Mission d'occulatation lunaire

Vincent Callegari

June 6, 2024

1 introduction

2 zone d'observation

2.1 calcul de la zone exacte

durant l'étude de ces problèmes, on se place dans le référentiel de la Terre avec des coordonnées cartésienne, l'axe Terre-Soleil étant l'axe X avec l'axe Y colinéaire au plan écliptique de la Terre.

un point est dans la zone d'observation quand le soleil est totalement masqué et que la couronne est visible autour de l'astre occultant. Cette zone à la forme d'un double cône que l'on peut représenter comme la rotation d'un losange

le losange peut être définit par 3 points P_1,P_2 et P_3, ayant pour coordonnée $(P_{1x}, 0)$, (P_{2x}, P_{2y}),$(P_{3x}, 0)$ avec $\hat{x}$ le long de l'axe lune soleil.

les valeurs de P_{1x} et P_{3x} peuvent être facilement calculée en utilisant le théorème de Thalès :

$$P_{1x} = \frac{\bar{D} R_l}{R_s - R_l}$$

$$P_{3x} = \frac{\bar{D} R_l}{R_s(\alpha + 1) - R_l}$$

où $\bar{D}$ est la distance Soleil-lune, R_s le rayon solaire ,R_l le rayon lunaire et α est la taille supplémentaire de la couronne solaire par rapport au rayon solaire(plus *alpha* est proche de 0 plus on observera des parties de la couronne proche de la surface du soleil).

on peut ensuite calculer la position de P_2 en calculant l'intersection des lignes reliant la surface de la Lune au points P_1 et P_3 :

$$P_{2x} = \frac{P_{1x} tan(\theta_1) + P_{3x} tan(\theta_3)}{tan(\theta_1) + tan(\theta_3)}$$

$$P_{2y} = tan(\theta_1)(P_{1x} - P_{2x})$$

avec

$$\theta_1 = sin^{-1}\left(\frac{R_l}{P_{1x}}\right)$$

$$\theta_3 = sin^{-1}\left(\frac{R_l}{P_{3x}}\right)$$

avec $\alpha = 0.05$

2.2 approximation de la zone

la position des points P_1,P_2 et P_3 par rapport à la Lune vont changer en fonction de sa position autour de la Terre. Cependant la forme de la zone en elle même varie assez peu (les dimensions variant de moins de 0.5%).

On peut donc obtenir une bonne approximation de la zone d'observation où que se trouve la Lune autours de la Terre en calculant la forme de la zone d'observation lorsque la Lune se trouve à la place de la Terre puis de la déformer pour se positionner là où se trouve la Lune.

On nomme $\hat{P_1}$, $\hat{P_2}$ et $\hat{P_3}$ les points de la zone d'observation quand la Lune est à la place de La Terre. Les points P_1 et P_3 sont colinéaire avec le vecteur R_{ls} qui représente la position de la Lune par rapport au Soleil. De plus les points $\hat{P_1}$ $\hat{P_3}$ sont colinéaire avec l'axe X. On peut en déduire les formules suivantes de la position de P_3:

$$P_3 = R_{lt} + \hat{P_{3x}} D^{-1} R_{ls} \tag{1}$$

vérifier si un point S est dans la zone d'observation revient à vérifier les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} ||a|| &< ||b||p_1 \\ ||a|| &< O - ||b||p_2 \end{aligned} \tag{2}$$

avec b la projection de $S - P_3$ sur l'axe Lune- Soleil, $a = S - P_3 - b$ et p_1, p_2 et O sont des réel à déterminer. On remarque que si la Lune est à l'origine on a

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P_2 y}{P_2 x - P_3 x} \\ p_2 &= \frac{P_2 y}{P_1 x - P_2 x} \\ O &= P_2 y + (P_2 x - P_3 x) p_2 \end{aligned}$$

En supposant que la forme de la zone d'observation varie peu lorsque la lune se déplace, on peut utiliser les même coefficients où que se trouve la Lune.

Si on souhaite avoir une approximation un peu plus précise on peu prendre en compte la variation la plus importante sur la forme de la zone d'observation étant la variation de la longueur de la zone.

On peut prendre en compte cette variation en multipliant b par $\frac{||\hat{P}_1 - \hat{P}_3||}{||P_1 - P_3||}$

2.3 application numérique

on a les distances suivantes :

$$R_l = 1.7374 \times 10^6 m$$
$$R_s = 6.955 \times 10^8 m$$
$$D_{sl} = 1.496 \times 10^{11} m$$
$$\Delta_D = 2D_{tl} = 7.69496 \times 10^8 m$$

on obtient les valeur suivantes pour les points de la zone pour $\alpha = 0.05$

$$P_{3x} = 3.577 \times 10^8 m$$
$$P_{1x} = 3.758 \times 10^8 m$$
$$P_{1x} - P_{3x} = 1.7928 \times 10^7 m$$
$$P_{2x} = 3.655 \times 10^8 m$$
$$P_{2y} = 4.248 \times 10^4 m$$

avec

$$\Delta_{P_{3x}} = 1.835 \times 10^6 m$$
$$\Delta_{P_{1x}} = 1.927 \times 10^6 m$$
$$\Delta_{P_{1x} - P_{3x}} = 9.198 \times 10^4 m$$
$$\Delta_{P_{2x} - P_{3x}} = 4.487 \times 10^4 m$$
$$\Delta_{P_{2x}} = 1.880 \times 10^6 m$$
$$\Delta_{P_{2y}} = 4.935 \times 10^{-3} m$$

on observe qu'en utilisant l'approximation définie plus tôt, on néglige les variation de l'ordre du millier de kilomètres ($10^6 m$). et en ajoutant l'optimisation supplémentaire sur la valeur de b on néglige également les variation de l'ordre de la dizaine de kilomètre ($10^4 m$) ne laissant que les erreurs de l'ordre de quelques kilomètre sur la position de $P_2 x$ ce qui ne change pas grand chose compte tenu de la grande longueur de la zone par rapport à son épaisseur (environ $20000 km$ contre $100 km$)

3 problème 2D

on va considérer le problème suivant:

la lune suit une orbite circulaire autour de la Terre de rayon $a = 384000 km$.

la forme de la zone d'observation de la Lune est considérée comme étant égale à la zone d'observation de la lune si elle se trouvait à l'origine (la position de la terre). La position du point P_3 est déterminé par la formule suivante: avec

$$P_3(R_l) = R_{lt} + \hat{P_{3x}} D^{-1} R_{ls}$$

avec $\hat{P_3}$ étant la position du point P_3 quand la lune est à l'origine ,R_{lt} est la position de la lune relativement à la Terre. et R_{ls} est la position de la Lune relativement au Soleil.

(on a $R_{ls} = R_{lt} + D\hat{x}$);

le but est de trouver des orbites Kepleriennes qui effectue des observations répété et les plus longues possibles.

Les temps d'observation peuvent beaucoup varier allant d'une durée de quelques minutes à plusieurs heures.

dans la suite on va donc se concentrer sur une seule observation.

afin de pouvoir reproduire les observations, il vaut mieux prendre une période d'orbite qui est un multiple de celle de la Lune.

de ce fait on peut déterminer le demi grand axe du satellite avec la formule suivante:

$$a_s = a_l k^{\frac{2}{3}}$$

avec

$$P_s = kP_l$$

étant donné que l'objectif est de faire une observation, on peut faire partir le satellite directement de la zone d'observation.

De plus la dimension de la zone étant très étirée (environ $10000km \times 100km \times 100km$) on peut considérer que le satellite coupera forcement le segment $[P_3, P_1]$, on peut donc décrire la position initiale du satellite à l'aide de l'anomalie vraie de la lune ν et un scalaire λ entre 0 et 1. la position initiale du satellite devient :

$$S_0 = \lambda(P_1 - P_3) + P_3(R_l(\nu))$$

avec

$$R_l(\nu) = \begin{bmatrix} r(cos\Omega cos\theta - sin\Omega sin\theta cos\ i) \\ r(sin\Omega cos\theta - cos\Omega sin\theta cos\ i) \\ rsin\theta sin\ i \end{bmatrix}$$

avec $\theta = \nu + \omega$
pour l'instant on est en 2D donc l'équation se simplifie par:

$$X_l(\nu) = \begin{bmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant que l'on connait la position du satellite on peut déterminer sa vitesse à l'aide de la formule suivante:

$$||\dot{S}(0)|| = \sqrt{\frac{2\mu}{||S_0||} - \frac{\mu}{a_s}}$$

on peut ensuite determiner l'orientation de la vitesse initiale avec deux angles θ_s et ϕ_s.

la dynamique du satellite et de la lune doivent être calculé pour calculer le temps de l'observation.

on à la dynamique suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\overrightarrow{R_s}} \\ \dot{\overrightarrow{V_s}} \\ \dot{\overrightarrow{R_l}} \\ \dot{\overrightarrow{V_l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{V_s} \\ \frac{-\mu}{||R_s||^3}\overrightarrow{R_s} \\ \overrightarrow{V_l} \\ \frac{-\mu}{||R_l||^3}\overrightarrow{R_l} \end{bmatrix}$$

avec comme condition initiale :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{s0}} \\ \overrightarrow{V_{s0}} \\ \overrightarrow{R_{l0}} \\ \overrightarrow{V_{l0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\left(\widehat{P_1} - \widehat{P_3}\right) + R_{lt} + \frac{\widehat{P_{3x}}}{D}R_{ls} \\ \sqrt{\mu\left(\frac{2}{||R_{s0}||} - 2\right)}\widehat{v_0}(\theta_s, \phi_s) \\ r(\nu)\begin{bmatrix} (cos\Omega cos\theta - sin\Omega sin\theta cos\ i) \\ (sin\Omega cos\theta + cos\Omega sin\theta cos\ i) \\ sin\theta sin\ i \end{bmatrix} \\ \sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{bmatrix} -cos\Omega(sin\theta + e\ sin\omega) - sin\Omega(cos\theta + e\ cos\omega)cos\ i \\ -sin\Omega(sin\theta + e\ sin\omega) + cos\Omega(cos\theta + e\ cos\omega)cos\ i \\ (cos\theta + e\ cos\omega)sin\ i \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

la dynamique devra être simulée après et avant l'état initial pour trouver l'instant où l'objet entre et sort de la zone.

la fonctions d'objectif est définit comme suit :

$$\int_{-\tau_d}^{\tau_u} dx = \tau_d + \tau_u$$

où τ_d est l'instant où l'objet rentre dans la zone d'observation et τ_u l'instant où l'objet en sort.

l'équation utilisé pour vérifier si l'objet est dans la zone est l'équation (2).

les paramètre de contrôle sont :

- la position de la lune ν qui définit la position de la zone d'observation.
- la position initiale λ de l'objet dans la zone d'observation qui est simplifier par un segment allant de P_3 à P_1.
- les angles θ_s et ϕ_s qui définissent l'orientation de la vitesse de l'objet.

on a donc un espace de dimension 4 : $(\nu, \lambda, \theta_s, \phi_s) = [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$

l'espace est contraint mais étant donné que la plupart des dimension sont des angles et qu'il suffit de donner un score de 0 si λ est en dehors du domaine on peut considéré que l'espace est égal à $\mathbb{R}^4$ pour avoir un problème sans contrainte.