

Εργασίες Υπολογιστικής Φυσικής 2024-25

Διαφορικές εξισώσεις

Άσκηση 1: Λογιστικό μοντέλο εκθετικής αύξησης

Ένα απλό λογιστικό μοντέλο εκθετικής αύξησης μεγέθους με δεσμούς περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) - cN^2(t)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης οδηγεί σε μια τιμή ισορροπίας για το μέγεθος $N(t \rightarrow \infty)$.

- Θέτοντας $c=0.5$ και αρχικές τιμές $N(0)=0.1, 0.5, 1.0$ και 2.0 επιλύστε την παραπάνω διαφορική εξίσωση με βήμα $h=0.1$ μέχρι να βρείτε την τιμή ισορροπίας χρησιμοποιώντας την μέθοδο Euler, Runge-Kutta 4^{ης} τάξης και Predictor-Corrector 4^{ης} τάξης. Σχεδιάστε τα αποτελέσματα των λύσεων και σχολιάστε.
- Με αρχική τιμή $N(0)=1.0$, επιλύστε την διαφορική εξίσωση με την μέθοδο που επιθυμείτε για τιμές $c=0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ και υπολογίστε την τιμή ισορροπίας που λαμβάνει το μέγεθος $N(\infty)$. Σχεδιάστε τα αποτελέσματα σε ένα διάγραμμα $N(\infty)$ ως προς c και σχολιάστε.

Άσκηση 2: Δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου

Ένα 2-διάστατο μαγνητικό πεδίο περιγράφεται από το μαγνητικό δυναμικό

$$A = \mu I (-x^2 + y^2 + 2xy) \hat{z}.$$

όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου και I μια σταθερή ένταση ρεύματος. Το πεδίο που προκύπτει από αυτό το δυναμικό είναι

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 2\mu I [(x+y)\hat{x} + (x-y)\hat{y}]$$

και συνεπώς οι δυναμικές γραμμές του στο επίπεδο xy περιγράφονται από την εξίσωση

$$\frac{B_y}{B_x} = \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα που να λύνει τη διαφορική εξίσωση $dy/dx = (x-y)/(x+y)$ με τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, με βήμα $h = 1$ και αρχικές συνθήκες $y(1) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ στο διάστημα $1 \leq x \leq 20$ (10 λύσεις από 20 σημεία η καθεμιά) και στο διάστημα $-1 \geq x \geq -20$ (άλλες 10 λύσεις από 20 σημεία η καθεμιά). Σχεδιάστε στο επίπεδο xy τις 20 δυναμικές γραμμές που προκύπτουν για όλες τις αρχικές τιμές στο διάστημα $-20 \leq x \leq 20$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Άσκηση 3: Πλάγια βολή

Κατασκευάστε υπολογιστικό αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα της πλάγιας βολής στο επίπεδο $x-y$.

Για την μελέτη του φαινομένου θεωρήστε $g=10 \text{ m/s}^2$ και αρχικές συνθήκες $x(0)=y(0)=0 \text{ m}$, $|v(0)|=100 \text{ m/s}$.

- Θέτοντας διαφορετικές τιμές για την αρχική γωνία της βολής, επιβεβαιώστε ότι το μέγιστο βεληνικές επιτυγχάνεται για γωνία $\theta=45^\circ$.
- Αν φυσά οριζόντιος άνεμος που προκαλεί επιτάχυνση στο σώμα $\gamma_x = 1 \text{ m/s}^2$, πόση πρέπει να είναι η γωνία ρίψης για να επιτευχθεί το μέγιστο βεληνικές και πόσο είναι αυτό;
- Αν υπάρχει αεροδυναμική τριβή που δημιουργεί επιβράδυνση στο σώμα ανάλογη της ταχύτητας $\gamma = -0.2/\text{s} * v$, πόση πρέπει να είναι η γωνία ρίψης για να επιτευχθεί το μέγιστο βεληνικές και πόσο είναι αυτό;