统一_给 2019 级新生的微积分学习心得

撰写人：李懿轩_2018 级物理学院

前言：

牛顿、爱因斯坦都相信数学、物理具有简洁性、普适性。在学习单变量微积分和多变量微积分的过程中，我发现许多数学公式可以统一成一个更简单的公式。

目录：

正文：

【壹】求导公式

单变量微积分中，18 个求导公式在“求导三大法则”下统一成一个公式:

$$(e^z)' = e^z, z \in C$$

注解：

注 1：18 个求导公式为：

（见微积分上册 P113 页）

$01.(\sin x)' = \cos x$	$02.(\cos x)' = -\sin x$
$03.(\tan x)' = (\sec x)^2$	$04.(\cot x)'=-(\csc x)^2$
$05.(\sec x)' = \tan x \cdot \sec x$	$06.(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$
$07.(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$07.(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$09.(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$10.(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$11.(a^x)' = a^x \text{lna}$	$12.(e^x)' = e^x$
$13.(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}(x \neq 0)$	$14.(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}(x > 0)$
$15.(x^n)' = nx^{n-1}(x > 0)$	16.c′=0

$17.(\sinh \mathrm{x})' = \cosh x$ $\quad 18.(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

注 2:【求导三大法则】指【四则运算求导法则】、【反函数求导法则】、【复合函数求导法则】。

注 3:用【导数的定义】和【极限的运算定理】可以证明求导三大法则。

注 4:求复杂函数的导数时,用定义求解非常困难,通常利用 18 个求导公式和求导三大法则进行求解。本题的思想与之类似,即不用定义,用已知的求导三大法则和 $(e^z)' = e^z, z \in C$证明其它 17 个求导公式

注 5:在单变量微积分和多变量微积分中,自变量属于实数域,此时 18 个求导公式只能统一为 2 个。但在复变函数中,自变量属于复数域,18 个求导公式可以统一为 1 个

证明:

步骤一:用 1 和求导三大法则推出 1-10

步骤二:用 12 和求导三大法则推出 11-18

步骤三:用 12 和求导三大法则推出 1

步骤一:

$$2.\ (\cos x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$3.\ (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{cos^2 x} = (\sec x)^2$$

4,5,6 的证明方法和 2,3 类似,请读者自行证明。

$$7.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin\quad)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8,9,10 的证明方法和 7 类似,请读者自行证明。

步骤二:

$$11.(a^x)' = (e^{xlna})' = e^{xlna} lna = a^x \ln a$$

$$13.(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, x > 0 \quad \textit{同理可证} x < 0 \textit{ 时的情况}$$

$$14.\ (\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y lna} = \frac{1}{xlna} (x > 0)$$

$$15.\ (x^n)' = (e^{nlnx})' = e^{nlnx} \frac{n}{x} = nx^{n-1} (x > 0)$$

$$16.\begin{cases} (ce^x)' = c'e^x + c(e^x)' \\ (ce^x)' = c(e^x)' \quad (*1) \end{cases} \Rightarrow c' = 0$$

17、18 易证,请读者自行证明。

注 :

16 化为 12 的确是循环论证。

但这个证明符合题目要求——用 12 和求导三大法则推出 11-18。(因为求导三大法则包括*1 式)

步骤三：

$$\text{欧拉公式 } e^{ix} = i\sin x + \cos x \quad x \in R\text{两边对 x 求导}$$

$$\text{左边} = e^{ix} \cdot i = -\sin x + i\cos x$$

$$\text{右边} = (\cos x)' + i(\sin x)'$$

$$\therefore \begin{cases} (\cos x)' = -\sin\ x \\ (\sin x)' = \cos x \end{cases}$$

证毕

【贰】三个微分中值定理

单变量微积分中，三个微分中值定理统一为泰勒公式
步骤一：0 阶的泰勒公式即为拉格朗日中值定理
步骤二：罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的特殊情况
步骤三：用罗尔、拉格朗日中值定理证明柯西中值定理

步骤一：

0 阶泰勒公式为

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(\varepsilon)(\mathrm{x} - x_0)$$

条件：f(x)在区间 I 上有 1 阶导数，$x_0 \in I, \varepsilon$介于 x 和x_0之间。

令$x_0 = a, x = b$

$$\text{可得}\mathrm{f}'(\varepsilon) = \frac{\mathrm{f(b)} - \mathrm{f}(a)}{\mathrm{b} - a}$$

即拉格朗日中值定理

步骤二、步骤三参考微积分上册 P138-P146

【叁】全部的不定积分公式

单变量微积分中，不定积分的公式统一于$\mathrm{df(u)} = \mathrm{f}'(\mathrm{u})\mathrm{du}$
即：所有不定积分的公式最后一步都需要化成该式右端的形式。

注：
由【一阶微分的形式不变性】，不论 u 是【中间变量】还是【自变量】，df(u)都等于$\mathrm{f}'(\mathrm{u})\mathrm{du}$。

【肆】牛顿-莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式

多变量微积分中，联系微分学和积分学的四个公式（牛顿-莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式）统一成【广义的 stokes 公式】

这个统一需要用到【外微分】。外微分在微积分下册 P340 页的附录中有详细解释，请读者自行阅读。

注：
这一统一可以大大加深读者对于四大公式的理解。

【伍】其它数学科目中的统一

(一)线性代数
  i. 线性代数统一为矩阵的【秩】

(二)概率论与数理统计
  i. 概率论中，复杂事件的概率在【概率运算法则】下，可以统一为基本事件的概率。
  ii. 这一思想和微积分中“求复杂函数的导数时，用定义求解非常困难，通常利用 18 个求导公式和求导三大法则进行求解”的思想相同。

【陆】我的其它心得

1. 数学分析、微积分、高等数学的区别
   a) 数学分析是数学学院学生学习的课程，课程内容是起源于牛顿、莱布尼茨的，经过 19 世纪数学家努力严密化的微积分。
   b) 微积分是科大除数学学院外学生学习的课程，课程内容同样是起源于牛顿、莱布尼茨的，经过 19 世纪数学家努力严密化的微积分。不同之处是，数学分析中对各个定理都有严格的证明，微积分中略过了很多证明。
   c) 高等数学是很多其它大学开设的教授微积分的课程。我个人认为这一名称不妥当，因为建立在极限理论之上的数学都是高等数学，包括【泛函分析】、【复分析】、【实分析】、【随机过程】等等。
2. 微积分的发展历史
   a) 笛卡尔、费马、帕斯卡等人提出一些不成体系的微积分理论
   b) 牛顿、莱布尼茨提出成体系的微积分理论
   c) 牛顿、莱布尼茨的微积分经过波尔察诺、柯西、黎曼、维尔斯特拉斯、戴德金、康托尔等人的努力严密化。
3. 微积分的学习方法
   a) 课堂：记【笔记】

b) 课后：复习笔记，不允许笔记中有不懂的东西。
c) 课后：写【作业】，作业中有不会的题一定要和同学讨论。
d) 考试前：能力强的同学可以直接刷题，遇到不会的再看笔记。能力弱的同学可以先看笔记，再刷题。