高等微积分讲义

清华大学数学科学系
艾颖华

目录

第一章　实数系

1.1　微积分简介

问题 1.1.1. *给定非负函数 h, 称之为"高度函数". 考虑由曲线 $y = h(x)$ 与 x 轴, y 轴以及直线 $x = a$ 所围成的图形*

$$D = \{(x, y)|0 \le x \le a, 0 \le y \le h(x)\}.$$

计算 D 的面积 $S(a)$, 称之为"面积函数".

早在 2000 多年前, 阿基米德等人就知道如何求面积: 用竖直的分割线把 D 剖分成一些小块的并, 每一小块近似于矩形, 可估算其面积, 把所有小块的近似面积求和, 得到 $S(a)$ 的一个近似. 当剖分越来越细时, 我们将得到越来越好的近似.

例 1.1.2. 设 $h(x) = x^2$, 求面积函数 $S(a)$.

解. 用 $(n-1)$ 条直线 $x = \frac{ia}{n}(1 \le i \le n-1)$ 将 D 剖分成 n 小块, 从左至右的第 i 块可以近似为底边长为 $\frac{a}{n}$, 高为 $h(\frac{ia}{n})$ 的矩形. 由此可得 $S(a)$ 的近似

$$S(a) \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot h(\frac{ia}{n}) = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} a^3 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}) a^3,$$

当 n 越来越大时, 上式右边越来越接近 $\frac{1}{3}a^3$, 阿基米德由此得出 $S(a) = \frac{1}{3}a^3$. □

例 1.1.3. 一般的, 如果 $h(x) = x^k$, 则需要研究当 n 越来越大时, 表达式

$$x_n = \frac{1^k + 2^k + ... + n^k}{n^{k+1}}$$

是否越来越接近某个与 n 无关的数. 这就是数列的极限.

牛顿 (Newton) 考虑问题1.1.1的反问题: 如何由面积函数求高度函数? 设 o 是接近 0 的数, 则有近似式 $S(x+o) - S(x) \simeq o \cdot h(x)$, 可得 $h(x)$ 的近似值

$$h(x) \simeq \frac{S(x+o) - S(x)}{o}.$$

当 o 越来越接近 0 时, 上式给出 $h(x)$ 的越来越好的近似, 由此可确定高度函数 h.

例 1.1.4. 设面积函数为 $S(x)=x^m$, 其中 m 是给定的正整数, 则

$$\frac{S(x+o)-S(x)}{o}=\frac{(x+o)^m-x^m}{o}=\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}x^{m-i}o^{i-1},$$

当 o 越来越接近 0 时, 上式右边越来越接近 $\binom{m}{1}x^{m-1}$, 故对应的高度函数为 $h(x)=mx^{m-1}$. Newton 把这个方法称为 "流数法", 现代数学中称之为求导.

Newton 注意到,"由高度函数求面积函数" 与 "由面积函数求高度函数" 互为逆操作. 具体的说, 一方面, 如果从高度函数 $h(x)$ 出发, 算得对应的面积函数为 $S(x)$, 则从面积函数 $S(x)$ 出发, 算得的高度函数应为 $h(x)$; 另一方面, 如果从面积函数 $S(x)$ 出发, 算得对应的高度函数为 $h(x)$, 则从高度函数 $h(x)$ 出发, 算得的面积函数应为 $S(x)$. 基于这个原因, Newton 把前述 "由高度函数求面积函数" 的方法称为 "反流数法", 现代数学中称之为积分. 由此, Newton 可以对一般的高度函数 h, 计算出对应的面积函数.

例 1.1.5. 设高度函数为 $h(x)=x^k$, 求对应的面积函数.

解. 由例1.1.4, 如果面积函数为 $S_0(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}$, 则对应的高度函数为 $h_0(x)=x^k$. 这样, 如果已知高度函数为 $h_0(x)$, 则对应的面积函数应为 $S_0(x)$. □

以上就是一元函数微积分的主体内容:

- 极限理论. 研究当 n 越来越大时, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的项是否越来越接近某个固定的数.
- 微分理论. 研究函数的变化率 (导数), 并用导函数刻画函数的性质.
- 积分理论. 研究前述由高度函数计算面积函数的运算.
- 微分与积分的关系. 微分与积分互为逆运算, 这就是所谓的微积分基本定理.

1.2 集合与映射

我们经常会听说, 几何学研究形状, 代数学研究运算, 而微积分研究函数的连续变化. 为了描述函数, 我们采用集合与映射的语言.

定义 1.2.1 (映射)**.** 给定集合 X, Y, 从 X 到 Y 的一个映射 $f: X\to Y$ 是指: 对每个 $x\in X$, 都指定唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应. 把 Y 中与 x 对应的元素记作 $f(x)$, 称为 f 在 x 处的值 (或像).

例 1.2.2 (恒同映射)**.** 给定集合 X, 定义 X 的恒同映射 $id_X : X \to X$ 为

$$id_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

定义 1.2.3 (映射的复合)**.** 给定映射 $f : X \to Y, g : Y \to Z$, 定义它们的复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 为

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

例 1.2.4 (恒同映射是复合的单位)**.** 设 $f : X \to Y$, 则 $f \circ id_X = f = id_Y \circ f$.

命题 1.2.5 (映射的复合满足结合律)**.** 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

定义 1.2.6. (1) 设 $f : X \to Y$ 是映射. 令

$$f(X) = \{y \in Y | \exists x \in X, \text{使得} f(x) = y\},$$

称为 f 的像集 (*image*).

(2) 对于 Y 的子集 V, 令

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\},$$

称为 V(在 f 下) 的原像集 (*pre-image*).

定义 1.2.7. 设 $f : X \to Y$ 是映射.

(1) 称 f 是满射, 如果 $f(X) = Y$.

(2) 称 f 为单射, 如果 $\forall x \neq x'$, 有 $f(x) \neq f(x')$.

(3) 称 f 为双射 (或一一对应, 可逆映射), 如果 f 既单又满.

命题 1.2.8. *f 是双射的充分必要条件是存在映射 $g : Y \to X$ 使得 $g \circ f = id_X, f \circ g = id_Y$.*

如果上述 g 存在的话, 则是唯一的, 称之为 f 的逆映射, 记作 $f^{-1} : Y \to X$.

定义 1.2.9 (函数)**.** 设 $X, Y \subseteq \mathbf{R}$, 从 X 到 Y 的映射 $f : X \to Y$ 称为从 X 到 Y 的函数. 称 X 为 f 的定义域 (*domain*), 称 Y 为 f 的陪域 (*co-domain*).

例 1.2.10 (Dirichlet 函数)**.** 定义 Dirichlet 函数 $D : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{如果} x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

练习 1.2.11. 证明: 每一个函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 都可以表示成为一个奇函数与一个偶函数的和.

1.3 实数

"......the complex numbers are much more beautiful. But in another sense the real numbers are truly fundamental as they incarnate the idea of a bound, of a control of abstract algebraic structures. In a deep sense we are all geometers."

Maxim Kontsevich, beyond numbers.

为了计数, 人们引入了自然数 $0,1,2,...$, 把由所有自然数所构成的集合记为 $\mathbf{Z}_{\geq 0}$, 其上有加法和乘法两种运算. 在 $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 上, 加法运算不一定有逆运算.

为了保证加法运算有逆运算, 人们对每个自然数 $k \neq 0$ 引入了负整数 "$-k$", 它满足

$$``-k" + (n+k) = n, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

把由所有自然数和所有负整数所构成的集合记为 $\mathbf{Z}$, 称为整数集合, 把其中每个元素称为一个整数. 在 $\mathbf{Z}$ 上, 加法运算有逆运算, 乘法运算不一定有逆运算.

为了保证乘法运算有逆运算, 人们对每个整数对 $(m, n \neq 0)$ 引入了分数 "$\frac{m}{n}$", 它满足

$$``\frac{m}{n}" \times n = m,$$

并约定

$$``\frac{m}{n}" = ``\frac{mk}{nk}", \quad \forall k \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}.$$

把由所有分数所构成的集合记为 $\mathbf{Q}$, 称为有理数集合, 把其中每个元素称为一个有理数. 在 $\mathbf{Q}$ 上, 加法运算与乘法运算都有逆运算.

例 1.3.1. 有理数就是有限小数或者无限循环小数.

证明: (1) 先证明有限或无限循环小数是有理数. 对于有限或无限循环小数 x, 设其 10 进制表示为

$$x = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-m} \dot{a}_{-m-1} \cdots \dot{a}_{-m-k},$$

则有

$$\begin{aligned} x = & \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot 10^i + \left(a_{-m-1} 10^{-m-1} + ... + a_{-m-k} 10^{-m-k}\right) \cdot \left(1 + 10^{-k} + 10^{-2k} + \cdots\right) \\ = & 10^{-m} \left(b + \frac{c}{10^k - 1}\right), \end{aligned}$$

其中

$$b = \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot 10^{i+m}, \quad c = \sum_{j=-m-k}^{-m-1} a_j \cdot 10^{j+m+k}$$

都是整数, 由此可知 x 是有理数.

(2) 其次我们证明有理数可以表示为有限或无限循环小数. 设 $x=\frac{p}{q}$, 其中 q 是正整数, 考虑 q 中 2 和 5 因子, 设

$$q=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot q_1,$$

其中 q_1 与 10 互素. 利用数论中的 Euler 定理, 存在正整数 k, 使得 10^k-1 能被 q_1 整除, 设

$$10^k-1=q_1\cdot L.$$

记 $m=\max\{\alpha,\beta\}$, 则

$$x=\frac{pL}{2^{\alpha}5^{\beta}q_1L}=\frac{pL}{2^{\alpha}5^{\beta}(10^k-1)},$$

可以进一步写成 $x=\frac{p_1}{10^m(10^k-1)}$ 的形式, 其中 p_1 是整数. 假设 p_1 除以 10^k-1 的商为 b, 余数为 c, $0\le c<10^k-1$, 则

$$x=10^{-m}\left(b+\frac{c}{10^k-1}\right),$$

结合 (1) 中的计算, 这就把 x 表示成有限或无限循环小数. □

例 1.3.2. $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明: 用反证法, 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则可表示为 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$, 其中 m,n 是互素的整数. 这样, 有 $2m^2=n^2$, 可得 n 是偶数 (因为奇数的平方除以 2 所得的商不是整数). 设 $n=2n_1$, 则有 $m^2=2n_1^2$, 故 m 也是偶数. 这样, m 与 n 有公因子 2, 与前述假设 m,n 互素矛盾! □

例1.3.2表明, 在几何中人们会碰到一些量不能用有理数描述, 例1.3.1启发人们用无限不循环小数来描述这样的量. 这样, 人们“定义”一个实数为一个十进制小数, 即形如

$$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...,\quad a_i\in\{0,1,...,9\},\forall i,$$

的符号, 它代表数值

$$x=a_n\cdot 10^n+...+a_0\cdot 10^0+a_{-1}\cdot 10^{-1}+a_{-2}\cdot 10^{-2}+...,$$

注意到, 对无限小数, 上述表达式是无限的和, 因此只有当我们建立好级数的基本理论之后, 才能定义好小数. 如果该小数是有限的或者无限循环的, 则它代表一个有理数, 否则的话称它代表一个无理数. 把由所有实数所构成的集合记为 $\mathbf{R}$, 它是微积分所研究的主要对象.

1872 年, 戴德金利用有理数给出了实数的严格定义, 这种定义实数的方法称之为戴德金分割.

定义 1.3.3. 一个戴德金分割是指如下有序对 (A, B), 要求它们满足如下条件:

(1) A, B 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的非空子集.

(2) $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = \mathbf{Q}$.

(3) 对任何 $a \in A$ 及任何 $b \in B$, 有 $a < b$.

(4) A 没有最大元素.

这样, 可定义一个实数为一个戴德金分割, 把所有戴德金分割所构成的集合记为 $\mathbf{R}$, 称之为实数集合. 进一步, 还可定义实数之间的大小关系以及加法和乘法运算.

(i) 定义序 $(A_1, B_1) < (A_2, B_2)$ 当且仅当 $A_1 \subseteq A_2$ 且 $A_1 \neq A_2$.

(ii) 定义加法为 $(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, \mathbf{Q} \backslash (A_1 + A_2))$, 这里, 对于两个有限集合 $X, Y \subseteq \mathbf{Q}$, 定义 $X + Y = \{z : \exists x \in X, \exists y \in Y 使得 z = x + y\}$.

(iii) 对两个戴德金正数 $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$, 令

$$A = \{a \in \mathbf{Q} | \exists a_1 \in A_1, a_1 > 0, \exists a_2 \in A_2, a_2 > 0 \text{ 使得} a \leq a_1 a_2\},$$

则可定义乘法为

$$(A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) = (A, \mathbf{Q} - A).$$

(iv) 定义 (A, B) 代表一个有理数, 如果 B 有最小元素.

1.4 确界

定义 1.4.1. 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 称 $a \in E$ 是集合 E 的最大值 (最小值), 如果对任何 $x \in E$, 都有 $x \leq a$(都有 $x \geq a$). 将集合 E 的最大值 (最小值) 记作 $\max E$(记作 $\min E$).

例 1.4.2. 令 $E = [0, 1)$, 则 $\min E = 0$, $\max E$ 不存在.

定义 1.4.3. 设 E 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 称 E 是有上界的 (有下界的), 如果存在实数 c, 使得对任何 $x \in E$, 都有 $x \leq c$(都有 $x \geq c$). 称满足上述条件的实数 c 为 E 的一个上界 (下界).

称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界. 换句话说, E 是有界的, 当且仅当存在实数 K, 使得对任何 $x \in E$, 有 $|x| \leq K$.

定义 1.4.4. 设 E 有上界. 如果 E 的所有上界中有一个最小的数, 则称 E 有上确界. 把 E 的最小的上界称之为 E 的上确界, 记作 $\sup E$.

类似的, 称 E 有下确界, 如果 E 的所有下界中有一个最大的数. 把 E 的最大的下界称之为 E 的下确界, 记作 $\inf E$.

可用符号表示上 (下) 确界为:

$$\sup E = \min\{c|x \leq c, \forall x \in E\}, \quad \inf E = \max\{c|x \geq c, \forall x \in E\}.$$

命题 1.4.5. *c 是 E 的上确界的充分必要条件是:*

(1) $\forall x \in E$, $x \leq c$.

(2) $\forall c' < c$, $\exists x \in E$ 使得 $x > c'$.

证明: 令 $U = \{a|x \leq a, \forall x \in E\}$ 为 E 的所有上界所构成的集合, 则有

$$\begin{aligned} c = \sup E &\iff c = \min U \\ &\iff c \in U \text{ 且} \forall c' < c \text{ 有} c' \notin U \\ &\iff \forall x \in E \text{ 有} x \leq c;\ \text{且} \forall c' < c, \exists y \in E \text{ 使得} y > c'. \end{aligned}$$

□

例 1.4.6. 令 $E = [0, 1)$, 则 $\sup E = 1$, $\inf E = 0$.

定理 1.4.7 (实数的完备性, 确界定理)**.** *(1) 有上界的非空实数集必有上确界.*

(2) 有下界的非空实数集必有下确界.

证明: 设 $E = \{x_\alpha\}$, 每个实数 x_α 有如下的戴德金分割表示

$$x_\alpha = (A_\alpha, B_\alpha).$$

设 c 是 E 的一个上界, 且有戴德金分割表示 $c = (A_0, B_0)$. 由 $x_\alpha \leq c$ 可知

$$A_\alpha \subseteq A_0, \quad \forall \alpha,$$

从而有 $\cup_\alpha A_\alpha \subseteq A_0$. 特别的, $\cup_\alpha A_\alpha$ 是 $\mathbf{Q}$ 的非空子集且不等于 $\mathbf{Q}$. 考虑如下有序对

$$(\cup_\alpha A_\alpha, \mathbf{Q} \backslash (\cup_\alpha A_\alpha)),$$

容易验证它满足戴德金分割的四个要求, 因而代表一个实数, 进一步可验证它是 E 的上确界. □

下面我们给出实数完备性定理的一个应用.

命题 1.4.8. *(1) 对任何实数 x, 存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $x < n$.*

(2) 对任何实数 $a < b$, 存在有理数 $\frac{m}{n}$, 使得 $a < \frac{m}{n} < b$.

证明: (1) 用反证法, 假设每个整数都小于等于 x, 则 x 是 $\mathbf{Z}$ 的上界. 由定理1.4.7, $\mathbf{Z}$ 有上确界, 设为 $M=\sup\mathbf{Z}$. 注意到, $M-1$ 不是 $\mathbf{Z}$ 的上界, 存在整数 n 使得 $M-1<n$, 由此可得整数 $n+1$ 严格大于 M, 与 M 是 $\mathbf{Z}$ 的上确界矛盾!

(2) 由 (1) 的结论, 存在整数 n 满足 $n>\frac{1}{b-a}$. 取定这样的 n, 再次利用 (1) 的结论, 存在整数 k_0,k_1 满足

$$-k_0>-na,\quad k_1>na,$$

即有 $\frac{k_0}{n}<a<\frac{k_1}{n}$. 设 m 是整数 $k_0,k_0+1,...,k_1$ 之中满足 $a<\frac{m}{n}$ 的最小的数, 则

$$\frac{m-1}{n}\leq a<\frac{m}{n},$$

由此可得

$$\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}\leq a+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b,$$

这就找到了 m 使得 $a<\frac{m}{n}<b$. □

练习 1.4.9. 对任何实数 $x>0$ 与任何整数 $n>0$, 存在唯一的正实数 y 使得 $y^n=x$.

第二章　极限理论

2.1　数列的极限

定义 2.1.1. 一个数列是指一个映射 $x : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$. 令 $x_n = x(n)$, 称为该数列的第 n 项. 我们把这个数列记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

定义 2.1.2 (ϵ-N 语言)**.** 称 $L \in \mathbf{R}$ 是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使得 $\forall n \geq N$, 有 $|x_n - L| < \epsilon$.

如果存在满足上述条件的 L, 则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 L; 否则的话, 则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散.

例 2.1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

证明: 对任何 $\epsilon > 0$, 由命题1.4.8, 存在整数 $N > \frac{1}{\epsilon}$, 对任何 $n > N$, 有

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. □

例 2.1.4. 给定 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明: 当 $a \geq 1$ 时, 对任何 $\epsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{a-1}{\epsilon}$, 则对任何整数 $n > N$, 有

$$(1+\epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon > 1 + \frac{a-1}{\epsilon} \cdot \epsilon = a,$$

从而有 $1 \leq \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon$. 特别的, 有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$. 这就验证了 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, 利用定理2.2.4转化成上述情形. □

可以用符号语言将极限的定义叙述成:

$$\begin{aligned}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{以}L\text{ 为极限} &\iff \forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{Z}_+,\forall n\geq N,|x_n-L|<\epsilon.\\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{不以}L\text{ 为极限} &\iff \exists\epsilon>0,\forall N\in\mathbf{Z}_+,\exists n\geq N,|x_n-L|\geq\epsilon.\\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{收敛} &\iff \exists L\in\mathbf{R},\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{Z}_+,\forall n\geq N,|x_n-L|<\epsilon.\\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{发散} &\iff \forall L\in\mathbf{R},\exists\epsilon>0,\forall N\in\mathbf{Z}_+,\exists n\geq N,|x_n-L|\geq\epsilon.\end{aligned}$$

由定义可知, 极限只与数列中下标充分大的各项有关, 与数列前面有限项的行为无关. 换句话说, 如果只改变数列前面有限项的值, 则数列的收敛发散性质不变, 数列的极限 (如果存在的话) 也不变.

命题 2.1.5. *设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$. 如果 $A<B$, 则存在正整数 N, 使得对任何 $n\geq N$ 有 $a_n<b_n$.*

证明: 取 $\epsilon=\frac{B-A}{2}$. 由极限的定义, 存在正整数 N_1,N_2, 使得对任何 $n\geq N_1$, 有 $|a_n-A|<\frac{B-A}{2}$; 对任何 $n\geq N_2$, 有 $|b_n-B|<\frac{B-A}{2}$. 这样, 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则对任何 $n\geq N$, 有

$$a_n<A+\frac{B-A}{2}=B-\frac{B-A}{2}<b_n.$$

□

推论 2.1.6. *如果数列收敛, 则其极限是唯一的.*

证明: 用反证法, 假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到两个极限 $A<B$, 由命题2.1.5, 存在 N 使得对 $n>N$ 有 $x_n>x_n$, 矛盾! □

定义 2.1.7. 称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有上 (下) 界的, 如果存在实数 c, 使得对任何正整数 n 都有 $a_n\leq c(a_n\geq c)$. 称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的, 如果它既有上界又有下界.

推论 2.1.8. *收敛的数列都是有界的.*

证明: 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L<\lim\limits_{n\to\infty}(L+1)$ 及命题2.1.5, 存在 N 使得对 $n>N$ 有 $x_n<L+1$. 这样, 就有

$$x_n\leq\max\{L+1,x_1,...,x_N\},\quad\forall n\in\mathbf{Z}_+,$$

这就证明了数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界. 类似的可证明它也有下界. □

例 2.1.9. 给定实数 q, 则有

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & \text{如果}|q|<1\\ 1, & \text{如果}q=1\\ \text{不存在}, & \text{其他}\end{cases}$$

例 2.1.10. 给定实数 α, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}$.

推论 2.1.11 (极限不等式)**.** *设* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. *如果存在正整数* N, *使得对任何* $n \geq N$ *有* $a_n \leq b_n$, *则* $A \leq B$.

证明: 用反证法, 假设 $A > B$, 则由命题2.1.5, 存在 N_0 使得对 $n > N_0$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注 2.1.12. 在上述推论中, 由 $a_n < b_n (\forall n \geq N)$ 只能推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 不能保证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.2 计算极限的方法

2.2.1 用定义验证

例 2.2.1. 设 $a > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

解. 注意到, 当 $n > 2k$ 时, 有

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{(a-1)^{k+1}} \cdot (\prod_{i=1}^{k} \frac{n}{n-i}) \cdot \frac{1}{n} . < \frac{(k+1)!}{(a-1)^{k+1}} \cdot 2^k \cdot \frac{1}{n}$$

□

2.2.2 夹逼定理

定理 2.2.2 (夹逼定理)**.** *设存在正整数* N, *使得对任何* $n \geq N$ *有*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *存在且都等于* L, *则* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *也以* L *为极限.*

证明: 对任何 $\epsilon > 0$, 由极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ 的定义, 存在正整数 N_0, N_1 使得

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall n > N_0; \quad |c_n - L| < \epsilon, \quad \forall n > N_1.$$

令 $M = \max\{N_0, N_1, N\}$, 则对 $n > M$, 有

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon,$$

特别的对 $n > M$ 有 $|b_n - L| < \epsilon$, 这就证明了 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限. □

例 2.2.3. 设 $a_1, ..., a_m$ 是给定的正数, 则

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + ... + a_m^n)^{1/n} = \max\{a_i | i = 1, ..., m\},$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^{-n} + ... + a_m^{-n})^{-1/n} = \min\{a_i | i = 1, ..., m\}.$$

2.2.3 极限的四则运算

定理 2.2.4 (极限的四则运算)**.** 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \lim_{n\to\infty} b_n = B$, 则如下论断成立.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

(3) 如果 $B \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

证明: (3) 不妨设 $B > 0$, 由命题2.1.5知存在正整数 N_1, 使得当 $n \geq N_1$ 时有 $b_n > \frac{B}{2}$. 由于收敛数列是有界的, 设对每个 n 都有 $|a_n| \leq K, |b_n| \leq K$. 利用极限的定义, 对每个正数 $\epsilon_1 = \frac{B^2\epsilon}{4K}$, 存在正整数 N_1, 使得当 $n \geq N_1$ 时有 $|a_n - A| < \epsilon_1, |b_n - B| < \epsilon_1$.

取 $N \geq \max\{N_1, N_2\}$, 则对 $n \geq N$ 有

$$\begin{aligned} |\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}| &= \frac{|a_n(B-b_n) + b_n(a_n - A)|}{|b_n B|} \\ &\leq \frac{|a_n(B-b_n)| + |b_n(a_n - A)|}{|b_n B|} \\ &\leq \frac{2K\epsilon_1}{B^2/2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

这就验证了 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$. □

推论 2.2.5. 设 k 是固定的正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{k} x_{i,n}) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} x_{i,n},$$

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{i=1}^{k} x_{i,n}) = \prod_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} x_{i,n}.$$

例 2.2.6. 给定正整数 k 以及实数 $a_0, a_1, ..., a_k$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + ... + a_0}{n^k} = a_k$.

例 2.2.7. 设 k, m 是给定的正整数, $a_k, b_m \neq 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + ... + a_0}{b_m n^m + ... + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{如果} k < m \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{如果} k = m \\ \text{不存在}, & \text{如果} k > m. \end{cases}$$

例 2.2.8. 给定 $|q| < 1$, 则有 $\lim_{n\to\infty}(1 + q + ... + q^n) = \frac{1}{1-q}$.

例 2.2.9. 设 a, b 是正数. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + a + ... + a^n}{1 + b + ... + b^n}$.

2.3 数列极限的存在性

2.3.1 单调极限定理

定义 2.3.1. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是递增的, 如果对任何正整数 n 都有 $a_n < a_{n+1}$. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的, 如果对任何正整数 n 都有 $a_n \leq a_{n+1}$.

类似的, 可以定义递减的数列与不增的数列. 人们将这四类数列统称为单调数列.

定理 2.3.2 (单调极限定理, *Monotone Convergence Theorem*)**.** 不减的且有上界的实数数列必有极限.

证明: 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的且有上界的数列. 考虑集合 $X = \{x_1, x_2, ...\}$, 它有上界, 则必有上确界 $\sup X = s$. 我们来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$. 为此, 对任何 $\epsilon > 0$, 由于 $s - \epsilon$ 不再是 X 的上界, 存在 $N \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $x_N > s - \epsilon$. 这样, 对任何 $n \geq N$ 有

$$s \geq x_n \geq x_N > s - \epsilon,$$

特别的, 有 $|x_n - s| < \epsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$. □

例 2.3.3. 数列 $\{x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

证明: (1) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界. 首先, 注意到

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n...(n-k+1)}{k! \cdot n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

令 $y_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$, 则 $x_n \leq y_n$. 其次, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有上界的, 这是因为

$$\begin{aligned} y_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + 1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

这就证明了数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界.

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减的. 利用算数-几何平均不等式, 可得

$$\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n \cdot 1} \leq \frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

由此可得 $x_n \leq x_{n+1}$.

结合 (1), (2), 由单调极限定理可知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 存在. □

Euler 把上述极限记作 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 这是数学中最重要的常数之一, 可称之为 *Euler's numer* 或自然对数的底数. 人们可以估算出

$$e \simeq 2.718281828459......$$

但如果用定义式 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 来计算的话, 收敛速度特别慢, 如下表所示:

n	1	2	3	4	5	100	1000	10000	100000
x_n	2	2.25	2.370	2.441	2.488	2.7048	2.7169	2.7181	2.718268

例 2.3.4. 可用如下方法计算 e:

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}).$$

证明: (1) $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是递增且有上界的数列, 由单调极限定理可知其极限存在, 设为 $\lim_{n\to\infty} y_n=Y$.

(2) 由例2.3.3, 有 $x_n\le y_n$, 利用极限不等式可得

$$e=\lim_{n\to\infty}x_n\le\lim_{n\to\infty}y_n=Y.$$

(3) 对固定的 k, 当 $n\ge k$ 时有

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ge 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+...+\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot...\cdot\frac{n-k+1}{n},$$

由极限不等式可得

$$e=\lim_{n\to\infty}x_n\ge 1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{k!}=y_k,$$

再一次利用极限不等式, 得 $e\ge\lim_{k\to\infty}y_k=Y$.

结合 (2),(3), 可得

$$e=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}).$$

□

用这个方法估算 e, 收敛速度快得多, 如下表所示:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	2	2.5	2.666	2.708	2.7166	2.71805	2.71825	2.71827	2.71828	2.7182818

例 2.3.5. 设 n 是正整数. 证明:

$$0<e-\left(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\right)\le\frac{2}{(n+1)!}.$$

证明: 一方面, 对 $m \geq n+1$, 有 $y_m \geq y_{n+1}$, 由极限不等式可得

$$e = \lim_{m\to\infty} y_m \geq y_{n+1} > y_n.$$

另一方面, 对 $m \geq n+1$, 有

$$\begin{aligned}
y_m - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots m}\right) \\
&< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)\cdots m}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m}\right) \\
&< \frac{2}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

利用极限不等式可得 $\lim\limits_{m\to\infty}(y_m - y_n) \leq \frac{2}{(n+1)!}$, 即有 $e - y_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$. □

命题 2.3.6. *e 不是有理数.*

证明: 用反证法, 假设 e 是有理数, 设 $e = \frac{A}{B}$, 其中 A, B 是正整数. 由前例的结论 $0 < e - y_2 \leq \frac{2}{3!}$ 知 e 不是整数, 因而 $B \geq 2$. 再次用前例的结论, 有

$$0 < e - y_B \leq \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!}\cdot\frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!},$$

注意到 $e - y_B = \frac{A}{B} - (1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!})$ 可通分成 $\frac{C}{B!}$ 的形式, 其中 C 是整数. 代入上述不等式可得 $0 < C < 1$, 矛盾! □

例 2.3.7. 给定正整数 $k \geq 2$ 与实数 $a > 0$. 定义数列为:

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

证明极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出该极限.

解. 由几何-算术平均不等式, 对任何 $n \geq 1$, 有:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} =& \frac{1}{k}(\underbrace{x_n + \ldots + x_n}_{(k-1)\text{个}} + \frac{a}{x_n^{k-1}}) \\
\geq& \sqrt[k]{\underbrace{x_n \cdot \ldots \cdot x_n}_{(k-1)\text{个}} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}}} \\
=& \sqrt[k]{a},
\end{aligned}$$

由此可知, 对任何 $n \geq 2$, 有 $\frac{a}{x_n^{k-1}} \leq x_n$. 从而有:

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k} \leq \frac{(k-1)x_n + x_n}{k} = x_n, \quad \forall n \geq 2.$$

这样, 数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 单调递减且有下界, 由单调极限定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 利用极限不等式可知, $A \geq \sqrt[k]{a} > 0$.

最后, 对 $x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}$ 两边取极限, 可得

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} = \frac{k-1}{k}A + \frac{a}{kA^{k-1}},$$

解得 $A = \sqrt[k]{a}$. 这样我们就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

□

2.3.2 Cauchy 收敛原理

定义 2.3.8. 称实数序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N(\epsilon)$, 使得对任何 $m, n \geq N(\epsilon)$, 都有 $|x_n - x_m| < \epsilon$.

定理 2.3.9 (Cauchy 收敛原理)**.** *实数序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列.*

证明: 收敛序列是 Cauchy 列的证明是直接的. 我们只证明 Cauchy 列一定收敛.

(1) 先证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 取 $\epsilon = 1$, 由假设存在整数 N_0, 使得对任何 $m, n \geq N_0$, 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别的, 有

$$|x_n - x_{N_0}| < 1, \quad \forall n \geq N_0$$

这表明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

(2) 对每个正整数 n, 由 (1) 的结论可知 $\{x_i : i \geq n\}$ 有界, 因而有上确界与下确界. 设

$$a_n = \inf\{x_i : i \geq n\}, \quad b_n = \sup\{x_i : i \geq n\}.$$

显然有

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1.$$

特别的, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递增且有上界, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 递减且有下界, 由单调极限定理可知这两个数列都收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 则 $A \leq B$. 另一方面, 对每个正数 ϵ, 存在正整数 N, 使得对任何 $m, n \geq N$, 有 $|x_m - x_n| < \epsilon$. 由此可得, 对任何 $n > N$, 有

$$\sup\{x_i - x_j | i \geq n, j \geq n\} \leq \epsilon.$$

容易直接验证

$$\sup\{x_i - x_j | i \geq n, j \geq n\} = \sup\{x_i | i \geq n\} - \inf\{x_j | j \geq n\} = b_n - a_n,$$

则对 $n > N$ 有 $b_n - a_n \leq \epsilon$. 利用极限不等式可得 $B - A \leq \epsilon$. 由前述 $A \leq B$ 以及 ϵ 的任意性, 有 $A = B$, 记它们的值为 L.

(3) 最后, 注意到对每个正整数 n, 有 $a_n \leq x_n \leq b_n$, 利用夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. □

在上述证明中, 用到了如下构造: 对有界数列 $\{x_n\}$, 考虑

$$a_n = \inf\{x_i : i \geq n\}, \quad b_n = \sup\{x_i : i \geq n\},$$

则 $\{a_n\}$ 递增且有上界, $\{b_n\}$ 递减且有下界, 由单调极限定理可知这两个数列都收敛. 定义

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

分别称之为数列 $\{x_n\}$ 的下极限与上极限. 以后我们会见到 Cauchy-Hadamard 定理, 它将幂级数的收敛半径用某个上极限表示出.

命题 2.3.10. *数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是该数列的上极限与下极限相等.*

证明: "⇒" 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, 则对任何 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $n \geq N$ 有 $L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$. 由此可知对 $n \geq N$ 有 $a_n \geq L - \epsilon$, $b_n \leq L + \epsilon$, 利用极限不等式可得

$$L - \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq L + \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, 有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, 即 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限相等.

"⇐" 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = K$. 注意到 $a_n \leq x_n \leq b_n$, 利用夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty} x_n = K$. □

例 2.3.11. 给定实数 θ, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k^2}$ 存在.

定义 2.3.12. 所谓一个度量空间是指一个集合 X, 以及一个满足如下条件的映射 $d : X \times X \to \mathbf{R}_{\geq 0}$:

(1) 正定性, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(2) 对称性, 对任何 $x, y \in X$ 有 $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) 三角不等式, 对任何 $x, y, z \in X$ 有 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

称 $d(x, y)$ 为 x 到 y 的距离, 并将上述度量空间记为 (X, d).

定义 2.3.13. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 (X,d) 中的序列. 称 $\{x_n\}$ 收敛到 $y \in X$, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $n \geq N$ 都有 $d(x_n, y) < \epsilon$.

称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对 $n, m \geq N$ 都有 $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

例 2.3.14 (压缩映像定理)**.** 设 (X,d) 是一个度量空间, 且 X 中的任何 Cauchy 列都收敛. 设 $T: X \to X$ 是 X 到自身的映射, 且是压缩的, 即存在正数 $c < 1$, 使得对任何 $x, y \in X$ 都有

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

证明: T 有唯一的不动点, 即存在唯一的 $z \in X$ 使得 $T(z) = z$.

证明*:* 任取 $x \in X$, 定义 $\{x_n\}$ 为: $x_0 = x$, $x_{n+1} = T(x_n)$, 即 $x_n = T^{(n)}(x)$.

(1) 断言: $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 对每个 $k \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \\ &\leq d(x_0, x_1) + cd(x_0, x_1) + \cdots + c^{k-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{1}{1-c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

这样, 对任何 $n > m \geq N$ 有

$$d(x_n, x_m) = d(T^{(m)} x_{n-m}, T^{(m)} x_0) \leq c^m d(x_{n-m}, x_0) \leq c^m \frac{1}{1-c} d(x_0, x_1) \leq c^N \frac{1}{1-c} d(x_0, x_1),$$

结合 $0 < c < 1$ 可知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

(2) 由条件 X 中的任何 Cauchy 列都收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 记为 z. 我们证明 z 是 T 的不动点. 注意到

$$d(T(x_n), T(z)) \leq c \cdot d(x_n, z) \to 0, \quad \text{当} n \to \infty \text{时},$$

从而有

$$T(z) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z.$$

□

2.4 函数极限的定义

我们已经定义了数列的极限. 数列是一类特殊的函数 $f: \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}$, 所谓数列的极限是指当自变量 $n \to +\infty$ 时, 函数值 $f(n)$ 的 “最终” 趋向. 容易把数列极限的定义推广到一般函数.

定义 2.4.1. 给定 $a \in \mathbf{R}$, 称 $B_r(a) = \{x : |x - a| < r\}$ 为 a 的半径为 r 的开球邻域; 称 $B_r(a) \backslash \{a\}$ 为 a 的半径为 r 的空心开球邻域.

定义 2.4.2 ($\epsilon-\delta$ 语言)**.** 设函数 f 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义. 如果对任何 $\epsilon>0$, 存在 (依赖于 ϵ 的) 实数 $\delta>0$, 使得对任何 $0<|x-a|<\delta$ 都有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称当 x 趋于 a 时, 函数 f 的极限为 A, 记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

注 2.4.3. (1) 当 $x\to a$ 时 f 的极限与 $f(a)$ 无关 (事实上, f 在 a 点可以没有定义), 只与 f 在 a 的某个空心邻域上的行为有关.

(2) 如果有极限, 则极限是唯一的.

例 2.4.4. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

定义 2.4.5 (单侧极限)**.** 设函数 f 在 $(a,a+r)$ 上有定义. 如果对任何 $\epsilon>0$, 存在 (依赖于 ϵ 的) 实数 $\delta>0$, 使得对任何 $0<x-a<\delta$ 都有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称当 x 从右侧趋于 a 时, 函数 f 的右极限为 A, 记作 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.

类似的, 设函数 f 在 $(a-r,a)$ 上有定义. 如果对任何 $\epsilon>0$, 存在 (依赖于 ϵ 的) 实数 $\delta>0$, 使得对任何 $-\delta<x-a<0$ 都有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称当 x 从左侧趋于 a 时, 函数 f 的左极限为 A, 记作 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$.

例 2.4.6. 设 $f(x)=sgn(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

命题 2.4.7. *设函数 f 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在的充分必要条件是单侧极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在且相等.*

定义 2.4.8 (自变量趋于无穷时的极限)**.** 设 f 在区间 $(a,+\infty)$ 上有定义, 如果对任何 $\epsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得对任何 $x>M$, 有 $|f(x)-A|<\epsilon$, 则称当 x 趋近于 $+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限为 A, 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

类似的, 可以定义当 x 趋近于 $-\infty$ 或 ∞ 时 $f(x)$ 的极限:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \iff \forall\epsilon>0,\exists M>0,\forall x<-M,\ \text{有}|f(x)-A|<\epsilon;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \iff \forall\epsilon>0,\exists M>0,\forall |x|>M,\ \text{有}|f(x)-A|<\epsilon;$$

命题 2.4.9. *极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且相等.*

2.5 函数极限的性质

命题 2.5.1. *设函数 f,g 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(a)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$, 则存在正数 δ, 使得对任何 $0<|x-a|<\delta$, 都有 $f(x)<g(x)$.*

推论 2.5.2 (极限不等式)**.** 设函数 f, g 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义, 并且极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ 都存在. 如果存在正数 δ 使得对任何 $0 < |x-a| < \delta$ 都有 $f(x) \le g(x)$, 则 $A \le B$.

命题 2.5.3. 设函数 f 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义, 且极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在, 则 f 在 a 附近有界, 即存在 $\delta > 0$ 与 $M > 0$, 使得对任何 $0 < |x-a| < \delta$ 都有 $|f(x)| \le M$.

可以用数列极限刻画函数极限.

定理 2.5.4 (Heine)**.** 设函数 f 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 充分必要条件是: 对任何数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 只要 $\forall n$ 有 $x_n \in B_r(a)\backslash\{a\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证明: "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\forall n$ 有 $x_n \in B_r(a)\backslash\{a\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 来证 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. 为此, 对任何 $\epsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 的定义知存在 $\delta > 0$, 使得对 $0 < |x-a| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 对此 δ, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的定义知存在正整数 N, 使得对任何 $n \ge N$, 有 $|x_n - a| < \delta$. 结合条件 $x_n \ne a$, 对 $n \ge N$ 有 $0 < |x_n - a| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - A| < \epsilon$. 这就验证了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

"$\Leftarrow$" 假设对任何数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 只要 $\forall n$ 有 $x_n \in B_r(a)\backslash\{a\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 来证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. 用反证法, 假设当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限, 则存在正数 ϵ, 使得对任何 $\delta > 0$, 都存在 $0 < |x-a| < \delta$, 满足 $|f(x) - A| \ge \epsilon$. 特别的, 对每个 $\frac{1}{n}$, 存在 $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ 满足 $|f(x_n) - A| \ge \epsilon$. 这就得到数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 它满足 $x_n \ne a$. 由 $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由前述假设应有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 这与 $|f(x_n) - A| \ge \epsilon$ 矛盾! $\square$

例 2.5.5. 设 $\alpha > 0$, 则当 $x \to 0$ 时, $\sin \frac{1}{x^{\alpha}}$ 没有极限.

2.6 计算极限的方法

2.6.1 直接用定义验证

例 2.6.1. 给定实数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{\alpha}$.

例 2.6.2. 给定实数 α, 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha}$.

引理 2.6.3. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$.

例 2.6.4. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a, \lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

2.6.2 夹逼定理

定理 2.6.5 (夹逼定理)**.** 设函数 f, g, h 在 a 的某个空心邻域 $B_r(a)\backslash\{a\}$ 上有定义, 且存在正数 δ 使得

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \quad \forall 0 < |x-a| < \delta.$$

如果 $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} h(x)$ 存在且都等于 L, 则 $\lim_{x\to a} g(x)$ 也存在且等于 L.

例 2.6.6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2.6.3 极限的四则运算

定理 2.6.7 (极限的四则运算)**.** 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$, 则如下论断成立.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

(3) 如果 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

例 2.6.8. 设 $b_0 \neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to a} \frac{a_0 + a_1(x-a) + ... + a_k(x-a)^k}{b_0 + b_1(x-a) + ... + b_l(x-a)^l}.$$

例 2.6.9. 设 $a_k, b_l \neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a_k x^k + ... + a_0}{b_l x^l + ... + b_0}.$$

例 2.6.10. 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

2.6.4 复合函数的极限

定理 2.6.11 (复合函数的极限)**.** 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$.

(1) 如果在 x_0 的某个空心邻域内总有 $f(x) \neq y_0$, 则 $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

(2) 如果 $g(y_0) = \lim_{y\to y_0} g(y)$, 则 $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

证明: (1) 对任何正数 ϵ, 由 $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$ 的定义知存在 $\delta_1 > 0$, 使得对 $0 < |y-y_0| < \delta_1$ 有 $|g(y) - z_0| < \epsilon$. 对此 δ_1, 由 $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ 的定义知存在 $\delta > 0$, 使得对 $0 < |x-x_0| < \delta$ 有 $|f(x) - y_0| < \delta_1$. 结合条件 $f(x) \neq y_0$, 对 $0 < |x-x_0| < \delta$ 有 $0 < |f(x) - y_0| < \delta_1$, 进而有 $|g(f(x)) - z_0| < \epsilon$, 这就验证了 $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

□

当上述定理中 f 是数列时 (视为定义域为 $\mathbf{Z}_+$ 的函数), 则得到如下结果.

命题 2.6.12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$.

(1) 如果存在正整数 N, 使得对任何 $n \geq N$ 都有 $a_n \neq y_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = z_0$.

(2) 如果 $g(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = z_0$.

例 2.6.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$.

例 2.6.14. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{[x]})^{[x]+1} = e = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{[x]+1})^{[x]}$.

例 2.6.15. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$. 可以把这两个结果统一写成

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

例 2.6.16. $\lim\limits_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$.

例 2.6.17. $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \tan x)^{\cot x} = e$.

例 2.6.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x} = 1$.

例 2.6.19. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$.

例 2.6.20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2} = e^{-2}$.

第三章　连续性

3.1　连续函数

定义 3.1.1 (一点处的连续性)**.** 设 f 在 x_0 的某个开球邻域内有定义, 称 f 在 x_0 处连续, 如果如下彼此等价的命题成立.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $|x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

(3) 对 $f(x_0)$ 的任何邻域 $B_\epsilon(f(x_0))$, 存在 x_0 的邻域 $B_\delta(x_0)$, 使得 $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$.

注 3.1.2. 所谓 f 在 x_0 处连续, 是指对于任何事先给定的误差范围 $\epsilon > 0$, 只要 x 与 x_0 隔的充分近, 则 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 的距离小于 ϵ. 粗略的说, 即 f 把 x_0 某个附近的点都映射到 $f(x_0)$ 的附近. 更加粗略的说, 即 f 在 x_0 处 "没有撕裂". 从几何图像上看, 即 f 的图像 $\Gamma_f := \{(x, f(x)|x \in X\}$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处 "没有断开".

命题 3.1.3 (用序列极限刻画连续性)**.** *f 在 x_0 处连续的充分必要条件是: 对任何数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

证明: "$\Rightarrow$" 设 f 在 x_0 处连续, 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, 由命题2.6.12中 (2) 的结论, 可得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" 设对满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 都有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 我们来证明 f 在 x_0 处连续. 只需证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 由 Heine 定理, 这等价于证明: 对满足对满足 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$ 且每项 $y_n \neq x_0$ 的数列 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 都有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$, 这可由前面的假设得到.

□

定义 3.1.4. 如果 f 在 x_0 处连续, 则称 x_0 为 f 的连续点, 否则称之为 f 的间断点.

从上述定义可知:

$$
\begin{aligned}
& x_0\text{是间断点} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0,\ \text{存在}|x - x_0| < \delta,\ \text{使得}|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon \\
\Longleftrightarrow\ & \text{或者} \lim_{x \to x_0} f(x)\text{不存在, 或者} \lim_{x \to x_0} f(x)\text{存在但不等于}f(x_0).
\end{aligned}
$$

例 3.1.5. 考虑如下函数在 $x = 0$ 处是否连续

$$
f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^\alpha}, & \text{如果}x \neq 0 \\ 0, & \text{如果}x = 0. \end{cases}
$$

例 3.1.6. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$, 则称 x_0 为可去间断点, 因为可以把 f 修改成

$$
\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果}x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{如果}x = x_0 \end{cases}
$$

则 $\widetilde{f}$ 在 x_0 处连续.

定义 3.1.7 (整体连续)**.** 如果 f 在 (a, b) 上每一点处都连续, 则称 f 在区间 (a, b) 上连续, 或称 f 是区间 (a, b) 上的连续函数, 记作 $f \in C((a, b))$.

如果 f 的定义域是闭区间 $[a, b]$, 如何定义连续性呢?

定义 3.1.8. 设 f 在 $D = [a, a + r)$ 上有定义, 称 f 在点 a 处右连续, 如果如下彼此等价的命题成立.

(1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

(2) 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $0 \leq x - a < \delta$, 有 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(3) 对 $f(a)$ 的任何邻域 $B_\epsilon(f(a))$, 存在 a 的某个邻域 $D \cap B_\delta(a)$, 使得 $f(D \cap B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$.

类似的, 如果 f 在 $(b - r, b]$ 上有定义, 则可以定义 f 在点 b 处是否左连续.

容易看出, 上述第三种定义比较便于推广. 当 f 的定义域是任意集合 $D \subseteq \mathbf{R}$ 时, 也可以定义连续性.

定义 3.1.9. 设 $f : D \to \mathbf{R}$ 的定义域为 D, $x_0 \in D$. 如果对 $f(x_0)$ 的任何邻域 $B_\epsilon(f(x_0))$, 都存在 x_0 的某个邻域 $D \cap B_\delta(x_0)$, 使得 $f(D \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(f(x_0))$, 则称 f 在点 x_0 处连续.

定义 3.1.10 (整体连续)**.** 设 $f : D \to \mathbf{R}$ 的定义域为 D. 如果 f 在 D 上每一点都连续, 则称 f 是 D 上的连续函数, 记作 $f \in C(D)$.

注 3.1.11. $f \in C([a,b])$ 的含义是: f 在 a 处右连续, 在 b 处左连续, 且在内部每个点 $x \in (a,b)$ 处连续.

3.2 连续函数的局部性质

定理 3.2.1 (四则运算保持连续性)**.** *设 f, g 在 x_0 处连续, 则 $f+g, f\cdot g$ 在 x_0 处连续. 如果 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处也连续.*

推论 3.2.2. *设 $f, g \in C((a,b))$, 则 $f+g, f\cdot g \in C((a,b))$. 如果令 $V = \{x \in (a,b) | g(x) = 0\}$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 $(a,b)\backslash V$ 上连续.*

例 3.2.3 (有理函数)**.** 设 $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$ 是多项式函数, 则 $P, Q \in C(\mathbf{R})$. 令 $V_Q = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) = 0\}$ 为 Q 的零点的集合, 则有理函数 $\frac{P}{Q}$ 是 $\mathbf{R}\backslash V_Q$ 上的连续函数.

定理 3.2.4 (复合函数的连续性)**.** *设 f 在 (a,b) 上有定义, g 在 (c,d) 上有定义, 且 $f((a,b)) \subseteq (c,d)$. 如果 f 在 x_0 处连续, g 在 $f(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 处连续.*

推论 3.2.5 (连续函数的复合是连续的)**.** *设 $f : D \to E, g : E \to F$ 都是连续函数, 则 $g \circ f : D \to F$ 是连续函数.*

例 3.2.6. 设函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处都连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 在 x_0 处也连续.

3.3 连续函数的整体性质

3.3.1 实数的完备性

以下三个定理彼此等价, 它们描述了实数集 $\mathbf{R}$ 的完备性.

定理 3.3.1. *不减且有上界的数列一定收敛.*

定理 3.3.2 (区间套原理)**.** *设一族闭区间满足*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

且长度趋近于 0, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在且相等. 更进一步, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, 则 $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$.

定理 3.3.3. *有上界的非空实数集一定有上确界.*

“定理3.3.1⇒ 定理3.3.2”. 对每个正整数 n, 有

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le b_n \le ... \le b_2 \le b_1,$$

特别的, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不减且有上界 b_1, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不增且有下界 a_1. 由 Weierstrass 定理, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 可得 $A = B$. 设 $A = B = c$, 我们来证明 $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$. 一方面, 对固定的 n, 对每个 $m \ge n$ 有 $a_n \le a_m$, 则 $a_n \le \lim\limits_{m\to\infty} a_m = c$, 类似的可得 $c \le b_n$. 这表明 $\{c\} \subseteq \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 另一方面, 如果 $x \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$, 则对每个 n 都有 $a_n \le x \le b_n$, 由极限不等式可得 $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, 故 $x = c$, 由此可得 $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \subseteq \{c\}$. 结合这两方面, 我们证明了 $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$.

□

“定理3.3.2⇒ 定理3.3.3”. 设 $X \subseteq \mathbf{R}$ 有上界 b 且非空, 我们来证明 $\sup X$ 存在. 任取 $x_0 \in X$ 与 $a < x_0$. 我们构造一族闭区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

使得 $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, 且 a_n 不是 X 的上界, b_n 是 X 的上界. 为此, 令 $a_1 = a, b_1 = b$. 假设已经构造出 a_n, b_n, 考虑 $\frac{a_n+b_n}{2}$ 是否为 X 的上界. 如果 $\frac{a_n+b_n}{2}$ 是 X 的上界, 则令 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$; 如果 $\frac{a_n+b_n}{2}$ 不是 X 的上界, 则令 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$. 这样, 我们就递归的构造出一族满足前述条件的区间. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$, 由定理3.3.2可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. 最后, 我们来证明 $c = \sup X$. 一方面, 对任何 $x \in X$, 对任何正整数 n 有 $x \le b_n$, 利用极限不等式可得 $x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, 这表明 c 是 X 的上界. 另一方面, 对任何 $c' < c$, 由于 $c' < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 存在 n 使得 $c' < a_n$. 又由之前的构造方式, a_n 不是 X 的上界, 存在 $x \in X$ 使得 $a_n < x$, 这样就找到了 $x \in X$ 使得 $c' < x$, 这表明 c' 不是 X 的上界. 结合这两方面, 我们证明了 $\sup X = c$. □

“定理3.3.3⇒ 定理3.3.1”. 在之前的讲义中已经完成这部分的证明. □

3.3.2 介值定理

定理 3.3.4 (介值定理, Bolzano-Cauchy)**.** *设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续函数. 如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 符号相反, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.*

证明: 用反证法, 假设对任何 $c \in (a, b)$ 都有 $f(c) \ne 0$. 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 我们构造一族闭区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

使得 $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, 且 $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. 为此, 令 $a_1 = a, b_1 = b$. 假设已经构造出 a_n, b_n, 考虑 $f(\frac{a_n+b_n}{2})$. 如果 $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$, 则令 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$; 如果 $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, 则令 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$. 这样, 我们就递归的构造出一族满足前述条件的区间. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$, 由定理3.3.2可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. 利用定理3.3.2, 由 f 的连续性及极限不等式, 可得 $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$. 类似的, 也有 $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$. 结合这两方面可知 $f(c) = 0$, 这与假设矛盾! □

推论 3.3.5. *设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是连续函数. 则对任何中间值 v*

$$\min\{f(a), f(b)\} \le v \le \max\{f(a), f(b)\},$$

总存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = v$.

推论 3.3.6. *设 f 是开区间 I 上的连续函数. 则对任何 $a, b \in I$ 以及介于 $f(a), f(b)$ 之间的任何值 v*

$$\min\{f(a), f(b)\} \le v \le \max\{f(a), f(b)\},$$

总存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = v$.

3.3.3 有界性定理与最值定理

定理 3.3.7 (有界性定理)**.** *有界闭区间上的连续函数是有界的. 具体的说, 设 $f \in C([a, b])$, 则存在正实数 M 使得 $|f(x)| \le M, \forall x \in [a, b]$.*

定理 3.3.8 (最大最小值定理)**.** *有界闭区间上的连续函数能取到最大值与最小值. 具体的说, 设 $f \in C([a, b])$, 则存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使得*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

为了证明这两个结果, 我们需要用到如下的

定理 3.3.9 (有限覆盖定理, Borel)**.** *任意给定一族开区间 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. 如果 $[a, b] \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, 则可从这族开区间中选取有限个, 使得它们的并集包含 $[a, b]$.*

证明: 如果能从 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中选出有限个, 使得它们的并集包含 $[c, d]$, 则称 $[c, d]$ 能被 "有限覆盖". 用反证法, 假设 $[a, b]$ 不能被有限覆盖. 我们构造一族闭区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

使得 $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$, 且 $[a_n, b_n]$ 不能被有限覆盖. 为此, 令 $a_1 = a, b_1 = b$. 假设已经构造好 $[a_n, b_n]$, 考虑 $[a_n, b_n] = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cup [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$. 由于 $[a_n, b_n]$ 不能被有限覆盖, $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$

与 $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ 中一定有一个也不能被有限覆盖, 把它记作 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. 这样, 我们就递归的构造出一族满足前述条件的区间. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$, 由定理3.3.2可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. 显然 $c \in [a, b]$, 则存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $c \in U_\alpha$. 设 $U_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, 则 $x_\alpha < c < y_\alpha$. 此即 $x_\alpha < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < y_\alpha$, 从而存在 n 使得 $x_\alpha < a_n < b_n < y_\alpha$. 这样, $[a_n, b_n] \subseteq U_\alpha$, 与 $[a_n, b_n]$ 不能被有限覆盖矛盾! 这就完成了定理的证明. □

定理3.3.7的证明. 取 $\epsilon = 1$, 对每个 $x \in [a, b]$, 由 f 在 x 处连续的定义, 存在 $\delta(x) > 0$, 使得对任何 $y \in N(x, \delta(x)) \cap [a, b]$, 有 $|f(x) - f(y)| < 1$. 令 $U_x = N(x, \delta(x))$, $M_x = \max\{|f(x) - 1|, |f(x) + 1|\}$, 则对任何 $y \in U_x \cap [a, b]$, 有 $|f(y)| < M_x$. 考虑这一族开区间 $\{U_x\}_{x\in[a,b]}$, 注意到

$$[a, b] = \cup_{x\in[a,b]}\{x\} \subseteq \cup_{x\in[a,b]} U_x,$$

利用定理3.3.14, 存在有限个 $x_1, ..., x_n \in [a, b]$, 使得

$$[a, b] \subseteq \cup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

这样, 对任何 $y \in [a, b]$, 存在 $1 \le i \le n$, 使得 $y \in U_{x_i}$, 由前述有

$$|f(y)| \le M_{x_i} \le \max\{M_{x_1}, ..., M_{x_n}\},$$

这就证明 f 在 $[a, b]$ 上有上界 $M = \max\{M_{x_1}, ..., M_{x_n}\}$. □

定理3.3.8的证明. 设 $f \in C([a, b])$, 则由有界性定理可知像集 $f([a, b])$ 有上界, 因而有上确界, 设为 $M = \sup f([a, b])$. 我们来证明 $M \in f([a, b])$. 用反证法, 假设对每个 $x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \neq M$, 则 $f(x) < \frac{f(x)+M}{2}$. 由 f 在 x 处连续, 存在 $\delta(x) > 0$, 使得对任何 $y \in N(x, \delta(x)) \cap [a, b]$, 有 $f(y) < \frac{f(x)+M}{2}$. 令 $U_x = N(x, \delta(x))$, $M_x = \frac{f(x)+M}{2}$, 则对任何 $y \in U_x \cap [a, b]$, 有 $|f(y)| < M_x$. 与定理3.3.7的证明类似, 存在有限个 $x_1, ..., x_n \in [a, b]$, 使得

$$[a, b] \subseteq \cup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

这样, 对任何 $y \in [a, b]$, 有

$$f(y) < \max\{M_{x_1}, ..., M_{x_n}\}.$$

这表明 $M' = \max\{M_{x_1}, ..., M_{x_n}\}$ 是 $f([a, b])$ 的上界, 但 $M' < M$, 这与假设 M 是上确界矛盾! 这就完成了证明. □

注 3.3.10. 从上述证明中我们看到, 有限覆盖定理是从局部构造过渡到整体构造的桥梁.

3.3.4　有关连续函数的整体性质的现代观点

例 3.3.11. 对连续函数 $f:[a,b]\cup[c,d]\to\mathbf{R}$, 介值定理不再成立.

定理 3.3.12 (介值定理的一般形式)**.** *如果 $f:D\to\mathbf{R}$ 是连续函数且 D 是连通的, 则 $f(D)$ 也是连通的.*

例 3.3.13. 对于开区间 $(a,b),(-\infty,a),(b,+\infty)$, 半开半闭区间 $(a,b],[a,b)$ 或者无界闭区间 $(-\infty,a],[b,+\infty)$ 上的连续函数, 有界性定理与最值定理都不再成立. 这表明有界闭区间 $[a,b]$ 与开区间, 半开半闭区间或者无界闭区间有着显著的区别.

定理 3.3.14 (有限覆盖定理, Borel)**.** *任意给定一族开区间 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. 如果 $[a,b]\subseteq\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, 则可从这族开区间中选取有限个, 使得它们的并集包含 $[a,b]$.*

注 3.3.15. 证明的关键是注意到如果点 c 被某个 $U\cap[a,b]$ 盖住, 则 $U\cap[a,b]$ 还会往 c 两边多盖一点 (如果 c 是区间 $[a,b]$ 端点的话, 则 $U\cap[a,b]$ 至少会往一边多盖一点).

定义 3.3.16. 称 $\mathbf{R}$ 的子集 D 是紧致的 (*compact*), 如果对任意一族开区间 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 只要 $D\subseteq\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, 则一定可从这族开区间中选取有限个, 使得它们的并集包含 D.

例 3.3.17. (1) 由定理3.3.14, 有界闭区间 $[a,b]$ 是紧致的.

(2) 开区间 $(a,b),(-\infty,a),(b,+\infty)$, 半开半闭区间 $(a,b],[a,b)$, 无界闭区间 $(-\infty,a],[b,+\infty)$ 都不是紧致的.

定理 3.3.18 (有界性定理, 最值定理的一般形式)**.** *如果 $f:D\to\mathbf{R}$ 是连续函数, D 是紧致的, 则像集 $f(D)$ 也是紧致的.*

3.4　列紧性定理

有限覆盖定理有如下应用.

命题 3.4.1. *设 $X\subset[a,b]$ 是无限集合, 则存在 $x\in[a,b]$, 使得对于 $r>0$, 有 $(B_r(x)\backslash\{x\})\cap X\neq\emptyset$.*

证明*:* 用反证法, 假设对任何 $x\in[a,b]$, 存在它的某个开球邻域 $U_x=B_{r(x)}(x)$, 使得 $U_x\cap(X\backslash\{x\})=\emptyset$, 则有 $|U_x\cap X|\leq 1$. 考虑这族开区间 $\{U_x\}_{x\in[a,b]}$, 它们的并集包含 $[a,b]$, 由有限覆盖定理, 存在有限个点 $x_1,...,x_n\in[a,b]$, 使得

$$[a,b]\subset\cup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

由此可得

$$|X| = |X \cap [a,b]| \le \sum_{i=1}^{n} |X \cap U_{x_i}| \le n,$$

这与 X 是无限集矛盾! $\square$

定理 3.4.2 (有界闭区间的列紧性)**.** 有界闭区间中的任何无穷数列都有收敛到该区间中某点的子序列. 具体地说, 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, 则存在子序列 $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k}$ 存在且属于 $[a,b]$.

证明*:* 令 $X = \{x|存在n使得x_n = x\}$. 如果 X 是有限集, 则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中存在无限多项取同一个值, 由这些项构成的子列收敛, 此时命题成立. 以下假设 X 是无限集合. 由命题3.4.1, 存在 $y \in [a,b]$, 使得对 y 的任何邻域 $B_r(y)$, 有 $B_r(y) \cap (X\backslash\{y\}) \ne \emptyset$. 我们来构造子列 $\{x_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_{i_m} \ne y$ 且 $|x_{i_{m+1}} - y| \le \frac{1}{2}|x_{i_m} - y|$. 为此, 任取 $x_{i_1} \ne y$. 假设已经构造好 $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$, 令

$$d = \frac{1}{2}\min\{|x_j - y| : 1 \le j \le i_k \ 且 x_j \ne y\}.$$

由于 $B_d(y) \cap (X\backslash\{y\}) \ne \emptyset$, 任取 $x_{i_{k+1}} \in B_d(y) \cap (X\backslash\{y\})$. 显然有 $i_{k+1} > i_k$, $x_{i_{k+1}} \ne y$ 且 $|x_{i_{k+1}} - y| \le \frac{1}{2}|x_{i_k} - y|$. 这样, 我们就递归的构造了满足前述条件的子列. 注意到,

$$0 \le |x_{i_n} - y| \le \frac{1}{2^{n-1}}|x_{i_1} - y|,$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{i_n} - y| = 0$, 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = y$. 这就完成了证明.

$\square$

例 3.4.3. 如果把有界闭区间换成开区间, 半开半闭区间或无界闭区间, 则定理3.4.2的结论不再成立.

定理 3.4.4 (Cauchy 收敛准则)**.** 实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是*:* 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $m, n \ge N$, 有 $|x_m - x_n| < \epsilon$.

证明*:* "$\Leftarrow$" 取 $\epsilon = 1$, 由假设可知存在 $N_0 \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $m, n \ge N_0$, 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别的, 有

$$x_{N_0} - 1 \le x_n \le x_{N_0} + 1, \quad \forall n \ge N_0.$$

由此可知

$$\min\{x_1, ..., x_{N_0}, x_{N_0} - 1\} \le x_n \le \max\{x_1, ..., x_{N_0}, x_{N_0} + 1\}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

这表明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的, 由定理3.4.2可知它有收敛的子列, 设为 $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = L$. 我们来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. 为此, 对任何 $\epsilon > 0$, 由假设可知存在 $N \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $m, n \geq N$, 有 $|x_m - x_n| < \epsilon$. 特别的, 对固定的 $n \geq N$, 有

$$|x_n - x_{i_k}| < \epsilon, \quad \forall i_k \geq N,$$

当 $k \to \infty$ 时, 利用极限不等式可得

$$|x_n - L| = \lim_{k\to\infty} |x_n - x_{i_k}| \leq \epsilon.$$

这就验证了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. □

3.4.1 一致连续

定义 3.4.5. 设 f 在区间 I 上有定义. 称 f 在 I 上一致连续, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 则有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

注 3.4.6. 如果 f 在 I 上一致连续, 则 f 在 I 上连续.

例 3.4.7. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但不一致连续.

定理 3.4.8. *设 $f \in C([a,b])$, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.*

证明: 用反证法, 假设存在 $\epsilon > 0$, 对任何 $\delta > 0$, 都存在 $|x - y| < \delta$, 使得 $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. 特别的, 对每个 $\delta = \frac{1}{n}$, 存在 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, 且 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. 这样, 得到无穷数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, 由定理3.4.2可知它有收敛的子序列 $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = x \in [a,b]$. 注意到

$$x_{i_k} - \frac{1}{i_k} < y_{i_k} < x_{i_k} + \frac{1}{i_k}, \quad \forall k,$$

利用夹逼定理可得 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{i_k} = x \in [a,b]$. 最后, 在不等式 $|f(x_{i_k}) - f(y_{i_k})| \geq \epsilon$ 中对 $k \to \infty$ 取极限, 利用 f 的连续性, 可得

$$0 = |f(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{i_k}) - f(y_{i_k})| \geq \epsilon,$$

矛盾! 这就完成了证明. □

3.5 应用

例 3.5.1. 奇数次实系数多项式一定有实根.

例 3.5.2 (不动点定理)**.** 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续函数, 则存在 $x\in[0,1]$ 使得 $f(x)=x$.

例 3.5.3. 设 $f\in C([0,+\infty))$ 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 存在. 证明: 如果存在 x_0 使得 $f(x_0)\geq L$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上有最大值.

证明: 分两种情况讨论. (1) 假设存在 $x_1\in[0,+\infty)$ 使得 $f(x_1)>L$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L<f(x_1)$, 存在 $M>0$, 使得对任何 $x>M$ 有 $f(x)<f(x_1)$. 由最值定理, f 在 $[0,M]$ 上有最大值, 设为 $f(x_2)$. 注意到 $x_1\in[0,M]$, 则 $f(x_1)\leq f(x_2)$. 由此可知对任何 $x>M$, 有 $f(x)<f(x_1)\leq f(x_2)$, 这表明 $f(x_2)$ 是 f 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值. (2) 假设对任何 $x\in[0,+\infty)$ 都有 $f(x)\leq L$, 则 $f(x_0)=L$ 且它是 f 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值. 在上述两种情况下我们都证明了 f 在 $[0,+\infty)$ 上有最大值, 这就完成了证明. □

例 3.5.4. 设 $f\in C([0,+\infty))$ 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 存在. 证明: f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明: 令 $I_1=[0,+\infty), I_2=[0,1)$. 定义映射 $h:I_1\to I_2$ 为 $h(x)=\frac{x}{1+x}$, 它的逆映射为 $h^{-1}(t)=\frac{t}{1-t}$, h 与 h^{-1} 都是连续映射. 考虑复合映射 $g=f\circ h^{-1}:I_2\to\mathbf{R}$, 由 f,h^{-1} 连续可知 $g\in C(I_2)$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 及复合函数的极限定理, 可得 $\lim\limits_{t\to1^-} g(t)=L$. 定义函数 $\widetilde{g}:[0,1]\to\mathbf{R}$ 为

$$\widetilde{g}(t)=\begin{cases} g(t), & \text{如果} t\in[0,1) \\ L, & \text{如果} t=1 \end{cases}$$

则 $\widetilde{g}\in C([0,1])$. 利用定理3.4.8的结论, $\widetilde{g}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 我们以此证明 f 在 I_1 上一致连续. 为此, 对任何 $\epsilon>0$, 由 $\widetilde{g}$ 一致连续的定义, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $|t_1-t_2|<\delta$, 有 $|\widetilde{g}(t_1)-\widetilde{g}(t_2)|<\epsilon$. 注意到, 对任何 $x_1,x_2\in I_1$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 则有

$$|h(x_1)-h(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{(1+x_1)(1+x_2)}<|x_1-x_2|<\delta,$$

由此可得

$$|\widetilde{g}(h(x_1))-\widetilde{g}(h(x_2))|<\epsilon,$$

此即 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$, 这就证明了 f 在 I_1 上一致连续. □

3.6 反函数定理

引理 3.6.1. *设 $f:[x,z]\to\mathbf{R}$ 是连续的单射, 则对任何 $y\in(x,z)$, 或者 $f(x)<f(y)<f(z)$, 或者 $f(x)>f(y)>f(z)$.*

证明*:* 只需在条件 $f(x) < f(z)$ 下证明 $f(x) < f(y) < f(z)$.

如果 $f(y) \le f(x)$, 则 $f(y) < f(x)$(因为 f 单). 注意到 f 是区间 $[y,z]$ 上的连续函数, $f(x)$ 介于 $f(y), f(z)$ 之间, 则由介值定理知存在 $w \in (y,z)$ 使得 $f(w) = f(x)$, 这与 f 是单射矛盾! 所以只能有 $f(x) < f(y)$.

类似的, 如果 $f(y) \ge f(z)$, 则 $f(y) > f(z)$. 注意到 f 是区间 $[x,y]$ 上的连续函数, $f(z)$ 介于 $f(x), f(y)$ 之间, 则由介值定理知存在 $w' \in (x,y)$ 使得 $f(w') = f(z)$, 这与 f 是单射矛盾! 所以只能有 $f(y) < f(z)$.

这样, 我们就在条件 $f(x) < f(z)$ 下证明 $f(x) < f(y) < f(z)$. 类似的, 当 $f(x) > f(z)$ 时有 $f(x) > f(y) > f(z)$. □

命题 3.6.2. *设 $D = [a,b]$或(a,b). 如果 $f : D \to \mathbf{R}$ 是连续的单射, 则 f 严格单调.*

证明*:* (1) 当 $D = [a,b]$ 时, 不妨设 $f(a) < f(b)$. 对区间中的任何两点 $a < x < y < b$, 先对 $a < y < b$ 使用引理可得 $f(a) < f(y) < f(b)$, 再对 $a < x < y$ 引理可得 $f(a) < f(x) < f(y)$. 因此有 $f(a) < f(x) < f(y) < f(b)$, 这表明 f 严格单调递增. 类似的, 当 $f(a) > f(b)$ 时 f 严格单调递减.

(2) 当 $D = (a,b)$ 时, 对任何正整数 $n > \frac{2}{b-a}$, 令 $D_n = [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, 则已经证明了 f 在 D_n 上严格单调. 注意到

$$D_N \subseteq D_{N+1} \subseteq D_{N+2} \subseteq ..., \quad \text{其中} N = [\frac{2}{b-a}] + 1,$$

则 f 在所有 D_n 上有相同的单调性. 而 $\cup_n D_n = (a,b)$, 所以 f 在 (a,b) 上严格单调.

□

总结一下, 我们证明了如下定理.

定理 3.6.3. *设 $D = [a,b]$或(a,b), $f : D \to \mathbf{R}$ 是连续映射, 则*

$$f\text{有反函数} \iff f\text{单} \iff f\text{严格单调}.$$

在上述条件下, f 有反函数 $f^{-1} : f(D) \to D$. 一个自然的问题是:

问题 3.6.4. *f^{-1} 的定义域是什么? f^{-1} 是否连续?*

定理 3.6.5 (反函数定理)**.** *设 $D = [a,b]$ 或 (a,b), $f : D \to \mathbf{R}$ 是连续映射, 则*

(1) *f有反函数 $\iff$ f单 $\iff$ f严格单调.*

(2) *如果上述条件成立, 则当 $D = [a,b]$ 时, f 的值域为有界闭区间 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$; 当 $D = (a,b)$ 时, f 的值域为如下四种区间之一: (m,M), $(-\infty, M)$, $(m, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.*

(3) *如果上述条件成立, 则 f 的反函数 $f^{-1} : f(D) \to D$ 是连续函数.*

例 3.6.6 (幂函数). (1) 当 $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ 时, 定义 x^α 为 α 个 x 的乘积. 此时幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(2) 当 $\alpha = 0$ 时, 定义 $x^\alpha \equiv 1, \forall x \neq 0$. 此时幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上的连续函数.

(3) 当 $\alpha \in \mathbf{Z}_-$ 时, 定义 $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}, \forall x \neq 0$, 此时幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上的连续函数.

(4) 当 $\alpha = \frac{1}{k}, k \in \mathbf{Z}_+$ 时, 考虑函数 $f(x) = x^k$, 容易证明 $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是严格单调递增的连续函数, 由反函数定理可知它有连续的反函数, 记作 $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{k}}$. 此时幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ 上的连续函数.

(5) 当 $\alpha = \frac{m}{n}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}_+$ 时, 定义 $x^\alpha = (x^{\frac{1}{n}})^m, \forall x > 0$. 此时幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数.

(6) 当 α 是无理数时, 取一个单调递增的有理数列 $\{a_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 则定义

$$x^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^{a_n}.$$

不难验证上述定义是良好的, 且幂函数 x^α 是 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数.

例 3.6.7 (单调性). (1) 如果 $x > 1$, 则对任何实数 $\alpha < \beta$, 有 $x^\alpha < x^\beta$.

(2) 设 $\alpha > 0$, 则对任何 $0 < x < y$, 有 $x^\alpha < y^\alpha$.

例 3.6.8 (对数函数). 考虑 $f(x) = e^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, 它有连续的反函数 $f^{-1}(x) = \ln x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, 称为对数函数.

例 3.6.9 (反三角函数). $f(x) = \sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ 是严格单调递增的连续函数, 由反函数定理知它有连续的反函数, 记作 $f^{-1}(x) = \arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

类似的可定义其他反三角函数.

3.7 无穷小量与无穷大量

例 3.7.1. 当 $x \to 0$ 时, 有

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

例 3.7.2. 给定正整数 k. 当 $x \to 0$ 时, 有

$$(1+x)^k - 1 \sim kx, \quad (1+x)^{1/k} - 1 \sim \frac{1}{k}x.$$

例 3.7.3. 当 $x \to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x.$$

例 3.7.4. 当 $x \to +\infty$ 时, $\ln x, x^\alpha(\alpha > 0), a^x(a > 1)$ 都是无穷大, 其中 $\ln x$ 的阶最低, a^x 的阶最高.

第四章　导数与微分

4.1　导数

4.1.1　Motivation

问题 4.1.1 (曲线的切线)**.** *求曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线 L.*

在 P_0 附近取一点 $P(x_0 + h, f(x_0 + h))$, 则割线 P_0P 给出 L 的近似. 当 h 越来越接近 0 时, 上述割线给出越来越好的近似. 这启发人们定义 L 为 $\lim\limits_{h\to 0} P_0P$. 特别的, L 的斜率为

$$k_L = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

L 的方程为 $y - f(x_0) = k_L(x - x_0)$.

问题 4.1.2 (质点的速度)**.** *设质点在直线上运动, t 时刻质点位于点 $x(t)$. 如何描述 t_0 时刻质点运动的快慢程度?*

时间间隔 $[t_0, t_0 + h]$ 内质点运动的平均速度为 $\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$. 当 h 越来越接近 0 时, 上述平均速度越来越准确的描述了质点在 t_0 时刻的运动快慢程度, 因此物理学中定义 t_0 时刻的瞬时速度为 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$.

4.1.2　导数的定义

定义 4.1.3. 设 f 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称 f 在 x_0 处可导, 并把上述极限称为 f 在 x_0 处的导数 (*derivative*), 记作 $f'(x_0)$ 或者 $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$.

注 4.1.4 (导数的几何意义)**.** $f'(x_0)$ 描述了在 x_0 处 f 随 x 的变化率. 具体的说, 函数图像 $\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in D\}$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率为 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

注 4.1.5. (1) 如果 f 只在 x_0 的一侧有定义, 则可定义单侧导数

$$f'_-(x_0) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f'_+(x_0) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(2) f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处左右导数都存在且相等.

定义 4.1.6 (导函数)**.** 如果 f 在 (a,b) 内每一点处都可导, 则称 f 是区间 (a,b) 上的可导函数. 此时, 如下对应

$$(a,b) \ni x \to f'(x) \in \mathbf{R},$$

定义了 (a,b) 上的一个函数, 称为 f 的导函数, 记作 f'.

例 4.1.7. (1) 常值函数, $c' = 0$.

(2) 多项式函数, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(3) 指数函数, $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln a$.

(4) 三角函数, $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$.

(5) 对数函数, $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$.

命题 4.1.8 (可导一定连续)**.** *如果 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.*

注 4.1.9 (连续不一定可导)**.** $f(x) = |x|$.

4.2 导函数的计算方法

定理 4.2.1 (四则运算)**.** *设 f, g 在 x_0 处可导, 则*

(1) $f+g$ 在 x_0 处可导, 且 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(2) $f \cdot g$ 在 x_0 处可导, 且 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(3) 如果 $g'(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且 $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

推论 4.2.2 (导函数的四则运算法则)**.** *(1) $(f+g)' = f' + g'$.*

(2) Leibniz 法则 $(fg)' = f'g + fg'$.

(3) 在 $g(x) \neq 0$ 处, 有 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

推论 4.2.3. $(f_1f_2...f_n)' = f_1'f_2...f_n + f_1f_2'...f_n + ... + f_1f_2...f_n'$.

例 4.2.4. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

例 4.2.5. 设 $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, 则 $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. 如果 $P(x)$ 能分解成 $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, 则

$$P'(x) = P(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - x_i}.$$

4.3　复合函数的导数

定理 4.3.1 (复合函数的导数)**.** *如果 f 在 x_0 处可导, g 在 $f(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处可导, 且导数为 $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

证明: (a) 由 $g'(f(x_0))$ 的定义可知, 对任何 $\epsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得:

$$|\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} - g'(f(x_0))| < \epsilon_1, \quad \forall 0 < |y - f(x_0)| < \delta_1,$$

则有

$$|y - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))\cdot(y - f(x_0))| \le \epsilon_1 \cdot |y - f(x_0)|. \tag{4.1}$$

(b) f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续. 特别的, 对给定的 $\delta_1 > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1, \tag{4.2}$$

结合 (1), (2) 两式子可得, 对任何 $|x - x_0| < \delta_2$ 有:

$$|g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))\cdot(f(x) - f(x_0))| \le \epsilon_1 \cdot |f(x) - f(x_0)|. \tag{4.3}$$

(c) 由 $f'(x_0)$ 的定义可知, 对任何 $\epsilon_2 > 0$, 存在 $\delta_3 > 0$, 使得

$$|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)| < \epsilon_2, \quad \forall 0 < |x - x_0| < \delta_3,$$

则有

$$|x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0)| \le \epsilon_2 \cdot |x - x_0|. \tag{4.4}$$

结合 (3), (4) 两式子可得, 对任何 $|x-x_0|<\min(\delta_2,\delta_3)$ 有:

$$\begin{aligned}
&|g(f(x))-g(f(x_0))-g'(f(x_0))f'(x_0)\cdot(x-x_0)|\\
\le&|g(f(x))-g(f(x_0))-g'(f(x_0))\cdot(f(x)-f(x_0))|+|g'(f(x_0))|\cdot|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)|\\
\le&\epsilon_1\cdot|f(x)-f(x_0)|+|g'(f(x_0))|\cdot\epsilon_2\cdot|x-x_0|\\
\le&\epsilon_1\cdot(\epsilon_2+|f'(x_0)|)\cdot|x-x_0|+|g'(f(x_0))|\cdot\epsilon_2\cdot|x-x_0|,
\end{aligned}$$

所以, 对任何 $0<|x-x_0|<\min(\delta_2,\delta_3)$, 有

$$|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}-g'(f(x_0))f'(x_0)|\le\epsilon_1(\epsilon_2+|f'(x_0)|)+|g'(f(x_0))|\epsilon_2. \tag{4.5}$$

(d) 对任何 $\epsilon>0$, 选取 $\epsilon_2=\frac{\epsilon}{2|g'(f(x_0))|+1}$, 由 (c) 确定 δ_3. 再选取 $\epsilon_1=\frac{\epsilon}{2(\epsilon_2+|f'(x_0)|)}$, 由 (a) 确定 δ_1, 再由 (b) 确定 δ_2. 最后取 $\delta=\min(\delta_2,\delta_3)$, 则 (5) 表明: 对任何 $0<|x-x_0|<\delta$, 有

$$|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}-g'(f(x_0))f'(x_0)|<\epsilon,$$

这就证明了 $g\circ f$ 在 x_0 处可导, 且导数为 $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

推论 4.3.2 (复合函数求导的锁链法则, *chain rule*)**.** *如果 $f:(a,b)\to(c,d), g:(c,d)\to\mathbf{R}$ 都是可导函数, 则 $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$.*

推论 4.3.3. *设 $f_1,...,f_n$ 都是可导函数, 则*

$$(f_n\circ f_{n-1}\circ...\circ f_1)'(x)=f_n'(f_{n-1}f_{n-2}...(x))\cdot f_{n-1}'(f_{n-2}...(x))\cdot...\cdot f_2'(f_1(x))\cdot f_1'(x).$$

例 4.3.4. x^α, $\ln|x|$, $\ln|f|$, $u(x)^{v(x)}$ 的导函数.

4.4 微分

Leibniz 用记号 $\frac{df}{dx}$ 表示导数, 他希望赋予 df, dx 意义 (并称之为微分), 使得导数 $f'(x)$ 是两者的商 (称之为微商).

回忆导数的定义.

$$
\begin{aligned}
& f\text{在}x_0\text{处可导} \\
\Longleftrightarrow\ & \text{极限} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\text{存在} \\
\Longleftrightarrow\ & \text{存在实数}A,\text{使得} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A \\
\Longleftrightarrow\ & \text{存在实数}A,\text{使得} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0, \\
\Longleftrightarrow\ & \text{存在实数}A,\text{使得}f(x_0+h)=f(x_0)+A\cdot h+\alpha(h),\text{且} \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0.
\end{aligned}
$$

粗略的说, 可以把上述最后那个断言叙述成: 在 $h=0$ 的某个邻域内, $f(x_0+h)$ 可以表示成某个一次函数 $f(x_0)+A\cdot h$ 与某个误差项 $\alpha(h)$ 的和, 且 (当 h 趋近于 0 时) 误差项 $\alpha(h)$ 与 h 相比非常小 (因为要求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h}=0$).

更加粗略的说, 即在 $h=0$ 附近, 可以用某个一次函数 $f(x_0)+A\cdot h$ 逼近 $f(x_0+h)$. 或者等价的说: 在 x_0 附近, 可以用某个一次函数 $f(x_0)+A\cdot(x-x_0)$ 逼近 $f(x)$.

定义 4.4.1. 称映射 $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是线性映射 (*linear map*), 如果

$$L(x+y)=L(x)+L(y),\quad L(k\cdot x)=k\cdot L(x),\forall x,y\in\mathbf{R},\forall k\in\mathbf{R}.$$

L 可以表示成: $L(x)=Ax$, 其中系数 A 表示 L 伸缩的倍数.

定义 4.4.2 (可微, 微分)**.** 设 f 在 x_0 的某个邻域内有定义. 称 f 在 x_0 处可微 (*differentiable*), 如果存在线性映射

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R},$$

$$h\to A\cdot h,$$

使得在 $h=0$ 的某个邻域中 $f(x_0+h)=f(x_0)+A\cdot h+\alpha(h)$, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h}=0$.

称这个线性映射为 f 在 x_0 处的微分 (*differential*), 记作 $df_{x_0}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

命题 4.4.3. *f 在 x_0 处可微当且仅当 f 在 x_0 处可导, 且微分为 $df_{x_0}(h)=f'(x_0)h$.*

注 4.4.4. 粗略的说, 所谓 f 在 x_0 处可微是指 f 在 x_0 附近可以用一次函数近似:

$$f(x)\sim f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0),\quad (\text{在}x=x_0\text{附近})$$

$$f(x_0+h)\sim f(x_0)+f'(x_0)\cdot h,\quad (\text{在}h=0\text{附近})$$

一次 (线性) 项系数为 $f'(x_0)$, 反映了 f 在 x_0 处伸缩的倍数. 因此, 人们经常说 "微分就是线性近似".

定义 4.4.5. 如果 f 在 (a,b) 上处处可微, 则每点处的微分给出一族线性映射 $\{df_x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}_{x\in(a,b)}$, 称这一族线性映射为 f 在 (a,b) 上的微分, 并记作 df.

例 4.4.6. 恒同映射 $Id : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的微分为 $d(Id)_x(h) = h$. 人们经常把恒同函数 Id 写作函数 x, 对应的将其微分记作 dx. 在这种记号下, $dx_x(h) = h, \forall h \in \mathbf{R}$.

例 4.4.7. 设 f 处处可微, 则它的微分 df 为 $df_x(h) = f'(x)h, \forall h \in \mathbf{R}$.

从上面两个例子可以看出, f 的微分与恒同函数 x 的微分有如下关系:

$$df_x = f'(x) \cdot dx_x, \quad \forall x \in D,$$

其中 D 是定义域. 略去 x, 则可写作: $df = f'(x) \cdot dx$. 换句话说, f 的导函数处处可以表示成微分的商:

$$f'(x) = \frac{df_x}{dx_x},$$

或者略去 x, 有 $f' = \frac{df}{dx}$, 这就实现了 Leibniz 的愿望.

4.4.1 微分保持函数的复合

定理 4.4.8 (复合函数的微分等于微分的复合)**.** *设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在 x 处可微, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在 $f(x)$ 处可微. 则 $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 在 x 处可微, 且有*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

证明: 由定义, 设在 x 附近有

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h),$$

设在 $f(x)$ 附近有

$$g(f(x)+v) = g(f(x)) + Bv + \beta(v),$$

其中 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\alpha(h)}{h} = 0$, $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\beta(v)}{v} = 0$. 所以在 x 附近有

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+h) =& g(f(x) + Ah + \alpha(h)) = g(f(x)) + B(Ah + \alpha(h)) + \beta(Ah + \alpha(h)) \\ =& g(f(x)) + BAh + B\alpha(h) + \beta(Ah + \alpha(h)).\end{aligned}$$

我们断言

$$\lim_{h\to 0} \frac{B\alpha(h) + \beta(Ah + \alpha(h))}{h} = 0,$$

这表明 $g \circ f$ 在 x 处可微, 且 $d(g \circ f)_x(h) = BAh = dg_{f(x)} \circ df_x(h)$.

只需证明 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{B\alpha(h)}{h} = 0$ 与 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\beta(Ah + \alpha(h))}{h} = 0$. 前者是显然的, 下面我们来证明后者.

(1) 由于 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h}=0$, 存在 δ_0 使得对任何 $0<|h|<\delta_0$, 有 $|\alpha(h)|<|h|$, 从而

$$|Ah+\alpha(h)|<(|A|+1)|h|,\quad \forall 0<|h|<\delta_0.$$

(2) 由于 $\lim_{v\to 0}\dfrac{\beta(v)}{v}=0$, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 δ_1 使得: 对任何 $0<|v|<\delta_1$ 都有 $|\beta(v)|<\epsilon|v|$. 因此

$$|\beta(v)|\le\epsilon|v|,\quad \forall|v|<\delta_1.$$

取 $\delta=\min(\delta_0,\frac{\delta_1}{|A|+1})$, 则对任何 $0<|h|<\delta$, 由 (1) 知 $|Ah+\alpha(h)|<\delta_1$, 再由 (2) 得:

$$|\beta(Ah+\alpha(h))|\le\epsilon|Ah+\alpha(h)|\le\epsilon(|A|+1)|h|,$$

这就验证了 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\beta(Ah+\alpha(h))}{h}=0$. □

注 4.4.9. 可以把上述定理粗略的解释成: 如果 f 在 x_0 处可以线性近似成 L, g 在 $f(x_0)$ 处可以线性近似成 L', 则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处可以线性近似成 $L'\circ L$. 更进一步, 人们叙述成:

$$\boxed{\text{线性近似 (这种操作) 保持映射的复合.}}$$

例 4.4.10 (*Chain rule*)**.** 把微分的具体表达式代入上述定理, 可得:

$$(g\circ f)'(x_0)\cdot h=d(g\circ f)_{x_0}(h)=(dg_{f(x_0)}\circ df_{x_0})(h)=g'(f(x_0))f'(x_0)\cdot h,\quad \forall h\in\mathbf{R},$$

这就是求导的 *Chain rule*: $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$. 现在我们对此有了直观的解释: f 在 x_0 处伸缩了 $f'(x_0)$ 倍, g 在 $f(x_0)$ 处伸缩了 $g'(f(x_0))$ 倍, 则 $g\circ f$ 在 x_0 处伸缩了 $g'(f(x_0))f'(x_0)$ 倍.

当然, 更早前人们采用更加朴素或更加形式化的解释. 令 $y=f(x)$, 它是 x 的函数; 令 $z=g(y)$, 它是 y 的函数. 结合这两点, 可以把 z 视为 x 的函数: $z=g(f(x))$. 粗略的说,

$$(g\circ f)'(x)=\lim\frac{\Delta z}{\Delta x},\quad g'(y)=\lim\frac{\Delta z}{\Delta y},\quad f'(y)=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

可以期望有如下关系:

$$\lim\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\lim\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

此即 *Chain rule*. 基于这个解释, 人们也把 *Chain rule* 写作:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}=\frac{dz}{d(\text{中间变量})}\cdot\frac{d(\text{中间变量})}{dx}.$$

但我们倾向于认为: 利用微分 (或线性近似或伸缩倍数) 给出的解释更加直观.

4.5　反函数的导数

设 $D=[a,b]$ 或 (a,b), $f:D\to\mathbf{R}$ 是连续的单射, 我们证明了 f 有连续的反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$.

问题 4.5.1. *如果 f 可导, 它的反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 是否可导? 如何计算反函数的导函数?*

定理 4.5.2 (反函数的导数)**.** *设 $f:(a,b)\to(c,d)$ 是连续的一一对应 (既单且满). 如果 f 在点 x_0 可导且 $f'(x_0)\neq 0$, 则 f^{-1} 在点 $f(x_0)$ 处可导, 且有*

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

证明: 等价于证明极限 $\lim\limits_{y\to f(x_0)}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)}$ 存在且等于 $\frac{1}{f'(x_0)}$. 定义函数 $g(x)=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$, 则 g 在 x_0 的某个去心邻域中有定义. 注意到如下事实:

(1) 由反函数定理知 f^{-1} 是连续映射, 从而有 $\lim\limits_{y\to f(x_0)}f^{-1}(y)=x_0$.

(2) 由于 f 在 x_0 处可导且导数非零, 则

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

(3) 当 $y\neq f(x_0)$ 时, $f^{-1}(y)\neq x_0$.

这样, 由复合函数的极限定理可得:

$$\lim_{y\to f(x_0)}g\circ f^{-1}(y)=\frac{1}{f'(x_0)},$$

此即 $\lim\limits_{y\to f(x_0)}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, 这就完成了证明.

□

推论 4.5.3. *设 f 有反函数 f^{-1}. 如果 f 是可导函数, 则在 $f'(x)\neq 0$ 处有*

$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)},$$

换而言之, 在 $f'(f^{-1}(x))\neq 0$ 处有

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

例 4.5.4. $\arcsin' x=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $x\in(-1,1)$.

$\arccos' x=\frac{1}{\cos'(\arccos x)}=\frac{1}{-\sin(\arccos x)}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $x\in(-1,1)$.

$\arctan' x=\frac{1}{\tan'(\arctan x)}=\cos^2(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}$, 其中 $x\in\mathbf{R}$.

4.6 高阶导数

求导运算

$$D: \{\text{可导函数}\} \to \{\text{函数}\},$$

$$f \to f',$$

满足如下性质:

(1) $D(f+g) = D(f) + D(g)$.

(2) Leibniz 法则 $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

(3) $D(c) = 0$, 其中 c 表示取值为 c 的常值函数.

如果 f 处处可导, 则可以考虑导函数 f' 的导数, 称为 f 的二阶导数. 依此可以递归的定义高阶导数.

定义 4.6.1. 定义 f 的 0 阶导函数为 $f^{(0)} = f$. 设 f 已有 $(n-1)$ 阶导函数 $f^{(n-1)}$, 如果 $f^{(n-1)}$ 在 x_0 处可导, 则令 $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$, 称之为 f 在 x_0 处的 n 阶导数.

如果 f 在 D 上处处有 n 阶导数, 则称由对应 $x \to f^{(n)}(x)$ 给出的函数为 f 的 n 阶导函数, 记作 $f^{(n)}$ 或 $\frac{d^n f}{dx^n}$.

定义 4.6.2. 如果 f 在 D 上的高阶导数 $f^{(1)}, ..., f^{(k)}$ 都存在且连续, 则称 f 是 D 上的 C^k 光滑函数, 记作 $f \in C^k(D)$.

如果 f 在 D 上的各个高阶导数 $f^{(1)}, f^{(2)}...$, 都存在且连续, 则称 f 是 D 上的 C^∞ 光滑函数, 简称为光滑函数, 记作 $f \in C^\infty(D)$.

例 4.6.3. 求 $a^x, e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, x^\alpha, \log_a |x|, \ln |x|$ 的高阶导数.

命题 4.6.4 (Leibniz 公式)**.** $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$.

例 4.6.5. $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的高阶导数.

例 4.6.6. 设 $f(x) = \arctan x$, 计算 $f^{(n)}(0)$.

第五章　一元函数微分学

5.1　微分中值定理

定义 5.1.1. 设 f 在 x_0 的某个开球邻域内有定义. 称 x_0 是 f 的局部极小值点, 如果存在 $r > 0$ 使得

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in N(x_0, r).$$

类似的, 可以定义局部极大值点. 把局部极小值点与局部极大值点统称为局部极值点.

定理 5.1.2 (Fermat)**.** *设 x_0 是 f 的局部极值点. 如果 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.*

证明: 不妨设 x_0 是 f 的局部极小值点. 由极限不等式, 可得

$$f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

由于 $f'(x_0) = f'(x_0-) = f'(x_0+)$, 故 $f'(x_0) = 0$. □

注 5.1.3. 如果 f 可导, 则称满足方程 $f'(x) = 0$ 的点为 f 的临界点 (*critical point*). Fermat 定理说如果 f 可导, 则局部极值点一定是临界点.

定理 5.1.4 (Rolle's theorem)**.** *设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可导. 如果 $f(a) = f(b)$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$.*

证明: 由最值定理, 连续函数 f 在 $[a, b]$ 上有最大值与最小值. 如果最大值点与最小值点都在区间 $[a, b]$ 的端点, 由 $f(a) = f(b)$ 可知 f 是常值函数, 此时 f' 在 (a, b) 上恒等于零; 如果 f 有一个最值点 x_0 位于区间内部 (a, b), 则 x_0 是 f 的极值点, 由定理5.1.2可得 $f'(x_0) = 0$. 这样, 在每种情况下都存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$. □

例 5.1.5. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导. 如果 $f(x)$ 有 m 个不同的零点, 则 $f'(x)$ 至少有 $(m - 1)$ 个不同的零点.

证明: 设 $x_1 < ... < x_m$ 是 f 的零点. 对每个 $1 \le i \le m-1$, $f(x_i) = f(x_{i+1})$, 由罗尔定理 (定理5.1.4) 可知存在 $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ 使得 $f'(y_i) = 0$. 这样, $y_1 < ... < y_{m-1}$ 就是 f' 的 $(m-1)$ 个不同的零点. □

例 5.1.6. 给定实数 $a_1 < a_2 < ... < a_n$, 令 $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$. 由罗尔定理 (定理5.1.4), 对每个 $i = 1, ..., n-1$, 存在 $b_i \in (a_i, a_{i+1})$ 使得 $f'(b_i) = 0$. 这样, $f'(x)$ 就有 $(n-1)$ 个互不相同的实数根 $b_1 < ... < b_{n-1}$, 从而有

$$f'(x) = n(x-b_1)...(x-b_{n-1}).$$

由此可得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\binom{n}{1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} b_i}{\binom{n-1}{1}},$$
$$\frac{\sum_{1\le i<j\le n} a_i}{\binom{n}{2}} = \frac{\sum_{1\le i<j\le n-1} b_i b_j}{\binom{n-1}{2}},$$
$$......$$
$$\frac{\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{n-1}\le n} a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_{n-1}}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{b_1 b_2 ... b_{n-1}}{\binom{n-1}{n-1}}.$$

在此基础上, 利用归纳法及算术-几何平均不等式可证明如下的不等式

$$\sqrt[k-1]{\frac{\sum_{i_1<...<i_{k-1}} a_{i_1}...a_{i_{k-1}}}{\binom{n}{k-1}}} \ge \sqrt[k]{\frac{\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1}...a_{i_k}}{\binom{n}{k}}}, \quad \forall k = 2, ..., n.$$

定理 5.1.7 (微分中值定理, Lagrange 中值定理)**.** *设 $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明: 定义函数

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right),$$

则 $g(a) = g(b) = 0$, 由罗尔定理 (定理5.1.4) 可知, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即有 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

注 5.1.8. (1) 如果用几何的语言, 则 Lagrange 中值定理可以叙述成: f 的图像上存在一点, 使得该点处的切线平行与端点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的连线. 如果用物理的语言, 则 Lagrange 中值定理可以叙述成: 质点在直线上运动, 则平均速度一定等于某个时刻的瞬时速度.

(2) 我们经常把 Lagrange 中值定理的结论写成: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a),$$

它把 f 的改变量 $f(b)-f(a)$ 与 f 在某点处的导数联系起来.

推论 5.1.9. *设 $f \in C([a,b])$ 且在 (a,b) 上导数处处为 0, 则 f 在 $[a,b]$ 上是常值函数.*

推论 5.1.10. *设 f,g 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果它们的导数在 (a,b) 上处处相等, 则 $f-g$ 是常值函数.*

推论 5.1.11 (判断函数的单调性)**.** *设 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导. 如果*

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a,b),$$

则 f 在 $[a,b]$ 上递增. 如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a,b),$$

则 f 在 $[a,b]$ 上严格递增.

命题 5.1.12. *设 $x>0$, 则 $\frac{1}{x+1} < \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$.*

例 5.1.13. 函数 $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增.

例 5.1.14. 定义数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Euler 证明了 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的. 人们把上述数列的极限 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n\right)$ 称为 Euler 常数, 约等于 0.5772156649.

定理 5.1.15 (Cauchy 中值定理)**.** *设 f,g 都在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得*

$$g'(\xi)\cdot(f(b)-f(a)) = f'(\xi)\cdot(g(b)-g(a)).$$

更进一步, 如果对任何 $t \in (a,b)$ 都有 $g'(t) \neq 0$, 则 $g(a) \neq g(b)$, 因此可以把上述等式写成:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明: 对函数

$$h(x) := (f(x)-f(a))\cdot(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))\cdot(g(x)-g(a))$$

使用 Rolle's theorem. □

注 5.1.16. 当 $g'(t)$ 处处非零时, 我们可以按如下方式理解 Cauchy 中值定理. 此时, 由 Rolle's theorem 知 g 是单射, 再由反函数的导数定理可知 g 有可导的反函数 g^{-1}. 考虑映射 $f\circ g^{-1}$, 对它使用 Lagrange 中值定理, 可知存在 c 严格介于 $g(a),g(b)$ 之间, 使得:

$$\frac{f\circ g^{-1}(g(b))-f\circ g^{-1}(g(a))}{g(b)-g(a)}=(f\circ g^{-1})'(c)=f'(g^{-1}(c))\frac{1}{g'(g^{-1}(c))},$$

令 $\xi=g^{-1}(c)$, 此即 Cauchy 中值定理.

5.2 洛必达（L'Hopital）法则

定理 5.2.1 ($\frac{0}{0}$ 型洛必达法则)**.** *设 f,g 在 a 的某个去心邻域上处处可导, g' 在该邻域中处处非零. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(a)=0$. 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在, 且有*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注 5.2.2. 还有很多其他版本的洛必达法则.

(1) 设 f,g 在 $(a,a+r)$ 上可导, g' 处处非零, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$. 如果 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) 对左极限 $\lim\limits_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}$ 有类似的结论.

(3) 设 f,g 在某个 $\mathbf{R}\backslash[-A,A]$ 上可导, g' 处处非零, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

使用洛必达法则计算极限, 要依照如下顺序:

(1) 验证 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(a)=0$, 从而是 $\frac{0}{0}$ 型的.

(2) 验证极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在.

(3) 由洛必达法则得到 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

例 5.2.3. 设 $x_1,...,x_n;\alpha_1,...,\alpha_n$ 是给定的正实数, 且 $\alpha_1+...+\alpha_n=1$. 则有

$$\lim_{t\to 0}(\alpha_1x_1^t+...+\alpha_nx_n^t)^{1/t}=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}.$$

事实上, 由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\alpha_1 x_1^t+...+\alpha_n x_n^t)}{t}\\=&\lim_{t\to 0}\frac{\alpha_1 x_1^t\ln x_1+...+\alpha_n x_n^t\ln x_n}{\alpha_1 x_1^t+...+\alpha_n x_n^t}\\=&\ln(x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}).\end{aligned}$$

函数 $g(y)=e^y$ 处处连续, 利用复合函数的极限定理, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}(\alpha_1 x_1^t+...+\alpha_n x_n^t)^{1/t}\\=&\lim_{t\to 0}\exp(\frac{\ln(\alpha_1 x_1^t+...+\alpha_n x_n^t)}{t})\\=&\exp(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\alpha_1 x_1^t+...+\alpha_n x_n^t)}{t})\\=&x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

例 5.2.4. 对 $\frac{0}{0}$ 型的极限, 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 我们不能断言 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在. 例如, 令

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 0, & \text{如果}x=0,\end{cases}$$

令 $g(x)=x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

定理 5.2.5 ($\frac{?}{\infty}$ **型洛必达法则**)**.** *设 f,g 在 $(a,a+r)$ 上可导, g' 处处非零, $\lim\limits_{x\to a+}|g(x)|=+\infty$. 如果 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

证明: 设 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 则对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 使得:

$$|\frac{f'(y)}{g'(y)}-A|<\epsilon,\quad \forall a<y<a+\delta_1.$$

取 $c=a+\delta_1$, 则由 Cauchy 中值定理知对任何 $a<x<c$, 存在 $\xi_x\in(x,c)$, 使得:

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

因此有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(x)}+\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{5.1}$$

由于 $\lim_{x\to a+}|g(x)|=+\infty$, 存在 $\delta_2>0$ 使得:

$$|\frac{f(c)}{g(x)}|<\epsilon,\quad |\frac{g(c)}{g(x)}|<\epsilon,\quad \forall a<x<a+\delta_2.$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则对任何 $a<x<a+\delta$, 有:

$$\begin{aligned}|\frac{f(x)}{g(x)}-A|\le&|\frac{f(c)}{g(x)}|+|(1-\frac{g(c)}{g(x)})(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}-A)|+|\frac{g(c)}{g(x)}A|\\<&\epsilon+(1+\epsilon)\epsilon+|A|\epsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

□

例 5.2.6. 给定 $\alpha>0$, 则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

例 5.2.7. 给定 $q>1$, 则对任何实数 α, 有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{q^x}=0$.

例 5.2.8. 设 f 处处可导, 且 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在, 则有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)$.

例 5.2.9. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$.

5.3 带 Peano 余项的 Taylor 公式

回忆可导 (可微) 的定义. 如果 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 附近可用一次函数逼近:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x),$$

其中 α 满足 $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{x-x_0}=0$, 是比 1 次更小的误差项 (当 $x\to x_0$) 时.

为了叙述方便, 人们引入如下的术语.

定义 5.3.1. 设 g 在 x_0 的某个去心邻域内有定义, 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^n}=0$, 则称当 $x\to x_0$ 时, g 是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小, 记作

$$g(x)=o((x-x_0)^n),\quad 当x\to x_0时.$$

这样, f 在 x_0 处可导 (严格的说, 可微) 可以叙述成:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\quad 当x\to x_0时.$$

问题 5.3.2. 能否用高次多项式逼近 f? 具体的说, 是否存在 n 次多项式 $P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_n(x - x_0)^n$ 使得:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n), \quad \text{当} x \to x_0 \text{时?}$$

为此, 需要 (1) 确定各个系数; (2) 证明上式成立.

命题 5.3.3 (多项式逼近的唯一性)**.** 如果存在多项式 $P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_n(x - x_0)^n$ 使得:

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n), \quad \text{当} x \to x_0 \text{时}.$$

则满足上述条件的多项式 P 是唯一的.

证明: $c_0, c_1, ..., c_n$ 由如下公式给出:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \lim_{x \to x_0} f(x), \\
c_1 &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}, \\
&\ldots\ldots \\
c_n &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (c_0 + ... + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n}.
\end{aligned}$$

□

利用这个命题及洛必达法则可知:
(1) 如果 f 在 x_0 处连续, 则 $c_0 = f(x_0)$.
(2) 如果 f 在 x_0 处可导, 则 $c_1 = f^{(1)}(x_0)$.
(3) 如果 f 在 x_0 处有 2 阶导数, 则 $c_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$.
......
(n) 如果 f 在 x_0 处有 n 阶导数, 则 $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

推论 5.3.4 (局部 Taylor 展开的唯一性)**.** 设 f 在 x_0 处有 n 阶导数, 如果常数 $c_0, ..., c_n$ 满足

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad \text{当} x \to x_0 \text{时}.$$

则有

$$c_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

定理 5.3.5 (带 Peano 余项的 Taylor 公式, n 阶局部 Taylor 公式)**.** 设 f 在 x_0 处有 n 阶导数, 则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad \text{当} x \to x_0 \text{时}.$$

证明*:* 连续使用 $(n-1)$ 次洛必达法则, 再用 $f^{(n)}(x_0)$ 的定义, 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}\\
=&\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1})}{(x-x_0)^n}\right)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\\
=&\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(1)}(x)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}i(x-x_0)^{i-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\right)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\\
=&......\\
=&\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n...2(x-x_0)}\right)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\\
=&\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\\
=&0.
\end{aligned}
$$

□

例 5.3.6. 如果 f 在 $x=0$ 处有 n 阶导数, 则

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$$

人们经常把 $x=0$ 处的 Taylor 公式称为 MacLaurin 公式.

例 5.3.7. 求如下函数在 $x=0$ 处的局部 Taylor 公式.

(1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$

(2) $a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+...+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$

(3) $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2}),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$

(4) $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+...+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$

(5) $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$

引入记号 $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$, 则

$$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+...+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$$

例如, 分别取 $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 可得

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + ... + (-1)^n x^n + o(x^n), \quad 当x \to 0时.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n + o(x^n), \quad 当x \to 0时.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^3 + ... + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n + o(x^n), \quad 当x \to 0时.$$

(6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad 当x \to 0时.$

例 5.3.8. 定义函数 $f : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & 如果x \neq 0 \\ e, & 如果x = 0. \end{cases}$$

其中 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n$. 计算 $f'(0)$, $f''(0)$.

解答. (1) 利用洛必达法则进行计算, 可得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}{1} \\ &= \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} \\ &= e \cdot \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{2}e. \end{aligned}$$

(2) 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = (1+x)^{1/x}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2},$$

由高阶导数的定义可知

$$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{2}e}{x}. \tag{5.2}$$

为了计算上述极限, 需要用到如下两个函数在 $x=0$ 附近带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}=x-x^2+x^3+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

由此可得

$$\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+o(x). \tag{5.3}$$

另外, 由第 (1) 问的计算结果, 有

$$(1+x)^{1/x}=e-\frac{1}{2}ex+o(x). \tag{5.4}$$

将 (2), (3) 式代入 (1) 式, 即得

$$\begin{aligned} f''(0)=&\lim_{x\to 0}\frac{(e-\frac{1}{2}ex+o(x))\cdot(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+o(x))+\frac{1}{2}e}{x}\\ =&\frac{2}{3}e+\frac{1}{4}e=\frac{11}{12}e. \end{aligned}$$

□

命题 5.3.9. *给定正整数 k. 设函数 f 在 $x=0$ 处的局部 Taylor 公式为*

$$f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+o(x^n),\quad \text{当}x\to 0\text{时},$$

则函数 $f(x^k)$ 在 $x=0$ 处的局部 Taylor 公式为

$$f(x^k)=a_0+a_1x^k+...+a_nx^{kn}+o(x^{kn}),\quad \text{当}x\to 0\text{时}.$$

命题 5.3.10. *设函数 f' 在 $x=x_0$ 处的局部 Taylor 公式为*

$$f'(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\quad \text{当}x\to x_0\text{时},$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的局部 Taylor 公式为

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}(x-x_0)^{i+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right),\quad \text{当}x\to x_0\text{时}.$$

例 5.3.11. 求 $\arctan x$ 在 $x=0$ 处的局部 Taylor 公式.

命题 5.3.12. 设 $f(0)=0$, 且 f 与 g 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 级数分别为

$$f(x)\sim a_1x+a_2x^2+...$$

$$g(x)\sim b_0+b_1x+b_2x^2+...$$

则复合函数 $g\circ f$ 在 $x=0$ 处的 n 阶局部泰勒公式可由在如下级数中删去所有 $x^m(m>n)$ 次项得到

$$b_0+b_1(a_1x+a_2x^2+...)+b_2\left(a_1x+a_2x^2+...\right)^2+...$$

注 5.3.13. 命题5.3.12的证明并不容易.

5.4 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

带 Peano 余项的 Taylor 公式	带 Lagrange 余项的 Taylor 公式
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$	$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$	?

事实上, 有如下的结果.

定理 5.4.1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)**.** 设 I 是开区间, $f:I\to\mathbf{R}$ 在 I 上处处有 n 阶导数, 则对 I 中任何两点 a,b, 存在 ξ 介于 a,b 之间, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

证明*:* 定义函数

$$R(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right),$$

称之为 Taylor 公式的余项. 注意到,

$$R(a)=0,\quad R^{(1)}(a)=...=R^{(n-1)}(a)=0.$$

使用 n 次 Cauchy 中值定理, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{R(b)}{(b-a)^n} = \frac{R(b)-R(a)}{(b-a)^n-(a-a)^n}\\
=&\frac{R^{(1)}(\xi_1)}{n(\xi_1-a)^{n-1}} = \frac{R^{(1)}(\xi_1)-R^{(1)}(a)}{n(\xi_1-a)^{n-1}-n(a-a)^{n-1}}\\
=&\frac{R^{(2)}(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-a)^{n-2}} = \frac{R^{(2)}(\xi_2)-R^{(2)}(a)}{n(n-1)(\xi_2-a)^{n-2}-n(n-1)(a-a)^{n-2}}\\
=&......\\
=&\frac{R^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)...2(\xi_{n-1}-a)} = \frac{R^{(n-1)}(\xi_{n-1})-R^{(n-1)}(a)}{n(n-1)...2(\xi_{n-1}-a)-n(n-1)...2(a-a)}\\
=&\frac{R^{(n)}(\xi_n)}{n!},
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

例 5.4.2. 考虑 $f(x)=e^x$, 对任何 x, 存在 ξ_x 介于 0 与 x 之间, 使得

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

由此可得

$$|e^x-(1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!})| = \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{\max(1,e^x)}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x,$$

人们把这个极限式记作

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....$$

取 $x=y\ln a$, 则有

$$e^{y\ln a} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y\ln a}{1!}+...+\frac{y^n\ln^n a}{n!}\right),$$

此即

$$a^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y\ln a}{1!}+...+\frac{y^n\ln^n a}{n!}\right) = 1+\frac{y\ln a}{1!}+\frac{y^2\ln^2 a}{2!}+....$$

例 5.4.3. (1) 考虑 $f(x)=\sin x$, 对任何 x, 存在 ξ_x 介于 0 与 x 之间, 使得

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+...+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}\sin\xi_x}{(2n+2)!}x^{2n+2},$$

由此可得

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + ... + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

(2) 考虑 $f(x) = \cos x$, 对任何 x, 存在 ξ_x 介于 0 与 x 之间, 使得

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}\sin\xi_x}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

由此可得

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + ... + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

(3) 考虑 $f(x) = \ln(1+x)$, 对任何 x, 存在 ξ_x 介于 0 与 x 之间, 使得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n(1+\xi_x)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}.$$

(4) 考虑 $f(x) = (1+x)^\alpha$, 对任何 x, 存在 ξ_x 介于 0 与 x 之间, 使得

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + ... + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi_x)^{-\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

例 5.4.4. 当 $|x| \le 1$ 时, 计算 $\sin x$, 要求误差不超过 10^{-3}.

证明*:* 注意到 $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}k)$, 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 对任何 $x \in \mathbf{R}$, 存在 ξ_x 介于 $0, x$ 之间, 使得

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k!}x^k + \frac{\sin(\xi_x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1},$$

由此可知, 对 $|x| \le 1$, 有

$$|\sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k!}x^k| = |\frac{\sin(\xi_x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}| \le \frac{1}{(n+1)!},$$

特别的,

$$|\sin x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})| \le \frac{1}{7!} < 10^{-3}, \quad \forall |x| \le 1.$$

□

5.5 Taylor 公式的应用

例 5.5.1. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 处处有 2 阶导数, 且满足

$$|f(x)|\le A,\quad |f''(x)|\le B,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

证明: 对任何 $x\in\mathbf{R}$, 有 $|f'(x)|\le 2\sqrt{AB}$.

证明*:* 对任何给定的 x, 由该点处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 对任何 $h\ne 0$, 存在 ξ_h 介于 $0,h$ 之间, 使得

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x+\xi_h)}{2!}h^2,$$

由此可得

$$|f'(x)|=|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(x+\xi_h)}{2}h|\le\frac{2A}{|h|}+\frac{B|h|}{2}.$$

特别的, 取 $h=2\sqrt{\frac{A}{B}}$, 可得

$$|f'(x)|\le 2\sqrt{AB}.$$

□

例 5.5.2. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 处处有 3 阶导数, 且满足

$$|f(x)|\le M_0,\quad |f'''(x)|\le M_3,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

证明: 对任何 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$|f'(x)|\le\sqrt[3]{\frac{9M_0^2M_3}{8}},\quad |f''(x)|\le\sqrt[3]{3M_0M_3^2}.$$

证明*:* 设 $h>0$, 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式可知, 存在 ξ 与 η, 使得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}h^3,$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2-\frac{f'''(\eta)}{3!}h^3.$$

将上述两式相减, 可得

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{f'''(\xi)+f'''(\eta)}{12}h^2,$$

由此可得

$$|f'(x)|\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_3}{6}h^2.$$

特别的, 取 $h=\sqrt[3]{\frac{3M_0}{M_3}}$, 可得

$$|f'(x)|\leq\sqrt[3]{\frac{9M_0^2M_3}{8}}.$$

□

例 5.5.3. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 有连续的二阶导函数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 对任何 $a\in(0,1)$, 有

$$|f(a)|\leq\frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|.$$

证明: 由假设, f 与 f'' 是连续函数, 在有界闭区间 $[0,1]$ 上有最值, 设 $M=\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$. 我们只需证明, 对于 f 的最值点 x_0, 有 $|f(x_0)|\leq\frac{M}{8}$. 不妨设 $x_0\in(0,1)$, 由 Fermat 定理可知 $f'(x_0)=0$. 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 存在 ξ,η 使得

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}x_0^2,$$
$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(1-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(1-x_0)^2.$$

从而有

$$f(x_0)=-\frac{f''(\xi)}{2}x_0^2=-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2,$$

由此可得

$$|f(x_0)|\leq\min\{\frac{M}{2}x_0^2,\frac{M}{2}(1-x_0)^2\}\leq\frac{M}{8},$$

这就完成了证明.

□

5.6 微分学的应用

5.6.1 函数的单调性

命题 5.6.1. *设 I 是区间 (可以是开区间, 闭区间, 或者半开半闭的区间). 设 $f\in C(I)$ 且在 I 内部处处可导, 则有*

$$f'\text{在}I\text{内部处处为正}\Rightarrow f\text{在}I\text{上严格单调递增}\Rightarrow f'\text{在}I\text{内部处处非负},$$
$$f'\text{在}I\text{内部处处非负}\Leftrightarrow f\text{在}I\text{上不减},$$
$$f'\text{在}I\text{内部处处为零}\Leftrightarrow f\text{在}I\text{上是常值函数}.$$

例 5.6.2. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

5.6.2 函数的极值

定理 5.6.3 (Fermat). 设 x_0 是 f 的局部极值点. 如果 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0)=0$.

注 5.6.4. 如果 f 可导, 则称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为 f 的临界点 (*critical point*). 上述引理说如果 f 可导, 则局部极值点一定是临界点.

由此可得到求函数最大最小值的方法. 设 f 是可导函数, 则有

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(x_0)|x_0\text{是区间端点或}f\text{的临界点}\}.$$

问题 5.6.5. 如何判断临界点是否是极值点?

命题 5.6.6. 设 f 在 x_0 的某个邻域 U 中可导, 且 $f'(x_0)=0$. 令 $U_+=U\cap\{x|x>x_0\}$, $U_-=U\cap\{x|x<x_0\}$.

(1) 如果在 U_-,U_+ 中都有 $f'<0$, 则 x_0 不是极值点.

(2) 如果在 U_- 中 $f'<0$, 在 U_+ 中有 $f'>0$, 则 x_0 是极小值点.

(3) 如果在 U_- 中 $f'>0$, 在 U_+ 中有 $f'<0$, 则 x_0 是极大值点.

(4) 如果在 U_-,U_+ 中都有 $f'>0$, 则 x_0 不是极值点.

例 5.6.7 (伯努利不等式, Bernoulli). 设 $x>-1$.

(1) 如果 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$, 则 $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$.

(2) 如果 $0<\alpha<1$, 则 $(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x$.

命题 5.6.8. 设 f 在 x_0 处有 2 阶导数, 且有 $f'(x_0)=0$.

(1) 如果 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是 f 的极小值点.

(2) 如果 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是 f 的极大值点.

命题 5.6.9. 设 f 在 x_0 处有 n 阶导数, 且有 $f^{(1)}(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

(1) 如果 n 是奇数, 则 x_0 不是极值点.

(2) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 x_0 是 f 的极小值点.

(3) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 x_0 是 f 的极大值点.

证明: 因为在 x_0 附近有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{\alpha(h)}{h^n}\right),$$

其中 α 满足 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h^n}=0$. 注意到

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{\alpha(h)}{h^n}\right)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\neq 0,$$

存在 $\delta>0$, 使得对 $0<|h|<\delta$, $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\frac{\alpha(h)}{h^n}$ 与 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 符号相同. □

命题 5.6.10. 设 f 在开区间 I 上处处可导, 且在 I 上有唯一的临界点 x_0.

(1) 如果 x_0 是 f 的局部极小值点, 则 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的最小值.

(2) 如果 x_0 是 f 的局部极大值点, 则 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的最大值.

例 5.6.11 (光的折射律)**.** 给定正数 a,b,c,v_1,v_2. 考虑函数

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}.$$

证明: 函数 T 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一的最小值点 x_0, 且 x_0 满足

$$\frac{x_0/\sqrt{x_0^2+a^2}}{v_1}=\frac{(c-x_0)/\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}}{v_2}.$$

5.6.3 函数的凹凸性

定义 5.6.12. 称 f 是区间 I 上的下凸函数 (convex downward), 如果对任何 $x_1,x_2\in I$ 以及满足条件 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 的非负实数 α_1,α_2, 都有

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

定义 5.6.13. 称 f 是区间 I 上的上凸函数 (convex upward), 如果对任何 $x_1,x_2\in I$ 以及满足条件 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 的非负实数 α_1,α_2, 都有

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\ge\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

命题 5.6.14. 设 f 在区间 I 上有定义, 则有

$$\begin{aligned}&f\text{是}I\text{上的下凸函数}\\ \iff&\text{对图像上任何两点}P,Q,\text{这两点之间的函数图像位于线段}PQ\text{的下方}\\ \iff&\text{对任何}x_1<x_2<x_3,\text{有}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.\end{aligned}$$

命题 5.6.15. *设 f 是区间 (a,b) 上的凸函数, 则 f 在 (a,b) 上连续.*

证明: 只需验证 f 在每一点 $x_0\in(a,b)$ 处连续. 任取 $x_{-1}<x_0<x_1$, 则由上述命题知对任何 $x\in(x_{-1},x_1)\backslash\{x_0\}$, 有:

$$\frac{f(x_0)-f(x_{-1})}{x_0-x_{-1}}\leq\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

特别的,

$$|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|\cdot\max\{|\frac{f(x_0)-f(x_{-1})}{x_0-x_{-1}}|,|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}|\},$$

所以 f 在 x_0 处连续. □

定理 5.6.16. *设 $f\in C(I)$, 且在 I 内部处处可微, 则有*

$$\begin{aligned}&f\text{是}I\text{上的下凸函数}\\ \Longleftrightarrow\ &f'\text{在}I\text{内部不减}\\ \Longleftrightarrow\ &\text{对任何}x_0,x\in I,\text{有}f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\leq f(x).\end{aligned}$$

定理 5.6.17. *设 $f\in C(I)$ 且在 I 内部处处有 2 阶导数, 则 f 是下凸函数的充分必要条件是对 I 内部任何点 x 都有 $f''(x)\geq 0$.*

例 5.6.18. 研究以下函数的凹凸性.

(1) $f(x)=x^\alpha$.

(2) $f(x)=a^x$.

(3) $f(x)=\log_a x$.

(4) $f(x)=\sin x$.

定义 5.6.19. 称 x_0 是 f 的拐点 (inflection point), 如果在 x_0 两边 f 的凹凸性不同.

问题 5.6.20. *为什么要研究函数的凹凸性?*

对于下凸 (或上凸) 函数 f, 能得到很多不等式. 具体的说, 设 f 是区间 I 上的下凸函数, 则对任何 $x_1,...,x_n\in I$, 对任何满足条件 $\alpha_1+...+\alpha_n=1$ 的非负实数 $\alpha_1,...,\alpha_n$, 有如下的 (Jensen) 不等式成立

$$f(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+...+\alpha_nf(x_n).$$

特别的, 如果取 $\alpha_1=...=\alpha_n=\frac{1}{n}$, 则有

$$f(\frac{x_1+...+x_n}{n})\leq\frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}.$$

例 5.6.21. 考虑函数 $f(x)=\ln x$. 它的二阶导函数 $f''(x)=-x^{-2}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上处处小于 0, 由定理5.6.17知 $\ln x$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的上凸函数, 所以对任何正数 $x_1,...,x_n$, 有

$$\ln\frac{x_1+...+x_n}{n}\ge\frac{\ln x_1+...+\ln x_n}{n},$$

这就是算术几何平均不等式

$$\frac{x_1+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1...x_n}.$$

更一般的, 对任何满足条件 $\alpha_1+...+\alpha_n=1$ 的非负实数 $\alpha_1,...,\alpha_n$, 有

$$\ln(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)\ge\alpha_1\ln x_1+...+\alpha_n\ln x_n,$$

这是所谓的 Young 不等式

$$\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n\ge x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}.$$

第六章　一元函数积分学

6.1　不定积分

给定区间 I. 求导 (函数) 给出如下运算

$$D = \frac{d}{dx} : \{I\text{上的可导函数}\} \to \{I\text{上的函数}\}.$$

问题 6.1.1. *求导运算是否可逆? 如何计算其逆运算?*

Darboux 定理说, 如果 F 在 I 上处处可导, 则对 I 中任何两点 $x_1 < x_2$, F' 能取到 $F'(x_1), F'(x_2)$ 之间的任何中间值. 由此可知, 上述算子 D 不是满射, 我们只能对一部分函数 f, 讨论它在 D 下的原像.

定义 6.1.2. 称函数 F 是函数 f 在区间 I 上的原函数 (*primitive*), 如果作为 I 上的函数有 $F' = f$, 换句话说, 即对任何 $x \in I$ 都有 $F'(x) = f(x)$.

命题 6.1.3. *如果 F_1, F_2 是 f 在 (连通) 区间 I 上的原函数, 则 $F_1 - F_2$ 是常值函数.*

由上述命题可知, 如果 f 有原函数, 则它的原函数彼此相差一个常值函数. 设 F 是 f 的一个原函数, 则其他原函数都可以表示成 $F(x) + C$ 的形式, 其中 $C \in \mathbf{R}$.

定义 6.1.4. 如果 f 有原函数, 则把它的所有原函数的集合记作 $\int f(x)dx$, 并称之 f 的不定积分 (*indefinite integral*). 如果 F 是 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

命题 6.1.5. *设 f, g 有原函数, 则对任何实数 a, b 有*

$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

例 6.1.6. 我们会经常用到如下这些不定积分.

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C,$$

6.2 黎曼积分 (Riemann integral)

问题 6.2.1. 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负函数. 计算曲边四边形

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

的面积.

早在阿基米德时代, 人们就知道按如下方法计算 D 的面积.

(1) 把 $[a,b]$ 划分成小区间的并 $[a,b] = \cup_{1\leq i \leq n}[x_{i-1}, x_i]$, 由此把 D 划分成若干个小的曲边四边形的并

$$D = \cup_{1\leq i\leq n} D_i, \quad D_i = \{(x,y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

(2) 在每个小区间中选取一个点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] (1 \leq i \leq n)$, 则 D_i 的面积可以近似成

$$\text{Area}(D_i) \sim f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

(3) D 的面积可以近似成

$$\text{Area}(D) \sim \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称上述和式为由划分与选点方案所决定的 Riemann 和.

(4) 当划分越来越细时, 上述和式给出 Area(D) 的越来越好的近似. 可以期望, 如果 Riemann 和有 "极限", 则这个 "极限" 就给出了 D 的面积.

一般的, 人们引入如下定义.

定义 6.2.2 (黎曼积分, Riemann integral)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上有定义. 称 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 记作 $f \in R([a,b])$, 如果存在实数 I 满足如下条件: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $[a,b]$ 的任何划分 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ 以及任何选点方案 $\{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}_{1\le i\le n}$, 只要 $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i < \delta$, 则有

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < \epsilon.$$

把满足上述条件的实数 I 称为 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分 (Riemann integral), 记作 $\int_a^b f(x)dx$.

粗略的说, Riemann 积分就是当划分越来越细时 Riemann 和的 "极限":

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

更加粗略的说, 积分是求和的极限. 实际上, Leibniz 在设计积分符号时, 就是把 *sum* 的首写字母拉长得到积分符号 $\int$ 的.

注 6.2.3 (几何意义)**.** 一般的, $\int_a^b f(x)dx$ 表示 f 的图像与直线 $x = a, x = b$ 以及 $y = 0$ 围成的各部分的面积的代数和 (x 轴上方图形的面积减去 x 轴下方图形的面积).

注 6.2.4. 可以把积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中的 x 换成任何别的符号, 不改变积分的值.

例 6.2.5. 常值函数的积分为 $\int_a^b cdx = c(b-a)$.

例 6.2.6. 定义 Dirichlet 函数为

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果} x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{如果} x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

则 $D(x)$ 在区间 $[a,b] (a < b)$ 上不可积.

6.2.1 可积性条件

命题 6.2.7. 设 f 在 $[a,b]$ 可积, 则 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数.

证明: 用反证法, 假设 f 在 $[a,b]$ 上无界. 令 $I=\int_a^b f(x)dx$, 由积分定义, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何划分 $a=x_0<x_1<..<x_n=b$ 与选点方案 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](1\le i\le n)$, 只要 $\max\{\Delta x_i\}<\delta$, 则有

$$|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I|<\epsilon.$$

任取一个满足上述条件的划分 $a=x_0<x_1<..<x_n=b$ 与选点方案 $\{\xi_i\}$. 由于 f 无界, 存在 $c\in[a,b]$ 使得:

$$|f(c)-f(\xi_i)|\ge\max\{\frac{2\epsilon}{\Delta x_1},...,\frac{2\epsilon}{\Delta x_n}\},\quad \forall 1\le i\le n. \tag{6.1}$$

不妨设 $c\in[x_{j-1},x_j]$(至多两个这样的 j, 任意取定其中一个), 定义新的选点方案为:

$$\eta_i=\begin{cases}\xi_i, & \text{如果} i\ne j,\\ c, & \text{如果} i=j.\end{cases}$$

由于 $\max\{\Delta x_i\}<\delta$, 则

$$|\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i-I|<\epsilon,$$

由此可得

$$\begin{aligned}|f(c)-f(\xi_j)|\Delta x_j&=|\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i|\\ &\le|\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i-I|+|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I|<2\epsilon,\end{aligned}$$

与 (6.1) 式矛盾! 这就完成了证明.

□

例 6.2.8. 设 a 是任意给定的实数. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{如果} x>0,\\ a, & \text{如果} x=0.\end{cases}$$

对任何正数 b, f 在区间 $[0,b]$ 上无界, 由上述命题知 f 在 $[0,b]$ 上不可积. 但我们经常见到如下 "等式"

$$\int_0^b\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}|_0^b=2\sqrt{b},$$

这是什么缘故? 原来, 上式中的 $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 不是 Riemann 积分, 而是所谓的广义积分 (improper integral), 它的定义是

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx := \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

定义 6.2.9. 对于有界闭区间 $I=[a,b]$, 定义它的长度为 $|I|:=b-a$. 对于 $E\subset \mathbf{R}$, 称 E 是长度为零的 (或测度为零的), 如果对任何 $\epsilon>0$, 存在可数多个有界闭区间 $\{I_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $E\subset \cup_{n=1}^\infty I_n$, 且 $\sum\limits_{n=1}^\infty |I_n|<\epsilon$.

例 6.2.10. 如果 $E\subset\mathbf{R}$ 是可数的, 则 $|E|$ 是测度为零的. 特别的, 有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 是测度为零的.

定理 6.2.11 (Riemann-Lebesgue)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上有定义, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且 f 在 $[a,b]$ 上的所有间断点构成的集合是测度为零的.*

上述定理有如下推论.

定理 6.2.12. *连续函数都是可积的.*

定理6.2.12的另一种解释. 设 $f\in C([a,b])$, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 由一致连续的定义可知, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $|x-x'|<\delta$, 都有 $|f(x)-f(x')|<\epsilon$. 这样, 对 $[a,b]$ 的任何划分 $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, 只要 $\max\{\Delta x_i\}<\delta$, 则对任何两个选点方案 $\{\xi_i\},\{\eta_i\}$, 总有

$$|\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i|\le \sum_{i=1}^n |f(\eta_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i<\epsilon(b-a),$$

由此可以期待 $f\in R([a,b])$. □

定理6.2.11还有如下推论.

推论 6.2.13. (1) *如果 f 在 $[a,b]$ 上有界且在 $[a,b]$ 上至多有可数多个间断点, 则 $f\in R([a,b])$.*

(2) *如果 f 在 $[a,b]$ 上有定义且是单调的, 则 $f\in R([a,b])$.*

6.2.2 Riemann 积分的性质

命题 6.2.14. (1) *Riemann 积分关于被积函数是线性的. 设 $f,g\in R([a,b])$, 则对任何实数 α,β, 有*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

(2) *Riemann* 积分关于积分区域是可加的. 设 $a<b<c$, f 在 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 上都可积, 则

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

(3) 设 $f,g \in R([a,b])$. 如果对任何 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \geq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

(4) 定积分的绝对值不等式. 设 $f \in R([a,b])$, 则 $|f| \in R([a,b])$, 且有

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

注 6.2.15. 如果 $a>b$, 约定 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 在这种约定下, 对任何实数 a,b,c, 对连续函数 f 都有

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

定理 6.2.16 (积分中值定理)**.** 设 $f \in C([a,b])$, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

定理 6.2.17. 设 $f,g \in C([a,b])$ 且 g 在 $[a,b]$ 上不改变符号, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

例 6.2.18. 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且其导函数满足

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

证明: 对 $x \in [a,b]$, 有

$$\int_a^x f(t)dt \leq f(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

例 6.2.19. 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有非负的二阶导函数. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2}).$$

6.3 微积分基本定理

设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是非负函数, 考虑曲边四边形

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}.$$

称 f 为 D 的 "高度函数", 因为点 x 处 D 的高为 $f(x)$. 对 $x\in[a,b]$, 设曲边四边形 $D_x=\{(s,t)|a\le s\le x, 0\le t\le f(s)\}$ 的面积为 $F(x)$, 称 F 为 D 的 "面积函数".

(1) 已知高度函数 f, 可求出面积函数

$$F(x)=\int_a^x f(s)ds.$$

(2) 已知面积函数 F,(在一定条件下) 可求出高度函数

$$f(x)=F'(x).$$

这样, 如果已知高度函数 f, 由 (1) 可算出面积函数 $F(x)=\int_a^x f(s)ds$, 再由 (2) 可得

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds=f(x).$$

另一方面, 如果已知面积函数 $F(x)$, 由 (2) 可算出高度函数 $f(x)=F'(x)$, 再由 (1) 可得

$$\int_a^x F'(s)ds=F(x)-F(a).$$

我们把上述观察写成如下两个定理.

定理 6.3.1. *设 $f\in C([a,b])$, 定义函数 $F(x)=\int_a^x f(s)ds$, 则*

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in(a,b),$$

$$F'(a+)=f(a),\quad F'(b-)=f(b).$$

证明: 我们先证明: 对 $x\in[a,b)$, 有 $F'(x+)=f(x)$, 即有

$$\lim_{h\to0+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

为此, 对任何 $\epsilon>0$, 由 f 在 x 处连续, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 $|s-x|<\delta$, 有 $|f(s)-f(x)|<\epsilon$. 这样, 对 $0<h<\delta$, 对 $s\in[x,x+h]$, 有 $|f(s)-f(x)|<\epsilon$. 由此可得

$$\begin{aligned}
&|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)|=|\frac{\int_x^{x+h}f(s)ds-\int_x^{x+h}f(x)ds}{h}|\\
=&|\frac{\int_x^{x+h}\left(f(s)-f(x)\right)ds}{h}|\le\frac{\int_x^{x+h}|f(s)-f(x)|ds}{h}\\
\le&\frac{\int_x^{x+h}\epsilon ds}{h}=\epsilon,
\end{aligned}$$

这表明 $F'(x+)=f(x)$.

类似的, 可以证明对 $x\in(a,b]$, 有 $F'(x-)=f(x)$. 结合这两方面, 即完成了定理的证明. □

注 6.3.2. 称 $\int_a^x f(s)ds$ 为 f 的变上限积分 (*integral with variable upper limit*). 定理6.3.1说, 连续函数的变上限积分是它的一个原函数. 特别的, 连续函数都有原函数.

定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式)**.** *设 $f\in C([a,b])$, $F\in C([a,b])$ 且 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 则有*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

证明: 令 $S(x)=\int_a^x f(s)ds$. 由定理6.3.1, $S\in C([a,b])$ 且 $S'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$. 定义函数 $H(x)=F(x)-S(x)$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$H(b)-H(a)=(b-a)\cdot H'(\xi)=(b-a)\cdot(F'(\xi)-S'(\xi))=0,$$

化简即得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

□

推论 6.3.4. *设 $f\in C([a,b])$, F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数 (即 $F'(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$), 则有*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

证明: F 在 $[a,b]$ 上处处可导, 则 $F\in C([a,b])$. 这样, F 满足定理6.3.3的条件, 因而有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

□

注 6.3.5. 人们也把定理6.3.3称为微积分基本定理. 如果把 $F(b)-F(a)$ 记作 $F(x)|_a^b$, 则可以把 Newton-Leibniz Formula 写成

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.}$$

用文字叙述成: 连续函数在区间上的积分等于它的原函数在区间端点上函数值的差.

注 6.3.6. 如果只有 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 不要求 F 在 a,b 两点处连续, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 不一定等于 $F(x)|_a^b$. 这是因为, 条件 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$ 对 $F(a),F(b)$ 没有任何限制, 不能期望它们与 $\int_a^b f(x)dx$ 有关系.

用另外的证明方法, 我们还可以得到稍微强一点的版本.

定理 6.3.7. 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可积函数, $F\in C([a,b])$ 且 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

证明: 设 $x_0=a<x_1<...<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任何剖分. 对每个 $1\le i\le n$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

由此可得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n(F(x_i)-F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

当 $\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时, 对上式两端取极限, 可得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

注意到 f 在 $[a,b]$ 上可积, 上式右边的极限值为 $\int_a^b f(x)dx$, 这就证明了

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

□

由 Newton-Leibniz 公式, 为了计算连续函数的定积分, 只需求出被积函数的一个原函数. 这样, 就把定积分的计算转化成不定积分的计算.

例 6.3.8. 设 k 是正整数, 则 $\int_a^b x^k dx=\frac{b^{k+1}}{k+1}-\frac{a^{k+1}}{k+1}$.

解. 函数 $f(x)=x^k$ 在区间 $[a,b]$ 上有原函数 $\frac{x^{k+1}}{k+1}$, 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_a^b x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}|_a^b=\frac{b^{k+1}}{k+1}-\frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

□

例 6.3.9. (1) $\int_a^b e^x dx=e^x|_a^b=e^b-e^a$.

(2) $\int_a^b q^x dx=\frac{q^x}{\ln q}|_a^b=\frac{q^b-q^a}{\ln q}$, 其中 $q>0$ 且 $q\neq 1$.

(3) $\int_a^b \frac{1}{x}dx=\ln x|_a^b=\ln(\frac{b}{a})$, 其中 $0<a<b$.

(4) $\int_a^b \sin x dx = -\cos x|_a^b = -\cos b + \cos a$.

(5) $\int_a^b \cos x dx = \sin x|_a^b = \sin b - \sin a$.

(6) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x|_a^b = \arcsin b - \arcsin a$, 其中 $-1 < a < b < 1$.

(7) $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_a^b = \arctan b - \arctan a$.

6.4 不定积分的计算方法

求导法则	不定积分法则
$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G'$	$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$
$(fg)' = f'g + fg'$	$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
$(F \circ \alpha)'(x) = F'(\alpha(x))\alpha'(x)$	$\int F'(\alpha(x))\alpha'(x)dx = F(\alpha(x)) + C$

6.4.1 第一换元法

要计算不定积分 $\int f(x)dx$. 如果能把 $f(x)$ 表示成如下形式

$$f(x) = g(\alpha(x))\alpha'(x),$$

则只需求出 g 的原函数 G, 就可得到

$$\int f(x)dx = \int g(\alpha(x))\alpha'(x)dx = \int G'(\alpha(x))\alpha'(x)dx = G(\alpha(x)) + C.$$

我们可用如下方式形式化的表述第一换元法. 引入新变量 $t = \alpha(x)$, 则有

$$\int f(x)dx = \int g(\alpha(x))\alpha'(x)dx = \int g(\alpha(x))d\alpha(x) = \int g(t)dt,$$

最后一步中我们求出 $g(t)$ 的原函数 $\int g(t)dt$, 并把结果中的 t 视为 x 的函数 $t = \alpha(x)$.

例 6.4.1.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-\cos' x dx}{\cos x} = \int -\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

例 6.4.2.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{-d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

例 6.4.3.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx) = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C.$$

例 6.4.4.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例 6.4.5.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

6.4.2 第二换元法

要计算不定积分 $\int f(x)dx$. 假设我们能找到两个函数 α, β 满足

$$\beta(\alpha(x)) = x, \quad \forall x.$$

由链式法则, 有 $\beta'(\alpha(x))\alpha'(x) = 1$, 由此可得

$$f(x) = f(\beta(\alpha(x)))\beta'(\alpha(x))\alpha'(x).$$

定义函数 $g(t) = f(\beta(t))\beta'(t)$, 设已经求出它的原函数 $G(t)$, 则

$$\int f(x)dx = \int g(\alpha(x))\alpha'(x)dx = \int G'(\alpha(x))\alpha'(x)dx = G(\alpha(x)) + C.$$

我们可用如下方式形式化的表述第二换元法. 设函数 α, β 满足 $\beta \circ \alpha = id$. 引入新变量 $t = \alpha(x)$, 则有 $x = \beta(t)$, 由此可得

$$\int f(x)dx = \int f(\beta(t))d\beta(t) = \int f(\beta(t))\beta'(t)dt,$$

然后求解 $f(\beta(t))\beta'(t)$ 的原函数, 并把结果中的 t 视为 x 的函数 $t = \alpha(x)$.

注 6.4.6. 第一换元法对换元方案 $t = \alpha(x)$ 没有任何限制; 而第二换元法要求 α 有左逆: 即存在映射 β 使得 $\beta \circ \alpha = id$.

例 6.4.7.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{d\frac{a}{\cos\theta}}{\sqrt{(\frac{a}{\cos\theta})^2-a^2}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

例 6.4.8.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{d(a\tan\theta)}{\sqrt{(a\tan\theta)^2+a^2}} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

6.4.3 分部积分 (integration by parts)

命题 6.4.9. 设 f, g 是可导函数, 则

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

例 6.4.10. 当 $k \neq -1$ 时,

$$\int x^k \ln x dx = \int (\frac{x^{k+1}}{k+1})' \ln x dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \int \frac{x^{k+1}}{k+1} (\ln x)' dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + C.$$

当 $k = -1$ 时,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

例 6.4.11. 设 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. 注意到

$$\int x^n e^x dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx,$$

由此可得

$$\int x^n e^x dx = e^x \left(x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k n...(n-k+1) x^{n-k} \right) + C.$$

例 6.4.12.

$$\int \arctan x dx = \int x' \arctan x dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

例 6.4.13.

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 6.4.14.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= \int x' \sqrt{a^2-x^2} dx \\ =& x\sqrt{a^2-x^2} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ =& x\sqrt{a^2-x^2} dx - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ =& x\sqrt{a^2-x^2} dx - \int \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}, \end{aligned}$$

由此可得

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C.$$

例 6.4.15.

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)e^{ax} + C;$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{1}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)e^{ax} + C.$$

6.4.4 有理函数的不定积分

定义 6.4.16. 称 $R(x)$ 为 x 的有理函数, 如果 R 是两个多项式函数的商

$$R(x) = \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}.$$

问题 6.4.17. 求 $\int R(x)dx$.

命题 6.4.18. 设多项式函数 $Q(x)$ 能分解成

$$Q(x) = \prod_i (x-x_i)^{n_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j},$$

则有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 能表示成如下一些简单有理函数的和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \sum_i \sum_{1\le k\le n_i} \frac{a_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_j \sum_{1\le k\le m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2+p_j x+q_j)^k}, \tag{6.2}$$

其中 $W(x)$ 是多项式, a_{ik}, b_{jk}, c_{jk} 是实数.

证明概要. 对实系数多项式, 有如下的 Bezout 定理. 设多项式 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有 (次数大于零次的) 公因子, 则对任何多项式 $P(x)$, 存在多项式 $U_1(x), U_2(x)$ 使得

$$P(x) = Q_1(x)U_2(x) + Q_2(x)U_1(x).$$

由此可得

$$\frac{P}{Q_1 \cdot Q_2} = \frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_2}.$$

反复利用这个结果, 如果 $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ 两两没有公因子, 则 $\frac{P}{Q_1\cdot ...\cdot Q_n}$ 能表示成

$$\frac{P}{Q_1\cdot ...\cdot Q_n} = \frac{U_1}{Q_1} + ... + \frac{U_n}{Q_n}.$$

特别的, 对于命题中的 $Q(x)$, 有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \frac{U_i(x)}{(x-x_i)^{n_i}} + \sum_j \frac{V_j(x)}{(x^2+p_j x+q_j)^{m_j}}. \tag{6.3}$$

注意到, 每个 $U_i(x)$ 能表示成

$$U_i(x)=\sum_{k\geq 0}a_{ik}(x-x_i)^k;$$

每个 $V_j(x)$ 能表示成

$$V_j(x)=\sum_{k\geq 0}b_{jk}\cdot x(x^2+p_jx+q_j)^k+c_{jk}\cdot(x^2+p_jx+q_j)^k,$$

代入 (6.3) 式, 即得到命题的结论. □

注 6.4.19. 对我们的用途而言, 只需要上述命题的结论, 特别是 (6.2) 式右边的具体形式, 由此通过比较 (通分后的) 等式两边各项系数, 可以确定 a_{ik},b_{jk},c_{jk}.

由这个命题, 为了计算有理函数的不定积分, 只需计算如下四类简单有理函数的不定积分.

例 6.4.20. 多项式函数的不定积分

$$\int\sum_{i\geq 0}a_ix^idx=\sum_{i\geq 0}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}+C.$$

例 6.4.21. $\frac{1}{(x-a)^k}$ 的不定积分

$$\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=\begin{cases}\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C, & \text{如果}k\neq 1,\\ \ln|x-a|+C, & \text{如果}k=1.\end{cases}$$

例 6.4.22. $\frac{u}{(u^2+a^2)^k}$ 的不定积分

$$\int\frac{u}{(u^2+a^2)^k}du=\begin{cases}\frac{(u^2+a^2)^{-k+1}}{2(1-k)}+C, & \text{如果}k\neq 1,\\ \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+C, & \text{如果}k=1.\end{cases}$$

例 6.4.23. $\int\frac{1}{(u^2+a^2)^k}du$ 的不定积分

$$I_k=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

解. 利用分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}I_k=&\int u'(u^2+a^2)^{-k}du\\ =&u(u^2+a^2)^{-k}+2k\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}du\\ =&u(u^2+a^2)^{-k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1},\end{aligned}$$

得到 I_k 满足递推关系

$$I_{k+1} = \frac{2k-1}{2ka^2} I_k + \frac{u}{2ka^2(u^2+a^2)^k}, \quad \forall k \geq 1,$$

另外有 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$. 这样, 利用上述递推关系可以求出 I_k. □

例 6.4.24. 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

解答. 假设

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

通分后比较对应项系数, 可得

$$A = \frac{1}{3} = -B, \quad C = \frac{2}{3}.$$

由此可得

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

分别计算上式中各项的不定积分, 有

$$\int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C,$$

$$\int -\frac{1}{3}\cdot\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = -\frac{1}{6}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+C,$$

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2}\int\frac{d\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}}{(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2})^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

所以, 所求的不定积分为

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

□

例 6.4.25. $\int \frac{1}{x^4+1}dx$.

解. 设

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$

则有

$$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1),$$

解出

$$A=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad C=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad B=D=\frac{1}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{x^4+1}dx\\
=&\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\\
=&\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}(2x-\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\\
=&\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\\
=&\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\int\frac{\frac{1}{4}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}dx\\
=&\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.
\end{aligned}$$

□

例 6.4.26. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$

6.4.5 形如 $\int R(\cos x,\sin x)dx$ 的不定积分

可以用所谓的“万能代换”求解这种不定积分. 引入新变量 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

由此可得

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt,$$

转化成有理函数的不定积分.

例 6.4.27. 给定实数 $a>1$.

(1) 计算不定积分

$$\int\frac{dx}{a+\sin x}.$$

(2) 计算定积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 - \sin^2 x}.$$

解答. (1) 利用万能代换 $t = \tan\frac{x}{2}$, 可得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a+\sin x} &= \int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{a + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2}{a}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{a})^2 + (1-\frac{1}{a^2})} \\
&= \frac{2}{a}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}{1-\frac{1}{a^2}}\int \frac{d\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}}}{(\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}})^2+1} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{t+1/a}{\sqrt{1-1/a^2}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1+a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}} + C.
\end{aligned}$$

(2) 由定积分的换元法可知

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{d(x+\pi)}{a^2-\sin^2(x+\pi)} = \int_0^\pi \frac{dx}{a^2-\sin^2 x},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d(\pi-x)}{a^2-\sin^2(\pi-x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x},$$

由此可得

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x}.$$

利用 (1) 的结论, 有

$$\int \frac{dx}{a-\sin x} = -\int \frac{d(-x)}{a+\sin(-x)} = -\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1-a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}} + C.$$

从而有:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} &= \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a+\sin x} + \frac{1}{a-\sin x}\right) dx \\
&= \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1+a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1-a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}} + C
\end{aligned}$$

把上述函数记作

$$F(x) = \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1+a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{1-a\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-1}},$$

则它在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上处处有定义且连续. 利用 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} = F(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}(\arctan\frac{1+a}{\sqrt{a^2-1}} - \arctan\frac{1-a}{\sqrt{a^2-1}}) = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-1}}.$$

所以有

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2-\sin^2 x} = \frac{2\pi}{a\sqrt{a^2-1}}.$$

□

例 6.4.28. $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

6.5 定积分的计算方法

6.5.1 定积分的分部积分 (*integration by parts*)

定义 6.5.1. 如果 f 在 I 上处处有 k 阶导函数, 且其高阶导函数 $f^{(1)},...,f^{(k)}$ 都是 I 上的连续函数, 则称 f 是 I 上的 C^k 光滑函数, 记作 $f\in C^{(k)}(I)$.

命题 6.5.2. 设 $f,g\in C^{(1)}([a,b])$, 则

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

证明: 由 Leibniz 法则, $f\cdot g$ 是 $f'\cdot g+f\cdot g'$ 的原函数, 再由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_a^b \left(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right)dx = f(x)g(x)|_a^b,$$

移项即得定积分的分部积分公式. □

例 6.5.3. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|x|f''(x)dx.$$

例 6.5.4. 令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$, 则对任何整数 $n\geq 2$, 有

$$\begin{aligned} I_n =& -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x(\cos x)'dx \\ =& -\sin^{n-1}x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 xdx \\ =&(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n, \end{aligned}$$

得到递推关系

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad \forall n\geq 2.$$

注意到 $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$, 由上述递推式可得

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{如果}n\text{是奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{如果}n\text{是偶数}. \end{cases}$$

注 6.5.5. 在计算 n 维球体

$$B_n(r) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2\}$$

的体积时, 需要用到积分 I_n.

例 6.5.6 (多次分部积分)**.** 设 $f, g \in C^{(n)}(I)$, 则

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx.$$

证明: 连续 n 次使用定积分的分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx &= f^{(n-1)}(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x)dx \\
&= f^{(n-1)}(x)g(x)|_a^b - f^{(n-2)}(x)g^{(1)}(x)|_a^b + \int_a^b f^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x)dx \\
&= ...... \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)|_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)dx \\
&= ...... \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx.
\end{aligned}$$

□

例 6.5.7. 设 $f \in C^{(n)}(I)$. 对给定的 $a, b \in I$, 令 $g(x) = (b-x)^{n-1}$, 由例6.5.6可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)g^{(i)}(x)|_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(n-1-i)}(x)(-1)^i(n-1)...(n-i)(b-x)^{n-i-1}|_a^b \\
&= (n-1)!\left(f(b) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\right).
\end{aligned}$$

由此可得

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx,$$

人们称上式为带积分余项的 Taylor 公式.

6.5.2 定积分的换元法

定理 6.5.8. 设 I, J 是区间, $\varphi\colon I \to J$ 有连续的导函数, $f \in C(J)$. 设 $A, B \in I, a, b \in J$ 满足 $a = \varphi(A), b = \varphi(B)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证明: 考虑 f 的变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(s)ds$, 则

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in J.$$

由链式法则, 有

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

这样, 由 Newton-Leibniz 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_A^B \\ =&F(\varphi(B)) - F(\varphi(A)) = F(b) - F(a) \\ =&\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

□

注 6.5.9. 粗略的说, 假设要计算连续函数 f 的积分 $\int_a^b f(x)dx$, 如果能把 x 表示成变元 t 的 ($C^{(1)}$ 光滑的) 函数 $x = \varphi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

其中 $\varphi(A) = a, \varphi(B) = b$. 这样, 就把 x 的函数的积分转化成 t 的函数的积分. 基于这个原因, 人们把上述定理称为定积分的换元法则.

上述版本的换元法则是用 Newton-Leibniz 公式证明的, 在概念上不是最简单的. 如下版本的换元法则可能更容易理解. 为了方便起见, 当 $A > B$ 时, 我们也用 $[A, B]$ 表示以 A, B 为端点的闭区间.

定理 6.5.10. 设 $\varphi\colon [A,B]\to[a,b]$ 是 $C^{(1)}$ 光滑的, 且有 $C^{(1)}$ 光滑的逆 $\varphi^{-1}\colon [a,b]\to[A,B]$. 对 $[a,b]$ 上的任何可积函数 f, 有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

例 6.5.11. (1) 如果 f 是偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

(2) 如果 f 是奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0.$$

证明: 利用换元公式, 有

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_a^0 f(-t)d(-t)=\int_0^a f(-t)dt,$$

再由 f 的奇偶性可完成证明. □

例 6.5.12. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是周期函数, 周期为 T, 则积分值 $\int_a^{a+T} f(x)dx$ 不依赖于 a.

证明: 利用定积分关于区域的可加性与换元公式, 可得

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx&=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_0^a f(T+y)d(T+y)\\&=\int_a^T f(x)dx+\int_0^a f(y)dy=\int_0^T f(x)dx.\end{aligned}$$

□

例 6.5.13.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\frac{\pi}{2}-y)d(\frac{\pi}{2}-y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n ydy.$$

例 6.5.14.

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^r (r^2-x^2)^{n/2}dx=\int_\pi^0 (r^2-r^2\cos^2\theta)^{n/2}d(r\cos\theta)\\=&r^{n+1}\int_0^\pi \sin^{n+1}\theta d\theta=2r^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

例 6.5.15. 令 $x = a\sin\theta$ 进行换元, 并利用例6.5.4的结果, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin\theta)^4\cdot(a\cos\theta)\cdot d(a\sin\theta)\\ =& a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta d\theta\\ =& a^6(I_4-I_6)\\ =& \frac{\pi a^6}{32}.\end{aligned}$$

例 6.5.16. 设 f 是偶函数, 则

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx.$$

特别的, 由此计算定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx.$$

解. 利用换元公式, 可得

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_a^0 \frac{f(-y)}{1+e^{-y}}d(-y) = \int_0^a \frac{e^y\cdot f(y)}{1+e^y}dy,$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx =& \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx\\ =& \int_0^a \frac{e^x\cdot f(x)}{1+e^x}dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x}dx = \int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

利用上述结果与例6.5.4, 有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

□

例 6.5.17.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx\sin nx dx.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx\cos nx dx.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\cos nx dx.$$

例 6.5.18. 给定正数 $a \neq 1$, 计算定积分

$$\int_0^\pi \frac{(\cos x - a)\sin x}{(1+a^2-2a\cos x)^{3/2}}dx.$$

解答. 令 $u = \cos x$ 进行换元, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{(\cos x - a)\sin x}{(1+a^2-2a\cos x)^{3/2}}dx = \int_0^\pi \frac{(\cos x - a)\cdot(-1)\cdot d(\cos x)}{(1+a^2-2a\cos x)^{3/2}}\\
=&\int_1^{-1} \frac{(u-a)\cdot(-1)\cdot du}{(1+a^2-2au)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \frac{(u-a)du}{(1+a^2-2au)^{3/2}}\\
=&\int_{-1}^1 \frac{u-a}{a}\cdot((1+a^2-2au)^{-1/2})'du\\
=&\frac{u-a}{a}(1+a^2-2au)^{-1/2}|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{a}(1+a^2-2au)^{-1/2}du\\
=&\frac{u-a}{a}(1+a^2-2au)^{-1/2}|_{-1}^1 + \frac{1}{a^2}(1+a^2-2au)^{1/2}|_{-1}^1\\
=&\frac{1-a}{a}\frac{1}{|1-a|} + \frac{1}{a^2}|1-a| - \frac{-1-a}{a}\frac{1}{1+a} - \frac{1}{a^2}(1+a)\\
=&\frac{1-a}{a^2|1-a|} - \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

这样就有

$$\int_0^\pi \frac{(\cos x - a)\sin x}{(1+a^2-2a\cos x)^{3/2}}dx = \begin{cases} 0, & \text{如果} 0 < a < 1, \\ -\frac{2}{a^2}, & \text{如果} a > 1. \end{cases}$$

□

6.6 定积分的应用

6.6.1 平面图形的面积

命题 6.6.1. 设 $f, g \in C([a,b])$ 且对任何 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \leq g(x)$, 则平面图形

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

的面积为 $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.

命题 6.6.2. 设 $r(\theta)$ 是连续函数, 则极坐标平面上的图形

$$E = \{(\theta, r)|\alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\theta)\}$$

的面积为 $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$.

例 6.6.3. 椭圆盘 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 的面积为 πab.

6.6.2 曲线的弧长

定义 6.6.4. $\mathbf{R}^3$ 中的一条曲线是指一个连续映射

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3,$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

其中 $I \subseteq \mathbf{R}$ 是区间.

如果 $x(t), y(t), z(t)$ 都是 $C^{(1)}$ 光滑映射 (即有连续的导函数), 则称 γ 为 $C^{(1)}$ 光滑曲线.

定义 6.6.5. 设 $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ 是 $C^{(1)}$ 光滑曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

则 γ 的弧长为

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

命题 6.6.6. *如果 $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ 是 $C^{(1)}$ 光滑映射, 且有 $C^{(1)}$ 光滑的逆 $\alpha^{-1} : [c,d] \to [a,b]$. 对任何 $C^{(1)}$ 光滑曲线 $\gamma : [c,d] \to \mathbf{R}^3$, 有 $L(\gamma) = L(\gamma \circ \alpha)$.*

例 6.6.7. 设 $f \in C^{(1)}([a,b])$, 则函数图像 $\{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$ 的弧长为

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

例 6.6.8. 设曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 为 $C^{(1)}$ 光滑函数, 则其弧长为

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}d\theta.$$

例 6.6.9. 椭圆 $\{(x,y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ 的周长为

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2\theta}d\theta \\ &= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\phi}d\phi. \end{aligned}$$

对于实数 k,φ, 定义

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta,$$

称之为椭圆积分, 它一般不能用初等函数表示. 当 $0\leq k<1$ 时,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\simeq 1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta-\frac{1}{8}k^4\sin^4\theta,$$

由此可得椭圆积分的近似计算方法

$$E(k,\varphi)\simeq\int_0^{\varphi}(1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta-\frac{1}{8}k^4\sin^4\theta)d\theta.$$

6.6.3 平面曲线的曲率

问题 6.6.10. *如何描述平面曲线 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ 在 $P_0=(x(t_0),y(t_0))$ 处的弯曲程度?*

质点沿 γ 运动, t 时刻的速度为 $\mathbf{v}(t)=(x'(t),y'(t))$. 设 x 轴正方向沿逆时针方向转动角度 $\alpha(t)$ 得到单位向量 $\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$, 则有

$$\tan\alpha(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

在时间间隔 $[t_0,t]$ 内, 质点的运动方向改变了角度 $\alpha(t)-\alpha(t_0)$, 质点运动的距离为 $\int_{t_0}^t\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}ds$, 两者的比值反映了这段时间内转弯的激烈程度, 这就启发了如下定义.

定义 6.6.11. 平面曲线 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ 在 $P_0=(x(t_0),y(t_0))$ 处的曲率为

$$k_{P_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{|\alpha(t)-\alpha(t_0)|}{\int_{t_0}^t\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}ds}.$$

命题 6.6.12. *设函数 $x(t),y(t)$ 有连续的二阶导函数, 则*

$$k_{P_0}=\frac{|y''(t_0)x'(t_0)-y'(t_0)x''(t_0)|}{(x'(t_0)^2+y'(t_0)^2)^{3/2}}.$$

证明: 利用洛必达法则, 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{\int_{t_0}^t\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}ds}\\=&\lim_{t\to t_0}\frac{\alpha'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\\=&\lim_{t\to t_0}\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}\\=&\frac{y''(t_0)x'(t_0)-y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0)^2+y'(t_0)^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

□

6.6.4 旋转体的体积与旋转曲面的面积

命题 6.6.13. 设 f 在 $[a,b]$ 上是非负的连续函数, 将平面图形

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$$

绕 x 旋转一周, 所得的旋转体的体积为 $\int_a^b \pi f^2(x)dx$.

命题 6.6.14. 设 f 在 $[a,b]$ 上是非负的连续函数, 将平面曲线

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b,y=f(x)\}$$

绕 x 旋转一周, 所得的旋转曲面的面积为

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

6.6.5 在物理中的应用

例 6.6.15. 将木棒放置在 x 轴上, 端点分别为 a,b. 已知木棒上坐标为 x 的点处的质量密度为 $\rho(x)$, 则该木棒对木棒外一点 c 产生的引力为

$$\int_a^b \frac{\rho(x)}{(x-c)^2}dx$$

例 6.6.16. 物体在外力的作用下从 a 点运动到 b 点. 已知点 x 处外力为 $f(x)$, 则外力做功为 $\int_a^b f(x)dx$.

6.7 广义积分

6.7.1 Motivation

Riemann 积分是 Riemann 和的极限

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\text{分割越来越细}}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

它描述了由 f 的函数图像, 直线 $x=a$, 直线 $x=b$ 以及直线 $y=0$ 围成的曲边四边形的面积.

例 6.7.1. "计算" 由函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图像, 直线 $x=1$ 以及直线 $y=0$ 围成的无界区域的面积.

利用直线 $x=b$ 做截断, 截得的曲边四边形面积为 $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$. 当 $b\to+\infty$ 时, 有理由相信, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$ 描述了上述无界区域的大小. 我们把 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 称为 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分.

例 6.7.2. “计算”由函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的图像, 直线 $x=0$, 直线 $x=1$ 以及直线 $y=0$ 围成的无界区域的面积.

由于 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 是 $[0,1]$ 上的无界函数, Riemann 积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 不存在. 只能用直线 $x=\epsilon$ 截出有限区域, 计算其面积, 再对 $\epsilon\to 0^+$ 取极限

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

这个极限值描述了该无界区域的大小. 我们把 $\lim\limits_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$ 称为 f 在 $[a,b]$ 上的瑕积分.

总结一下,

- Riemann 积分: $\int_{\text{有界区间}}$ 有界函数.
- 无穷积分: $\int_{\text{无界区间}}$ 函数.
- 瑕积分: $\int_{\text{有界区间}}$ 无界函数.

我们把无穷积分与瑕积分统称为反常积分.

6.7.2 无穷积分的定义

定义 6.7.3. (1) 设函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足: 对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积. 如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

(2) 类似的, 定义反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

(3) 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

例 6.7.4. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$.

例 6.7.5.

$$\int_1^{\infty} x^p dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq -1, \\ -\frac{1}{1+p}, & \text{如果} p < -1. \end{cases}$$

6.7.3 瑕积分的定义

定义 6.7.6. (1) 设 $f:(a,b] \to \mathbf{R}$ 满足: 对任何 $a < c < b$, f 在 $[c,b]$ 上可积, 但当 $x \to a^+$ 时 f 无界. 如果极限

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 记作

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

如果上述极限不存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

(2) 类似的, 如果 $f:[a,b) \to \mathbf{R}$ 满足: 对任何 $a < c < b$, f 在 $[a,c]$ 上可积, 但当 $x \to b^-$ 时 f 无界. 定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

定义 6.7.7. 如果 f 在 c 附近无界, 则称 c 是瑕点. 设对任何 $\epsilon > 0$, f 在 $[a, c-\epsilon]$ 与 $[c+\epsilon, b]$ 上都可积. 如果瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 且定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

例 6.7.8. 设 $p > 0$, 考虑暇积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 的收敛性, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{如果} 0 < p < 1. \end{cases}$$

例 6.7.9. 设 $p > 0$, 考虑暇积分 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx$ 的收敛性, 有

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}dx = \begin{cases} \text{发散}, & \text{如果} p \geq 1, \\ \frac{1}{1-p}, & \text{如果} 0 < p < 1. \end{cases}$$

6.7.4 非负函数无穷积分的收敛性

命题 6.7.10. 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是非负函数, 且对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\{\int_a^A f(x)dx\}_{A>a}$ 有上界.

定理 6.7.11 (比较判别法)**.** 设 f 与 g 在任何闭区间 $[a,b]$ 上都可积, 且满足对任何 $x\geq a$, 都有

$$0\leq f(x)\leq g(x).$$

(1) 如果 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.
(2) 如果 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散.

推论 6.7.12 (比较判别法的极限形式)**.** 设非负函数 f 与 g 在任何闭区间 $[a,b]$ 上都可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$(如果当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 趋近于 $+\infty$, 则约定 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$).
(1) 当 $0\leq k<+\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.
(2) 当 $0<k\leq+\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.
特别的, 当 $0<k<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同时收敛或发散.

推论 6.7.13. 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数.
(1) 如果存在 $p>1$, 使得极限 $0\leq\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.
(2) 如果存在 $p\leq1$, 使得极限 $0<\lim\limits_{x\to+\infty}x^pf(x)\leq+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

例 6.7.14. 无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛. 以后我们会算出 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 它在概率论与物理中经常出现.

例 6.7.15. 考察无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}$ 的收敛发散性.

6.7.5 一般函数无穷积分的收敛性

定理 6.7.16 (Cauchy 收敛准则)**.** 设 $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 满足对任何 $b>a$, f 在 $[a,b]$ 上可积. 无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon>0$, 存在某个 (依赖于 ϵ 的) 常数 K, 使得对任何 $\beta>\alpha>K$, 都有 $|\int_\alpha^\beta f(x)dx|<\epsilon$.

定理 6.7.17. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

定义 6.7.18. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛; 如果 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛.

6.7.6 瑕积分的收敛性

命题 6.7.19. 设 $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ 是非负函数, 且对任何 $a<c<b$, f 在 $[c,b]$ 上可积, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\{\int_c^b f(x)dx\}_{a<c<b}$ 有上界.

定理 6.7.20 (比较判别法)**.** 设 f 与 g 在任何闭区间 $[c,b]$ 上都可积 $(a<c<b)$, 且满足对任何 $x\in(a,b]$, 都有

$$0\le f(x)\le g(x).$$

(1) 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 如果瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

推论 6.7.21 (比较判别法的极限形式)**.** 设非负函数 f 与 g 在任何闭区间 $[c,b]$ 上都可积 $(a<c<b)$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$.

(1) 当 $0\le k<+\infty$ 时, 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $0<k\le+\infty$ 时, 如果瑕积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

特别的, 当 $0<k<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同时收敛或发散.

注 6.7.22. 使用比较定理时, 如果 a 是暇点, 我们经常把 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ 比较. 如果 b 是暇点, 经常把 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ 比较.

例 6.7.23. 设 $0\le k<1$, 则瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 收敛.

例 6.7.24. 设 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 则瑕积分 $\displaystyle\int_0^\varphi\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}$ 收敛.

例 6.7.25. 设 $p>0$, 考虑暇积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}$ 的收敛性.

证明*:* (1) $0<p<1$ 时, 取 $0<\epsilon<1-p$. 由洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln x|}{x^{-\epsilon}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-1}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}}=0,$$

因此有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln x|/x^p}{1/x^{p+\epsilon}}=0,$$

由于 $p+\epsilon<1$, $\int_0^1\frac{1}{x^{p+\epsilon}}dx$ 收敛. 由比较定理的极限形式知 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}$ 也收敛.

(2) $p\ge1$ 时,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\ln x|/x^p}{1/x}=\lim_{x\to0^+}|\ln x|(\frac{1}{x})^{p-1}=+\infty,$$

由比较定理的极限形式知 $\int_0^1\frac{|\ln x|}{x^p}$ 发散.

□

定理 6.7.26 (Cauchy 收敛准则)**.** *设 f 在任何闭区间 $[c,b]$ 上可积 $(a < c < b)$. 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon > 0$, 存在某个 (依赖于 ϵ 的) 常数 $a < K < b$, 使得对任何 $a < \alpha < \beta < K$, 都有 $|\int_\alpha^\beta f(x)dx| < \epsilon$.*

定理 6.7.27. *设 f 与 $|f|$ 在任何闭区间 $[c,b]$ 上可积 $(a < c < b)$. 如果瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.*

例 6.7.28 (Gamma 函数)**.** $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, 其中 $x > 0$. 可以证明 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, 由此可知对任何正整数 n, 有 $\Gamma(n) = (n-1)!$.

证明: $t = 0$ 可能是瑕点, 考虑瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 及无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 的收敛性.

(1) 瑕积分的收敛性.

- 当 $x \geq 1$ 时, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 是正常积分.
- 当 $0 < x < 1$ 时, 对任何 $t \in (0,1]$, 有 $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^{1-x}}$, 由比较定理知瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛.
- 当 $x \leq 0$ 时, 对任何 $t \in (0,1]$, 有 $t^{x-1}e^{-t} \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{t}$, 由比较定理知瑕积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 发散.

(2) 无穷积分的收敛性. 注意到

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0,$$

由比较定理的极限形式知无穷积分 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ 收敛.

结合这两方面, 对任何 $x > 0$,

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

收敛. 当 $x \leq 0$ 时, 上述积分发散. □

6.7.7 反常积分的例子

例 6.7.29. 设 a 是正实数, b, c 是实数.

(1) 证明: 无穷积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2-bx-c}dx$$

收敛.

(2) 设无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 的值等于 I. 请把无穷积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$$

的值用 a,b,c 与 I 表示.

解. (1) 利用无穷积分的定义, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-|x|}dx &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}(-e^{-x})\big|_0^A = 1,\\ \int_{-\infty}^0 e^{-|x|}dx &= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^{x}dx = \lim_{A\to+\infty}e^{x}\big|_A^0 = 1,\end{aligned}$$

故无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ 收敛. 注意到, 由于 $a>0$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-ax^2-bx-c}}{e^{-|x|}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp\left(x^2\cdot(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}-\frac{|x|}{x^2})\right)} = 0,$$

由比较定理的极限形式, 无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx$ 收敛.

(2) 令 $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$, 利用定积分的换元法, 可得

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} e^{-ax^2-bx-c}dx &= \int_{-M}^{M} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2-4ac}{4a}}dx\\ &= \frac{\exp(\frac{b^2-4ac}{4a})}{\sqrt{a}}\int_{(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}}^{(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}} e^{-y^2}dy.\end{aligned} \tag{6.4}$$

注意到

$$\lim_{M\to+\infty}(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a} = -\infty, \quad \lim_{M\to+\infty}(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a} = +\infty,$$

从而有

$$\lim_{M\to+\infty}\int_{(-M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}}^{(M+\frac{b}{2a})\sqrt{a}} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = I.$$

代入 (6.4) 式, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} e^{-ax^2-bx-c}dx = \frac{\exp(\frac{b^2-4ac}{4a})}{\sqrt{a}}I.$$

□

例 6.7.30. 对非负整数 n, 考虑积分 $\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx$, 人们可以证明当 $A \to +\infty$ 时, 极限 $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx\right)$ 存在, 记作

$$J_n = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx\right).$$

证明:

(1) 当 n 是奇数时, $J_n = 0$.

(2) 对每个非负整数 n, 都有

$$J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n.$$

证明: (1) 当 n 是奇数时, $x^n e^{-x^2}$ 是奇函数, 则有 $\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx = 0$. 对 $A \to +\infty$ 取极限, 可知此时有 $J_n = 0$.

(2) 分部积分, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} x^n e^{-x^2} dx = \int_{-A}^{A} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' e^{-x^2} dx \\
=&\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x^2}|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot e^{-x^2}(-2x) dx \\
=&\frac{A^{n+1}}{n+1} e^{-A^2} - \frac{(-1)^{n+1} A^{n+1}}{n+1} e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_{-A}^{A} x^{n+2} e^{-x^2} dx,
\end{aligned}$$

对 $A \to +\infty$ 取极限, 可得

$$J_n = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{n+1}}{n+1} e^{-A^2} - \frac{(-1)^{n+1} A^{n+1}}{n+1} e^{-A^2}\right) + \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

注意到, 多次使用洛必达法则可得

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{A^{n+1}}{e^{A^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{(n+1)/2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{2} x^{(n-1)/2}}{e^x} = ... = 0,$$

所以有

$$J_n = \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

□

第七章　级数理论

7.1　无穷级数

7.1.1　Motivation

形式的说, 级数就是无穷个数 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依次相加所得的和

$$a_1 + a_2 + ...$$

我们至少见过两个例子.

例 7.1.1. 当我们表示一个无限小数 $a = 0.a_1a_2...$ 时, 实际上是把 a 表示成无穷和

$$a = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ...$$

例 7.1.2. 如果函数 f 有很好的光滑性, 比如说有连续的 n 阶导函数, 则由 Taylor 公式可用多项式函数近似 f

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{当}x\text{与}x_0\text{很接近时},$$

随着 n 的增大, 我们得到 f 的越来越好的近似. 一个自然的问题是, 如果把所有无穷项 $\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\}_{n\geq 0}$ 相加, 是否恰好得到 $f(x)$? 即是否有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

从上面两个例子中我们还可以看出, 所谓无穷个数 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依次相加, 我们能实际 "测量"(或计算) 的量是有限项的部分和

$$S_n = a_1 + ... + a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

如果当 $n \to +\infty$ 时, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限, 则可把该极限视为所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的和.

7.1.2 级数的定义

定义 7.1.3. 无穷数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, S 为这个级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 7.1.4. (1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则对任何实数 k_1, k_2, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1a_n + k_2b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k_1a_n + k_2b_n) = k_1\sum_{n=1}^{\infty} a_n + k_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) 改变有限项的值, 不影响级数的收敛性. 具体的说, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 从某一项起完全一样, 则它们有相同的收敛性.

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 对任何序列 $i_0 = 0 < i_1 < i_2 < ... < i_k < ...$, 定义:

$$b_k = \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} a_j.$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

例 7.1.5 (几何级数)**.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

- 当 $|q| < 1$ 时, 级数收敛, 值为 $\frac{1}{1-q}$.
- 当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散.

命题 7.1.6 (级数收敛的必要条件). 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

7.1.3 正项级数的收敛判别法

如果 $a_n \geq 0, \forall n$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

命题 7.1.7. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是部分和序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界.

定理 7.1.8 (比较判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数, 从某一项起有 $a_n \geq b_n$.

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

(2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例 7.1.9. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛性 $(p > 0)$.

定理 7.1.10 (比较定理的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数, 且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = h,$$

其中 $h \in \mathbf{R}_{\geq 0} \bigcup \{+\infty\}$.

(1) 当 $0 \leq h < +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 当 $0 < h \leq +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

特别的, 当 $0 < h < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的收敛性.

推论 7.1.11 (比阶判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

(1) 如果存在 $p > 1$ 与 $M > 0$, 使得当 n 充分大时有 $a_n \leq \frac{M}{n^p}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(1) 如果存在 $p \leq 1$ 与 $M > 0$, 使得当 n 充分大时有 $a_n \geq \frac{M}{n^p}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

推论 7.1.12 (比阶判别法的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

(1) 如果存在 $p > 1$, 使得 $0 \leq \lim_{n\to\infty} (n^p a_n) < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(1) 如果存在 $p \leq 1$, 使得 $0 < \lim_{n\to\infty} (n^p a_n) \leq +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

将正项级数与几何级数比较, 可以得到如下两个判别法.

定理 7.1.13 (达朗贝尔判别法, d'Alembert). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

其中 $q \in \mathbf{R}_{\geq 0} \bigcup \{+\infty\}$.

(1) 如果 $q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果 $q > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 7.1.14. 当 $q = 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

例 7.1.15. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^\alpha}$, 其中常数 $\alpha > 0, b > 0$.

(1) 当 $b < 1$ 时, 级数收敛.

(2) 当 $b > 1$ 时, 级数发散.

(3) 当 $b = 1$ 时, 如果 $\alpha > 1$ 级数收敛; 如果 $\alpha \leq 1$ 级数发散.

定理 7.1.16 (Cauchy 判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

其中 $l \in \mathbf{R}_{\geq 0} \bigcup \{+\infty\}$.

(1) 如果 $l < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果 $l>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

注 7.1.17. 当 $l=1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

例 7.1.18. (1) 常数 $x>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n})^n$ 收敛.

(2) 设常数 $x>0$, 数列 $\{a_n>0\}$ 的极限为 a. 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{a_n})^n$ 的收敛性.

- $x<a$ 时, 级数收敛.
- $x>a$ 时, 级数发散.
- $x=a$ 时, 级数可能发散, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{a})^n$; 也可能收敛, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{an^{2/n}})^n$.

将正项级数与无穷积分比较, 可以得到如下判别法.

定理 7.1.19 (与无穷积分比较)**.** *设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 如果存在单调递降的非负的连续函数 $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 使得*

$$a_n=f(n),\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

例 7.1.20. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 其中 $p>0$.

例 7.1.21. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$.

7.1.4 交错级数

所谓交错级数是指形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

的级数, 其中 $a_n\geq 0,\forall n\in\mathbf{Z}_+$.

定理 7.1.22 (Leibniz 判别法)**.** *设交错级数* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$*(其中* $a_n \geq 0, \forall n$*) 满足*

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+, a_n \geq a_{n+1}$*(通项的绝对值递减);*

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *收敛.*

证明: 注意到

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

因此偶数项的部分和序列 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增且有上界, 设它的极限为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. 则

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

□

例 7.1.23. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, 其中常数 $p > 0$.

7.1.5 绝对收敛与条件收敛

回忆 Cauchy 收敛准则.

定义 7.1.24. 称实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列, 如果 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 $N(\epsilon)$, 使得

$$|a_m - a_n| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N(\epsilon).$$

定理 7.1.25 (Cauchy 收敛准则)**.** *实数序列* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *有极限当且仅当它是 Cauchy 序列.*

命题 7.1.26 (级数的 Cauchy 收敛准则)**.** *级数* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *收敛的充分必要条件是: 对任何* $\epsilon > 0$*, 存在正整数* N*, 使得*

$$|\sum_{i=m+1}^{n} a_i| < \epsilon, \quad \forall n > m \geq N.$$

由此可得如下命题.

命题 7.1.27. *如果级数* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *收敛, 则级数* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *也收敛.*

定义 7.1.28. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则称则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

例 7.1.29. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, 其中常数 $p>0$.

命题 7.1.30. 绝对收敛的级数经过任何重排之后仍然绝对收敛, 且级数和不变.

定理 7.1.31 (Riemann)**.** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则对任何实数 x, 存在 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的一个重新排列 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=x$.

上述定理的叙述和证明可以参考 `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_series_theorem`, 这表明条件收敛的级数与绝对收敛的级数有显著的差异.

7.1.6 Dirichlet 判别法

设数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和为

$$B_n=b_1+...+b_n,\quad n\geq 1,$$

约定 $B_0=0$, 则 $b_n=B_n-B_{n-1}$.

命题 7.1.32 (Abel 变换, Abel 恒等式)**.**

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_nB_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i.$$

证明*:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i&=\sum_{i=1}^{n}a_i(B_i-B_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n}a_iB_{i-1}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=2}^{n}a_iB_{i-1}=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}B_i\\&=a_nB_n+\sum_{i=1}^{n-1}a_iB_i-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i+1}B_i=a_nB_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i.\end{aligned}$$

□

命题 7.1.33 (Abel 引理)**.** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调数列, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和满足

$$|B_i|\leq M,\quad \forall i\geq 1.$$

则如下不等式成立

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \le (|a_n| + |a_1 - a_n|)M.$$

特别的, 如果 $\{a_i\}$ 是单调递减的非负数列, 则有

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \le a_1 M.$$

证明*:*

$$\begin{aligned}|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| &= |a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i| \\ &\le |a_n B_n| + \sum_{i=1}^{n-1}|(a_i - a_{i+1})B_i| \\ &\le (|a_n| + \sum_{i=1}^{n-1}|a_i - a_{i+1}|)M.\end{aligned}$$

注意到 $\{a_i\}$ 是单调数列, 有

$$\sum_{i=1}^{n-1}|a_i - a_{i+1}| = |a_1 - a_n|,$$

由此得

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \le (|a_n| + |a_1 - a_n|)M.$$

□

定理 7.1.34 (狄利克雷判别法)**.** 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调数列, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

设数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得

$$|\sum_{i=1}^{n} b_i| \le M, \quad \forall n \ge 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 7.1.35 (Abel 判别法)**.** 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调且有界的数列, 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 7.1.36. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\theta \notin \{2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ 收敛.

证明: 数列 $\{\cos n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和为

$$S_n = \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

满足不等式

$$|S_n| \le \frac{2}{2|\sin\frac{\theta}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

因而是有界的. 这样, 由定理7.1.34可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ 收敛. □

例 7.1.37. 设 $\theta \notin \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ 条件收敛.

证明: (1) 我们先证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ 收敛. 为此, 注意到数列 $\{\sin n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和为

$$S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

是有界的. 由定理7.1.34可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ 收敛.

(2) 其次证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{\sqrt{n}}$ 发散. 为此, 用反证法, 假设该级数收敛. 注意到

$$\frac{|\sin n\theta|}{\sqrt{n}} \ge \frac{\sin^2 n\theta}{\sqrt{n}} = \frac{1-\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}},$$

由比较定理, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}}$ 收敛. 利用例7.1.36的结论, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}}$ 收敛. 由此可得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2\sqrt{n}}$$

收敛, 矛盾! 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\theta|}{\sqrt{n}}$ 发散.

结合这两部分可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ 条件收敛. □

7.2 函数项级数

粗略的说, (数值项) 级数是 (可数) 无穷多个数按给定的顺序相加

$$a_1 + a_2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

类似的, 可以考虑把 (可数) 无穷多个函数按给定的顺序相加

$$u_1(x) + u_2(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

人们把这种 “形式和” 称为函数项级数.

设 $u_n(n = 1, 2, ...)$ 是定义在集合 D 上的函数. 对 $x_0 \in D$, 计算数值项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

如果这个级数收敛, 则称 x_0 是函数项级数的收敛点. 否则称 x_0 为发散点.

所有收敛点构成的集合称为函数项级数的收敛域, 记作 $X \subseteq D$. 对任何 $x \in X$, 令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

则 S 是 X 上的函数, 称为函数项级数的和 (函数).

数学中很多函数是用函数项级数描述的, 比如

例 7.2.1. (1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

问题 7.2.2. *和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的定义域是什么? 它是否连续? 是否可导? 可积? 怎么计算它的导数与积分?*

7.3 函数项级数

级数理论是极限理论的特例: 数值项级数的和等于部分和序列的极限

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 + ... + a_n).$$

完全类似的, 函数项级数的和应该等于部分和序列

$$S_n(x) = u_1(x) + ... + u_n(x), \quad n = 1, 2, ...$$

的极限. 为此, 我们需要定义函数序列的极限.

定义 7.3.1. 给定函数序列 $\{f_n : D \to \mathbf{R}\}_{n=1}^{\infty}$. 对于 D 中一点 $x_0 \in D$, 如果极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在, 则称序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在点 x_0 处收敛, 称 x_0 为该序列的收敛点. 所有收敛点构成的集合

$$X = \{x_0 | x_0\text{是序列}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{的收敛点}\}$$

称为序列的收敛域.

在收敛域 X 上, 由如下对应法则

$$X \ni x \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

给出函数 $f : X \to \mathbf{R}$, 称为序列的极限函数, 记作 $\lim_{n\to\infty} f_n$. 对于收敛域 X 的任何子集 Y, 称序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Y 上点点收敛 (或处处收敛) 到 f.

这样, 对函数项级数的研究可以转化成对函数序列极限的研究: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点是部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛点, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数是部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数.

我们关心的极限函数的分析性质, 即下面的

问题 7.3.2. *函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限函数是否连续? 可导? 可积? 怎么计算其导数与积分?*

例 7.3.3. 考虑函数序列

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, ...$$

容易看出, 该函数序列的收敛域为 $(-1, 1]$, 其极限函数 $f : (-1, 1] \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} -1 < x < 1, \\ 1, & \text{如果} x = 1. \end{cases}$$

从这个例子可以发现, 极限函数的定义域可能会缩小, 连续函数的极限不一定是连续函数.

7.4 函数序列的极限

我们先来研究极限函数的连续性, 具体的说, 考虑如下问题.

问题 7.4.1. 设函数序列 $\{f_n \in C((a,b))\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 (a,b) 上点点收敛, 其极限函数 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 是否连续?

考虑 $x_0 \in (a,b)$ 处的连续性. 为此需要对任何 $\epsilon > 0$, 找某个 $\delta > 0$, 使得对任何 $|x-x_0| < \delta$, 都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

注意到

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

由于 f_n 连续, 可估计上式的中间项; 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 可估计剩下两项.

确切的说, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 存在 $N(x) \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n > N(x)$, 有

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 存在 $N(x_0) \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n > N(x_0)$, 有

$$|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

由于 f_n 连续, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $|x - x_0| < \delta$, 都有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

为了把上述三个式子相加, 需要

$$n > N(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

能否找到这样的 n? 除此之外, 逻辑上也有问题: 为了确定选哪个 n, 需要先找到 δ; 但为了确定选哪个 δ, 又必须先找出 n.

解决的办法. 如果所有的 $\{N(x)\}_{x\in(a,b)}$ 能够选成同一个数 N, 则只要取定 $n > N$, 再由它选定 δ. 这样就可以把上述三个不等式相加. 人们把这个技术化的条件称为 "一致收敛".

7.4.1 函数序列的一致收敛性

定义 7.4.2. 称函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到 f, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n \geq N$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

例 7.4.3. 考虑函数序列 $\{f_n(x)=x^n\}_{n=1}^{\infty}$, 对 $0<a<1$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[-a,a]$ 上一致收敛, 但该序列在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

定义 7.4.4. 称函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛, 如果它的部分和序列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛.

7.4.2 判断一致收敛

定理 7.4.5 (函数序列一致收敛的 Cauchy 准则)**.** *函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n,m\geq N$, 有*

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon, \quad \forall x\in I.$$

推论 7.4.6 (函数级数一致收敛的 Cauchy 准则)**.** *函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是: 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $m>n\geq N$, 有*

$$|\sum_{i=n+1}^{m} u_i(x)|<\epsilon, \quad \forall x\in I.$$

或者等价的说, 对任何 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{Z}_+$, 使得对任何 $n\geq N$ 以及 $p\in\mathbf{Z}_+$, 有

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)|<\epsilon, \quad \forall x\in I.$$

取 $p=1$ 可得一致收敛的必要条件.

推论 7.4.7 (函数级数一致收敛的必要条件)**.** *设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于零函数.*

定理 7.4.8 (Weierstrass 强级数判别法)**.** *设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足*

$$|u_n(x)|\leq a_n, \quad \forall x\in I, \quad n=1,2,...$$

如果数列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例 7.4.9. 对任何正数 a, 函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在区间 $[-a,a]$ 上一致收敛, 但这个函数级数在 $\mathbf{R}$ 上不一致收敛.

7.4.3 极限函数的连续性

定理 7.4.10 (极限函数的连续性)**.** 设由连续函数构成的序列 $\{f_n \in C(I)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛到 f, 则 f 在 I 上连续.

推论 7.4.11 (和函数的连续性)**.** 设 $u_n(x)(n=1,2,...)$ 是区间 I 上的连续函数, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 则其和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上也连续.

由该推论知, 在一致收敛的条件下,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_k).$$

例 7.4.12. $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

例 7.4.13. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 与 $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

7.4.4 极限函数的积分

定理 7.4.14 (函数序列取极限与积分的可交换性)**.** 设 $\{f_n \in C(I)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛到 f, 则对任何 $a<b\in I$, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

推论 7.4.15 (逐项积分)**.** 设 $u_n(x)(n=1,2,...)$ 是区间 I 上的连续函数, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 一致收敛, 则对任何 $a<b\in I$ 有

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

例 7.4.16. 设常数 $0<a<1$. 求积分

$$\int_0^a\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)dx$$

例 7.4.17.

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

7.4.5 极限函数的求导

定理 7.4.18 (函数序列取极限与求导的可交换性). 设函数 $f_n(n=1,2,...)$ 在区间 I 上有连续的导函数, 函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上点点收敛到 f, 导函数序列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛, 则 f 在 I 上可导, 并且有

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

推论 7.4.19 (逐项求导). 设 $u_n(x)(n=1,2,...)$ 在区间 I 上有连续的导函数, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上点点收敛, 由导函数构成的函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 I 上一致收敛, 则和函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上可导, 且有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

例 7.4.20. Riemann zeta 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上可导.

7.5 幂级数

幂级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

的函数项级数. 做坐标变换 $y=x-a$ 之后, 我们只需要考虑 $a=0$ 的情况

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

它在 $x=0$ 处收敛. 除此之外, 注意到如下事实.

定理 7.5.1 (Abel). 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处收敛, 则该幂级数在区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上点点绝对收敛.

证明: 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. 特别的, $\{|a_n x_0^n|\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 不妨设

$$|a_n x_0^n| \le M, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

对任何 $|x|<|x_0|$, 注意到

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot (\frac{|x|}{|x_0|})^n \le M(\frac{|x|}{|x_0|})^n,$$

由比较定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. □

由 Abel 定理可知, 如果级数在某点 x_1 处发散, 则级数在 $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ 上发散.

定理 7.5.2. *设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是给定的幂级数, 则存在 $R \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, 使得*

(1) *幂级数在 $(-R, R)$ 上点点绝对收敛.*

(2) *幂级数在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 上发散.*

推论 7.5.3. *幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域一定是如下集合之一:*

$$\{0\}, \quad \mathbf{R}, \quad (-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R), \quad [-R, R],$$

其中 $R \in \mathbf{R}_+$.

具体的说, 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是任意给定的幂级数, 则存在 $R \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, 使得

(1) 幂级数在 $(-R, R)$ 上点点绝对收敛.

(2) 幂级数在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 上发散.

称上述定理中的 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

问题 7.5.4. *如何确定幂级数的收敛半径?*

定理 7.5.5. *设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

其中 $l \in [0, +\infty]$, 则该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{l}$.

定理 7.5.6 (Cauchy-Hadamard)**.** *设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

其中 $l \in [0, +\infty]$, 则该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{l}$.

例 7.5.7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 的收敛区间.

7.5.1 幂级数的分析性质

定理 7.5.8 (内闭一致收敛). 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则对任何正数 $b < R$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-b, b]$ 上一致收敛.

推论 7.5.9 (幂级数的连续性). 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则它在区间 $(-R, R)$ 内连续.

推论 7.5.10 (幂级数的积分). 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则对任何 $-R < x < R$ 有

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

特别的, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径 $\geq R$.

推论 7.5.11 (幂级数的导数). 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则它的和函数 $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 中可导, 且有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

特别的, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $\geq R$.

证明: 对任何 $0 < b < R$, 我们证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $[-b, b]$ 上一致收敛.

选定 $b < b_0 < R$. 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 它在 $x = b_0$ 处收敛. 特别的, 序列 $\{|a_n b_0^n|\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 不妨设为

$$|a_n b_0^n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

这样, 对任何 $x \in [-b, b]$, 有

$$|n a_n x^{n-1}| \leq n|a_n| \cdot b^{n-1} = |a_n b_0^n| \cdot \frac{n}{b} \cdot (\frac{b}{b_0})^n \leq M \frac{n}{b_0} (\frac{b}{b_0})^{n-1},$$

利用达朗贝尔判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{n}{b_0} (\frac{b}{b_0})^{n-1}$ 收敛, 再由 Weierstrass 强级数判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $[-b, b]$ 上一致收敛. □

推论 7.5.12. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径都等于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径.

推论 7.5.13. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则它的和函数 $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 中有任意阶导函数, 且有

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_nx^{n-k},$$

它们的收敛半径都是 R.

例 7.5.14. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $\mathbf{R}$. 记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

则 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 它的积分为

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b\frac{x^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!})=f(b)-f(a).$$

f 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, 导函数为

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx=f(x).$$

7.5.2 Taylor 级数

什么样的函数可以表示成幂级数?

问题 7.5.15. 给定函数 f, 是否存在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 使得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad \forall x\in(x_0-r,x_0+r).$$

由命题7.5.13可得如下必要条件. 如果 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 上能表示成幂级数, 则 f 在该区间上各阶导函数都存在且连续.

定义 7.5.16. 如果 f 在区间 I 上各阶导函数都存在且连续, 则称 f 是 I 上的光滑函数, 记作 $f\in C^{\infty}(I)$.

如何确定各个系数 a_n?

定理 7.5.17 (幂级数展开的唯一性). *如果函数 f 在区间 (x_0-r, x_0+r) 上能表示成幂级数*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r),$$

则

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,...$$

这样, 如果希望把光滑函数 $f \in C^{\infty}((x_0-r, x_0+r))$ 表示成幂级数, 则至多一个候选幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

我们把它称为 f 的 Taylor 级数, 记作

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

但我们还不知道 Taylor 级数是否收敛, 更不知道它是否收敛到 f.

Taylor 级数的部分和为 $S_n(x)=\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$, 它与 f 的差异为

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x),$$

这里 $R_n(x)$ 为 Taylor 展开的余项, 可以表示成 Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 是某个适当选取的数.

由幂级数收敛的定义知: 在区间 (x_0-r, x_0+r) 上 Taylor 级数收敛到 f 的充分必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x)=0, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r).$$

定理 7.5.18. *设 f 是光滑函数. 如果存在常数 M, 使得*

$$|f^n(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+, \forall x \in (x_0-r, x_0+r),$$

则 f 在 (x_0-r, x_0+r) 上能表示成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r).$$

例 7.5.19. $f(x)=\sin x$.

证明*:* $\sin x$ 的 Taylor 级数为

$$\sin x \sim \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

它的收敛域为 $\mathbf{R}$, 收敛半径为 $+\infty$. 为了研究这个 Taylor 级数的收敛行为, 我们需要估计余项.

$\sin x$ 在 $x = 0$ 附近带 Lagrange 余项的 Taylor 公式为:

- 展开至 x^{2n+1} 项:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} \sin(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0,1).$$

- 展开至 x^{2n} 项:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \cos(\theta' x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta' \in (0,1).$$

余项分别为

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad R_{2n}(x) = \frac{(-1)^n \cos(\theta' x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

所以有

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 1, 2, ...$$

则对任何正数 r, 在区间 $(-r, r)$ 上有:

$$|R_n(x)| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in (-r, r).$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 因此在 $(-r, r)$ 上, 上述 Taylor 级数收敛到 $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

由 r 的任意性知 Taylor 级数在 $\mathbf{R}$ 上收敛到 $\sin x$. □

例 7.5.20. 类似的, 有

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

例 7.5.21. 设 α 是给定的实数. 利用 Cauchy 余项的 Taylor 公式可以证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^{\alpha},\quad \forall |x|<1.$$

例如

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \forall -1<x<1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n=\frac{1}{(1-x)^3},\quad \forall -1<x<1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}},\quad \forall -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4},$$

命题 7.5.22 (Taylor 公式的 Cauchy 余项)**.** *设函数 f 在区间 I 上有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则对任何 $a,b\in I$, 存在 $0<\theta<1$ 使得:*

$$f(b)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_n(b),$$

其中余项 (称为 Cauchy 余项) 为

$$R_n(b)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{n!}(1-\theta)^n(b-a)^{n+1}.$$

例 7.5.23. 设 $a\notin \mathbf{Z}_{\geq 0}$. 证明: 对任何 $-1<x<1$, 有

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n.$$

证明: 利用带 Cauchy 余项的 Taylor 公式, 得

$$(1+x)^a=\sum_{i=0}^{n}\frac{a(a-1)...(a-i+1)}{i!}x^i+R_n(x),$$

其中余项为

$$\begin{aligned}R_n(x)=&\ \tfrac{a(a-1)...(a-n)}{n!}(1+\theta x)^{a-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}\\ =&\ \tfrac{a(a-1)...(a-n)}{n!}x^{n+1}(\tfrac{1-\theta}{1+\theta x})^n(1+\theta x)^{a-1}.\end{aligned}$$

下面来证明: 对任何固定的 $-1<x<1$, 有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

为此, 注意到如下事实:

(1) 对任何 $-1 < x < 1$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-n)}{n!} x^{n+1}$ 绝对收敛 (达朗贝尔判别法). 特别的, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(a-1)...(a-n)}{n!} x^{n+1} = 0.$$

(2) 显然 $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, 所以 $0 < (\frac{1-\theta}{1+\theta x})^n < 1$.

(3)

$$1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|,$$

所以 $(1+\theta x)^{a-1}$ 介于 $(1-|x|)^{a-1}$ 与 $(1+|x|)^{a-1}$ 之间, 上下界 $(1-|x|)^{a-1}$ 与 $(1+|x|)^{a-1}$ 都是与 n 无关的常数.

结合这三点可知: 对任何固定的 $-1 < x < 1$, 有 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. 因此

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} x^n, \quad \forall -1 < x < 1.$$

$\square$

第八章　附录

8.1　复合函数的高阶导数

问题 8.1.1. 如何计算复合函数的高阶导函数 $(g\circ f)^{(n)}$?

定义 8.1.2. 令 $[n]=\{1,2,...,n\}$. 称 $[n]$ 的子集族 $P=\{A_1,...,A_k\}$ 为 $[n]$ 的一个分组方案, 如果 $A_1,...,A_k$ 是 $[n]$ 的非空子集, 且满足

$$\cup_{t=1}^{k}A_t=[n],\quad 且 A_i\cap A_j=\emptyset,\forall i\neq j.$$

定理 8.1.3. 设函数 f,g 都有 n 阶导数, 则

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{[n]的分组方案P=\{A_1,...,A_k\}} g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k}f^{(|A_i|)}(x).$$

证明: 对 n 用归纳法, 假设 n 时命题成立, 来证明 $n+1$ 的情形.

注意到, 对 $[n]$ 的分组方案 $P=\{A_1,...,A_k\}$, 可构造出 $(k+1)$ 个 $[n+1]$ 的分组方案:

$$\{\{n+1\},A_1,...,A_k\},\quad \{A_1\cup\{n+1\},A_2,...,A_k\},\quad ...,\{A_1,...,A_{k-1},A_k\cup\{n+1\}\},$$

当 P 取遍 $[n]$ 的分组方案时, 上述构造不重复的取遍了 $[n+1]$ 的所有分组方案. 由此及归纳假

设, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{[n+1]\text{的分组方案}Q=\{B_1,\ldots,B_k\}} g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k} f^{(|B_i|)}(x)\\
=&\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\ldots,A_k\}} g^{(k+1)}(f(x))\cdot f^{(1)}(x)\cdot\prod_{i=1}^{k} f^{(|A_i|)}(x)\\
&+\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\ldots,A_k\}} g^{(k)}(f(x))\cdot f^{(|A_1|+1)}(x)\cdot\prod_{i=2}^{k} f^{(|A_i|)}(x)+\ldots\\
&+\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\ldots,A_k\}} g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k-1} f^{(|A_i|)}(x)\cdot f^{(|A_k|+1)}(x)\\
=&\left(\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\ldots,A_k\}} g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k} f^{(|A_i|)}(x)\right)'\\
=&\left((g\circ f)^{(n)}\right)'(x)\\
=&(g\circ f)^{(n+1)}(x),
\end{aligned}
$$

这就完成了归纳法. □

推论 8.1.4. 设函数 f,g 都有 n 阶导数, 则

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{1v_1+\ldots+nv_n=n}\frac{n!}{(v_1)!\ldots(v_n)!(1!)^{v_1}\ldots(n!)^{v_n}}g^{(v_1+\ldots+v_n)}(f(x))\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)}(x))^{v_i},$$

其中 $\sum\limits_{1v_1+\ldots+nv_n=n}$ 表示对所有满足 $1v_1+\ldots+nv_n=n$ 的 n 元非负整数组 $(v_1,\ldots,v_n)$ 求和.

证明*:* 定理8.1.3中

□

推论 8.1.5. 设函数 f,g 都有 n 阶导数, 则

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{m\geq 1}\sum_{i_1+\ldots+i_m=n}\frac{n!}{m!(i_1)!\ldots(i_m)!}g^{(m)}(f(x))\cdot f^{(i_1)}(x)\cdot\ldots\cdot f^{(i_m)}(x),$$

其中 $\sum\limits_{i_1+\ldots+i_m=n}$ 表示对所有满足 $i_1+\ldots+i_m=n$ 的 m 元正整数组 $(i_1,\ldots,i_m)$ 求和.

例 8.1.6. 设 $h(J)=\exp(\frac{J^2}{2\alpha})$, 计算 $h^{(n)}(0)$.

证明: 定义函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(J)=\frac{J^2}{2\alpha}$ 与 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(y)=e^y$, 则 $h=g\circ f$. 利用定理8.1.3, 有

$$(h)^{(n)}(0)=\sum_{\text{把}1,2,\dots,n\text{两两一组的分组}}(\frac{1}{\alpha})^{n/2}.$$

□

例 8.1.7. 令 $S(x)=\frac{\alpha}{2}x^2-\lambda x^3$, 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-S(x)}dx$.

证明: 熟知高斯积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

由此可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha}{2}x^2+Jx}dx=\int e^{-(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x-\frac{J}{\alpha}))^2}d(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x-\frac{J}{\alpha}))e^{\frac{J^2}{2\alpha}}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{\frac{J^2}{2\alpha}}.$$

两边对 J 求 n 阶导数, 并考虑在 $J=0$ 处的值, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx=\frac{d^n}{dJ^n}|_{J=0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha}{2}x^2+Jx}dx=\frac{d^n}{dJ^n}|_{J=0}(\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{\frac{J^2}{2\alpha}}),$$

这样就把计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx$ 转化成计算高阶导数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\frac{d^n}{dJ^n}|_{J=0}(e^{\frac{J^2}{2\alpha}}).$$

利用例8.1.6的结果, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\sum_{\text{把}1,2,\dots,n\text{两两一组的分组}}(\frac{1}{\alpha})^{n/2}.$$

这样, 我们可以计算积分

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-S(x)}dx\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x^3)^n}{n!}e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^3)^n\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}dx\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\sum_{n\text{个顶点, 每个顶点连出3条边的图}}(\frac{1}{\alpha})^{\text{图中边的数目}}.\end{aligned}$$

□

注 8.1.8. 以下文字直接摘抄自 *"Surely You're Joking, Mr. Feynman!"*. Feynman 描述自己是如何发现用例8.1.7计算路径积分的.

...That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign–it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals....

...The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me...

...But I was very lucky. When one of the guys was explaining a problem, I said, "Why don't you do it by differentiating under the integral sign?" In half an hour he had it solved, and they'd been working on it for three months. So, I did something, using my "different box of tools." Then I came back from Chicago, and I described the situation–how much energy was released, what the bomb was going to he like, and so forth....

很容易把上述结果推广到多元的情形. 设 $(M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ 是正定的对称的 $n\times n$ 矩阵. 则

$$\int ... \int \exp(-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2)dx_1...dx_n=(\pi)^{n/2}.$$

$$\int ... \int \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}M_{ij}x_ix_j)dx_1...dx_n=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det M}}.$$

$$\int ... \int \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}M_{ij}x_ix_j+\sum_{k=1}^{n}J_kx_k)dx_1...dx_n=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det M}}\exp(\frac{1}{2}J^tM^{-1}J), \tag{8.1}$$

其中 J 表示 $J_1,...,J_n$ 构成的列向量, M^{-1} 表示 M 的逆矩阵.

对 (2) 式两边求高阶偏导数, 并考虑在 $J_1=...=J_n=0$ 处的值, 则有

$$\frac{\partial^k}{\partial J_{i_1}...\partial J_{i_k}}|_{J_1=...=J_n=0}\int \exp(-\frac{1}{2}x^tMx+J^tx)=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det M}}\frac{\partial^k}{\partial J_{i_1}...\partial J_{i_k}}|_{J_1=...=J_n=0}\exp(\frac{1}{2}J^tM^{-1}J),$$

此即

$$\int x_{i_1}...x_{i_k}\exp(-\frac{1}{2}x^tMx)=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det M}}\frac{\partial^k}{\partial J_{i_1}...\partial J_{i_k}}|_{J_1=...=J_n=0}\exp(\frac{1}{2}J^tM^{-1}J), \tag{8.2}$$

这就把计算积分 $\int x_{i_1}...x_{i_k}\exp(-\frac{1}{2}x^tMx)$ 转化成计算高阶偏导数:

$$\frac{\partial^k}{\partial J_{i_1}...\partial J_{i_k}}|_{J_1=...=J_n=0}\exp(\frac{1}{2}J^tM^{-1}J).$$

定理 8.1.9. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 都是光滑函数, 则对任何映射 $i:\{1,2,...,k\}\to\{1,2,...,n\}$, 有

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i(1)}...\partial x_{i(k)}}(g\circ f)=\sum_{1,2,...,k\text{的分组方案}P:\{1,2,...,k\}=\cup S_j}g^{(\text{组的总数})}(f)\prod_j(\prod_{k\in S_j}\frac{\partial}{\partial x_{i(k)}})f.$$

例 8.1.10. 利用定理8.1.9计算:

$$\frac{\partial^k}{\partial J_{i_1}...\partial J_{i_k}}|_{J_1=...=J_n=0}\exp(\frac{1}{2}J^tM^{-1}J),$$

并把计算结果表示成 *Feynman diagram.*

证明: 定义函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, f(J_1,...,J_n)=\frac{1}{2}J^tM^{-1}J$ 与 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(y)=e^y$, 则 $h=g\circ f$.

注意到, 在 f 的各阶偏导数中, 只有二阶偏导数在 $(J_1,...,J_n)=(0,...,0)$ 处的值可能非 0, 其他各阶偏导数在 $(J_1,...,J_n)=(0,...,0)$ 处的值一定为 0, 且有

$$\frac{\partial}{\partial J_k}\frac{\partial}{\partial J_l}f(0,...,0)=(M^{-1})_{kl},$$

其中 $(M^{-1})_{kl}$ 表示矩阵 M^{-1} 的矩阵元. 这样, 利用定理8.1.9, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^k}{\partial J_{i(1)}...\partial J_{i(k)}}h(0,...,0)\\=&\sum_{\text{两两一组的分组方案}P:\{1,2,...,k\}=\cup S_j}g^{(\text{组的总数})}(f)\prod_j(\prod_{k\in S_j}\frac{\partial}{\partial x_{i(k)}})f\\=&\sum_{\text{两两一组的分组方案}P:\{1,2,...,k\}=\cup S_j}\prod_j(M^{-1})_{i(S_j)},\end{aligned}$$

我们按如下方式理解 $(M^{-1})_{i(S_j)}$: 如果 $S_j=\{a,b\}$, 则 $(M^{-1})_{i(S_j)}$ 表示矩阵 M^{-1} 的 $i(a),i(b)$ 矩阵元 $(M^{-1})_{i(a)i(b)}$. □

由这个例子, 我们可用如下方法计算积分 $\int x_{i(1)}...x_{i(k)}\exp(-\frac{1}{2}x^tMx)$.

- 画出 k 个顶点, 在第 $a(1\leq a\leq k)$ 个顶点上标志 $i(a)$.
- 把所有 k 个顶点两两一组的分组, 画出所有可能的分组方案.

- 对于每一个分组方案 P, 对其中每一组, 如果这一组的两个成员的标志分别为 $i(a), i(b)$, 则对这组赋予因子 $(M^{-1})_{i(a)i(b)}$. 把所有 $\frac{k}{2}$ 个组的因子乘起来 (并再乘上 $\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det M}}$), 把所得的总乘积赋予 P.

- 将所有分组方案所赋予的数求和, 得到的总和就是积分 $\int x_{i(1)} ... x_{i(k)} \exp(-\frac{1}{2}x^t Mx)$ 的值.