Basic Physics

在物理学的研究中，主要是采用简约主义 (Reductionism) 的做法

——田光善

解栋晖
3060393280@qq.com

目录

29 第二章 牛顿运动定律、曲线运动与万有引力定律

37 第三章 机械能与动量

前言

这是一本高中物理教科书，包含力学、热学和电磁学三个部分。笔者写作这本书，主要是想帮助高中学生能够顺利地理解高中物理的内容。尽管大家一致认为高中物理的内容是极度幼稚且简单的，但实际上，对于一个正常的高中生来说，理解高中物理并不是一件简单的事情，这主要是因为通行高中教科书中并没有讲述原理，例如，完全没有讲述动能定理、机械能守恒的原理，这在笔者当年读高中时就产生过极大的恶劣影响，以至于长期无法普适论证机械能守恒的合理性。

并且现在的高中教科书将各部分几乎完全割裂，例如，将静电学、恒定电流以及磁场完全割裂，以及将力学中的势能和电磁学中的势能以及其他的如非静电场的势能割裂，使得学生产生物理各部分毫无联系的错觉，以及莫名其妙的怪异。

为了解决上面所说的问题，笔者写作了这本书。秉持着简约主义的态度，这本书着重于介绍学生难以在常规的课堂教学和辅导书中学到的物理思想和原理，意图帮助所有人彻底理解高中物理。

本书的重点在于物理逻辑和思维的传授，并且更注重理论方面的内容，因此仅仅是对简单的定义和规律等进行了尽可能简洁的说明 (这是为了使得本书的内容成为一个完备的体系，而不是如思考题解答一般零散)，并且极多地忽视了应用层面的内容。并不是笔者在这部分没有技巧和方法，实在是笔者懒得写了，在中学阶段，应用涉及到的类型可是够多的。而且像定义和规律的详细介绍，以及一些具体的应用技巧，想必读者在课堂和辅导书上都能学到，因此笔者也没必要在这上面浪费时间。

当然，如果读者有不明白的地方 (不管是理论还是应用部分) 都可以直接根据封面的邮箱联系笔者，笔者在空闲时会尽快予以回复。

另外，本书不包含光学和原子物理的内容，因为在中学阶段，这部分内容几乎是“故事性”的，并没有太多值得深入思考的地方，学生只需自行阅读教材就足够了。如果后续作者有时间的话，或许会对这两部分进行补充。

关于写作这本书是否有意义的问题，笔者认为是有意义的。尽管这里面的内容都极其“简单”，以至于可能任何一个物理专业的学生都认为它是幼稚的，但却也总有大多数人 (包括很多物理专业的学生) 即使到了大学也没有理解中学物理课程所涉及的内容。对于以好奇心指引学习的人来说，我们认为奠定一个强大的基础是重要的，重要程度并不次于学习前沿理论。因此，笔者认为写这本书还是有意义的，尽管这本书并不会被大范围传播。

希望读者能够从其中获益，并且不吝指教。由于写作时间短暂 (实际只用了两三天时间，但也不必过于担心其中的内容太浅显，因为产生其中内容的过程还算比较漫长，只是将它们写下来没有费多少时间)，并且笔者并不十分了解读者的物理水平，这本教材里面可能有大量

的问题，这可能造成读者阅读的苦难。笔者希望读者能够将觉得不合理的内容告知笔者，以便笔者改进。当然，即便是写得尽善尽美，这其中的内容对于中学生来说也不是特别容易理解的，因此读者想要得到收获，必须付出相应的努力。

并且，本书中存在许多不严谨的内容，主要是由于试图在不超出中学数学的界限解释物理原理导致的，读者也需要注意这一点。以及，本书在排版、符号使用等方面也不够标准，甚至存在一些严重问题，比如这一页左上角的“目录”文字，就是一个排版问题，但笔者暂时不知道如何改掉这一错误，就放任它留在左上角了。

总而言之，这是一本辅助中学物理学习的教科书，并且不适合脱离其他材料的辅助单独使用。书写匆忙导致的问题，还望读者谅解。

Part I

Classical Mechanics

第一章　力、向量与直线运动

1.1　力

1.1.1　力的概念

Definition 1.1. 我们将物体对物体的作用称作力。

很显然地，我们认为力是有大小的，事实上，在国际单位制下，力的单位是牛顿，简称牛，国际符号是 N。并且，我们很容易地知道，描述一个力是需要方向的，例如，你向不同的方向推车，即对车施加作用，产生的效果是不相同的，如果没有方向的概念，我们将无法区分这两个作用，或者说这两个力。

为了直观地说明力的作用，我们常常用一根带箭头的线段来表示力。这个线段的长度代表力的大小，指向表示力的方向。

1.1.2　重力

Definition 1.2. 地球上一切物体都受到地球的吸引作用。这种由于地球的吸引而使得物体受到的力叫做重力。

一个物体的各部分都要受到地球对它的作用力，我们可以认为重力的作用集中于一点，这一点叫做物体的重心。或者说，我们可以把重力总的作用等效于作用在中心上的等大的力，实际上，后面我们会知道，重心上的等效力需要满足重力在大小和力矩上的等效，我们实际也是通过这种方式确定重心的位置的。

1.1.3　弹力

Definition 1.3. 发生形变的物体，由于要恢复原状，对跟它接触的物体会产生力的作用，这种力叫做弹力。

弹力的方向是与形变方向相反的。

1.1.4 胡克定律

弹力的大小根形变的大小有关，形变越大，弹力也越大。

Theorem 1.4. 弹簧弹力的大小 f 和弹簧伸长 (或缩短) 的长度 x 成正比，写成公式就是

$$f = kx \tag{1.1}$$

其中 k 是比例系数，称为弹簧的劲度系数或者倔强系数。倔强系数是一个有单位的量。在国际单位制中，f 的单位是牛，x 的单位是米，k 的单位是牛/米。

这个规律是由英国科学家胡克发现的，叫做胡克定律。

胡克定律有它的适用范围。物体的形变过大，超出一定限度，上述正比关系将不再适用，这时即使撤去外力，物体也不能完全恢复原状。这个限度叫做弹性限度。胡克定律在弹性限度内适用。弹性限度内的形变叫做弹性形变。本书中提到的形变，除非特别指明，一般是指弹性形变。

1.1.5 摩擦力

Definition 1.5. 当一个物体在另一个物体表面上做相对滑动的时候，要受到另一个物体阻碍它运动的力，这种力叫做滑动摩擦力。滑动摩擦力的方向总跟接触面相切，并且跟物体的相对运动的方向相反。

Theorem 1.6. 实验表明：滑动摩擦力跟压力成正比，或者说，跟一个物体对另一个物体表面的垂直作用力成正比。用 f 表示滑动摩擦力的大小，N 表示压力的大小，那么

$$f = \mu N \tag{1.2}$$

其中 μ 是比例常数，叫做滑动摩擦系数。这是一个比值，没有单位。

1.1.6 牛顿第三定律

Theorem 1.7. 两个物体之间的作用力和及作用力总是大小相等，方向相反，作用在一条直线上。这就是牛顿第三定律。

有人喜欢将其简称为“牛三”，我个人是不认同这种称呼的。一般地，我们将其简称为“第三定律”是比较合适的。

1.1.7 力的合成与分解

Definition 1.8. 一个力，如果它产生的效果跟几个力共同产生的效果相同，这个力就叫做那几个力的合力，求几个力的合力叫做力的合成。

Theorem 1.9. 实验表明，对于两个互成角度的共点力，可以用表示这两个力的线段为邻边作平行四边形，这两个邻边之间的对角线就表示合力的大小和方向，这叫做力的平行四边形法则。

Definition 1.10. 如果几个力产生的效果跟原来一个力产生的效果相同，这几个力就叫做原来那个力的分力。求一个已知力的分力叫做力的分解。

1.2 向量

力不但有大小，而且有方向。相同大小的力，方向不同，它们的作用效果并不相同。要把一个力完全表达出来，除了说明它的大小，还要指明它的方向才行。

这种既有大小又有方向的物理量，除了力而外，在物理学中还有很多。我们在初中学过的速度也是这类物理量。

这样，我们就接触到一类物理量。它们的共同特点是：既有大小，又有方向。

Definition 1.11. 这种既有大小又有方向的物理量，叫做向量。

力是矢量，速度也是向量。那些只有大小没有方向的物理量，叫做标量。长度、质量、时间是标量，初中学过的功、温度等也是标量。

1.2.1 向量的加减规则

我们知道，力的描述需要大小和方向两个量。为了描述力，我们用有方向的线段代表力，该线段的长度在数值上等于力的大小，箭头指向即为力的方向。

我们可以把这种有方向的线段叫做向量，把线段的长度叫做向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模被记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 a，并把模等于 0 的向量称为零向量，零向量仅仅是为向量体系的完整性而提出的概念，它的的方向是任意的。

在这种描述方法下，当物体受到一个力，又受到第二个力，那么在几何上，显然地，质点的总受力可以由代表分力的向量首尾相接后从末端指向前端的第三个向量来表示。

Definition 1.12. 简洁起见，我们可以定义

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{1.3}$$

为两个向量按次序首尾相接后的从末端指向前端的向量，其中 $\mathbf{a}$ 代表第一个向量，$\mathbf{b}$ 代表第二个向量，这样，$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 所表示的向量就可以代表由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 代表的力的合力。

有了“+”这种记号，或者说运算方式，我们可以将一些显而易见的规律表示为

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}. \tag{1.4}$$

以及

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{1.5}$$

这两条规律分别被称为向量相加的交换律和结合律。

另外，有时我们还会涉及从力中消去一段力，因此我们用

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} \tag{1.6}$$

表示能够代表原始力消去一段力后的剩余力的向量，其中向量 $\mathbf{a}$ 代表原始力，向量 $\mathbf{b}$ 代表消除的力。

我们很容易知道 [1]，$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 代表的向量实际上等同于向量 $\mathbf{a}$ 和与 $\mathbf{b}$ 向量方向相反但长度相等的向量相加后得到的向量。因此若我们用 $-\mathbf{b}$ 代表与 $\mathbf{b}$ 向量方向相反但长度相等的向量，并且使用记号 (1.3)，我们可以将这一规律表示为

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}). \tag{1.7}$$

以上就是向量体系的加减运算规则。

值得注意的是，尽管我们是通过力引进了这一基本规定，但它对于像速度、加速度等物理量都是适用的，我们也可以利用向量来描述这些物理量。

1.2.2 向量与数的乘法

[2] 显然地，仅仅只有上面的所谓向量加减运算还不足以使得向量成为描述带方向物理量的实用体系。在考虑力的方向的前提下，牛顿第二定律告诉我们，一质点所受力的向量等同于长度为质点质量倍，方向与质点的加速度同向的向量，但是再未补充新的定义之前，我们无法用向量的表达式表现这一规律。

[1]如果你觉得不容易知道的话可以亲自来问作者，我懒得在这里详细叙述了。邮箱在封面上已经给出，可通过邮件联系。

[2]目前我们还没有看到从这一部分之后的内容的实际意义，但为了完备性，我们提前给出这些定义。读者若无法理解其中的情境，可在学习后续课程后再来理解。

Definition 1.13. 我们定义 $\lambda \mathbf{a}$ 表示一个向量，其中 $\mathbf{a}$ 是一个向量，λ 是一个实数。并且它的模满足

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|, \tag{1.8}$$

它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 同向，反之则反向；而当 $\lambda = 0$ 时，该向量为所谓零向量。

那么在这一定义下，牛顿第二定律的矢量形式可以用向量简洁地描述为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{1.9}$$

在之前的定义下，我们可以很容易地知道

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}. \tag{1.10}$$

因为这三个式子所代表的向量的大小和方向都是相同的，这是显而易见的。这条规则被称为向量数乘的结合律。

我们还很容易地知道

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}. \tag{1.11}$$

这条规则被称为向量数乘的分配律。

向量相加及数乘的运算统称为向量的线性运算。

1.2.3 使用空间直角坐标系简化向量的线性运算

我们在三维空间中建立直角坐标系，并引入三个长度为 1 的分别与 x, y, z 轴平行的向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$。那么，依据向量相加的交换律与结合律和向量数乘的结合律与分配律，我们很容易地知道，以空间中 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为起始点的向量 $\mathbf{AB}$ 满足

$$\mathbf{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \tag{1.12}$$

并且，若我们再任意引入一个向量

$$\mathbf{CD} = \Delta x'\mathbf{i} + \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}. \tag{1.13}$$

再次依据之前的定义和规律，两向量的和可以被写为

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} = (\Delta x' + \Delta x)\mathbf{i} + (\Delta y' + \Delta y)\mathbf{j} + (\Delta z' + \Delta z)\mathbf{k}. \tag{1.14}$$

并且向量的数乘可以被写作

$$\lambda \mathbf{AB} = (\lambda \Delta x)\mathbf{i} + (\lambda \Delta y)\mathbf{j} + (\lambda \Delta z)\mathbf{k}. \tag{1.15}$$

也就是说，对向量进行加减以及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就可以了。

另外，在物理里面，为了描述空间中点的位置，我们常常使用所谓向径或矢径。向径即为起始点为原点，终点为点所在位置坐标的向量。例如，当点位于 $E(x, y, z)$ 处时，其向径为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1.16}$$

向径的定义在物理中也有着重要的应用，但没有新的根本性的内容，我们不再赘述。

1.2.4 向量的投影

Definition 1.14. 我们用 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ 之间的夹角，其取值小于 π。并且定义

$$\mathrm{Prj}_c \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \tag{1.17}$$

为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{c}$ 上的投影。

那么，显然投影存在性质

$$\mathrm{Prj}_c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Prj}_c \mathbf{a} + \mathrm{Prj}_c \mathbf{b} \tag{1.18}$$

以及

$$\mathrm{Prj}_c(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \mathrm{Prj}_c \mathbf{a}. \tag{1.19}$$

1.2.5 新定义-点乘

我们知道，在力学中有着所谓做功的概念，即力 $\mathbf{F}$ 作用于质点上，并且质点移动了 $d\mathbf{r}$ 的过程中，该力对质点所做的功可以用向量表示为

$$dW = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos\theta. \tag{1.20}$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{F}$ 和向量 $d\mathbf{r}$ 之间的夹角。

Definition 1.15. 现在我们定义

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta. \tag{1.21}$$

其中 θ 是向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之间的夹角。这种新定义出来的运算方式被称为向量的点乘，运算的结果被称为两个向量的数量积。

定义了这种新运算后，显然地，我们可以用这种新运算来表示做功等物理量，即做功可以被表示为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}|\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos\theta. \tag{1.22}$$

实际上，定义这种新运算不过是相当于给原来的式子换了一种更简洁更利于研究的记号而已。容易知道，数量积满足

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.23}$$

这一规则常被称为交换律，易证不再赘述。另外，数量积还满足

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \tag{1.24}$$

这一规则常被称为分配律，可以作如下证明：

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}|\mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}). \tag{1.25}$$

而投影有性质

$$\mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}\mathbf{a} + \mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}\mathbf{b}. \tag{1.26}$$

那么

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}|(\mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}\mathbf{a} + \mathrm{Prj}_{\mathrm{c}}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \tag{1.27}$$

数量积的第三个规律被称为结合律，即

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1.28}$$

其中 λ 为实数。当 $\mathbf{b} = 0$ 时，上式显然成立；当 $\mathbf{b} \neq 0$ 时，按投影的性质，我们可以知道

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|\mathrm{Prj}_{\mathrm{b}}(\lambda\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\lambda\mathrm{Prj}_{\mathrm{b}}\mathbf{a} = \lambda|\mathbf{b}|\mathrm{Prj}_{\mathrm{b}}\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1.29}$$

由上述结合律，利用交换律，还容易推得

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{1.30}$$

以及

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot (\mu\mathbf{b}) = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1.31}$$

这是因为

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.32}$$

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot (\mu\mathbf{b}) = \lambda[\mathbf{a} \cdot (\mu\mathbf{b})] = \lambda[\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] = \lambda\mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{1.33}$$

1.2.6 数量积的坐标表示

在空间直角坐标系下，有向量

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}. \tag{1.34}$$

容易知道，其数量积为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.35}$$

运用之前的规律很容易就能推出，因而我们不再赘述推导过程。

另外，由于

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta, \tag{1.36}$$

所以当 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 都不是零向量时，有

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{1.37}$$

将数量积的坐标表示式及向量的模的坐标代入上式，就得到

$$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \tag{1.38}$$

这就是两向量夹角余弦的坐标形式。

1.2.7 新定义-叉乘

当研究物体转动时，我们有所谓力矩

$$|\mathbf{M}|=|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta. \tag{1.39}$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{F}$ 的夹角。我们知道，力矩显然是具有方向性的，即使力和向径的大小、夹角都相同，作用效果也常常不同。在物理中，我们规定力矩的方向由右手螺旋的规律决定。

Definition 1.16. 在物理的基础上，我们规定

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{1.40}$$

代表大小为 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$，方向遵从右手螺旋规律的向量。

有了这种新的写法，我们可以将力矩写为

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}. \tag{1.41}$$

并且，我们有以下规律：

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \tag{1.42}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}, \tag{1.43}$$

以及

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{1.44}$$

后两个规律分别被称为分配律和结合律。

1.2.8 向量积的坐标表示

在空间直角坐标系下，有向量

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}. \tag{1.45}$$

那么，按照上述运算规律，其向量积为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} =& (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ =& a_x\mathbf{i} \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) + a_y\mathbf{j} \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) + a_z\mathbf{k} \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ =& a_xb_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_xb_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_xb_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_yb_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_yb_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_yb_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ & a_zb_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_zb_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_zb_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k}).\end{aligned} \tag{1.46}$$

因为

$$\begin{aligned}&\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ &\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},\end{aligned} \tag{1.47}$$

所以

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}. \tag{1.48}$$

这就是向量积的坐标表示。

结语

理解向量的关键就在于，将向量的体系看作是描述物理中矢量的工具，而不是直接地将向量看作具有大小和方向的物理量本身。

首先，我们用有方向的线段 (即向量) 描述需要彰显方向的物理量 (矢量)，然后我们根据物理的需求，给向量带来了四种基本的运算方式规定，即向量的相加规定、向量与数相乘的规定、向量的点乘的规定、向量的叉乘的规定。这四种运算方式的规定本质上仅仅只是对于向量的特定运算方式的更简洁的更利于研究的表示形式而已。

有了这四种运算方式的规定，我们可以更简洁地将代表两个位移线段首尾相接后的从末端指向前端的位移线段表示为 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$，将力的大小、路径大小以及力与路径之间的夹角的乘积表示为 $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ 等等。

并且，我们用定义出的新运算符号简洁地表示了本就存在的规律，如

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{1.49}$$

等。且由于时间所限，笔者并没有详细全面地列举和证明向量的规律，而仅仅只是讲述一种认识向量的思想。

1.3 直线运动

1.3.1 机械运动

我们在初中学过，一个物体相对于另一个物体的位置变化叫做机械运动。从这里不难看出，机械运动是需要参照系的。尤其需要明确的一点是，运动总是相对的，而不是绝对的。

> **Definition 1.17.** 被选作参照的另外的物体，被称为参照物。在以后的学习中，为了进行定量计算，我们还常常会选定参照物建立参照系。

1.3.2 质点

> **Definition 1.18.** 当一个物体的大小、形状对结果造成的影响可以忽略时，将该物体看作一个有质量而无体积的点来处理，这个等效的点叫做质点。

在中学当中，质点往往是为了简化问题，这实际上比较容易理解。在后续的学习中，我们会发现将大的物体分解成无穷个质点来处理是非常常见的。

1.3.3 位置和位移

> **Definition 1.19.** 在物理学中，我们用位移表示质点位置的变化。位移被定义为向量，其大小为始末位置的距离，方向由起始点指向终点。

值得注意的是，位移与路程是两个不同的物理量。路程是指质点所通过的实际轨迹的长度，只有大小，没有方向，是个标量。

1.3.4 匀速直线运动 速度

> **Definition 1.20.** 物体在一条直线上运动，如果在相等时间里的位移相等，这种运动就叫做匀速直线运动。匀速直线运动有时简称为匀速运动。

> **Definition 1.21.** 在匀速直线运动中，位移和时间的比值，叫做匀速直线运动的速度。如果做匀速运动的物体在时间 t 内的位移是 s，速度 v 就可以用下式来表示：
>
> $$v = \frac{s}{t} \tag{1.50}$$

速度在数值上等于单位时间内位移的大小。在国际单位制中，常常用米/秒 (m/s) 作为速度的单位。

速度不但有大小，而且有方向，是矢量。速度矢量的方向就是物体位移的方向。在匀速直线运动中，计算时通常取位移方向作为正方向，速度是正值。

从速度的公式 $v = s/t$ 可以得到

$$s = vt \tag{1.51}$$

这个公式叫做匀速运动的位移公式。

1.3.5 匀速直线运动的图像

1、位移-时间图像

任意选择一个平面直角坐标系、用横轴表示时间，用纵轴表示位移，画出位移和时间的关系图线，这种图象叫做位移-时间图象，简称为位移图象。

显然，位移图像的斜率为

$$k = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.52}$$

这表示匀速直线运动的速度。

2、速度-时间图像

在平面直角坐标系中，用横轴表示时间，用纵轴表示速度，画出速度和时间关系的图线，这种图象叫做运动的速度- 时间图象，简称为速度图象。匀速运动的速度不随时间改变，它的速度图象是一条与横轴平行的直线。

匀速直线运动的速度-时间图像下的面积是

$$\Delta S = v\Delta t = s \tag{1.53}$$

即面积代表位移的大小。

1.3.6 变速直线运动

1、变速直线运动

Definition 1.22. 物体在一条直线上运动，如果在相等时间里的位移不相等，这种运动就叫做变速直线运动。变速直线运动有时简称为变速运动。

2、平均速度

Definition 1.23. 在变速直线运动中，运动物体的位移和所用时间的比值，叫做这段时间里的平均速度。如果用 v 来表示平均速度，那么

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \tag{1.54}$$

一般认为平均速度是一个标量，其方向意义不大。

3、瞬时速度

Definition 1.24. 运动物体在某一时刻 (或某一位置) 的速度，叫做顺时速度。

在数学上，瞬时速度可以被表示为当 Δt 趋近于零时，平均速度的极限值，即

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.55}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ 表示极限的限制条件。

瞬时速度既有大小，又有方向，是矢量。在直线运动中，瞬时速度的方向就是物体经过该点时的运动方向。即时速度的大小叫做即时速率，简称速率，它是一个表示物体运动快慢程度的标量。

1.3.7 匀变速直线运动 加速度

Definition 1.25. 在一条直线上运动的物体，如果在相等的时间里速度的变化相等，物体的运动就叫做匀变速直线运动，或者简称为匀变速运动。

Definition 1.26. 在匀变速直线运动中，速度的变化和所用的时间的比值，叫做匀变速直线运动的加速度。

用 v_0 表示运动物体开始时刻的速度 (初速度)，用 v_t 表示经过一段时间 t 的速度 (末速度)，用 a 表示加速度，那么，

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} \tag{1.56}$$

由上式可以看出，加速度在数值上等于单位时间内速度的变化。

加速度的单位是由时间的单位和速度的单位确定的。在国际单位制中，时间的单位是秒，速度的单位如果用 m/s、加速度的单位就是 m/s^2，读作米每二次方秒。

加速度不但有大小，而且有方向，因此是矢量。

在匀变速直线运动中，加速度矢量是恒定的，大小和方向都不改变，因此匀变速直线运动也就是加速度矢量恒定的运动。

1.3.8 匀变速直线运动的速度

1、匀变速直线运动的速度

根据定义

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} \tag{1.57}$$

可以得到

$$v_t = v_0 + at \tag{1.58}$$

这个公式叫做匀变速直线运动的速度公式。

2、匀变速直线运动的速度图像

容易知道，匀变速直线运动的速度图像的斜率为

$$k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \tag{1.59}$$

即斜率等同于加速度。

匀变速运动的位移可以用速度图线和横轴之间的面积来表示。可以这样想，我们把时间细分为很多相等的区段，在每个区段内，物体以区段开始时的速度进行匀速直线运动，此时这样一个虚拟的运动所经过的总的位移就是一个个长方形的面积之和。

我们把时间区段分的越小，可以预见这样的找到的虚拟的运动与实际进行的运动所经过的位移就会越接近，同时，虚拟运动的面积之和也与实际运动的面积之和越来越接近。随着单个时间区段的减小，虚拟运动的位移会趋近于实际运动的位移值，同时，虚拟运动的面积也会趋近于实际运动的面积。而由于虚拟的运动所经过的总的位移就是一个个长方形的面积之和，因此当我们取的时间间隔无限小时，实际运动的位移就等同于其速度-时间曲线下面的面积。

1.3.9 匀变速直线运动的位移

1、匀变速直线运动的位移

我们已经知道匀变速直线运动的速度公式为

$$v_t = v_0 + at \tag{1.60}$$

而匀变速直线运动的位移可以表示为

$$s = \sum \lim_{\Delta t \to 0} v_t \Delta t = \sum \lim_{\Delta t \to 0} (v_0 + at)\Delta t \tag{1.61}$$

并且

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t \tag{1.62}$$

亦即

$$\lim_{\Delta t\to 0} t\Delta t = \frac{1}{2}\Delta(t^2) \tag{1.63}$$

将式 (1.63) 代入式 (1.61)，得到

$$s = \sum \lim_{\Delta t\to 0}(v_0 + at)\Delta t = v_0 \sum \lim_{\Delta t\to 0} \Delta t + \frac{1}{2}a \sum \lim_{\Delta t\to 0} \Delta(t^2) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.64}$$

这就是匀变速直线运动的位移公式。

2、两个重要推论

根据 $v_t = v_0 + at$，我们有

$$t = \frac{v_t - v_0}{a} \tag{1.65}$$

将此式代入匀变速直线运动的位移公式，得到

$$\begin{aligned} s &= v_0 \frac{v_t - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_t - v_0}{a}\right)^2 \\ &= \frac{v_0 v_t - v_0^2}{a} + \frac{v_t^2 - 2v_0 v_t + v_0^2}{2a} \\ &= \frac{2v_0 v_t - 2v_0^2 + v_t^2 - 2v_0 v_t + v_0^2}{2a} \\ &= \frac{v_t^2 - v_0^2}{2a} \end{aligned} \tag{1.66}$$

这一结论也常常被表述为

$$v_t^2 - v_0^2 = 2as \tag{1.67}$$

另外，根据平均速度的定义，我们有

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = v_0 + \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}(v_0 + v_t) \tag{1.68}$$

该式表明：在匀变速运动中，某段时间内的平均速度等于达段时间的初速度和末速度的算术平均值，要注意这个结论是利用匀变速运动的公式导出的，所以它只适用于匀变速运动，对非匀变速运动并不适用。

1.3.10 自由落体运动

1、自由落体运动

> **Definition 1.27.** 物体只在重力作用下，从静止开始下落的运动，叫做自由落体运动。

2、自由落体运动的加速度

Definition 1.28. 不同的自由落体，它们的运动情况相同：它们在做初速度为零的匀变速运动中，在相同的时间内发生相同的位移。由此可以知道，在同一地点，一切物体在自由落体运动中的加速度都相同。这个加速度叫做自由落体加速度，也叫重力加速度，通常用 g 来表示。

目前国际上取 $g = 9.80665 m/s^2$ 为重力加速度的标准值，在通常的计算中可以取 $g = 9.8 m/s^2$。匀变速直线运动的公式在自由落体运动中仍是适用的，只不过把加速度换成了重力加速度 g。

1.3.11 竖直上抛运动

Definition 1.29. 将物体用一定的初速度沿竖直方向向上抛出去，物体所做的运动叫做竖直上抛运动。

竖直上抛运动和自由落体运动一样，本质上不过是匀变速直线运动规律的应用，因此我不再赘述详细求解方法。但是值得注意的一点是，正方向的问题。

正方向的问题贯穿中学物理学应用的始终，如果不能理解到正方向的本质，对理解计算的过程有深远的恶劣影响。以竖直上抛为例，我们稍微介绍下所谓正方向。在计算竖直上抛运动时，我们可以不考虑分成很多过程，而是仅将其看作一个匀变速直线运动。那么我们在计算上很快会发现一个问题：即有时候我们的速度算出来是负值，这实际说明一个问题：即重力加速度“削减”的速度值大于了初始的速度值，也就是说，实际速度的大小是此时速度的大小，而方向与初始的上抛方向相反。

对上面这段话做一个总结，就是当我们计算出速度的值为负时，代表速度已经反向。这就是所谓正方向的本质。因此我们引入了所谓正方向的规定，即我们规定初始速度的方向为正方向，那么当计算出速度变为负值时，说明其方向与初始速度相反。

理解正方向是一个漫长的过程，读者需要在每次计算中多多留意正方向规定的合理性，并总是试图寻找其本质，才能真正理解。

第二章 牛顿运动定律、曲线运动与万有引力定律

2.1 牛顿运动定律

2.1.1 牛顿第一定律

Definition 2.1. 一切物体总保持匀速直线运动状态或静止状态，直到有外力迫使它改变这种状态为止。

这就是牛顿第一定律，物体的这种保持原来的匀速直线运动状态或静止状态的性质叫做惯性，牛顿第一定律又叫做惯性定律。

实验指出，力是使物体产生加速度的原因，或者说，力是改变物体运动状态的原因。物体运动状态的改变，不但跟物体所受的外力有关，而且跟物体本身的性质有关。质量越大，物体的惯性就越大，物体的运动状态就越不容易改变。质量是物体惯性大小的量度。

2.1.2 牛顿第二定律

1、牛顿第二定律的内容

Definition 2.2. 实验指出，物体的加速度跟物体所受的外力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向和外力的方向相同。这就是牛顿第二定律。

该定律可以写作

$$a \propto \frac{F}{m} \quad \text{或者} \quad F \propto ma \tag{2.1}$$

亦或者 $F = kma$，其中 k 是比例常数。

实际上，我们在之前只是定义了力这个概念，而并没有具体讲它的度量。方便起见，在国际单位制下，我们实际上令比例系数 $k = 1$，然后定义 1 牛顿的力为可以使得 1kg 的物体产生 $1\mathrm{m/s^2}$ 的加速度，这就是牛顿单位的由来。有了这个定义，我们就可以定量地描述物体间相互作用的大小了。根据这个规定，我们有

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} \tag{2.2}$$

此时牛顿第二定律的公式简化为

$$F = ma \tag{2.3}$$

实际上，由于力 F 和加速度 a 都是矢量，结合力的方向和加速度的方向相同的规律，我们可以将牛顿第二定律写作向量式，即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.4}$$

加粗代表其为向量而非标量。

注意，等式 $F = kma$ 中的 k 并不是在任何情况下都等于 1，例如 m 的单位用克，a 的单位用 cm/s^2，而力的单位用牛顿时，k 就不等于 1。

2、推论：力的独立作用原理

当几个力同时作用于物体时，牛顿第二定律的公式可以写作

$$\mathbf{F}_{合外} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots = m\mathbf{a} \tag{2.5}$$

即

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} + \cdots \tag{2.6}$$

也就是说，物体实际的加速度是几个分力独立作用于该物体时产生的几个加速度的向量和。这就是力的独立作用原理。

容易推广得到：物体实际的运动情况是几个分力独立作用于该物体时产生的几个运动情况的向量和。运动情况包括位移、速度和加速度。当然，很容易知道，位移、速度、加速度都是矢量，它们的合成都满足平行四边形法则。

3、超重和失重

当物体存在一个向上的加速度，根据牛顿第二定律，我们有

$$N - mg = ma \tag{2.7}$$

其中 N 为支持物对物体的支持力。上式可表为

$$N = mg + ma > mg \tag{2.8}$$

这种现象叫做超重现象，即

> **Definition 2.3.** 当物体存在向上的加速度时，它对支持物的压力 (或对悬挂物的拉力) 大于物体的重量的现象，叫做超重现象。

当物体存在一个向下的加速度，根据牛顿第二定律，我们有

$$mg - N = ma \tag{2.9}$$

其中 N 为支持物对物体的支持力。上式可表为

$$N = mg - ma < mg \tag{2.10}$$

这种现象叫做失重现象，即

> **Definition 2.4.** 当物体存在向下的加速度时，它对支持物的压力 (或对悬挂物的拉力) 小于物体的重量的现象，叫做失重现象。

2.2 曲线运动

2.2.1 平抛物体的运动

平抛运动是一个加速度与速度方向不相同的运动，根据牛顿第二定律，我们有

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{2.11}$$

为了定量分析它，我们需要用到向量有关的知识。以抛出点建立平面直角坐标系，初速度方向为 x 轴，重力加速度方向为 y 轴，那么牛顿第二定律可以写作

$$g\mathbf{j} = a_y\mathbf{j} + a_x\mathbf{i} \tag{2.12}$$

其中 $\mathbf{j}$ 为 y 方向的单位方向向量，$\mathbf{x}$ 为 x 方向的单位方向向量。上式表明：

$$a_y = g, \quad a_x = 0 \tag{2.13}$$

现在我们将运动分解为 x, y 方向的分运动的叠加。容易论证，在 y 方向的分运动表现为初速度为零的以 g 为加速度的匀加速直线运动，而在 x 方向的分运动为一初速度为 v_0 的匀速直线运动。由此可以得到

$$y = \frac{1}{2}gt^2, \quad x = v_0t \tag{2.14}$$

总的运动为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = v_0t\mathbf{i} + \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} \tag{2.15}$$

这就是关于平抛运动的分析。

2.2.2 斜抛物体的运动

斜抛物体的运动的分析原理和上面的平抛运动完全相同，只不过计算上稍微复杂一点，因此我们不再赘述，因为我们关心的不是广泛的应用，而是普适的原理。正如本书封面上的话：在物理学的研究中，主要是采用简约主义 (Reductionism) 的做法。

当然，对于中学生读者来说，斜抛运动的研究同样重要，因为它们关乎考试成绩。值得注意的是，务必要理解普适的原理，而不是只追求遍历所有的情况并记住。

2.2.3 匀速圆周运动

1、匀速圆周运动的基础概念

> **Definition 2.5.** 质点沿圆周运动，如果在相等的时间里通过的圆弧长度都相等，这种运动就叫做匀速圆周运动。

质点做匀速圆周运动的时候，它通过的弧长 Δs 与所用的时间 Δt 之比是个定值，这个比值就是匀速圆周运动的速率，即速度的大小

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = const \tag{2.16}$$

可以看出，v 的数值等于质点在单位时间内通过的弧长。

质点做匀速圆周运动时，运动一周所用的时间叫做周期。如果质点沿半径为 r 的圆周做匀速圆周运动，记周期是 T，则周期 T、半径 r 以及速率 v 之间的关系是

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{2.17}$$

质点做圆周运动的快慢也可以用角速度来描述。在匀速圆周运动的情况下，在任何相等的时间里质点通过的圆弧长度都相等，连接质点和圆心的半径转过的角度也都相等，即半径转过的角度 $\Delta\phi$ 跟所用的时间 Δt 之比是个定值。我们把这个比值叫做匀速圆周运动的角速度，角速度的符号是 ω，写成公式就是

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \tag{2.18}$$

可以看出，角速度的数值等于在单位时间里半径转过的角度。显然地，角速度与周期的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.19}$$

另外，我们还有

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = r\omega \tag{2.20}$$

这就是圆周运动的速度和角速度的关系。

2、向心加速度

在质点进行匀速圆周运动时，其速度变化如下图 2.1 所示。可以看到

$$\Delta v = v\Delta\phi = v\omega\Delta t \quad (\Delta\phi \to 0) \tag{2.21}$$

因此

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega v \quad (\Delta\phi \to 0) \tag{2.22}$$

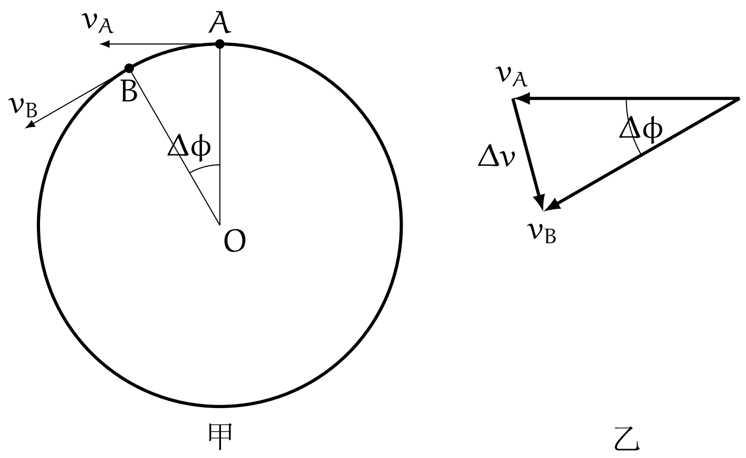

图 2.1

结合之前速度和角速度的关系，我们可以得到

$$a = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \tag{2.23}$$

显然这个加速度的方向是沿径向向内的，即指向圆心的。

在匀速圆周运动中，由于 r, v, ω 是不变的，所以向心加速度的大小不变；但是向心加速度的方向却时刻在改变，在圆周上不同点处，向心加速度的方向不同，沿着该点的半径指向圆心。而加速度是既有大小又有方向的矢量，所以匀速圆周运动是一种变加速运动。

3、向心力

我们知道，向心加速度的方向是指向圆心的，加速度的方向跟力的方向又总是一致的，所以使物体产生向心加速度的力的方向也一定是指向圆心的。因此，习惯上常把使物体产生向心加速度的力叫做向心力。

2.3 万有引力定律

2.3.1 开普勒的三个定律

开普勒通过实验数据得到了这样三条定律：

Theorem 2.6. 开普勒第一定律：所有的行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动，太阳是在这些椭圆的一个焦点上。
开普勒第二定律：太阳和行星的联线在相等的时间内扫过相等的面积。
开普勒第三定律：所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方跟公转周期的平方的比值都相等，即 $R^3/T^2 = K$，比值 K 是一个与行星无关的常量。

2.3.2 万有引力定律

万有引力叫做 Universal Force，也可以翻译为“普适力”。

在《Conversations On The Dark Secrets Of Physics》中提到，万有引力定律的灵感来源于开普勒三定律中的 $K = \frac{R^3}{T^2}$。

$$K = \frac{R^3}{T^2} = \frac{R^3}{4\pi^2}\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{R}{4\pi^2}(\omega R)^2 = \frac{R}{4\pi^2}v_\theta^2 \tag{2.24}$$

简单起见，让我们考虑以圆轨道运行的星体，那么

$$K = \frac{R}{4\pi^2}v_\theta^2 = \frac{R}{4\pi^2}v^2 = \frac{R}{4\pi^2}\frac{R}{m_e}\left(m_e\frac{v^2}{R}\right) = \frac{R^2}{4\pi^2 m_e}F \Rightarrow F = \frac{4\pi^2 m_e K}{R^2} \tag{2.25}$$

F 为向心力，也看作太阳对地球的引力和地球对太阳的引力。那么根据对称性，F 还与太阳的质量 M_s 成正比，那么 F 的表达式可以写为

$$F = \frac{4\pi^2 m_e C M_s}{R^2} = \frac{G M_s m_e}{R^2} \tag{2.26}$$

G 为万有引力常量，于 1789 年由 Henry·Cavendis 测得，为

$$G = 6.67259 \times 10^{-8}\frac{(cm)^3}{g\cdot s^2} \tag{2.27}$$

这就是万有引力定律。

2.3.3 宇宙速度

1、第一宇宙速度

当卫星围绕地球做半径为 r 的圆周运动时：

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{2.28}$$

对于靠近地面运转的卫星，$r \approx R_{地}$，此时

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_{地}}} = 7.9km/s \tag{2.29}$$

这就是人造地球卫星在地面附近环绕地球做匀速圆周运动必须具有的速度，叫做第一宇宙速度，也叫环绕速度。

2、第二宇宙速度

如果人造地球卫星进入轨道的水平速度大于 7.9km/s，而小于 11.2km/s，它绕地球运动的轨迹就不是圆，而是椭圆。当物体的速度等于或大于 11.2km/s 的时候，物体就可以挣脱地球引力的束缚，成为绕太阳运动的人造行星，或飞到其他行星上去，所以 11.2km/s 这个速度叫做第二宇宙速度，也叫脱离速度。

3、第三宇宙速度

达到第二宇宙速度的物体还受着太阳引力的束缚，要想使物体挣脱太阳的束缚，飞到太阳系以外的宇宙空间去，必须使它的速度等于或大于 16.7km/s，这个速度叫做第三宇宙速度，也叫逃逸速度。

第二和第三宇宙速度的导出需要用到后续的知识，在高中阶段往往不做要求。

第三章 机械能与动量

3.1 机械能

3.1.1 功

我们考虑质点的一个微小的元运动过程，并且有一个合外力 $\mathbf{F}$ 作用在质点上，θ 为向量 $\mathbf{F}$ 与 $\Delta\mathbf{s}$ 的夹角，那么在此元过程内，我们有

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},\quad F\cos\theta = ma \tag{3.1}$$

因此

$$\Delta s = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2F\cos\theta} \Rightarrow F\Delta s\cos\theta = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3.2}$$

为了方便起见，我们定义

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = F\Delta s\cos\theta \tag{3.3}$$

其中 θ 为向量 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{s}$ 的夹角。更具体的请参见第一章中的向量部分。这样，原式简化为

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3.4}$$

由此受到启发，我们

Definition 3.1. 定义一个质量为 m、速度为 v 的质点的动能 (Kinetic Energy) 为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.5}$$

动能的单位为焦耳 (J)。

以及

Definition 3.2. 定义

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = Fs\cos\theta \tag{3.6}$$

为功，用 W 表示。做功的单位为焦耳 (J)。

这个定义只适用于元过程或者恒力作用下的直线运动过程，如果是曲线运动，需求出每个元过程的元功，并对其求和。

Definition 3.3. 定义表示做功快慢的量叫做“功率”，用 P 表示：

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv\cos\theta \tag{3.7}$$

其单位为瓦特 (W)。

3.1.2 动能定理

1、质点的动能定理

所谓质点的动能定理，即上节所述的式 (3.4)：

$$\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3.8}$$

该式仅对 $\Delta s \to 0$ 的元过程有效。

如果运动过程比较简单，我们可以直接求和，例如对于恒力 $\mathbf{F}$ 作用下的匀变速直线运动，我们会有

$$Fs\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3.9}$$

2、质点系的动能定理

在质点系内，除了合外力做功外，还有可能存在内力做功。我们考察第 i, j 个质点，它们之间的相互作用力做功之和为

$$W_{ij} = \mathbf{f}_{i\to j} \cdot d\mathbf{s}_j + \mathbf{f}_{j\to i} \cdot d\mathbf{s}_i = \mathbf{f}_{i\to j} \cdot (d\mathbf{s}_j - d\mathbf{s}_i) = \mathbf{f}_{i\to j} \cdot d\mathbf{s}_{j\to i} \tag{3.10}$$

即若质点系内质点有相对运动，并且质点间有相互作用力的话，就会存在内力做功。

那么，对于质点系，其动能定理应该写为

$$W_{合外} + W_{内} = \Delta \sum_{i=1}^{n} E_{k_i} \tag{3.11}$$

并且，如果质点系中没有相对运动，其动能定理还可以简化为

$$W_{合外} = \Delta \sum_{i=1}^{n} E_{k_i} \tag{3.12}$$

应用中更常用的是质点系的动能定理，而不是质点的动能定理。

3.1.3 势能 (Potential)

1、势能的定义

有些力对于一个质点所做之功，仅仅依赖于质点的初始点和到达的末点的位置。这样的力，我们称其为保守力。

> **Definition 3.4.** 当选定一个空间点为势能零点时，受保守力的质点从当前位置移动到这个零点的过程中保守力所做之功是一定的。我们将这一部分功称为“势能”，用 U 表示。

在此定义下，我们有

$$W_{保} = \sum \mathbf{F}_{保} \cdot \Delta \mathbf{s} = U(P) - U(Q) \tag{3.13}$$

对于质点系来说，区别仅仅是一个势能和功的求和，因此上式对于质点系也是成立的。考虑没有内力和非保守力做功的质点系，会有

$$W_{保} = U(P) - U(Q) = \Delta E_k = E_{kQ} - E_{kP} \tag{3.14}$$

或者

$$E_{kQ} + U(Q) = E_{kP} + U(P) \tag{3.15}$$

我们把机械能定义作动能与势能之和，因此上式被称为机械能守恒定理。

下面我们介绍几种常见的势能。

2、重力势能

对于质量为 m 的物体，在相对地球产生 $\Delta\mathbf{s}$ 的位移过程中的重力做功为

$$\Delta W = m\mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{s} = mg\Delta s \cos\theta = mg\Delta h \quad (\Delta h \to 0) \tag{3.16}$$

可见重力做功仅与起始位置有关，重力是保守力。以地面为零势能点，我们有

$$U = \sum mg\Delta h = mgh \tag{3.17}$$

这就是重力势能的表达式。

3、弹性势能

关于弹性势能的表达式，其推导过程在中学阶段往往并不容易，因此我们直接给出结论，不要求中学生读者掌握其推导过程。

> **Theorem 3.5.** 对于劲度系数为 k 的弹簧，选取弹簧原长处为势能零点，则弹簧发生伸缩 x 时所具有的弹性势能为
> $$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.18}$$

这一结论尽管未在正常的高中课本中出现过，但经常出现在练习题目当中。

3.2 动量

3.2.1 动量定理

1、质点的动量定理

考虑一个质点 m，根据牛顿第三定律，我们有

$$\mathbf{F}_{合外} = m\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \quad (\Delta t \to 0) \tag{3.19}$$

我们可以定义 $m\boldsymbol{v}$ 为一个质点 m 的动量 $\mathbf{p}$，那么上式可以表述为

$$\mathbf{F}_{合外} = m\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad (\Delta t \to 0) \tag{3.20}$$

即质点的动量对于时间的变化率为合外力。

2、质点系的动量定理

考虑一个质点系，根据牛顿第三定律，我们有

$$\sum (\mathbf{F}_{外i} + \mathbf{F}_{内i}) = \mathbf{F}_{合外} + \mathbf{F}_{合内} = \mathbf{F}_{合外} = \sum m_i \frac{\Delta \boldsymbol{v}_i}{\Delta t} \quad (\Delta t \to 0) \tag{3.21}$$

即

$$\mathbf{F}_{合外} = \sum \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta t} \quad (\Delta t \to 0) \tag{3.22}$$

3.2.2 动量守恒定理

Definition 3.6. 封闭系：除了其内质点的相互作用外，没有其它外力作用在它们上面的体系。

在一个封闭的力学体系中，$\mathbf{F}_{合外} = 0, d\mathbf{p} = 0$，因此我们有

Theorem 3.7. 动量守恒定理：对于一个封闭的力学体系，其总动量是不随时间改变的。因此动量是守恒的。

在这里，我们是针对一个封闭的质点系，通过动量定理得到的动量守恒定理。实际上，这一定理也可以通过更为普遍的空间对称性的原则，即在没有外场存在的情况下，任何一个封闭的物理体系都是空间平移不变的这一事实重新推导出来。因此，动量守恒定理是物理学中最基本的普适定理之一。到目前为止，尚未发现其被违背的例子。

3.3 碰撞

3.3.1 碰撞的分类

Definition 3.8. 弹性碰撞：碰撞前后动量和动能同时守恒的碰撞；
非弹性碰撞：碰撞前后动能不守恒的碰撞；
完全非弹性碰撞：在非弹性碰撞中，如果物体在相碰后粘合在一起，这时动能的损失最大，这种碰撞叫做完全非弹性碰撞。

3.3.2 两刚性球弹性正碰后的速度

Example. 钢球 1 的质量为 m_1，钢球 2 的质量为 m_2，球 2 原来静止，球 1 以速度 v_1 向球 2 运动，求发生弹性正碰后两球的速度 v_1', v_2'。

解：首先我们列出系统的动量守恒式，即

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{3.23}$$

以及动能守恒式：

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2 \tag{3.24}$$

由第一式得到

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \tag{3.25}$$

由第二式得到

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{3.26}$$

联立得到

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1,\quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{3.27}$$

应该注意的是，利用动量守恒和动能守恒，根据碰撞前的速度，我们只能计算出两个物体发生弹性正碰后的速度。如果发生的是斜碰，虽然是弹性碰撞，也不能这样简单地计算出它们碰撞后的速度。这个问题比较复杂，我们就不讨论了。

第四章 机械振动和机械波

4.1 机械振动

4.1.1 机械振动

Definition 4.1. 物体（或者物体的一部分）在平衡位置附近来回做往复运动，叫做机械振动，常常简称为振动。

物体之所以能够形成机械振动，是因为受到指向平衡位置的力的作用，使振动物体回到平衡位置的力叫做回复力。

4.1.2 表征振动的物理量

Definition 4.2. 振动物体离开平衡位置的最大距离叫做振幅；
完成一次全振动经过的时间叫做周期；
在 1 秒内完成全振动的次数叫做频率；频率的单位是赫兹，简称赫，国际符号是 Hz。

如果用 T(秒) 表示周期，用 f(赫) 表示频率，那么

$$f=\frac{1}{T},\quad T=\frac{1}{f} \tag{4.1}$$

振幅、周期或频率是表征整个振动的物理量。一个振动，如果知道了它的振幅、周期或频率，我们就从整体上把握了振动的情况。

4.1.3 简谐振动

让我们考虑一个与弹簧连在一起的质点在光滑桌面上的运动。假设弹簧的另外一端固定在墙壁上，而其质量可以忽略不计。若我们将弹簧未变形时质点的坐标取作 $x=0$，根据 Hooke 定律，当质点运动到 x 处时质点所受到的力为

$$\mathbf{F}=-kx\mathbf{i}. \tag{4.2}$$

其运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx, \tag{4.3}$$

或是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2=0. \tag{4.4}$$

这里，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 称为弹簧振子的本征频率。

下面，我们再来考虑一个单摆的运动方程。我们看到，拴在长度为 l 的摆线下端的小物体所受到的外力有二：一是重力 $-mg\mathbf{j}$，二是摆线对其的拉力 $\mathbf{T}$。显然，小物体做的是一个以 O 点为圆心，l 为半径的圆周运动。我们选取 O 点为支点，根据转动定理[1]，我们有

$$-mgl\sin\theta=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{4.5}$$

当小物体在其平衡点附近做微小振动时，我们近似地有 $\sin\theta\approx\theta$ 。因此，上式可以近似地写作

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+mg\sin\theta\approx ml\frac{d^2\theta}{dt^2}+mg\theta=0, \tag{4.6}$$

或是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\tilde{\omega}^2\theta=0. \tag{4.7}$$

这里，$\tilde{\omega}=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 称为单摆的振动频率。

结合上面两个例子，我们看到，有许多振动体系的运动可以由下面的微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt^2}+\Omega^2y(t)=0 \tag{4.8}$$

来描述。这一方程称为简谐振动方程，容易验证，它的通解可以写作

$$y(t)=A\cos(\Omega t+\varphi_0). \tag{4.9}$$

而相应的运动被称之为简谐振动。依照惯例，Ω 被称为该体系的固有振动频率。它代表振子的相位在单位时间内的改变量。相应地，振子的振动周期定义作

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}. \tag{4.10}$$

而 A 和 φ_0 则是两个需要通过振动的初始条件来确定的量，被分别称为振子的振幅和初相位。A 一般取一个正数，而 φ_0 的取值范围则为 $(0\leqslant\varphi_0\leqslant2\pi)$。

根据式 (4.10)，我们可以得到弹簧振子和单摆的振动周期分别为

$$T_{弹簧}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},\quad T_{单摆}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.11}$$

在中学阶段我们不要求上面这两个公式的推导，读者只需学会应用即可。

4.1.4 相和相差

[1]这个知识已经超出中学范围，作为了解即可。

Definition 4.3. 两个频率相同的简谐振动，如果它们的振动步调一致，我们就说它们的相是相同的，简称为同相；多数情况下，两个简谐振动的步调并不一致，即它们的相不同，或者说它们存在着相差；其中有一种特殊情形，即振动步调正好相反，这种情形叫做反相。

4.1.5 阻尼振动

简谐振动不考虑阻力，振动系统的机械能是守恒的。简谐振动是一种理想化的振动，一旦供给振动系统一定的能量来使它开始振动，由于机械能守恒，它就要以一定的振幅永不停息地振动下去。可是实际上振动系统不可避免地要受到摩擦和其他阻力，即受到阻尼的作用。

Definition 4.4. 振动系统克服阻尼作用做功，系统的机械能就要损耗，这样，机械能随着时间逐渐减少，振动的振幅也逐渐减小。待到机械能耗尽之时，振动就停下来了。这种振幅逐渐减小的振动叫做阻尼振动。

振动系统受到的阻尼越大，振幅减小得越快，振动停下来也越快。阻尼过大将不能产生振动。阻尼越小，振幅减小得越慢。在阻尼很小时，在一段不太长的时间内看不出振幅有明显的减小，就可以把振动系统当作简谐振动来处理。

4.1.6 受迫振动和共振

Definition 4.5. 物体在周期性外力作用下的振动叫做受迫振动。

Theorem 4.6. 物体做受迫振动的频率等于驱动力的频率，而跟物体的固有频率没有关系。

Theorem 4.7. 当驱动力的频率跟物体的固有频率相等的时候，受迫振动的振幅最大，这种现象叫做共振。

关于阻尼振动、受迫振动和共振相关的知识远远超出了中学物理的范畴，因此仅仅提及，不作为重点。

4.2 机械波

4.2.1 机械波及其分类

Definition 4.8. 机械振动在媒质中的传播叫做机械波。

Definition 4.9. 振动方向与波的传播方向垂直的波叫做横波;
振动方向与波的传播方向在同一直线上的波叫做纵波。

4.2.2 机械波的基本属性

Definition 4.10. 沿着波的传播方向，两个相邻的同相质点间的距离，叫做波长，波长通常用字母 λ 表示。

在一个周期 T 内，振动传播的距离等于波长 λ，那么振动传播的速率——波速 ν 可以根据下面的式子求出：

$$\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{4.12}$$

由于 $T = 1/f$，因此

$$\nu = \lambda f \tag{4.13}$$

这个关系，虽然我们是从机械波得到的，但是它对于今后将要学习的电磁波、光波也是适用的。机械波在媒质中传播的速率是由媒质本身的性质决定的，在不同媒质中传播的速率并不相同。

4.2.3 波的干涉

1、波的叠加

Theorem 4.11. 几列波相遇时能够保持各自的状态而不互相干扰，这是波的一个基本性质; 两列波重叠区域里任何一点的总位移，都等于两列波分别引起的位移的向量和。

2、波的干涉

Definition 4.12. 频率相同的两列波叠加，使某些区域的振动加强，集些区域的振动减弱，并且振动加强和振动减弱的区域互相间隔，这种现象叫波的干涉，形成的图样叫干涉图样。要得到稳定的干涉现象，观察到干涉图样，两个波源必须是频率相同、相差恒定，这

样的波源叫相干波源。

4.2.4 波的衍射

Definition 4.13. 波绕过障碍物的现象，叫做波的衍射；能够发生明显的衍射现象的条件是：障碍物或孔的尺寸跟波长相差不多。一切波都发生衍射，衍射也是波的特有现象。

Part II

Thermodynamics

第五章 热力学基础

5.1 物质结构的基本图像

5.1.1 物质分子处于不停顿的无规则运动状态

Theorem 5.1. 物质分子都在不停顿地作各向同性的无规则运动。

定量地讲，分子无规则运动的特征是：在其体坐标系 (或质心系) 中，分子的质心动量为零。分子的这种无规则、随机运动又被称为分子的热运动 (thermal motion)。我们在讨论物质分子的热运动时，应该将之同整体运动区分开来，并将整体运动扣除掉。

分子热运动的典型表现是布朗运动 (Brownian motion)，也就是微小颗粒的无规则运动。另外，作无规则运动的微小颗粒被称为布朗粒子。

Theorem 5.2. 布朗运动是由于微小颗粒受到周围分子碰撞的不平衡而引起的一种起伏运动，布朗粒子的无规则跳动与负载布朗粒子的介质的无规则运动互为表里。

5.1.2 分子之间存在相互作用

Theorem 5.3. 分子之间存在相互作用力，通常称这种相互作用力为分子力 (intermolecular force)。分子力由吸引力和排斥力两部分构成。

根据实验，我们得知分子力在分子相距较远时表现为吸引力，在分子相距很近时表现为排斥力。这相互作用力是一个有心力，因而它是保守的，我们可以定义出分子间的相互作用势能 $\phi(r)$，这是一个负值，其绝对值 E_B 称为势阱。

当分子间的间距小于平衡距离 r_0，尤其是小于有效直径 d 时，分子之间的排斥力很强，此时分子无法聚合。当分子之间间距远大于平衡距离 r_0 时，分子间的作用力很弱，此时分子成为自由粒子。只有当分子间距 $r \approx r_0$，即处于势阱中时，才形成间距 $r \approx r_0$ 的束缚状态，从而形成稳定的物质凝聚态。由于分子除与其他分子之间有相互作用外，还具有无规则热运动，即有动能 $\frac{1}{2}mv^2$，分子的平均动能为

$$\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}. \tag{5.1}$$

那么，在 $\overline{\varepsilon_k} \ll E_B$ 的情况下，所有分子都被束缚在势阱宽度所限的区间内运动，从而形成稳

定的束缚态，即形成固态。在 $\overline{\varepsilon_k} \gg E_B$ 的情况下，物质分子的平均动能远大于其间的势阱深度，相互作用对分子运动状态的影响很小，从而所有分子将尽可能地均匀地充满其能占据的空间，也就是形成气态。在 $\overline{\varepsilon_k} \approx E_B$ 地情况下，分子的动能与分子间的势阱深度相当，分子可以不完全受制于其他分子的束缚，但不会偏离太远，总的效果是形成介于固态和气态之间的液态。总之，物质形态与分子间相互作用势能的势阱深度密切相关，如果势阱深度 E_B 远大于分子的热运动平均动能，则物质呈固态；如果势阱深度 E_B 约等于分子热运动的平均动能，则物体呈液态；如果势阱深度 E_B 远小于分子热运动的平均动能，则物质呈气态。

5.2 温度与温标

5.2.1 温度的概念

我们之前已经提到，为标记系统的冷热程度，我们引入一个热学中特有的物理量。该标记系统冷热程度的物理量称为温度。显然，温度是宏观量。深入的研究表明，本质上，温度是组成系统的大量微观粒子的无规则运动剧烈程度的表现和度量。

5.2.2 温度相同的判定原则——热力学第零定律

在热物理学中，人们把由导热壁连接而实现的接触称为热接触。导热壁是两热力学系统之间位置固定但可以使其两边的系统的状态相互影响的隔板。与之相对的，两热力学系统之间的位置固定且使两边的系统的状态互不影响的隔板称为绝热壁。

经验表明，冷热程度不同的两个物体通过热接触，经过一段时间后，可以达到相同的冷热程度，即达到相同的温度，此时宏观性质不再发生变化，也就是说两物体达到了热平衡。热平衡和冷热程度相同是共同出现的，因而我们可以说，当两个系统达到热平衡时，其温度是相同的，热平衡可以作为温度相同的判据。下面，我们给出判定热力学系统是否达到热平衡的定律。

> **Theorem 5.4.** 实验结果表明，在不受外界影响的条件下，如果两个热力学系统中的每一个都与第三个热力学系统处于热平衡，则它们彼此也必定处于热平衡，该规律称为热平衡定律，也被称为热力学第零定律 (zeroth law of Thermodynamics)。

我们可以利用此定律来判定不同的热力学系统间是否达到热平衡，进而判定其温度是否相同。

5.2.3 温度高低的数值标定——温标

在前面我们已经知道，人们可以使具有确定初始状态的第三个物体与其他多个物体分别进行热接触来判定这些物体是否处于热平衡状态，即判定它们的温度是否相同。若不同，第三个物体会在与它们的热接触后表现出不同的变化，比较第三个物体与它们分别达到热平衡

时状态的变化，可以判定不同物体温度的高低 (同理，这种方式也可以判定同一物体处于不同状态时的温度高低)。

显然，只定性地判定物体的冷热程度在物理研究中是不足的，我们希望能够有方法可以定量地标定出物体的冷热程度，也就是温度的具体数值。

Definition 5.5. 如果我们选中一种物质，在给定的冷热程度下它的某物理量总是确定的 (即该物理量与温度之间仅有单值函数关系)，并且随着温度的变化该物理量可以发生明显的变化 (即该物理量是对温度敏感的)，那么我们就可以将该物理量的不同状态标定为不同的数值，那么每个确定的温度都会对应唯一的该物理量的一种状态，进而对应着一个确定的数值，这样就可以实现温度的数值标定。

在热力学中，这种选定的物质被称为测温物质 (thermometric substance)，选定用来标定温度的物理量称为测温属性 (thermometric property)，测温属性与温度之间的函数关系被称为测温曲线，与温度一一对应的测温属性的状态被称为标准点 (calibration point)，温度的数值表示法被称为温标 (temperature scale)。从上面的叙述中，我们不难知道，测温物质、测温属性和固定标准点是定量准确地标定温度的基本要素，它们常被称为温标三要素。值得注意的是，温标三要素中的测温属性不仅包括选定的物理量，还包括其测温曲线；固定标准点还包括指定标准点的温度值。

在实际生产、生活及科学研究中，使用的温标主要有经验温标 (empirical temperature scale)、理想气体温标 (ideal gas temperature scale)、热力学温标 (thermodynamic scale of temperature) 及国际实用温标 (international temperature scale)。

(i) 经验温标

目前采用的经验温标主要有华氏温标和摄氏温标两种。

华氏温标是德国物理学家华伦海特 (G.D.Fahrenheit) 与 1714 年利用水银在玻璃管内的体积变化而建立的温标。其中，规定氯化氨与水及冰的混合物的熔点为 0 度 (相当于当地冬天的最低温度)，冰与水的混合物的温度为 32 度，将在 0 度与 32 度之间的一定量的水银的体积 (或长度) 变化量等分为 32 格 (即人为地使测温属性与温度间成线性关系)，一格所对应的变化量就代表一华氏度，常常记为 °F。

摄氏温标是瑞典天文学家摄尔修斯 (A.Celsius) 与 1742 年以水银为测温物质、细玻璃管种水银的体积为测温属性、测温曲线也为线性函数关系而制定的温标。其与华氏温标的不同在于，规定纯冰与纯水在一个标准大气压下达到平衡时的温度 (常称为水的冰点温度) 为 0 度，纯水与水蒸气在蒸汽压等于一个标准大气压下达到平衡的温度 (常称为水的汽点温度) 为 100 度。摄氏温标的单位记作 °C。由于在两固定点之间水银的体积 (长度) 随温度线性变化，那我们可以记温度 t 与水银柱长度 X 的关系为

$$t(X) = t_0 + kX. \tag{5.2}$$

再记 $t=0°C$ 时水银柱的长度为 X_i，$t=100°C$ 时水银柱的长度为 X_s，则有

$$t(X)=100\frac{X-X_i}{X_s-X_i}. \tag{5.3}$$

于是从水银柱的高度 X 可以直接读得温度 t 的数值。据此做成的用来测定其他物体的温度的标准装置即摄氏温度计 (Celsius thermomenter)。

另外，华氏温标与摄氏温标的关系为

$$t/°F=32+\frac{9}{5}t/°C. \tag{5.4}$$

(ii) 理想气体温标

在经验温标下，测温物质和测温属性可能千差万别。利用由不同测温物质及相应的测温属性做成的温度计测量某一处于确定状态的系统的温度时会得到不同的结果。因此，为了使温度测量得到确定、一致的结果，必须建立统一的温标作为标准。实验结果表明，不同的气体温度计的测量结果比较接近。于是，为了建立统一的温标或许可以选用气体作为测温物质。

对于一定量的稀薄气体，实验表明，在体积固定的条件下，压强 p 与摄氏温标下的温度 t 有关系

$$p=p_0(1+\alpha_p t). \tag{5.5}$$

其中，p_0 是摄氏温度为 0 时的压强。这就是著名的盖吕萨克定律 (L.J.Gay-Lussac 于 1809 年提出。亦有人称之为阿蒙东定律，因为阿蒙东 (G.Amontons) 于 1669 年注意到其部分迹象)。并且，当 $p_0\to 0$ 时，任何气体的 α_p 都趋于同一个常量。即在 $p_0\to 0$ 时，我们有

$$\lim_{p_0\to 0}\alpha_p=\alpha_0. \tag{5.6}$$

因此，对于任意满足 $p_0\to 0$ 的气体都有

$$p=p_0(1+\alpha_0 t). \tag{5.7}$$

成立。显然 α_0 的量纲为温度的倒数，故我们可以令

$$T_0=\frac{1}{\alpha_0}. \tag{5.8}$$

这个常数 T_0 很可能是与温度相关联的。我们用 $\alpha_0=\frac{1}{T_0}$ 作代换，是有利于我们发现公式的含义的。于是我们可以将 (5.7) 式写成

$$p=p_0\frac{T_0+t}{T_0}. \tag{5.9}$$

即

$$\frac{p}{T_0+t}=\frac{p_0}{T_0}. \tag{5.10}$$

受到上式形式以及量纲的启发，我们如果能够提出一个新的温标定义，使得上式分母上的两个值分别代表两个状态的温度，那么我们就会得到一个漂亮的结果，即定容稀薄气体的压强与温度的比值总是为定值。因此我们定义

$$T = T_0 + t \tag{5.11}$$

为新的温标。在此定义下，(5.10) 左边分母是代表该状态下的新温度，右边分母 T_0 也是代表压强为 p_0 时的新温度，可见此定义是极好的。

经过对多种稀薄气体的测量，我们得到了

$$T_0 = 273.15. \tag{5.12}$$

即新定义下的温标与摄氏温标的关系为

$$T = 273.15 + t. \tag{5.13}$$

现在我们看似定义出了完整的新温标，但是，这个新温标数值的标定是基于摄氏温标的。而我们希望不依赖其他温标，仅仅通过测出气体的某种测温属性 (在这里指压强 p) 就得到温度值。

若记某个固定状态的温度和压强分别为 $\widetilde{T_0}, \widetilde{p_0}$，结合 (5.10)(5.11) 式，得到

$$T = p\frac{\widetilde{T_0}}{\widetilde{p_0}}. \tag{5.14}$$

因而我们只需要找出某个固定的标准状态来定出标准点，就可以使得这个新温标具有自己的标定方式 (即用压强标定)。

由于二相共存的状态的压强和温度具有不确定性，我们不好找到某一个特定的二相共存的状态的压强和温度 (这一点在之后学习三相图时会更加容易理解)，故二相共存的状态不适合用作标准状态。而我们之后会知道，三相点的状态是固定的，只要物质处于三相点，仅仅会对应一个温度和压强。因此，出于精确、可重现的考虑，我们需要找到某物质的三相点来敲定这一比值。

我们实际上选择了所谓 H_2O 的三相点 (triple point，即冰、水和水蒸气三相共存，并达到平衡的状态) 作为标准状态。当水处于三相点时，其摄氏温度为 $t = 0.01°C$，其对应的新温标为 $\widetilde{T_0} = 273.16$。接着测出此时的压强 $\widetilde{p_0}$，代入到 (5.14) 式，即可得到

$$T = T_0\frac{p}{\widetilde{p_0}} = 273.16\frac{p}{\widetilde{p_0}}. \tag{5.15}$$

我们记定容气体的温度为 T_V，因而上式可以更精确地写作

$$T_V(p) = 273.16 \lim_{p_0 \to 0} \frac{p}{\widetilde{p_0}}. \tag{5.16}$$

这样，我们在规定了一个小压强的固定点的情况下就建立了不依赖于具体化学组分的定容气体温标。据此可以做成定容气体温度计。事实上，只要选定好标准状态进行标定，得到的新温标仍然满足定义中摄氏温标与新温标的换算关系

$$T = 273.15 + t. \tag{5.17}$$

实验还表明，在压强保持为 p_0 不变的情况下，稀薄气体的体积与以摄氏温标表示的温度 t 之间有关系

$$V = V_0(1 + \alpha_V t). \tag{5.18}$$

并且当 $p_0 \to 0$ 时，对任何气体 α_V 都趋于同一常量，即有

$$\lim_{p_0 \to 0} \alpha_V = \alpha_0 = \frac{1}{T_0}. \tag{5.19}$$

定义 $T = T_0 + t$，我们有

$$V = \frac{V_0}{T_0} T. \tag{5.20}$$

这就是著名的查理定律 (J.A.C.Charles 于 1787 年提出)，亦称为查理-盖吕萨克定律 (盖吕萨克确认查理的结果，并于 1802 年 1 月公布，也有人称之为查理-道尔顿- 盖吕萨克定律，因为道尔顿 (J.Dolton) 曾于 1801 年 10 月发文说明有此规律)。显然，采用与建立定容气体温标相同的方案规定固定点及相应的温度 (这样规定可以使得对于某一确定状态，定压气体温标与定容气体温标是相等的) ，我们可以建立定压气体温标

$$T_p(V) = 273.16 \lim_{p_0 \to 0} \frac{V}{V_0}. \tag{5.21}$$

据此也可以做成定压气体温度计。由于定压气体温度计的结构比定容气体温度计的结构复杂得多，并且实用时操作也麻烦得多，实际中较少使用。显然地，此时的定压气体温标与摄氏温标之间的换算关系也是

$$T_p = T_V = 273.15 + t. \tag{5.22}$$

实验上还发现，压强趋于 0 的气体还遵从玻意耳定律，即当温度保持不变时，一定量的气体的压强和体积的乘积为一个常量。严格遵从查理定律、盖吕萨克定律及玻意耳定律的气体称为理想气体。由上述讨论可知，当压强趋于零时，实际气体很好地近似为理想气体，于是上述从定容和定压两种角度建立的气体温标统称为理想气体温标，通常记为 T，单位为开尔文 (Kelvin)，简记为 K。

由 (5.13) 式和 (5.17) 式，我们可以看到，理想气体温标与摄氏温标间的关系满足

$$T/K = 273.15 + t/^\circ C. \tag{5.23}$$

实验还表明，以理想气体温标为基础制造的理想气体温度计确实与所用的工作物质的化学组分无关，即不依赖于具体的气体。

(iii) 热力学温标

热力学理论表明，在热力学第二定律基础上可以建立不依赖于任何物质的具体测温属性的温标 (参见 chapter5)。这种不依赖于任何测温物质的具体测温属性的温标称为热力学温标或绝对温标 (absolute temperature scale)，由之确定或标记的温度称为热力学温度 (Thermodynamic temperature) 或绝对温度 (absolute temperature)。

在热力学温标中，规定热力学温度是基本的物理量，其单位为开尔文 (简记为 K)，1K 定义为水的三相点的热力学温度的 $\frac{1}{273.16}$。这就是说，水的三相点的温度定义为 273.16K。

可以证明，在理想气体温标适用的温度范围内，理想气体温标是热力学温标的具体实现方式。

(iv) 国际实用温标

由于以理想气体温标为基础的气体温度计的结构和使用都很复杂，一般只在少数国家的核心计量机构才建立这类装置，因此利用气体温度计直接确定热力学温度很繁复，且不能在国际上推广和普遍采用。为解决这些问题，国际上通过约定一系列物质的温度的固定点、特殊温区内作为标准测量用的内插仪器及其测温属性，形成了国际实用温标，简记为 ITS。国际实用温标于 1927 年制定第一版，其后曾于 1956 年、1960 年、1968 年、1990 年进行修订。现在国际上采用 1990 年的国际温标 (ITS-90)。

ITS-90 选取了从平衡氢三相点 (13.8033K) 到铜凝固点 (1357.77K) 间 16 个固定的平衡点温度，用这些固定点将温度分为若干区域，每个温度区又规定一些测准仪器 (如铂电阻温度计、铂铑热电偶温度计等) 去测量在同一温区的不同温度范围内给出不同的测温关系式。这种方法保证了国际间的温度标准在相当精确的范围内一致，并尽可能接近热力学温标。

5.3 物体的内能

5.3.1 分子的动能

前面我们已经提及，组成物体的分子具有热运动的动能。物体里分子运动的速率是不同的，有的大，有的小，因此各个分子的动能并不相同、在热现象的研究中，我们所关心的不是物体里每个分子的动能，而是所有分子的动能的平均值。这个平均值叫做分子热运动的平均动能。

可以证明，对于理想气体来说，分子热运动的平均动能是正比于热力学温度的。可以说，温度是物体分子热运动的平均动能的标志。

5.3.2 物体的内能

> **Definition 5.6.** 物体中所有分子的热运动的动能和分子势能的总和，叫做物体的内能。一切物体都是由不停地做无规则热运动并且相互作用着的分子组成的，因此任何物体都具有内能。

由于分子热运动的平均动能跟温度有关系，分子势能跟体积有关系，因此物体的内能跟物体的温度和体积有关系。温度升高时，分子的动能增加，因而物体的内能增加。体积变化时，分子势能发生变化，因而物体的内能发生变化。

同样地，理想气体的内能正比于其热力学温度，并且仅与温度有关。

5.4 热力学第一定律

Theorem 5.7. 热力学系统与外界之间的相互作用可以分为力学的和热学的。在这些作用下，一方面，系统的状态会发生变化，从而作为态函数的内能会随之改变。另一方面，伴随有作功和传热两种形式的能量传递。根据能量守恒定律，作功、传热和内能改变这三种形式的能量的总和应保持守恒。于是，当热力学系统的状态发生变化时，可以通过作功和传热等方式改变系统的内能，内能的增量等于外界对系统所作的功与外界传递给系统的热量之和，此即能量守恒定律在涉及热现象宏观过程中的具体表述，也就是著名的热力学第一定律 (frst law of thermodynamics)。记热力学过程中外界对系统所作的功为 W, 传递给系统的热量为 Q, 系统处于初态 i 时的内能为 U_i, 达到末态 f 时的内能为 U_f, 内能的增量 $U_f - U_i$ 记为 ΔU, 则热力学第一定律可以用数学形式表示为

$$\Delta U = U_f - U_i = W + Q. \tag{5.24}$$

上述讨论表明，在一个热力学过程中，外界对系统所作的功 W 和传递的热量 Q 都是代数量，都可正可负、根据前述讨论，将这些量的符号约定如下：$W > 0$ 表示外界对系统作正功，$W < 0$ 表示外界对系统作负功，实质上也就是系统对外界作正功；$Q > 0$ 表示外界传递给系统热量，$Q < 0$ 表示外界传递给系统负热量，也就是系统向外界释放热量。通常，为区分系统对外界作功 (或放热) 和外界对系统作功 (或传热), 分别用 W', Q' 表示系统对外界所作的功和系统传递给外界的热量。对于内能的增量 $\Delta U, \Delta U > 0$ 表示系统内能增加 $(U_f > U_i), \Delta U < 0$ 表示系统内能减少 $(U_f < U_i)$。

因为功、热量和内能都是能量，则在利用式 (5.24) 进行计算时，就应都以能量单位“焦耳”(J) 为单位。

考虑到热力学第一定律是能量守恒定律在涉及热现象的过程中的具体表述，热力学第一定律还可以表述为第一类永动机是不可能造成的。所谓第一类永动机就是不需要消耗任何形式的能量和动力而能对外作功的机械。显然这与能量守恒定律矛盾，所以是不可能的。事实上，热力学第一定律的“第一类永动机是不可能造成的”表述是亥姆霍兹 (F. V. Helmholtz) 的原始表述。

第六章 气体、液体和固体

6.1 理想气体状态方程

我们已经知道，当温度较高、压强趋于零的各种气体的宏观状态都遵从玻意耳定律、查理定律和盖吕萨克定律。满足这些性质的气体称为理想气体 (ideal gas)。显然，理想气体是实际气体在压强很小的情况下的极限，是一个气体模型。

根据玻意耳定律，我们知道理想气体的压强 p 和体积 V 的乘积是由温度 T 决定的常量，即有

$$pV = C(T). \tag{6.1}$$

现在我们考察体积始终为 V_0 的定容理想气体，并记 T_0, p_0 和 T, p 分别为这些气体的标准状态的固定状态和可以变化的任意状态。那么根据盖吕萨克定律，我们有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{pV_0}{p_0V_0} = \frac{C(T)}{C(T_0)} \tag{6.2}$$

进一步地

$$C(T) = \frac{C(T_0)}{T_0}T = \frac{p_0V_0}{T_0}T. \tag{6.3}$$

又由于实验表明，温度为水的冰点 273.15K、压强为 1atm 的情况 (这一情况常被标准状况) 下，1mol 的任何气体的体系 V_m 都为 22.4144 升 (L)。那么，我们选取 1mol 的处于标准状况的任意理想气体作为标准状况，则对于 1mol 的任意理想气体，都有

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = 8.314510\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \tag{6.4}$$

是一个常量，称之为普适气体常量 (universal gas constant)，简记为 R。所以，1mol 理想气体的压强 p，体积 V_m 和温度 T 之间的关系 (数值上) 可以表示为

$$pV_m = RT. \tag{6.5}$$

该关系式为 1mol 理想气体的状态方程。对于 νmol 的理想气体，其体积为 $V = \nu V_m$，则 νmol 理想气体的状态方程为

$$pV = \nu RT. \tag{6.6}$$

由于一定量气体的摩尔数 ν 可以由其质量 M 和摩尔质量 μ 表示为 $\nu = \frac{M}{\mu}$，故质量为 M 的理想气体的状态方程为

$$pV = \frac{M}{\mu}RT. \tag{6.7}$$

6.2 固体和液体的性质

6.2.1 物态简介

Definition 6.1. 构成物质的分子的聚合状态称为物质的凝聚态，简称物态。

Theorem 6.2. 常见物质的表观特征，可以粗略地分为三类：

(1) 固体：没有流动性，不易被压缩，具有一定的体积和确定的形状，并具有弹性；

(2) 气体：具有流动性，容易被压缩，本身没有确定的体积和确定的形状，没有明显的附着性，没有弹性；

(3) 液体：具有流动性，但不易被压缩，有确定的体积，但没有一定的形状，有明显的附着性。

通常称为凝聚态物体的固体和液体，分子数密度比气体分子数密度大 $3\sim4$ 个数量级，固、液体内分子间的平均距离比气体小一个数量级。

分子密集系统 (固、液体) 内分子之间的相互作用力比气体内分子之间的作用力要强得多。

固体内分子间平均距离 (10^{-10}m 数量级) 比液体更小些，固体分子只能分布在一定位置附近做热运动，这使得固体在宏观上具有一定的形状和体积。

物质的凝聚态的微观解释在第一章便有提及，此处不再重复。

6.2.2 固体的性质简介

1、固体的分类

Theorem 6.3. 固体分为两大类：晶体和非晶体。晶体又分为单晶体与多晶体。

单晶体是指样品中所含分子 (原子或离子) 在三维空间中呈规则、周期排列的一种固体状态；多晶体实际上是由很多外形不规则的小单晶体晶粒混乱组成的，晶粒尺寸一般为 $10^{-4}\sim10^{-3}$cm，最大的可达 10^{-2}cm。

非晶体是指结构无序或者近程有序而长程无序的物质，组成物质的分子 (或原子、离子) 不呈空间有规则周期性排列的固体，它没有一定规则的外形。

2、单晶体物体的宏观特性

Theorem 6.4. (1) 晶面角恒定不变 (晶面角守恒定律)

从外形上看单晶体都是由光滑平面所围成的凸多面体，这些光滑的平面叫做晶面。同

一种晶体由于生长过程中所处的外界环境条件不同，晶体物体的大小和形状可能不同，但晶体相应晶面之间的夹角却是保持恒定不变的。

(2) 各向异性

单晶体内各个不同方向的力学性质、热学性质、电学性质、光学性质等一般各不相同，称为各向异性性质。

(3) 晶体具有确定的熔点

晶体物质在一定压强下，总是被加热到一定温度才开始熔化，并且在熔化过程中晶体温度保持不变，直至晶体完全溶解成液体后温度才会继续升高。晶体开始熔化时的温度称为晶体的熔点。

3、晶体与非晶体的差异

Theorem 6.5. 具有确定的熔点是晶体 (包括单晶体和多晶体) 与非晶体的一个基本区别。

像玻璃、沥青、石蜡等这类非晶体被加热时，随着温度的升高先由硬变软，然后逐渐由稠变稀，然后变成为可流动的液体。在这个过程中温度一直在升高，不存在确定的熔点。

正是由于非晶体没有确定的熔点，所以非晶体也被视为是温度太低粘滞系数过大以至于不能流动的液体，从这种意义上说，只有晶体才算是固体。

晶体和非晶体的差异来自于它们不同的微观结构。晶体在微观上具有周期性空间点阵结构和高度的对称性，以及微观结构的长程有序和短程有序性；而非晶体粒子的微观结构具有空间排列的短程有序 (相邻原子或分子之间的相关性) 和长程无序的基本特征。

4、晶格与结构

晶格是延伸到整个空间的几何点的周期性重复排列。

在晶体结构中，一个格点代表一个原子或原子团。原子团可能是相同原子也可能是不同原子。这个原子或原子团叫做基元。完美晶体或者理想单晶，其晶体结构在整个空间是无限延伸的。

5、晶体结合力

晶体不被热运动所拆散，而以一定规则的有序结构结合成一个整体，是因为晶体中各原子之间存在着结合力。结合力是决定晶体性质的一个主要因素。

晶体结合力也称为化学键，有共价键、离子键、范德瓦尔斯键、金属键四种类型，另外，还有一种处于共价键与离子键之间的结合形式——氢键。

6.2.3 液体的性质简介

液体是一种常见的物质存在形态，其性质介于固体和气体两者之间。液体具有像气体那样的流动性和没有一定形状的性质。

从实验观察固体熔解和液体结晶过程中发现，大多数物体在固液态转化前后，体积只有 10% 左右的变化，因而分子间的平均距离只改变 3% 左右。液体同固体一样也是分子密集聚集系统。

液体分子间的平均距离要比通常条件下气体分子间平均距离小一个数量级。液体分子间的作用力要比气体分子间的作用力强很多。

在这样强的相互作用力下，使得液体分子不会像气体分子那样总是分散到不论多大的整个空间，而是使得液体分子紧密地聚集在一定的空间从而使液体具有一定的体积。

通过 X 射线衍射研究熔解和结晶过程中液体的微观结构时发现：液体内的分子只在微小区域 (只有几个分子间距范围) 内作有规则排列的分布，而且这些微小区域的分子排列方位完全混乱无序，与非晶体内分子的分布相似。

不过液体内分子有规则排列的微小区域不是固定不变的，微小区域的大小、边界不断变化，一些分子规则排列微小区域不时在瓦解，而另一些新的分子规则排列微小区域又不时形成。

液体内分子的分布是不断变化着的短程有序分布，因而除液晶外，液体和非晶态固体一样呈现出各向同性。

目前对分子热运动占主导地位的气体和分子力占主导地位的固体的理论研究比较成熟，而对介于这两个极端情况之间的液体的理论研究还很不成熟。研究液体的方法是从两头逼近的方法：

(1) 当液体温度增高接近其沸点时：液体分子热运动比较激烈，其性质与实际气体靠近，从而更多地把液体设想为稠密的实际气体去分析液体的性质。譬如，在气液相变中用纯粹是实际气体的范德瓦尔斯方程去解释液体和气体相变行为。

(2) 当液体的温度趋向凝结时，又常用频临瓦解的固体去想象液体，突出液体分子间的关联。我们常采用 X 射线、中子束、电子束的衍射等研究固体微观结构的常规方法去研究液体的微观结构，用濒临瓦解的固体图像去解释液体热容、热传导等现象。液体的微观结构和非晶态固体类同。

实验表明，液体的导热系数很低，热容与固体接近。扩散系数比固体稍大，但比气体小很多。同为流体，液体比气体的黏性大，且随温度的升高而降低。液体有着非常重要的表面现象，如表面活性、弯曲液面的附加压强、毛细现象等。

Part III

Electromagnetism

第七章　静电场的基本规律

7.1　电荷

大家知道，用丝绢或者毛皮摩擦过的玻璃、塑料、硬橡胶等都能吸引轻小物体，这表明它们在摩擦后进入一种特别的状态。我们把处于这种状态的物体称为带电体，并说它们带有电荷。大量实验表明，自然界的电荷只有两种，一种与丝绸摩擦过的玻璃棒的电荷相同，叫做正电荷；另一种与毛皮摩擦过的橡胶棒的电荷相同，叫负电荷 [正负电荷的称谓是由富兰克林 (Franklin) 提出的]。同种电荷间有斥力，异种电荷间有吸力。

顺便要提的是，我们称它们为正电荷和负电荷，只是因为历史上一直这么叫着，名字只是历史的巧合而已。电子的电性本质上并没有什么正负之分。它不像负数，两个负数一旦进行乘法运算，符号就会改变，但是两个负电荷无法相互作用成为一个正电荷，这与正负数没有可比性。

允许电荷流动的物体叫导体，导体的电阻与温度正相关；不允许电荷流动的物体叫绝缘体或电介质 (绝缘介质)，它们的电阻与温度负相关。此外，还有一种导电性介于导体与绝缘体之间而且电性质非常特殊的材料，称为半导体，半导体的电阻通常情况下与温度负相关。

利用物质的微观结构可对物体的带电以及不同物体具有不同的导电性作出解释。物体由微观粒子 (主要是质子、中子和电子) 构成。电子带负电荷，质子带有与电子电荷等值反号的正电荷。当物体由于某种原因获得 (失去) 某些电子时便处于带电状态。金属之所以导电，是因为内部存在许多自由电子，它们可以摆脱原子核的束缚而自由地在金属内部运动。电解液之所以导电，是因为内部存在许多能做宏观运动的正、负离子。反之，在绝缘体内部，由于电子受到原子核的束缚，基本上没有自由电子，因此呈绝缘性质。

大量实验证明，在一个与外界没有电荷交换的系统内 (最大的系统就是整个宇宙)，正负电荷的代数和在任何物理过程中始终保持不变，这称为电荷守恒定律，它反映了电荷的一种重要特性，是物理学的重要规律之一。

电荷的另一重要特性是它的量子化，即任何带电体的电荷都只能是某一基本单位的整数倍。这个基本单位就是质子所带的电荷，称为元电荷，通常记为 e。

7.2 库仑定律

7.2.1 库仑定律

如果带电体的线度比带电体之间的距离小得多，那么带电体的大小、形状及电荷的分布情况对静电力的影响就会小得多，我们可以忽略这些因素的影响，认为带电体是一个点，这样问题就会大大简化。满足这个条件的带电体称为点带电体或点电荷。

前面我们已经知道，电荷之间存在静电力的作用。法国科学家库仑 (Coulomb) 注意到，电荷之间的静电力与万有引力有许多相似之处，因而他大胆地猜想静电力的规律与万有引力定律有类似的形式，接着便进行了一些实验对相对于惯性系静止的两个点电荷之间的静电力服从的规律进行探究。

首先，库仑在不改变两点带电体的带电量的情况下，仅仅改变了两点带电体之间的距离，并分别测量出不同距离下的静电力，得到了如下的结论：

(i) 两点电荷之间的静电力大小相等、方向相反，并且其方向沿着它们的连线；静电力在同号电荷间表现为斥力，异号电荷间表现为吸引力。

(ii) 静电力的大小与距离 r 的平方成反比。

仿照着万有引力定律，库仑猜想静电力的大小还与各自的电荷量 q_1 及 q_2 成正比，但在库仑时代，电荷还只有定性的概念，根据已有的概念，仅仅只能谈到一个物体是否带电，却无从确定它带电的数量。为了找到静电力与电荷的关系，库仑使用了一个巧妙但不够严格的方法。他从对称性的考虑断定，令一个带点金属球与半径、材料完全相同的另一不带电金属球接触后分开，每球的电荷应该是原带电球的电荷量的一半。他用这个方法证实了：

(iii) 静电力的大小与两点电荷各自的电荷量 q_1 及 q_2 成正比。

结论 (ii)(iii) 实际可以表示为如下的数学形式：

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{7.1}$$

其中 k 是比例常数，依赖于各物理量单位的选取。上述规律被称为库仑定律。

7.2.2 高斯对电荷的定量探索及高斯制

我们前面已经提到，电荷还未有定量的定义。电荷后面作为一个物理量的严格定义主要是由高斯 (Gauss) 作出的，定义过程如下。

设有 A、B、C 三个点电荷。先令 A 与 C 间的距离为 r，用扭秤测出它们的静电力 F_{AC}。再令 B 与 C 间有相同的距离，测出它们的静电力 F_{BC}。记下这两个力的比值 F_{AC}/F_{BC}。用其他点电荷 D、E 代替 C 重复以上实验，发现

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{F_{AD}}{F_{BD}} = \frac{F_{AE}}{F_{BE}} = \cdots, \tag{7.2}$$

表明这个比值只取决于点电荷 A, B 而与第三个点电荷无关。改变距离 r 重复以上实验，发现 (7.2) 仍成立。可见，比值 F_{AC}/F_{BC} 反应 A 与 B 本身的带电性质。

再考虑到在库仑简陋的电荷“定义”下，静电力与两点电荷各自的电荷量 q_1 及 q_2 成正比，故我们可以定义比值 F_{AC}/F_{BC} 为 A, B 的电荷之比。以 q_A, q_B 分别代表 A, B 的电荷 (暂时还没有定义)，我们定义

$$\frac{q_B}{q_A} = \frac{F_{AC}}{F_{BC}}. \tag{7.3}$$

任意指定 B 的电荷为一个单位 (即指定 $q_B = 1$)，便有

$$q_A = \frac{F_{AC}}{F_{BC}}. \tag{7.4}$$

这就是电荷的高斯定义，它提供了一种测量电荷的方法：为测某个带电体的电荷，只需令它为 A 并与选作单位的点电荷 B 及任一点电荷 C 进行实验，测出 F_{AC}/F_{BC}，便得 A 的电荷 q_A。

上面的定义告诉我们，单位电荷 q_B 的选择只不过会使得不同电荷量的数值被等比例地缩小或放大一定的倍数。为了简便起见，我们以力学中的厘米 · 克 · 秒制 (CGS 制) 下库仑公式中比例系数 $k = 1$ 来确定 q_B，即 CGS 制下库仑定律可以被写为

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{7.5}$$

的形式。依此我们确定出选定为一个单位的电荷 q_B，从而有了电荷量的定义。这种定义下的电荷的单位为静库 (statcoulomb，简记为 SC)。在此定义下，当两个带电量为 1SC 的点电荷相距 1cm 时，产生的静电力就为 1dyn(达因，为 CGS 制下的力学单位)。

7.2.3 国际单位制下电荷量的定义

国际单位制 (SI 制) 的力学和电磁学部分被称为 MKSA 制。该制以长度、质量、时间及电流为基本量，以 m(米)、kg(千克)、s(秒) 及 A(安培) 为基本单位。从这里我们其实可以看出，电流的单位安培实际上是先于电荷的单位定义出来的。事实上，当我们在真空中的截面积可忽略的两根相距 1 米的平行而无限长的圆直导线内通以等量恒定电流，使得导线间相互作用力在 1 米长度上为 $2 \times 10^7 N$ 时，每根导线中的电流就为 1 安培。而若导线中载有 1 安培的稳定电流，则在 1 秒内通过导线横截面的电量就被定义为 1 库仑 (C)。也就是说在此制下，我们有

$$1C = 1A \cdot s. \tag{7.6}$$

必须指出，在 MKSA 制下，(7.1) 式中各量的定义和单位已经给出，故 k 不能再任意指定而只能由计算求得，结果为 $k = \widetilde{9} \times 10^9 (N \cdot m^2/C^2)$。为方便起见，在 MKSA 制下常将 k 写成

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{7.7}$$

的形式，相应的常量 ε_0 为

$$\varepsilon_0 \approx 8.9 \times 10^{-12} [C^2/(N \cdot m^2)]. \tag{7.8}$$

关于该常量的物理意义，后面第三章我们会提及。引入 ε_0 后，式 (7.1) 就改写为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{7.9}$$

同一物理规律在不同单位制中可有不同的数学表达式。(1.5) 和 (1.9) 式分别是库仑定律在高斯制和 MKSA 制中的表达式。后者虽然比前者复杂，但由它推出的许多关系式却比较简单。我们更倾向于采用 MKSA 制。

7.2.4 库仑定律的矢量形式

(7.1) 式只反映了静电力的大小所服从的规律，并未涉及静电力的方向，要反映方向就要把它改写为矢量形式。库仑定律的矢量形式可以表示为

$$\mathbf{F}_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathbf{e}_{r12},\quad \mathbf{F}_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathbf{e}_{r21},\tag{7.10}$$

其中，$\mathbf{F}_{12}$ 代表点电荷 1 对 2 的作用力，$\mathbf{F}_{21}$ 代表点电荷 2 对 1 的作用力；$\mathbf{e}_{r12}$ 代表由 1 指向 2 的单位矢量，$\mathbf{e}_{r21}$ 代表由 2 指向 1 的单位矢量，(显然 $\mathbf{e}_{r12}=-\mathbf{e}_{r21}$)。只要我们再规定正电荷的电荷量为正，负电荷的电荷量为负，(1.10) 式就可以很好地表示出静电力的方向性。

实验表明，在 10^{-15} 米至 10^3 米范围内库仑定律都成立。这表明库仑力是长程力。

7.2.5 叠加原理

库仑定律讨论的是两个点电荷之间的静电力。当空间有两个以上点电荷时，就必须补充另一实验事实——作用于每一电荷上的总静电力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的静电力的矢量和。这称为叠加原理，它实际上意味着一个点电荷作用于令一点电荷的力总是符合库仑定律的，不论周围是否存在其他电荷。库仑定律与叠加原理相配合，原则上可以解决静电学的全部问题。

7.3 静电场

设空间存在静止的点电荷 Q(如无特别声明，凡“静止”一律是相对于某个事先选定的惯性系而言的)，则人一点静止点电荷 q 必然受到来自 Q 的静电力，可见 Q 的存在使空间具有一种特殊的性质，我们说 Q 在周围空间激发一个静电场。

7.3.1 电场强度

为了研究电场中各点的性质，可以用一个静止于该点的点电荷 (称为试探电荷)q 做实验。试探电荷应该满足两个条件：

(i) 其线度必须小到可被看作点电荷，以便确定场中每点的性质；

(ii) 其电荷要足够小，使得它的置入不引起原有电荷的重新分布 (否则测出来的将是重新分布后的电荷激发的电场)。

先讨论静止点电荷 Q 激发的静电场。我们把在电场中所要研究的点称为场点。在场点放置一个静止的试探电荷 q。按照库仑定律，q 所受的电场力为

$$\mathbf{F}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r, \tag{7.11}$$

其中 r 是场点与点电荷 Q 的距离，$\mathbf{e}_r$ 是从 Q 到 q 的单位矢量。由 (1.11) 式我们可以看到，比值 $\frac{\mathbf{F}}{q}$ 是一个仅与场点有关的量，它可以表征场点的性质。这一结论还可以推广至由任意静止电荷激发的电场，为此只需把激发电场的电荷分成许多点电荷并利用叠加原理。我们把场中每点的 $\frac{\mathbf{F}}{q}$ 称为该点的电场强度 (在近代文献中常又称为电场)，以 $\mathbf{E}$ 代表，即

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{7.12}$$

由这定义可知，电场强度是描写电场中某点性质的矢量，其大小等于单位试探电荷在该点所受电场力的大小，其方向与正试探电荷在该点所受电场力的方向相同。在场中任意指定一点，就有一个确定的电场强度 $\mathbf{E}$；对同一场中的不同点，$\mathbf{E}$ 一般可以不同。各点的电场强度有相同大小和方向的电场称为均匀电场。

一般地说，若空间每点有一个标量 f(例如地球周围每点有一个高度)，就说空间中存在一个标量场；若空间每点有一个矢量 $\mathbf{a}$，就说空间中存在一个矢量场。因为空间每点可用三个坐标 x,y,z 刻画，所以标量场 f 和矢量场 $\mathbf{a}$ 也可表示为坐标的函数 $f(x,y,z)$ 和 $\mathbf{a}(x,y,z)$，于是标量场和矢量场又称标量点函数和矢量点函数。电场强度是矢量场的一例，可以表示为 $\mathbf{E}(x,y,z)$。无论是标量场还是矢量场，都要特别注意它作为坐标的函数的函数关系，“求某一带电体激发的电场”就是指求出函数关系 $\mathbf{E}(x,y,z)$。

电场强度的国际单位制单位由 (7.12) 定义，它没有专门名称，一般记作 N/C(或 V/m，即伏/米，伏特的定义见后续内容)。

7.3.2 电场线

1、电场线的规定

描写电场的最精确方法是写出电场强度 $\mathbf{E}$ 的函数形式，但这种描述不够直观。为了形象地描写电场，我们可以利用所谓电场线的方法。首先，我们希望电场线能够表示电场的方向，故我们令电场线满足条件：

(i) 曲线上每点的切线方向与该点的电场强度方向相同；

另外，我们还希望电场线的疏密程度 (即穿过某一与电场线垂直的单位面元的电场线条数，下称其为电场线密度) 能够反映电场强度的大小，故我们再添加一规定，即

(ii) 穿过场中任一面元的电场线条数正比于该面元的 $\mathbf{E}$ 通量[1]，也就是说

$$\text{通过任一}\Delta S\text{的电场线条数}=K\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{S}, \tag{7.13}$$

[1] 电场通量即电场与有向元面积的点乘，有向元面积的方向垂直于该面元。

其中 K 为比例常量 $(K > 0)$。

在此规定下，显然地有

$$电场线密度 = \frac{\Delta N}{\Delta S_\perp} = \frac{KE\Delta S_\perp}{\Delta S_\perp} = KE. \tag{7.14}$$

其中 $\Delta S_\perp$ 是指在元面积在电场方向的投影。即电场线密度与电场强度的大小成正比，场线越密集，电场强度越大，反之则电场强度越小。下面我们再介绍关于电场线的两个重要性质，它们是由静电场的规律决定的。

2、电场线的性质

Theorem 7.1. 性质 1 电场线发自正电荷 (或无穷远)，止于负电荷 (或无穷远)，在无电荷处不中断。

另外，电场线还具有另一条重要性质 (这一性质涉及的电势概念将在后面提及)：

性质 2 电势沿电场线方向不断减小，因而电场线不构成闭合曲线。

这两条性质，在中学阶段我们均不予证明。

7.3.3 电势能与电势

在中学阶段，我们往往不会去真正地计算出电势能，常见的情况是给出电势能，学生需根据电势能的含义去求解。考虑到这个原因，以及电势能的严格引入需要一些微积分知识，我们就不再介绍电势能的计算，而是仅仅告知电势能和电势的含义。

实际上，我们在力学部分就已经接触过势能的概念，而电场中的所谓电势能，与重力势能等没有任何分别，都是反映保守力做功的能力。在这里，我们也不再论证电场力是保守力这一结论，但读者需时刻谨记，静电场力是保守力，静电场力做功与路径无关，仅与起始位置有关。

电势能的定义为：

Definition 7.2. 电荷在电场中某点的电势能在数值上等于把电荷从这点移到电势能为零处电场力所做的功。

在理论研究中，通常取电荷 q 在无限远处的电势能为零。电势能常常用 E_p 或 V 或 U 表示。在 SI 制中，电势差的单位为 J/C，这个单位有一个独特的名字，叫做“伏特”(V):

$$1V = 1J/C. \tag{7.15}$$

在 1V 的电势差中移动 1C 的电荷量所需要做的功为 1J。

如果经过计算，我们可以发现，电荷所在的电势能是一个仅与场点有关的函数与其所带电荷量的成绩。为了表征电场本身的性质，我们除去电荷量 q，定义

$$\phi = \frac{E_p}{q} \tag{7.16}$$

为场点 P_0 处的电势，它是一个仅与场点有关的标量函数，因此是一个标量场。电势叠加是标量叠加。

7.4 静电场中的导体

7.4.1 导体和绝缘体

整体而言，格雷和他的同伴们将物质分为了电学绝缘体和电学导体两部分。它们之间的差别仍然是以自然性质的明显表现而划分的。一般的良导体比如普通的金属与一般的绝缘体(比如玻璃和塑料) 之间在电学传导性质上相差 10^{20} 倍。

一个良导体和一个良好的绝缘体之间的电学差异就和液体和固体之间的力学性质差异一样大。这完全不是偶然的。这两种性质都取决于原子微粒的流动性：在电学方面，指的是电子质子等带电微粒的流动性，在力学性能方面，指的是组成物质结构的原子或分子的流动性。可以把这个类比更加深入一点，我们知道物质的物态可以随着温度的变化而变化，事实上，电学中的电导率同样具有这样的特征，我们在良导体和良绝缘体中都发现了这样的例子，并且某些物质可以根据其所在的条件，比如温度，在很大范围内改变自身的电导率。其中很有趣也很有用的一类被称作半导体的材料就具有这样的性质。

基于某些原因，一种材料应该被看成是导体还是绝缘体应该和我们所关心的那种现象的时间尺度有关。

7.4.2 静电场中的导体

在导体外施加一个恒定电场时，在电场作用下，导体内部的电荷重新分布，导致总的电场发生变化，直到导体内静电力与非电力平衡，从而形成一个稳定的静电状态，此时导体上不再存在电荷的流动。

在各向同性的均匀导体中，我们忽略非电力的影响，在导体中的电荷静止时，显然电荷受到的静电力为零，故导体内部一定是没有电场的。另外，由于导体表面的电荷也不流动，我们说导体表面的电场总是垂直于此处面元的。显然，整个导体是等势的，因为电荷在导体上无论怎么移动静电力都不会对它做功。

综合上面的论述，我们可以概括为：对于任何形状和排布方式的导体系统，我们可以得出下面的结论：

Theorem 7.3. (i) 导体内部，$E = 0$； (ii) 导体内部，$\rho = 0$；

对于孤立导体，其电荷在表面突出尖锐处 (即曲率大的地方) 分布密集，在表面平坦处 (曲率小的地方) 分布较稀疏，在表面凹进去的地方 (即曲率为负的地方) 分布最稀疏。其面电荷密度总体上与曲率正相关，但不是正比关系。

7.4.3 唯一性定理与静电场中普遍问题的解决

1、唯一性定理通俗描述

Theorem 7.4. 所谓唯一性定理，通俗地讲，可以认为是这样一个定理：如果有一个电荷分布能够使得导体表面等势，那么这个电荷分布就是实际的电荷分布。

当然，上面这个叙述是非常不严格的，但是在中学阶段这个叙述完全够用。注意，中学时候的静电屏蔽问题，需要依赖这一定理进行合理的说明。往往高中的课程中对静电场中的导体含糊其辞，没有提供合理的推理依据，会造成学生的极大疑惑，因此掌握利用唯一性定理解决导体问题的能力是很重要的。

2、导体内部有空腔，但空腔内无电荷

现在我们有一个内部有空腔的导体，在外界有一恒定的外加电场。为了研究有空腔的导体，我们先从与该导体材质、外部形状大小均相同的无空腔的导体开始研究。对于无空腔的导体，将它置于相同的外加电场之下，显然稳定后外表面的电荷分布会使得导体内部的电场为零。

现在我们考虑有空腔的导体。现在我们只需找出一种能够使其稳定的电荷分布，根据唯一性定理，这种电荷分布就是实际的电荷分布。由上面的无空腔导体的启发，我们使有空腔导体外表面分布有相同的电荷，并且内表面不带电 (即总电量为零且电荷均匀分布)，显然，这种电荷分布是稳定的，这就是实际的电荷分布。

我们可以将上述结论总结为：

(i) 导体内表面不带电；

(ii) 导体内部空腔内的电场为零。

3、导体空腔内有电荷且外表面接地

现在我们的导体内部有一电荷 q 且外表面接地。外部无外加电场。按照相同的思路，我们现在来探索其电荷分布情况。

如果空腔外面的导体无穷大 (即除空腔外所有位置都铺满了整体不带电的导体)，那么此时空腔内表面会产生一种特定的电荷分布，它会使得外面的导体内没有电场。并且我们围绕

空腔取一个高斯面，显然通量为零，因此内电荷总量为零，即内表面总带电量为 $-q$。

现在空腔外面的导体是有限的，我们由无限的启发，只要将相同的电荷分布复制到此时的空腔内表面上，外表面不加电荷，就可以使得外界电场为零，从而外表面与大地以及无穷远处等势，这符合了我们的实际要求。因此根据静电场的唯一性定理，这就是实际的电场分布。

我们可以将上述内容概括为：

(i) 有空腔的导体内部有电荷 q 且外表面接地时，导体仅内表面有电荷，且电荷量为 $-q$。

(ii) 导体外表面不带电，且导体外空间内电场为零。

4、导体空腔内有电荷且外表面不接地

现在我们的导体内部有一电荷 q 且外表面不接地。外部无外加电场。按照相同的思路，我们现在来探索其电荷分布情况。

此时我们仍然受到上面的启发，只要使得空腔的表面带与外部导体铺满空间时相同的电荷 $-q$，并且外表面电荷量为 q 且均匀分布 (这使得外表面电荷不影响内部电场)，就可以达成稳定，再根据静电场的唯一性定理，这就是唯一的电荷分布。

如果外表面是一个球面的话，这个导体在外界激发的电场与位于球心处带电量为 q 的导体激发的电场相同。

以上内容可以概括为：空腔内的电荷不会对外表面的电荷分布产生影响，或者空腔内的电场并未“泄露”出空腔。即使有多个空腔，结论也是一样的，论证过程完全相同。若是有外加电场，只需要将其与第一种情况组合一下就得到正确的电荷分布，此处从略。

7.5 电容器 电容

7.5.1 电容器

Definition 7.5. 任何两个彼此绝缘而又互相靠近的导体，都可以看成是一个电容器。

Definition 7.6. 使电容器带电叫做充电。充电时总是使电容器的一个导体带正电，另一个导体带等量的负电，每个导体所带电量的绝对值，叫做电容器所带的电量。

使充电后的电容器失去电荷叫做放电，用一根导线把电容器的两极接通，两极上的电荷互相中和，电容器就不带电了。

7.5.2 电容

Definition 7.7. 电容器所带的电量跟它的两极间的电势差的比值，叫做电容器的电容。如果用 Q 表示电容器所带的电量，用 U 表示它的两极间的电势差，用 C 表示它的电容，那么

$$C = \frac{Q}{U} \tag{7.17}$$

在国际单位制里，电容的单位是法拉，简称法，国际符号是 F。一个电容器，如果带 1 库的电量时两极间的电势差是 1 伏，这个电容器的电容就是 1 法。

$$1F = 1C/V \tag{7.18}$$

法拉这个单位太大，实际上常用较小的单位：微法 (μF) 和皮法 (pF)。它们间的换算关系是：

$$1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF \tag{7.19}$$

7.5.3 平行板电容器的电容

Theorem 7.8. 对于一个平行板电容器，如果两板的正对面积为 S，两板的距离为 d，两板间充满介电常数为 ε 的电介质，那么，它的电容可以用下式来表示

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon S}{4\pi k d} \tag{7.20}$$

式中 S 用 m^2 作单位，d 用 m 作单位，静电力恒量 $k = 9 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2$，算出的 C 以法为单位。可以看出，平行板电容器的电容，跟介电常数成正比，跟正对面积成正比，跟极板的距离成反比。

一般说来，电容器的电容是由两个导体的大小和形状、两个导体的相对位置以及它们间的电介质定的。

第八章 稳恒电流

8.1 电流

Definition 8.1. 电荷的定向移动形成电流。

Theorem 8.2. 导体中存在持续电流的条件，是保持导体两端的电势差。

Definition 8.3. 通过导体横截面的电量跟通过这些电量所用的时间的比值，叫做电流强度。如果时间 t 内通过导体横截面的电量为 q，那么电流强度

$$I = \frac{q}{t} \tag{8.1}$$

在国际单位制中，电流强度的单位是安培，简称安，国际符号是 A。

Definition 8.4. 电路中，如果电流的方向不随时间而改变，这样的电流叫做直流电；如果电流的方向和大小都不随时间而改变，这样的电流叫做稳恒电流。

8.2 欧姆定律

Theorem 8.5. 德国物理学家欧姆（1787—1854）通过实验研究，对导体中电流与电压的关系得出了如下的结论：通过导体的电流跟加在导体两端的电压成正比，即 $I \propto U$，通常把这个关系写作：

$$R = \frac{U}{I} \tag{8.2}$$

式中 R 是电压与电流的比值。

实验表明，对于同一根导线来说，不管电压和电流的大小怎样变化，比值 R 都是相同的。R 是一个和导体本身有关的量。

Definition 8.6. 导线的 R 越大，在同一电压下，通过它的电流就越小。可见，比值 R 反映出导线对电流的阻碍作用，我们把它叫做导体的电阻。

上面的公式可以写成

$$I = \frac{U}{R} \tag{8.3}$$

这个公式表示导体中的电流强度跟导体两端的电压成正比，跟导体的电阻成反比，这就是欧姆定律。

根据欧姆定律可以规定电阻的单位，电阻的单位是欧姆，简称欧，国际符号是 Ω。它是这样规定的：如果在某段导线两端加上 1 伏特电压，通过它的电流强度是 1 安培，这段导线的电阻就是 1 欧姆：

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} \tag{8.4}$$

8.3 电阻定律 电阻率

Theorem 8.7. 实验表明，导线的电阻跟它的长度成正比，跟它的横截面积成反比，这就是电阻定律，用公式来表示可以写作

$$R = \rho\frac{l}{S} \tag{8.5}$$

式中的比例系数 ρ 跟导体的材料有关系，ρ 是一个反应材料导电性好坏的物理量，叫做材料的电阻率。

在中学，我们对于电阻以及恒定电流的认识往往也就是停留在实验规律这一层面上。值得一提的是，更加科学的认知方法是通过欧姆定律的宏观形式推测出其微观形式，然后利用微观形式的欧姆定律导出电阻的表达式以及后续要学习的闭合回路的欧姆定律，这样会使得理论更加完备且具有联系，因为我们仅仅是基于一个基本的实验规律建设出恒定电流的理论。但在中学阶段，这些往往是不那么必要的，因此我们也不再详细叙述。

8.4 电功和电功率

Theorem 8.8. 如果导体两端的电压为 U，通过导体横截面的电量为 q，那么，电场力所做的功为 $W = qU$，由于 $q = It$，因此

$$W = UIt \tag{8.6}$$

上式中的 W, U, I, t 的单位分别是焦耳、伏特、安培、秒。

电场力做的功常常说成是电流做的功，简称电功。可以看到

Theorem 8.9. 电流在一段电路上所做的功，跟这段电路两端的电压、电路中的电流强度和通电时间成正比。

Definition 8.10. 电流所做的功跟完成这些功所用的时间的比值叫做电功率，用 P 表示电功率，那么

$$P = \frac{W}{t} = UI \tag{8.7}$$

上式中 P, U, I 的单位分别用瓦特、伏特、安培。

Theorem 8.11. 一段电路上的电功率，跟这段电路两端的电压和电路中的电流强度成正比。

8.5 焦耳定律

8.5.1 焦耳定律

Theorem 8.12. 电流通过导体产生的热量，跟电流强度的平方、导体的电阻和通电时间成正比，即

$$Q = I^2Rt \tag{8.8}$$

其中 Q, I, R, t 的单位分别是焦耳、安培、欧姆和秒。

8.5.2 电功和电热的关系

Theorem 8.13. 有在纯电阻电路里，电功才等于电热；在非纯电阻电路里，要注意电功和电热的区别。

8.6 串联与并联

8.6.1 电阻的串联

当电阻 R_1, R_2 串联时，设通过回路的电流为 I，则

$$U = IR_1 + IR_2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{U}{I} = R_1 + R_2 \tag{8.9}$$

也就是说，串联电阻的等效电阻 R_{eq} 为串联电阻的各自电阻之和。

8.6.2 电阻的并联

当电阻 R_1, R_2 并联时，设并联电路两端的电压为 U，则

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{8.10}$$

这就是并联电阻的等效电阻表达式。

8.7 电动势 闭合电路的欧姆定律

常规的教科书老是喜欢介绍完电动势后，直接言明闭合电路的欧姆定律是实验规律。这种讲法，暂且不管正确与否，但对于学生理解电路是不利的。因此笔者采取另外一种讲法。

8.7.1 电源与电动势

我们都知道，电源是维持电路的关键。事实上，电源维持电流的原理是，电源可以在其内部产生一个性质与电场非常类似的场，它整体上与电源内电场的方向相反，并且能够对电荷施加大小正比于电荷量的力的作用。这个场常常被称为非静电场，类比电势，该场可以产生一个场的势 ε，这个势就被称为电源的电动势。

8.7.2 闭合电路的欧姆定律

由于电动势和电势的相似性，考虑电源的内电阻 r，我们可以合理推断，原先的欧姆定律可以被改写为

$$I = \frac{\varepsilon - U}{r} \tag{8.11}$$

或者

$$\varepsilon = Ir + U = I(R + r) \tag{8.12}$$

或者

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \tag{8.13}$$

这就是闭合电路的欧姆定律。

> **Theorem 8.14.** 闭合电路的欧姆定律：闭合电路中的电流强度跟电源的电动势成正比，跟内、外电路中的电阻之和成反比。

关于闭合电路的欧姆定律，高中衍生出很多的应用，但读者只需掌握书中讲述的基本原理，我想理解那些应用还是很容易的，笔者不怎么关心这些实际应用，因此我们也就不再细讲了。

第九章 磁场与电磁感应

9.1 磁场与电场是统一的

历史上，电学和磁学最初完全是独立发展的，并且磁学的进展相当缓慢，从这方面来看，高中教科书甚至很多普通物理教科书上将电学和磁学分开来讲似乎是很合理的。传统的讲法，想必在任何一本教科书上都能够找到，因此我们采取另外一种讲法。这种讲法并不是遵循历史发展规律的，但是揭示了电学和磁学的联系，我们可以认为这种讲法是对传统讲法的一个严格化，尽管在中学范围内我们并不能真正严格。下面的内容仅仅是一个文字讲述，读者大概理解其意思即可，具体的数学计算不必考虑。

依据我们已有的电学理论，以及狭义相对论在尺度缩短方面的知识，我们有了计算运动电荷对于静止电荷的作用力的方法。因此，我们在相对电荷静止的参考系内计算出其他运动电荷对于该静止电荷的力，接着，我们利用相对论的洛伦兹变换，将该力转换到相对该电荷运动的参考系内，从而会得到在该电荷运动的参考系内，该电荷受到的力。

经过计算我们可以发现，在该电荷运动的参考系内，其受力比较复杂。为了更简洁地描述运动电荷对于运动电荷的作用力，我们引入一个新的场，这个场就叫做磁场。总的来说，磁场可以对运动的电荷产生力的作用。运动的电荷可以产生磁场。从上面的叙述我们也可以知道，所谓磁场力，不过是运动电荷对于运动电荷的电场力，电磁本质上是一致的。

但还有需要注意的一点，我们说电磁虽然本质上是统一的，但其统一性仅仅在利用矢量分析的知识根据电来求解磁的方面得到了应用 (实际历史上的求解磁场所应用的仅仅是实验规律)，而在后续的研究中，我们会将磁场作为一个比较独立的场来研究，这也是没有问题的。

9.2 磁场的作用力

现在我们结束思想上的引领，回到具体的内容上来。尽管我们没有详细地说明，但笔者可以告诉你，我们引入的磁场 $\mathbf{B}$ 具有这样的特点，磁场对于运动电荷产生的作用力为

$$\mathsf{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathbf{B} \tag{9.1}$$

关于向量积的内容可以查看第一章的向量部分。其中 $\mathbf{B}$ 被称为磁场的磁感应强度，其单位为特斯拉 (T)。这种力也被称为洛伦兹力。

依据上面的公式，以及 $\mathbf{I} = nqs\boldsymbol{v}$，我们可以得到磁场对于电流元的作用力可以表示为

$$\mathsf{F} = nq\Delta l \cdot s \cdot \frac{\mathbf{I}}{nqs} \times \mathbf{B} = \Delta l \mathbf{I} \times \mathbf{B} \tag{9.2}$$

这种力也被称为安培力。实际上，电流这个单位的就是根据安培力量化的，感兴趣可以去读相关资料，此处不再详述。

9.3 法拉第电磁感应定律

法拉第电磁感应定律在历史上是作为一个“定律”，也就是直接的实验规律被发现的，但实际上，我们可以利用电学、相对论以及矢量分析的工具直接导出这一结论。当然，我们不会在这里耗费巨大的篇幅去推导这些内容，一是考虑到读者很可能看不懂，二是写起来比较麻烦。

Theorem 9.1. 法拉第电磁感应定律：电路中感生电动势的大小，跟穿过这一电路的磁通量的变化率成正比，即

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \tag{9.3}$$

9.4 应用

9.4.1 直流电动机的反电动势

电动机的线圈在磁场里转动时，线圈导线切割磁力线，所以在线圈中会产生感生电动势。这个感生电动势的方向与外加电压的方向相反，通常把这个电动势叫做反电动势。

正是感生电动势使得电动机与纯电阻电路不同。对于电动机来说，如果用 ε 代表反电动势，则电流为

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R} \tag{9.4}$$

或者

$$UI = \varepsilon I + I^2 R \tag{9.5}$$

上式中的 UI 是电路供给电动机的功率 (输入功率)，εI 是转化为机械能的功率 (输出功率)，I^2R 是在电动机线圈上损失的热功率。上式表示，电路供给电动机的功率等于转化为机械能的功率与线圈上损失的热功率之和。从这里我们也看到电功和电热的区别，在直流电动机中，由于存在着反电动势，有一部分电能转化为机械能，电功并不等于电热，而是大于电热。

9.4.2 自感

Definition 9.2. 由于导体本身的电流发生变化而产生的电磁感应现象，叫做自感现象。在自感现象中产生的感生电动势，叫做自感电动势。

自感电动势跟其他感生电动势一样，是跟穿过线圈的磁通量的变化率 $\Delta\phi/\Delta t$ 成正比的，我们知道，磁通量 ϕ 跟磁感应强度 B 成正比，B 又跟产生这个磁场的电流 I 成正比. 所以 ϕ 跟 I 成正比，$\Delta\phi$ 跟 ΔI 也成正比，由此可知自感电动势 $\mathcal{E} = \Delta\phi/\Delta t$ 跟 $\Delta I/\Delta t$ 成正比，即

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{9.6}$$

式中的比例恒量 L 叫做线圈的自感系数，简称自感或电感，它是由线圈本身的特性决定的。线圈越长，单位长度上的匝数越多，截面积越大，它的自感系数就越大，另外，有铁芯的线图的自感系数，比没有铁芯时要大得多。对于一个现成的线圈来说，自感系数是一定的。

自感系数的单位是亨利，简称亨，国际符号是 H。如果通过线圈的电流强度在 1 秒钟以改变 1 安时产生的自感由动势是 1 伏，这个线圈的自感系数是 1 亨，所以

$$1\mathrm{H} = 1\mathrm{V} \cdot \mathrm{s/A} \tag{9.7}$$

第十章　交流电和电磁波

10.1　交流电

10.1.1　交流电的产生

我们以简化的交流发电机为例，记发电机线圈处于匀强磁场，并且切割磁感线的边长为 l，旋转角速度为 ω，在旋转过程中，交流发电机线圈的磁通量为

$$\phi = Bl\frac{2v}{\omega}\cos\omega t \tag{10.1}$$

因此

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = 2Blv\sin\omega t \tag{10.2}$$

这就是交流电的产生原理。

10.1.2　交流电的有效值

所谓交流电的有效值，即电流或者电压的二次方对于时间的平均值的二次根值。也就是说

$$U_{\text{有效}} = \sqrt{\frac{\sum U^2\Delta t}{T}},\quad I_{\text{有效}} = \sqrt{\frac{\sum I^2\Delta t}{T}} \tag{10.3}$$

从定义可以看出，有效值的意义是，可以用来求等效的热功，比如

$$W = \frac{\sum U^2\Delta t}{R} = \frac{U^2_{\text{有效}}T}{R} = \sum I^2R\Delta t = I^2_{\text{有效}}RT \tag{10.4}$$

求算交流电的有效值需要用到积分，因此我们不再写出计算过程，而是直接给出结果：

$$U_{\text{有效}} = \frac{U_{\text{最大}}}{\sqrt{2}},\quad I_{\text{有效}} = \frac{I_{\text{最大}}}{\sqrt{2}} \tag{10.5}$$

显然对于纯电阻电流，电压和电流的有效值之间有关系

$$U_{\text{有效}} = I_{\text{有效}}R \tag{10.6}$$

因此

$$U_{\text{有效}}I_{\text{有效}} = \frac{U^2_{\text{有效}}}{R} = I^2_{\text{有效}}R \tag{10.7}$$

也就是说，$U_{\text{有效}}I_{\text{有效}}$ 也可以用来表征交流电的有效功率。

10.2 电磁波

电磁波在中学阶段没什么好说的。麦克斯韦总结出四个麦克斯韦方程后，将其联立可以得到磁场或者电场关于时间和位置的二阶偏微分方程，求解它就会是一个周期性传播的“电磁波”，但这远远超出了中学物理的范围，因此我们不再介绍。这一部分，对于中学生来说，只需要读一读课本即可。