al impulso (señal cuadrada), se busca conocer no solo la frecuencia de resonancia, de antiresonancia y el factor de merito  $Q$ ; sino también la resistencia  $R$ , la inductancia  $L$ , las capacitancias  $C$  y  $C_2$  equivalentes.

Este informe estará separado en 5 secciones, las cuales contará cada una con alguna subsección. La primera es la Introducción, dividida en 2 subsecciones, se expone el marco teórico de los experimentos y la estructura del informe. En la sección 2 que es la de Desarrollo experimental, se comenta sobre como se realizó el experimento, que materiales y equipos se utilizaron y una breve explicación del funcionamiento de los mismos. En la sección 3, llamada Resultados y discusiones se exponen los datos adquiridos, los resultados y su interpretación. Está dividida en dos subsecciones, donde la primera, 3.1, se habla sobre la validación del modelo del circuito RLC equivalente y la sección 3.2 se habla sobre la respuesta al impulso de la pieza de cuarzo haciendo uso de la transformada de Fourier. En la sección 4 está expuesta la Conclusión y en la sección 5 la Bibliografía.

## 1.1. Modelo RLC equivalente

En la Figura (1) se muestra un circuito RLC serie, en el cual  $L$  es la inductancia,  $C$  la capacitancia y  $R$  la resistencia. Este circuito es utilizado como un filtro de frecuencias, en específico de pasa-bandas puesto que para un ancho de frecuencia determinada este circuito entra en resonancia. Esto es, cuando la función de transferencia  $T=|V_{out}/V_{in}|$  es máxima. Puesto que la función transferencia se escribe como

$$T = \frac{R}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)}} \quad (3)$$

$T$  alcanza su máximo en  $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  llamada frecuencia resonante o de resonancia.

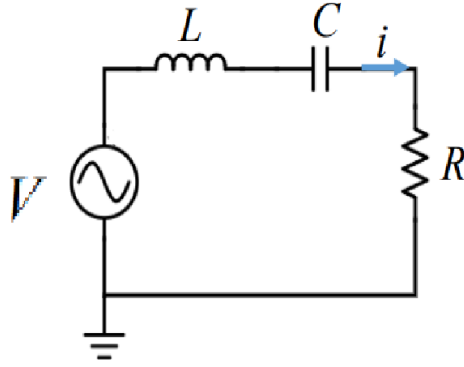


Figura 1: Circuito RLC

Para circuitos resonantes en general es conveniente analizar el factor de merito  $Q$ , que se define como:

$$Q = \frac{\omega_s}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (4)$$

Donde  $\omega_+$  y  $\omega_-$  son las frecuencias para las cuales la potencia absorbida por el sistema cae a la mitad de la potencia máxima que se transfiere en resonancia.

En el caso de un circuito RLC, el factor de merito puede ser expresado como:

$$Q = \frac{\omega_s L}{R}. \quad (5)$$

En consecuencia, el ancho de la resonancia es inversamente proporcional a  $Q$  o dicho de otro modo, un valor grande de  $Q$  significa que la resonancia es muy estrecha y la estabilidad del resonador es grande.

El modelo utilizado para estudiar el comportamiento dinámico de la respuesta eléctrica del piezoeléctrico es que se muestra en la Figura 2. El capacitor  $C_2$  modela el efecto aportado por las terminales metálicas del piezoeléctrico.

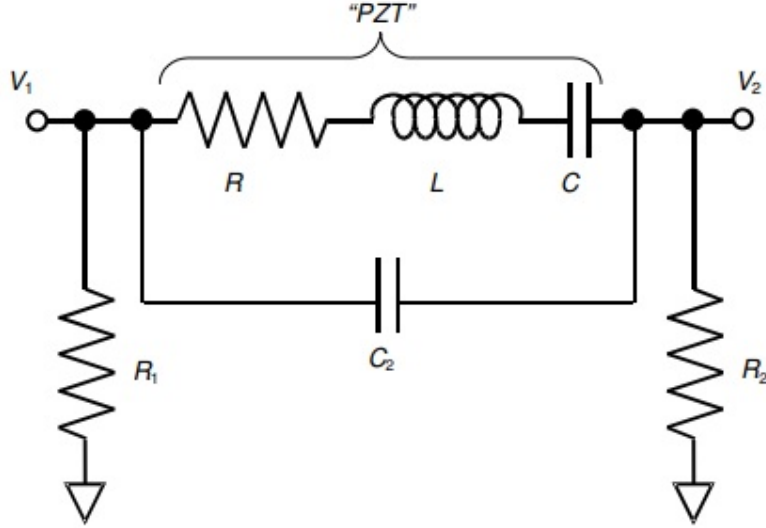


Figura 2: Circuito equivalente del piezoeléctrico con los electrodos

Como el objeto de estudio del presente trabajo se centra en la respuesta eléctrica del cristal, es necesario introducir la ecuación de transferencia de cuyos máximos y mínimos se obtienen las frecuencias de resonancia y anti-resonancia respectivamente. [2] [3]

$$T = \frac{R_2}{R_2 + Z} \quad (6)$$

donde la impedancia del circuito viene dada por

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ con } Z_1 = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \text{ y } Z_2 = -j \frac{1}{\omega C_2}. \quad (7)$$

La amplitud y fase de la respuesta del sistema vendrá dada por la amplitud y fase de la función compleja  $T$  expuesta por la ecuación (6). De esta ecuación, puede verse que evaluando la frecuencia en  $\omega_s$ , la parte reactiva de  $Z_1$  se anula mientras que  $Z_2$  es grande comparada con  $Z_1$  por lo que resulta  $Z \approx R$  y la transferencia máxima toma el valor de:

$$T(\omega_s) = \frac{R_2}{R_2 + R}. \quad (8)$$

Si bien los mínimos de  $||T||$  son difíciles de encontrar analíticamente, podemos proceder de manera análoga al caso anterior y pensar que en la anti-resonancia la respuesta del sistema es puramente reactiva y puede despreciarse  $R$ . De esta manera puede verse que la frecuencia de anti-resonancia puede estimarse por:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \right)} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta todo esto, si se conoce experimentalmente  $\omega_s$ ,  $R_2$ ,  $T(\omega_s)$ ,  $\omega_-$ ,  $\omega_+$  y  $\omega_p$  es posible realizar una primera estimación de los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $C_2$  para el modelo

equivalente de la siguiente manera:

$$R = R_2 \frac{1 - T(\omega_s)}{T(\omega_s)} \quad (10)$$

$$L = \frac{R}{\omega_+ - \omega_-} \quad (11)$$

$$C = \frac{\omega_+ - \omega_-}{R\omega_s^2} \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_p^2 L - \frac{1}{C}} \quad (13)$$

Esta estimación puede ser importante para la optimización de parámetros de ajuste, ya que nos da un punto de inicio en el campo de parámetros a iterar por el optimizador.

## 1.2. Respuesta al impulso

Se entiende como respuesta al impulso de un sistema dinámico, a la señal de salida de dicho sistema, cuando se coloca en la entrada una excitación de corta duración, referida como impulso.

El impulso se describe matemáticamente como una delta de Dirac o una delta de Kronecker según el sistema sea modelado continuo o discreto, respectivamente. Sabemos que una señal puede ser escrita en términos de su contenido espectral a través de la transformada de Fourier.

En el caso del impulso  $\delta(t)$  ideal su transformada de Fourier es la constante 1. Esto significa que tiene igual contribución de todas las posibles frecuencias de excitación, lo que lo hace una señal de prueba muy conveniente. Aunque esto es imposible de tener en un sistema real, resulta ser una idealización muy útil.

Para solucionar este inconveniente, no se requiere una señal impulsiva que tenga una respuesta plana en todo el rango espectral, sino que tenga una respuesta plana en las frecuencias en las que el sistema responde. Para que una señal tenga un contenido en frecuencias en un ancho de banda grande, es necesario que tenga flancos abruptos, por ejemplo, como la función escalón. Sin embargo, la pendiente de la función escalón no es completamente recta, sino que tiene un tiempo característico de subida  $\tau_R$  que se conoce como Rise time (es el tiempo que tarda la señal en cambiar del 10 % al 90 % del valor del máximo). Dicho esto, y como el ancho de banda de una señal es inversamente proporcional al  $\tau_R$ , si se tiene un  $\tau_R=100\text{ns}$  el ancho de banda es de 10 MHz, lo cual se estima que es mas que suficiente para estudiar la respuesta del piezoeléctrico con cualquier osciloscopio. [4]

La dificultad que se presenta en esta técnica es que para poder representar adecuadamente a la señal de excitación se necesita de al menos 20 MHz de frecuencia de muestreo, lo que a su vez, obliga a tener mucho tiempo de adquisición para obtener buena resolución entorno a la frecuencia de resonancia del cristal. Para estos casos suele tomarse una decisión de compromiso, en la que se sacrifica alguna característica en pos de mejorar otras. Por ejemplo, si contamos con un adquisidor que multiplexa la frecuencia de muestreo, quizás convenga medir solamente la respuesta del piezoeléctrico para aprovechar la máxima frecuencia de adquisición y tener mejor resolución espectral en la campana de resonancia.

Otra técnica que puede utilizarse para medir la frecuencia de resonancia es excitar con una señal cuadrada de 1/3 de dicha frecuencia, de esta manera, el primer armónico de excitación

se sintonizara con la resonancia del piezoeléctrico. En el presente trabajo se busca la respuesta ante dos tipos de excitación. Por un lado, excitando con una señal cuadrada de baja frecuencia, típicamente 1 Hz, con dut corto y por otro, excitando con un sub-múltiplo de la frecuencia de resonancia del piezoeléctrico.

## 2. Desarrollo experimental

El piezoeléctrico estudiado en el presente trabajo consta de un cristal de cuarzo de 50 mm de alto y 4 mm de lado, al que se le agregaron dos placas metálicas en lados opuestos del cristal. Dichas placas fueron conectadas a borneras a través de un alambre de cobre. El conjunto descrito se encuentra dentro de un recipiente de plástico con el objeto de evitar interacciones con diferencias de presión en el aire. En la Figura 3 puede verse el piezoeléctrico descrito.



Figura 3: Cristal piezoeléctrico de cuarzo

Una manera de caracterizar el piezoeléctrico de la Figura 3 es excitarlo con una señal senoidal dada por un generador de funciones, en este caso se utilizó un Tektronics modelo AFG3021B. Luego, su respuesta fue medida con un Osciloscopio modelo TDS1002B también de la firma Tektronics y un Lock-in modelo SR830 de la firma SRS.

Este último equipo realiza un producto interno entre la señal medida y una de referencia, en este caso la que entrega el mismo generador de funciones. Esto produce una amplitud de salida que dependerá de que tan similar sea la señal medida con la referencia. Es decir, un Lock-in puede pensarse como un filtro pasa banda de una sola frecuencia que permite medir señales AC de hasta nV inmersas en ruido, entregando la amplitud y fase de la señal de respuesta.[5]

Además, con el objeto de medir la respuesta al impulso, se utilizó una placa adquisidora para la recolección de datos National Instrument USB-6210 para medir la respuesta temporal del piezoeléctrico ante una excitación cuadrada de muy baja frecuencia.

En la Figura 4 puede verse el esquema experimental utilizado para todas las mediciones.

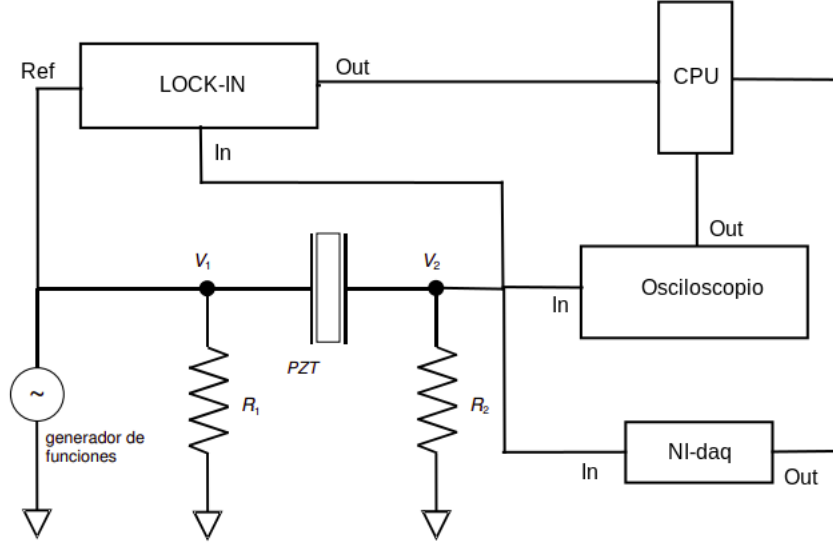


Figura 4: Esquema experimental de mediciones.

El valor de las resistencia  $R_1$  y  $R_2$ , agregadas antes y después del piezoeléctrico es de  $(9,81 \pm 0,01) k\Omega$ .

Las mediciones con Osciloscopio o Lock-In consistieron básicamente en medir la función de transferencia del piezoeléctrico ante un barrido senoidal en frecuencia, con el objeto de determinar la frecuencia de resonancia del cristal y su ancho de campana asociado. Una vez obtenida esta función de transferencia, se busco ajustar los datos a la respuesta resonante de un circuito RLC equivalente. Obteniendo así los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $C_2$  del modelo propuesto.

Por otro lado, utilizando la placa adquisidora NI-daq USB-620 a una alta tasa de muestreo, se midió la respuesta temporal del cristal ante una señal cuadrada de muy baja frecuencia entregada por el generador de funciones. Esta ultima medición busca, a través de la transformada de Fourier de la señal medida, determinar la frecuencia de resonancia y su amortiguamiento o ancho de banda asociado.

### 3. Resultados y discusiones

A continuación se exponen los resultados obtenidos para las mediciones de amplitud y fase entorno a la resonancia y anti-resonancia, su posterior ajuste al modelo  $RLCC_2$  y la transformada de Fourier de la respuesta temporal del cristal ante un impulso.

#### 3.1. Resonancia, anti-resonancia y circuito RLC equivalente

Una caracterización gruesa del comportamiento dinámico del piezoeléctrico consiste en buscar la frecuencia de resonancia variando a mano la frecuencia de excitación entregada por el generador de funciones y observando como varia la amplitud de la salida del sistema. Este proceso resulta poco eficiente ya que el ancho de banda de la resonancia de estos cristales suele ser de unos pocos Hz, es decir de un factor de calidad muy alto. Esto que dificulta bastante la tarea de

encontrar a mano las frecuencias de resonancia y anti-resonancia. Por tal motivo se estimó la frecuencia de resonancia sabiendo que la velocidad del sonido en el cuarzo es de  $5570\text{ m/s}$  y la longitud del cristal es de  $50\text{ mm}$ . Es decir:

$$f_r \approx \frac{v}{2\lambda} = \frac{5570\text{ m/s}}{2 * 0,05\text{ m}} = 55,7\text{ kHz} \quad (14)$$

Buscando con mas detalle, entorno a los  $50\text{ kHz}$ , se encontraron las frecuencias de resonancia y anti-resonancia del sistema en  $50096\text{ Hz}$  y  $50295\text{ Hz}$  respectivamente. Luego, se programaron barridos automáticos más finos entorno a las frecuencias halladas, obteniendo así la función de transferencia del sistema durante la resonancia y la anti-resonancia. La amplitud de esta función fue medida en primer lugar con el osciloscopio y, en una segunda medición con Lock-in, se obtuvo la amplitud y fase de dicha función de transferencia. En la Figura 5 pueden verse tanto las mediciones con osciloscopio como las realizadas con Lock-In durante la resonancia y anti-resonancia.

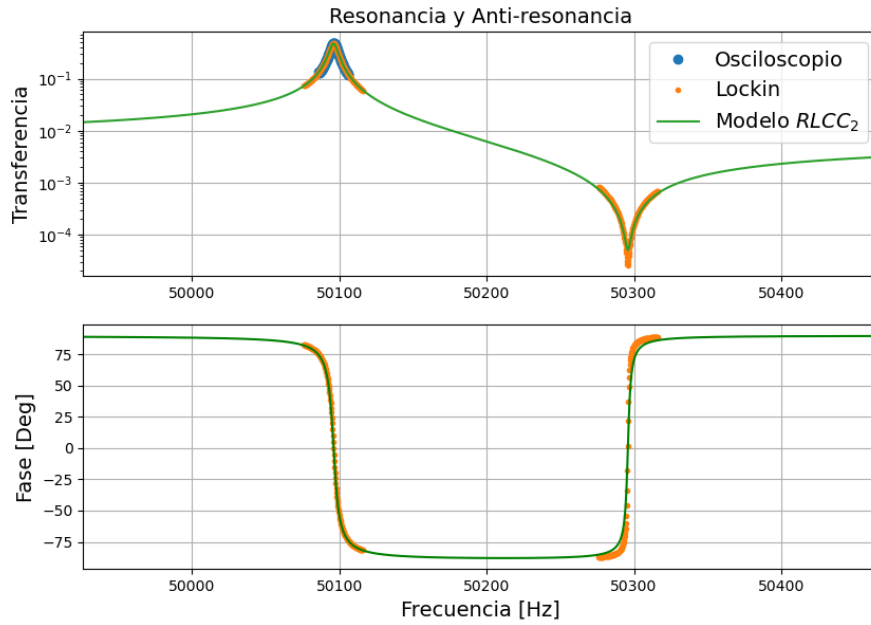


Figura 5: Función de transferencia medida para la resonancia y anti-resonancia del sistema.

En la Figura 5 puede verse además el ajuste al modelo  $RLCC_2$  de la Figura 2 el cual tiene en cuenta el efecto de los terminales, es decir, modelando las placas con un capacitor  $C_2$ .

En la Tabla 1 se exponen los parámetros de ajuste  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $C_2$  obtenidos junto con la bondad del ajuste.



Parámetro	Valor
$R$ [kOhm]	$10,9 \pm 0,1$
$L$ [H]	$582 \pm 2$
$C$ [fF]	$17,3 \pm 0,1$
$C_2$ [pF]	$2,2 \pm 0,1$
$R^2$ Amplitud	0,999
$R^2$ Fase	0,997

Tabla 1: Valores de los parámetros del circuito RLC equivalente.

A partir de la Figura 5 fue posible además calcular un factor de calidad  $Q = 8817$  con un ancho de banda de aproximadamente  $5,68 \text{ Hz}$ .

Con el objeto de apreciar con mayor detalle el ajuste en las zonas de resonancia y anti-resonancia, se expone en la Figura 6 cada caso de manera ampliada.

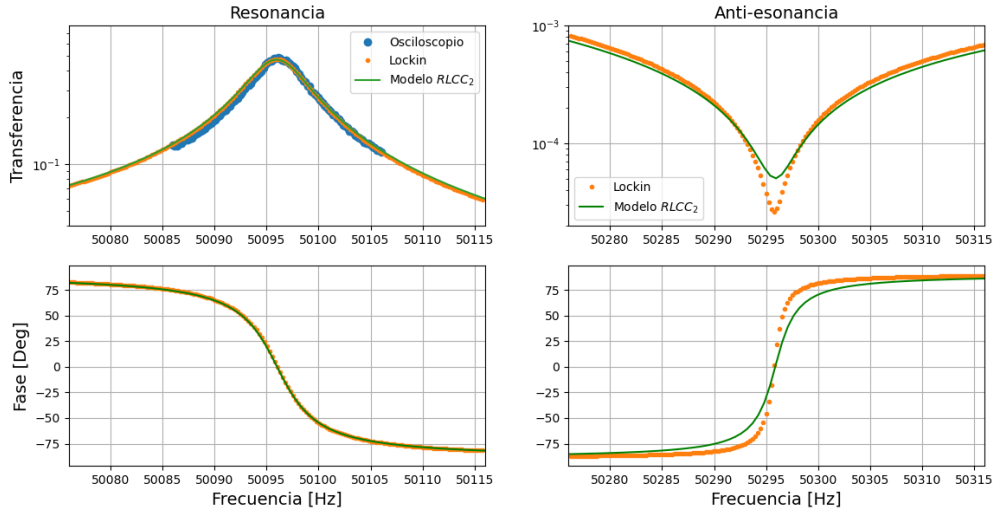


Figura 6: Detalle del ajuste a la función de transferencia medida.

La aparición de una anti-resonancia hace evidente la necesidad de incluir el efecto de las terminales al modelo equivalente, agregando el capacitor  $C_2$  en paralelo como se muestra en la Figura 2. Sin embargo, sabiendo que durante la anti-resonancia la respuesta es puramente reactiva, podría despreciarse  $R$  en este caso y obtener la constante  $C_2$  de la ecuación 9. Es decir:

$$C_2 = \frac{1}{\omega_p^2 L - \frac{1}{C}} \approx 2,16 \text{ pF} \quad (15)$$

Como podemos ver, la estimación anterior coincide con el valor de  $C_2$  ajustado por el modelo que si tiene en cuenta a  $R$  y  $C_2$ . Por lo que la hipótesis de que durante la anti-resonancia el sistema responde solo de manera reactiva resulta acertada.

Análogamente, durante la resonancia podría despreciarse el efecto de las terminales ya que el sistema responde de manera puramente resistiva. Sin embargo no hay que perder de vista que

estas son solo aproximaciones. Siendo el modelo propuesto en la Figura 2 el que representa mejor a los datos en su conjunto.

Por ultimo, se pudo verificar a través de un modelo de elementos finitos que la frecuencia de resonancia del sistema coincide con el primer modo axial del cristal, tal como puede verse en la Figura 7.

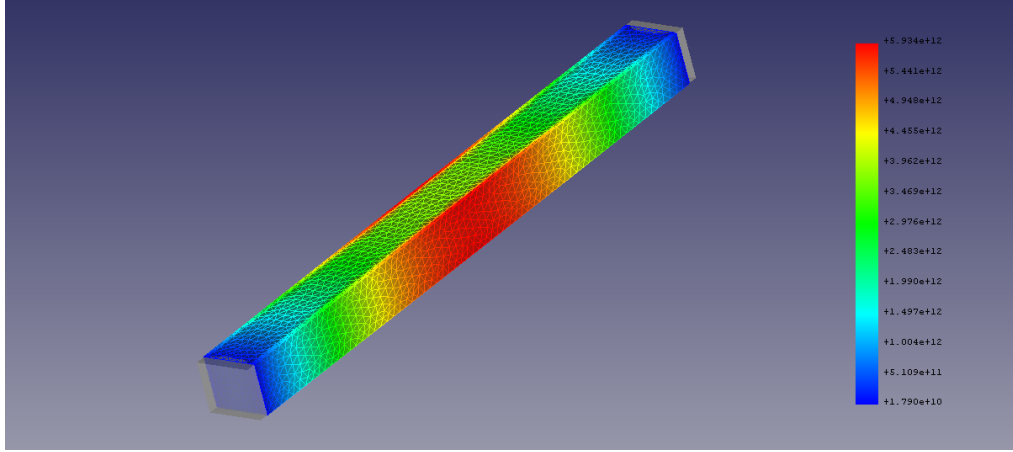


Figura 7: Forma modal del primer modo axial del conjunto cristal-placas.

En el análisis modal de la Figura 7 se excluyen los alambres de las terminales y se tiene en cuenta solo las características mecánicas del cuarzo y el cobre que componen el cristal y las placas respectivamente, mallando el conjunto con elementos tetraedricos.

### 3.2. Respuesta al impulso

Si el cristal es excitado por una señal con alto contenido en componentes frecuenciales, idealmente un espectro plano dado por una delta de Dirac; sabemos que la respuesta del sistema no puede ser otra que la de su función de transferencia. Sin embargo en la práctica, lo que más se asemeja a un espectro plano es una señal que tenga cambios muy abruptos en el tiempo.

Con el objeto de obtener la respuesta del piezoeléctrico ante un impulso, se excitó al sistema con señales cuadradas de baja frecuencia con dut ultra corto y trenes de pulso cuadrado de sub múltiplos de la frecuencia de resonancia.

Para el primer caso, se excitó el cristal utilizando una señal cuadrada de 1 Hz con un dut de  $35 \mu s$ . Luego se midió la señal de respuesta del sistema durante 10 segundos a  $250 kHz$  de muestreo. Esta alta tasa de muestreo permite, por criterio de Nystquit, resolver en frecuencia señales de hasta  $125 kHz$ , en donde queda ampliamente contenida la frecuencia de resonancia. Además, el largo período de 10 segundos de medición permite, no solo contener varios decaimientos completos de la frecuencia de resonancia debida a su ancho de banda, sino también poder realizar promediados lineales de la transformada de Fourier que limpien el ruido de bajo nivel.

En la Figura 8, la señal medida posee un alto contenido de frecuencia de linea. Este problema se intento corregir sin éxito, por lo que posteriormente se aplicó un pasa-bandas para filtrar la señal en el rango dinámico de interés.

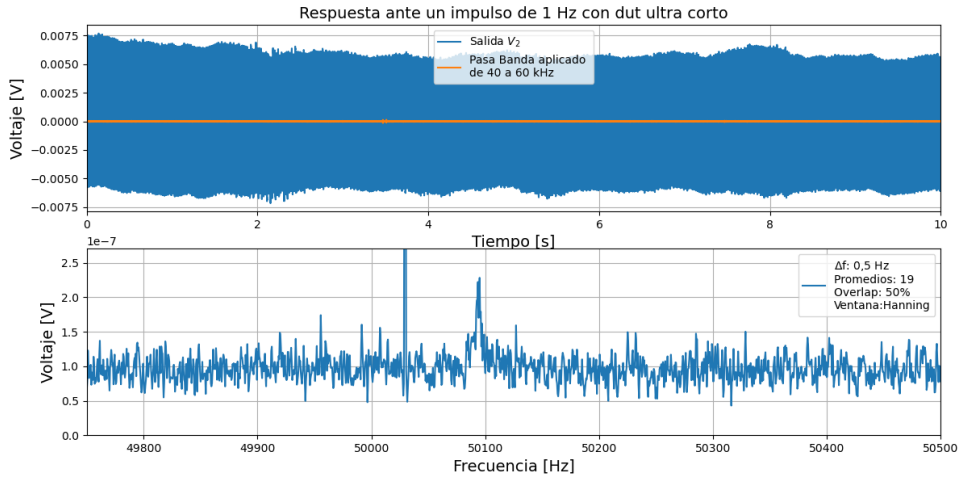


Figura 8: Señal temporal medida y su espectro en frecuencia centrado en la resonancia.

La baja respuesta del sistema en la frecuencia de resonancia puede estar asociada a la poca energía contenida en cada pulso, ya sea por una amplitud insuficiente o por un ancho de banda asociado a la duración del escalón. Al no adquirir la señal de excitación no fue posible corroborar el motivo de esta baja respuesta en la frecuencia de resonancia.

Por tal motivo se decidió cambiar a un dut de 50 % y a una frecuencia de la señal cuadrada de excitación de  $1/3$  y  $1/6$  de la frecuencia de resonancia del cristal. De esta manera, el responsable de excitar la frecuencia de resonancia  $\omega_s$  sera el primer o segundo armónico de la señal cuadrada respectivamente.

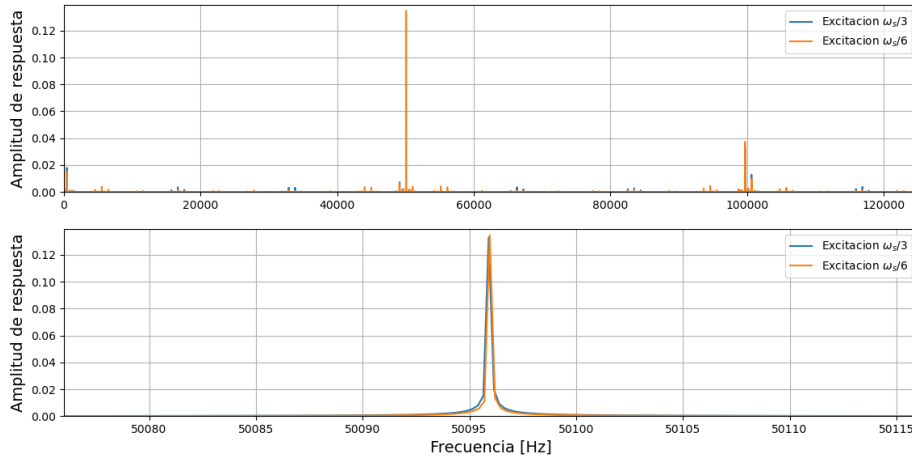


Figura 9: Espectro de respuesta ante excitaciones de sub-múltiplos de resonancia.

Como puede verse en la Figura 9 la amplitud que predomina en ambos espectros es la amplitud de resonancia del cristal. Sin embargo, de esta manera no podemos reproducir la respuesta obtenida en el barrido en frecuencia anterior, es decir no observamos una campana de resonancia con el ancho de banda medido anteriormente. En este caso el ancho es menor, esto puede deberse

a que solo estamos excitando con un armónico de un ancho muy fino centrado en la campana de resonancia del cristal por lo que no logra excitarse todo el ancho de banda de la campana y lo que vemos se corresponde mas con la excitación que con la respuesta.

## 4. Conclusión

En el presente trabajo se pudo caracterizar un cristal de cuarzo de 50 mm de largo y de 4 mm de lado y ancho de dos manera diferentes. La primera pensando al mismo como un circuito RLC (desarrollada la discusión y los resultados en la seccion 3.1), de este puede concluirse que resulta correcta la hipótesis y que, si bien esto no modela la interacción electro-mecánica por completo, resulta muy útil a la hora de encontrar aplicaciones electrónicas. En particular, queda establecido que es posible utilizarlo como un gran filtro pasa-banda al usar el circuito de la Figura 2, pues posee un ancho de banda principal de aproximadamente 5,6 Hz.

Por otro lado, se pudo caracterizar el mismo bajo otro método de respuesta a una señal cuadrada....

Respecto a dichas interacciones electro-mecánicas, pudo observarse una relación directa entre el primer modo axial de vibración del cristal y la frecuencia de resonancia eléctrica del piezo-eléctrico. No sucede lo mismo para el caso de la frecuencia de anti-resonancia, ya que no se encontraron modos normales entorno a esa frecuencia en el modelo FEM. Por lo que este efecto de ani-resonancia puede atribuirse a una capacidad adicional debida a las placas metálicas de los terminales.

## 5. Bibliografía

- [1] Gabriela Capelutto, Departamento de Física -FCEyN-UBA e INFIP-CONICET. Piezoeléctrico. URL: <http://materias.df.uba.ar/labo4Ba2016c1/files/2014/03/Piezo.pdf>
- [2] Cesar Moreno (2019), Departamento de Física-FCEyN-UBA e INFIP-CONICET. Resonancia eléctrica URL: [https://campus.exactas.uba.ar/pluginfile.php/355741/mod\\_resource/content/0/Apunte\\_RLC\\_resonancia.pdf](https://campus.exactas.uba.ar/pluginfile.php/355741/mod_resource/content/0/Apunte_RLC_resonancia.pdf)
- [3] Juan G Roederer, Electromagnetismo Elemental, 2da Ed. Eudeba, pág 342-354.
- [4] Gabriela Capelutto, Departamento de Física -FCEyN-UBA e INFIP-CONICET. Respuesta impulsiva de un sistema resonante. URL: <http://materias.df.uba.ar/l4b2022c2/files/2014/03/Respuesta-impulsiva-de-un-sistema-din%C3%A1mico.pdf>
- [5] Stanford Research Systems.About Lock-In Amplifiers.URL: <http://materias.df.uba.ar/labo4Ba2016c1/files/2016/03/lockin.pdf>