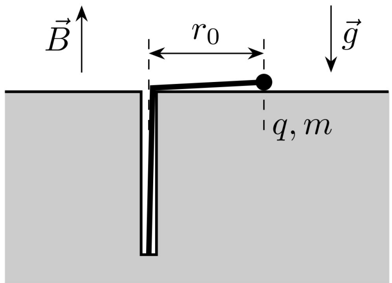
Đề thi và Lời giải
Olympic Vật lý toàn Nga năm 2024
Vòng Chung kết Khối 11

Sưu tầm và biên soạn bởi Physics Pen

Câu I:

Cho một tấm được làm từ vật liệu không dẫn điện có khoan một lỗ nhỏ thẳng đứng theo hướng vuông góc với bề mặt của tấm, độ sâu của lỗ nhỏ hơn độ dày của tấm. Một đầu của một sợi dây cao su có hệ số đàn hồi k được gắn cố định vào đáy lỗ. Chiều dài tự nhiên của dây cao su bằng với độ sâu của lỗ. Đầu còn lại của sợi dây được gắn với một viên bi có khối lượng m và điện tích q. Tấm được đặt nằm ngang trong trọng trường $\vec{g}$ và bề mặt của tấm là nhẵn. Một từ trường đồng nhất có vector cảm ứng từ $\vec{B}$ ngược hướng với gia tốc trọng trường $\vec{g}$ được thiết lập. Ban đầu, viên bi nằm tại vị trí cách lỗ một khoảng r_0 sau đó được thả ra với vận tốc có phương vuông góc với dây cao su sao cho viên bi chuyển động trên một đường tròn.



Hình 1

1. Xác định vận tốc góc của viên bi khi nó chuyển động theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ (nhìn từ trên xuống).

Lực tác dụng lên viên bi thay đổi tuyến tính theo vector vị trí $\vec{r}$ và vận tốc $\vec{v}$ của viên bi. Do đó, nếu ta tìm được hai phương trình chuyển động khác nhau $\vec{r}_1(t)$ và $\vec{r}_2(t)$ mô tả chuyển động của viên bi dưới tác dụng của một lực có đặc tính nêu trên thì phương trình $\vec{r}(t) = \alpha\vec{r}_1(t) + \beta\vec{r}_2(t)$, với α và β là các hằng số, cũng sẽ mô tả một chuyển động khả dĩ của viên bi dưới tác dụng của một lực tương tự. Ví dụ, nếu ta thả viên bi từ cùng một vị trí ban đầu như ở ý 1 mà với vận tốc đầu bằng không thì chuyển động của nó có thể xem như là chồng chập của các chuyển động tròn đã được khảo sát ở ý trên.

2. Xác định khoảng cách ngắn nhất của viên bi so với lỗ nếu viên bị được thả ra với vận tốc ban đầu bằng không tại vị trí cách lỗ một khoảng r_0.
3. Sau bao lâu kể từ khi thả, viên bi lại cách lỗ một khoảng r_0?
4. Trong trường hợp $q^2B^2/mk = 1/2$, sau bao lâu kể từ khi được thả, viên bi sẽ quay lại vị trí ban đầu lần đầu tiên? Phác hoạ quỹ đạo của viên bi trong trường hợp này.

Câu II:

Môt lượng nhỏ thuỷ ngân được đổ lên mặt trên của một hình trụ đặc có tiết diện S. Biết góc thấm ướt của vật liệu làm nên hình trụ là θ, hệ số căng mặt ngoài của thuỷ ngân là σ, khối lượng riêng của thuỷ ngân là ρ và gia tốc trọng trường có độ lớn g. Giả sử các thông số đã cho thoả mãn bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll S$$

1. Xác định thể tích tối thiểu cần đổ V_0 để thuỷ ngân có thể bao phủ toàn bộ đáy trên của hình trụ.

Một lượng thuỷ ngân có thể tích $V < V_0$ được đổ lên mặt trên của hình trụ. Sau đó, một hình trụ khác có cùng tiết diện nhưng được làm bằng vật liệu không dính ướt thuỷ ngân được đặt cẩn thận lên trên. Giả sử các hình trụ và thuỷ ngân luôn có tính đối xứng trục.

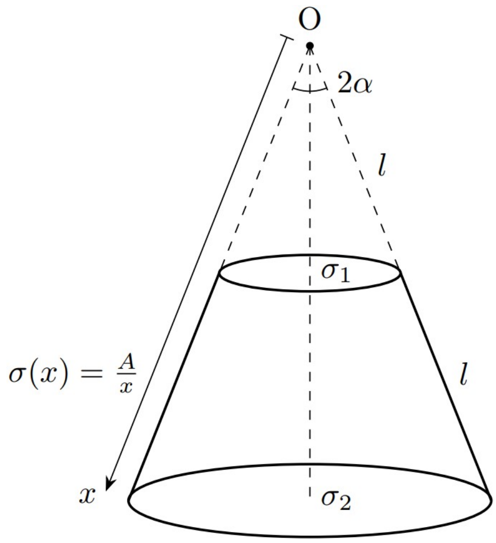
2. Khối lượng tối thiểu m_1 của hình trụ phía trên là bao nhiêu để thuỷ ngân có thể tiếp xúc hoàn toàn với đáy trên của khối trụ phía dưới?

3. Khối lượng tối thiểu m_2 của hình trụ phía trên là bao nhiêu để thuỷ ngân có thể chảy ra từ khe hở giữa hai khối trụ? Giả sử đường biên giữa đáy dưới của hình trụ và mặt bên của nó là đường tròn có bán kính rất nhỏ so với độ dày của lớp thuỷ ngân.

Câu III:

Một khối đặc có dạng nón cụt, không dẫn điện, được tích điện trên mặt bên sao cho mật độ điện tích mặt thay đổi theo khoảng cách x đến đỉnh O theo công thức $\sigma(x) = A/x$ với A là một hằng số dương đã biết. Đáy trên và đáy dưới của hình nón cụt được tích điện đều với mật độ điện tích tương ứng là σ_1 và σ_2. Độ dài đường sinh và nửa góc ở đỉnh của hình nón đầy đủ lần lượt là $2l$ và $\alpha = 30°$, độ dài đường sinh của hình nón cụt là l.

1. Giả sử $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$ với σ_0 là một giá trị đã biết. Xác định độ lớn điện trường E_O tại điểm O trên hình 3.



Hình 3

Bên trong hình nón cụt, người ta đục một lỗ nhỏ dọc theo trục đối xứng của nó. Một điện tích thử $-q$ với $q > 0$, khối lượng m, có thể di chuyển không ma sát bên trong lỗ này. Giả sử $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

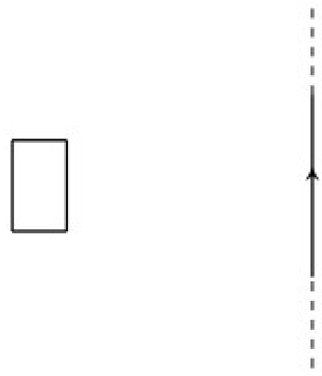
2. Xác định khoảng cách từ vị trí cân bằng của điện tích thử bên trong hình nón cụt tới điểm O. Đồng thời, hãy chỉ ra rằng, khoảng cách này không phụ thuộc vào σ_0.

3. Với giá trị nào của σ_0 thì cân bằng của điện tích thử ở vị trí vừa tìm được ở ý trên là bền? Tìm chu kỳ dao động bé của điện tích thử quanh vị trí cân bằng này.

Trong suốt bài toán, hình nón cụt được giữ cố định. Cho biết hằng số điện môi của vật liệu làm nên hình nón cụt là $\varepsilon = 1$, bỏ qua tác dụng của trọng lực và các hiện tượng từ tính.

Câu IV:

Một khung dây cứng, mảnh hình chữ nhật có thể di chuyển trên bề mặt nằm ngang và nhẵn, trên bề mặt có gắn cố định một sợi dây thẳng, mảnh, và dài vô hạn như hình 4. Ban đầu, cường độ dòng điện trong dây dẫn và khung dây bằng không. Khung dây nằm yên ở vị trí sao cho một cặp cạnh của nó song song với dây dẫn và khoảng cách giữa dây dẫn và cạnh gần nhất của khung dây rất lớn so với kích thước của khung. Sau đó, cường độ dòng điện trong dây dẫn được tăng lên đến một giá trị cực đại nào đó và được giữ không đổi ở giá trị này. Giả sử thời gian thực hiện là rất ngắn, đủ để bỏ qua chuyển động của khung dây trong quá trình này. Khi cường độ dòng điện trong dây dẫn đạt giá trị cực đại, vận tốc của khung dây là v_0. Bỏ qua độ tự cảm của khung và xem



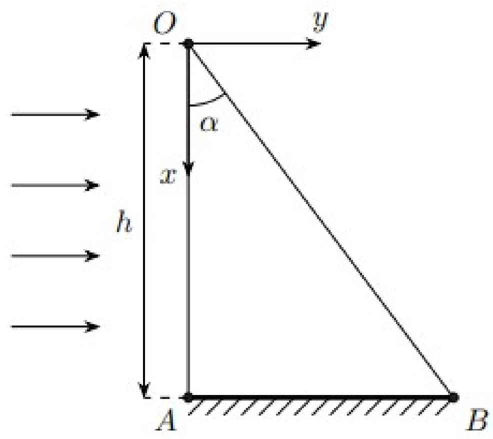
Hình 4

như điện trở của khung không đổi. Biết rằng sau một khoảng thời gian rất dài kể từ khi cường độ dòng điện trong dây dẫn đạt giá trị cực đại, vận tốc của khung không đổi và bằng v_1. Tìm v_1.

Câu V:

Nhà thí nghiệm Gluck đã tiến hành một thí nghiệm quang học sử dụng một lăng kính đặc có tiết diện mặt cắt là tam giác vuông OAB với các cạnh góc vuông là AB và $OA = h$. Tất cả các mặt của lăng kính đều song song hoặc vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Nếu ta sử dụng hệ toạ độ Oxy như được chỉ ra trên hình 5, chiết suất của vật liệu làm lăng kính thay đổi theo công thức:

$$n(x) = \frac{3}{2 - \dfrac{x}{h}}$$



Hình 5

Gluck quyết định chiếu một chùm sáng song song lên mặt bên OA của lăng kính. Mặt đáy AB được phủ một lớp vật liệu có khả năng hấp thụ toàn bộ ánh sáng đi qua nó. Lăng kính được đặt trong không khí, giả sử chiết suất của không khí bằng 1. Chỉ xét có tia sáng đi vào lăng kính thông qua mặt bên OA.

1. Xét một tia sáng đi vào lăng kính tại điểm có toạ độ x_0. Xác định phương trình quỹ đạo của tia sáng đó bên trong lăng kính.

2. Với những giá trị nào của góc $A\hat{O}B = \alpha$, các tia sáng sẽ đi qua mọi điểm trên mặt bên OB của lăng kính?

3. Với những giá trị nào của góc α, tất cả các tia sáng khi đạt tới mặt bên OB của lăng kính đều bị khúc xạ và đi ra không khí?

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu I:

1. Phương trình chuyển động của viên bi:

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

khi viên bi chuyển động trên quỹ đạo tròn bán kính r_0, gia tốc hướng tâm của nó có nguồn gốc từ lực từ và lực đàn hồi của sợi dây cao su, lực từ hướng vô trong hay hướng ra ngoài quỹ đạo phụ thuộc vào chiều chuyển động của hạt. Do đó, độ lớn vận tốc góc của hạt trong chuyển động này được xác định bởi:

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 = \pm qB\omega r_0 \implies \omega^2 \pm \frac{qb}{m}B - \frac{k}{m} = 0$$

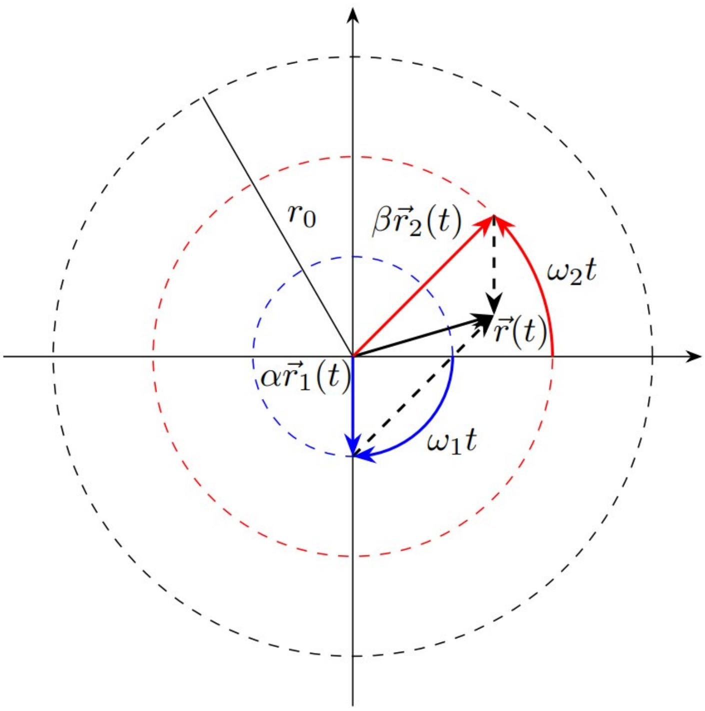
đặt $\Omega \equiv \dfrac{qB}{2m}$ và $\omega_0^2 \equiv \dfrac{k}{m}$, độ lớn vận tốc góc của hạt khi nó chuyển động theo chiều kim đồng hồ là:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m}$$

và khi chuyển động ngược chiều kim đồng hồ là:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} < \omega_1$$

2.



Gọi $\vec{r}_1(t)$ và $\vec{r}_2(t)$ lần lượt là vector vị trí của viên bi khi nó chuyển động theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ. Độ lớn vận tốc của viên bi trong mỗi trường hợp là $|\vec{v}_1| = \omega_1 r_0$ và $|\vec{v}_2| = \omega_2 r_0$ tương ứng. Nếu sự chồng chất của hai chuyển động này được biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{r}(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\vec{r}_1(t) + \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}\vec{r}_2(t)$$

thì theo tính đồng nhất của phương trình chuyển động, phương trình này cũng mô tả chính xác chuyển động mà chúng ta đang cần khảo sát. Thật vậy, ta có thể dễ dàng xác định các hệ số α và β trong biểu thức của đề bài: vì $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) \equiv \vec{r}_0$ và $|\vec{v}_1(0)| = \omega_1 r_0 = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}|\vec{v}_2(0)|$ nên $\vec{r}(0) = 0$ và $\vec{v}(0) = \vec{0}$. Như vậy, khoảng cách của viên bi tính từ lỗ khoan tại thời điểm t là:

$$r^2(t) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}r_0\right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}r_0\right)^2 + 2\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}r_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}r_0 \cdot \cos[(\omega_1+\omega_2)t]$$

suy ra:

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1+\omega_2}\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t]}$$

có thể thấy, tần số góc của viên bi trong chuyển động mới là $\omega_1+\omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}$, giá trị nhỏ nhất của $r(t)$ là:

$$r_{min} = \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}}r_0$$

3. Từ phương trình của $r(t)$ có thể thấy rằng, khoảng cách lớn nhất của viên bi so với lỗ khoan là r_0, khoảng cách này đạt được tại những thời điểm:

$$t_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}}n \quad n = (0,1,2,\dots)$$

như vậy, thời gian từ lúc xuất phát đến khi $r(t) = r_0$ lần đầu tiên là:

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}}$$

4. Với tỷ lệ đã cho, ta có:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{3}\vec{r}_1(t) + \frac{2}{3}\vec{r}_2(t)$$

và:

$$r(t) = \frac{r_0}{3}\sqrt{5+4\cos(3\omega_2 t)}$$

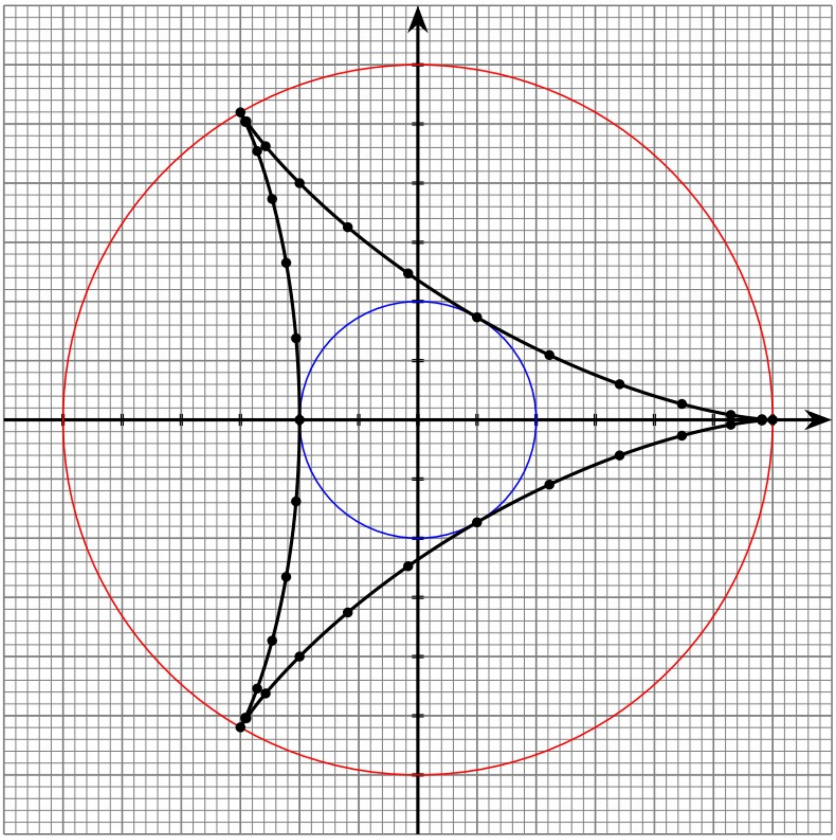
như vậy, chu kỳ chuyển động của viên bi là bội chung nhỏ nhất của chu kỳ của hai chuyển động thành phần, trong trường hợp này, chu kỳ chuyển động bằng với chu kỳ của chuyển động ứng với tần số góc ω_2. Do đó, viên bi sẽ quay lại vị trí ban đầu sau:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Chu kỳ thay đổi khoảng cách tới lỗ là:

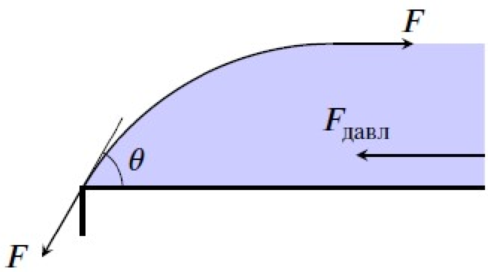
$$T = \frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2} = \frac{1}{3}T_2$$

cho nên trong một chu kỳ chuyển động, viên bi 3 lần đạt khoản cách lớn nhất r_0 và 3 lần đạt khoảng cách nhỏ nhất $r_0/3$. Quỹ đạo hoàn chỉnh của viên bi sẽ 3 lần đi qua đường tròn lớn bán kính r_0 và 3 lần đi qua đường tròn nhỏ bán kính $r_0/3$; ở các điểm tiếp xúc với đường tròn lớn, viên bi sẽ di chuyển theo phương bán kính, trong khi đó, ở các điểm tiếp xúc với đường tròn nhỏ, viên bi sẽ di chuyển theo phương tiếp tuyến với đường tròn. Dựa vào các thông tin trên, ta có thể vẽ được quỹ đạo của hạt:



Câu II:

1. Vì $\sqrt{\sigma/(\rho g)} \ll S$, bề mặt của lớp thuỷ ngân dừng như là phẳng và bán kính của lớp thuỷ ngân lớn hơn rất nhiều so với độ dày của nó. Giả sử thuỷ ngân đã che phủ hoàn toàn đáy trên của hình trụ nhưng không tràn xuống mặt bên của nó. Xét một lớp chất lỏng có độ rồng L, cân bằng lực theo phương ngang cho:



$$F\cos\theta - F + p_{cp}Lh = \sigma L\cos\theta - \sigma L + p_{cp}Lh = 0$$

trong đó p_{cp} là áp suất thuỷ tĩnh trung bình theo độ dày của lớp thuỷ ngân:

$$p_{cp} = \frac{\rho g h}{2}$$

do đó:

$$\frac{\rho g h^2}{2} = \sigma(1-\cos\theta) \implies h = \sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}$$

khi thuỷ ngân che phủ toàn bộ đáy trên của hình trụ, thể tích của nó bằng:

$$V_0 = Sh = S\sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}$$

2. Nếu đặt lên lớp thuỷ ngân một hình trụ có khối lượng m, áp suất thuỷ tĩnh tại mỗi điểm bên trong lớp thuỷ ngân sẽ tăng lên một lượng mg/S_k với S_k là diện tích tiếp xúc giữa thuỷ ngân và đáy dưới của hình trụ mà ta đặt lên. Áp suất thuỷ tĩnh trung bình trong lớp thuỷ ngân khi này:

$$p_{cp} = \frac{\rho g h}{2} + \frac{mg}{S_k}$$

điều kiện cân bằng:

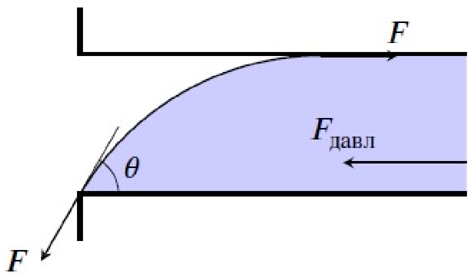
$$\sigma(1-\cos\theta) = \frac{\rho g h^2}{2} + \frac{mgh}{S_k}$$

trong đó $h = V/S_k$ vì lớp thuỷ cân gần như là phẳng. Ta có:

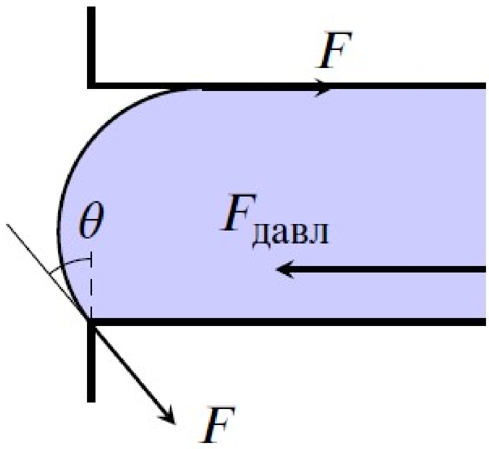
$$\sigma(1-\cos\theta) = \frac{\rho g V^2}{2S_k^2} + \frac{mgV}{S_k^2}$$

thuỷ ngân sẽ lấp đầy hoàn toàn khe hở khi $S = S_k$, tức:

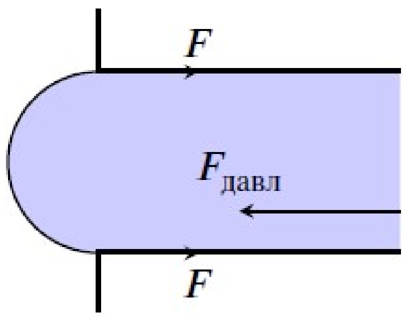
$$m_1 = \frac{\sigma S^2(1-\cos\theta)}{gV} - \rho V^2$$



3. Trong quá trình thuỷ ngân tràn ra bên ngoài, tiếp tuyến của bề mặt thuỷ ngân sẽ quay 90°. Thuỷ ngân sẽ bắt đầu tràn ra khỏi khe hở khi áp suất thuỷ tĩnh vượt quá giá trị cho phép của lực căng bề mặt theo phương ngang. Xét hai trường hợp:



(a) Trường hợp 1



(b) Trường hợp 2

1. Trường hợp 1: $\theta < \dfrac{\pi}{2}$:
   Trong trường hợp này, tiếp tuyến của bề mặt thuỷ ngân sẽ không bao giờ nằm ngang, do đó, độ lớn lực căng bề mặt theo phương ngang sẽ đạt giá trị cực đại khi đường tiếp tuyến hợp một góc θ với mặt bên của hình trụ. Khi đó:

   $$F_{max} = \sigma L(1+\sin\theta)$$

   như đã chỉ ra ở trên, điều kiện cân bằng là:

   $$\sigma(1+\sin\theta) = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 gV}{S^2}$$

suy ra:

$$m_2 = \frac{\sigma S^2(1+\sin\theta)}{gV} - \rho V^2$$

2. Trường hợp 2: $\theta \geqslant \frac{\pi}{2}$: Trong trường hợp này, tiếp tuyến của bề mặt thuỷ ngân có thể nằm theo phương ngang. Khi đó, độ lớn lực căng bề mặt theo phương ngang sẽ có giá trị cực đại:

$$F_{max} = 2\sigma L$$

lập luận tương tự trường hợp 1, ta được:

$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \rho V^2$$

Câu III:

1. Xét một diện tích nguyên tố dS của mặt đáy, gọi $\vec{e}_n$ là vector đơn vị theo hướng pháp tuyến của mặt đáy và $\vec{r}$ là vector khoảng cách từ diện tích nguyên tố đang xét đến điểm O. Khi đó, thành phần pháp tuyến của điện trường do diện tích này gây ra tại O là:

$$dE_n = \left(\frac{\sigma\vec{r}dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)\cdot\vec{e}_n = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{\sigma d\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0} \implies E_n = \frac{\sigma\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0}$$

vì cả hai đáy đều được nhìn từ điểm O dưới góc khối như nhau và $\sigma_1 = -\sigma_2$, điện trường tổng hợp do hai đáy gây ra tại O bằng không:

$$E_O^{\text{bases}} = 0$$

chia mặt bên thành các vòng dây nhỏ, vòng dây ứng với khoảng cách x sẽ có bán kính $r = x\sin\alpha$ và điện tích $dq = \sigma(x)\cdot 2\pi r dx$, như vậy, điện trường do mặt bên gây ra tại O là:

$$\vec{E}_0^{\text{side}} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \frac{\cos\alpha dq}{x^2}} = \int_l^{2l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi x\sin\alpha}{x^2}\frac{A}{x}\cos\alpha dx = \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

như vậy, cường độ điện trường tại O là:

$$E_O = E_O^{\text{bases}} + E_O^{\text{side}} = \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

2. Gọi z là khoảng cách từ điện tích thử đến điểm O. Cường độ điện trường tại z do mặt bên của hình nón cụt gây ra là:

$$E^{\text{side}}(z) = \int_l^{2l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi x\sin\alpha A(x\cos\alpha - z)}{[(x\sin\alpha)^2 + (x\cos\alpha - z)^2]^{3/2}}dx = \frac{A}{4\varepsilon_0}\int_l^{2l}\frac{x\cos\alpha - z}{[(x\sin\alpha)^2 + (x\cos\alpha - z)^2]^{3/2}}$$

suy ra:

$$E^{\text{side}}(z) = \frac{l}{z}\left(\frac{2\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} - \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2}\sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}}\right)$$

điện trường này bằng không tại:

$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l$$

Như ta đã biết, điện trường do một đĩa phẳng bán kính R, tích điện đều với mật độ điện tích mặt σ gây ra tại một điểm nằm trên trục đối xứng, các tâm đĩa một khoảng y là:

$$E^{\text{disk}}(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right)$$

đối với đáy trên:

$$R_1 = \frac{l}{2} \quad ; \quad y_1 = z - \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

và đối với đáy dưới:

$$R_2 = l \quad ; \quad y_2 = \sqrt{3}l - z$$

như vậy, điện trường do hai đáy gây ra, tại điểm các O một khoảng z là:

$$E^{\text{bases}}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{3}l - z}{\sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} - \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}l}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2}}\right)$$

điện trường này bằng không tại:

$$z_0' = \frac{2}{\sqrt{3}}l$$

vì $z_0 = z_0'$ nên điện tích thử cân bằng tại vị trí nằm cách O một khoảng $\frac{2}{\sqrt{e}}l$. Khoảng cách này không phụ thuộc vào σ_0.

3. Đặt $z = z_0 + \delta z$ với $\delta z \gg l$, khi đó ta có thể viết:

$$E^{\text{side}}(\delta z) \approx \frac{9\sqrt{3}}{32}\frac{A}{\varepsilon_0 l^2}\delta z$$

và:

$$E^{\text{bases}}(\delta z) \approx -\frac{9\sqrt{3}}{16}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l}\delta z$$

phương trình chuyển động của điện tích thử lúc này:

$$\delta\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32}\frac{q}{m\varepsilon_0 l}\left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0\right)\delta z = 0$$

để vị trí cân bằng tại $z = z_0$ là bền, điện tích thử phải dao động bé quanh vị trí này, điều này đòi hỏi:

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}$$

chu kỳ dao động bé:

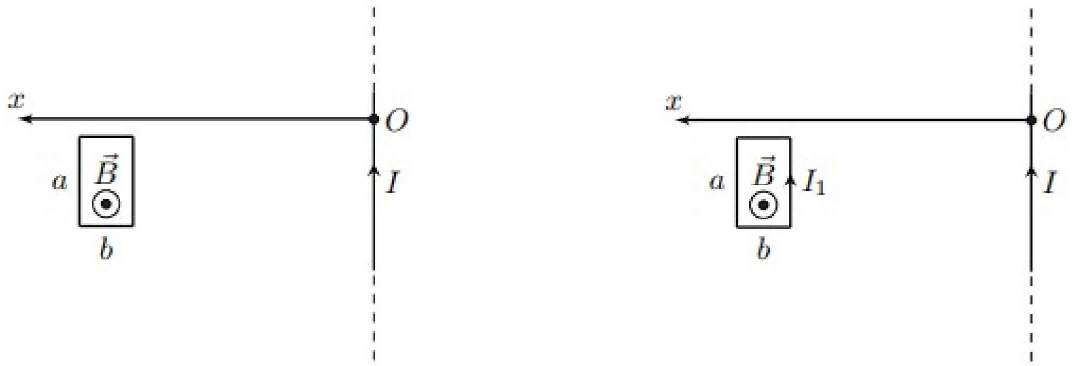
$$T = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m\varepsilon_0 l}{q}\left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0\right)^{-1}}$$

Câu IV:
Giả sử các cạnh song song với dây dẫn có chiều dài là a, các cạnh còn lại có chiều dài là b. Chọn trục Ox như hình vẽ, gọi x là toạ độ của cạnh gần nhất của khung so với dây dẫn, tại

thời điểm ban đầu, khoảng cách này bằng x_0. Giả sử dòng điện trong dây dẫn có cường độ I, khi đó, cảm ứng từ do dây dẫn tạo ra ở khoảng cách r là:

$$B(I,r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

trong đó, μ_0 là độ từ thẩm trong chân không.



Gọi dòng điện cảm ứng trong khung có cường độ I_1 và có hướng ngược chiều kim đồng hồ. Lực tác dụng lên khung dây là:

$$F_x = I_1 a B(I, x+b) - I_1 a B(I, x)$$

vì $a, b \ll x_0$, ta có:

$$F_x \approx \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) b = -\frac{\mu_0 I_1 I a b}{2\pi x^2}$$

gọi R là điện trở của khung và ϕ là thông lượng từ qua khung, theo định luật Faraday:

$$I_1 = -\frac{\dot{\phi}}{R}$$

vì kích thước của khung dây rất nhỏ so với khoảng cách từ nó đến dây dẫn, ta có thể xem cảm ứng từ là không đổi trên toàn bộ diện tích của khung dây, khi đó từ thông là:

$$\phi \approx B(x) a b$$

suy ra:

$$I_1 = -\frac{ab}{R}\frac{dB(x)}{dt} = -\frac{\mu_0 a b}{2\pi R}\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{x}\right)$$

do đó:

$$F_x = \left(\frac{\mu_0 a b}{2\pi}\right)^2 \frac{I}{R}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{x}\right)$$

vì cường độ dòng điện trong dây dẫn tăng lên rất nhanh, ta có thể bỏ qua chuyển động của khung trong thời gian tăng dòng điện, khi đó:

$$F_x \approx \left(\frac{\mu_0 a b}{2\pi}\right)^2 \frac{I}{R x^3}\frac{dI}{dt}$$

gọi m và v_x lần lượt là khối lượng và vận tốc của khung trên phương x, ta có:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{\mu_0 a b}{2\pi}\right) \frac{I}{R x^3}\frac{dI}{dt}$$

suy ra:

$$mdv_x = \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi}\right)\frac{IdI}{Rx^3}$$

tích phân hai vế ta được:

$$mv_0 = \left(\frac{\mu_0 abI_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2Rx_0^3}$$

bây giờ, ta sẽ xem xét chuyển động tiếp theo của khung, khi cường độ dòng điện trong dây dẫn đạt giá trị không đổi I_0, lực tác dụng lên khung là:

$$F_x = \left(\frac{\mu_0 abI_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Rx^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(\frac{\mu_0 abI_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Rx^4}\frac{dx}{dt}$$

định luật II Newton:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 abI_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{Rx^4}\frac{dx}{dt}$$

suy ra:

$$mdv_x = -\left(\frac{\mu_0 abI_0}{2\pi}\right)^2 \frac{dx}{Rx^4}$$

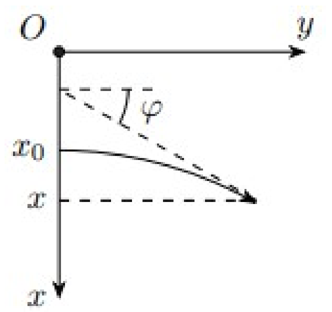
tích phân hai vế ta được:

$$m(v_1 - v_0) = -\frac{2mv_0}{3} \implies v_1 = \frac{v_0}{3}$$

vì $v_1 > 0$, khung sẽ chuyển động ra xa dây dẫn, do đó, nó sẽ không bao giờ dừng lại.

Câu V:

1. Vì chùm sáng chiếu tới theo phương pháp tuyến nên nó không bị khúc xạ khi đi vào lăng kính. Gọi φ là góc hợp bởi tiếp tuyến của quỹ đạo tia sáng tại điểm đang xét với trục Oy, x_0 là toạ độ mà tia sáng đi vào. Từ định luật Snell, ta có:



$$n\cos\varphi = \frac{3\cos\varphi}{2 - \frac{x}{h}} = \frac{3}{2 - \frac{x_0}{h}} \implies \cos\varphi = \frac{2h - x}{2h - x_0}$$

lấy vi phân hai vế ta được:

$$dx = (2h - x_0)\sin\varphi d\varphi$$

bên cạnh đó:

$$\tan\varphi = \frac{dx}{dy}$$

suy ra:

$$dy = dx\cot\varphi = (2h - x_0)\cot\varphi\sin\varphi d\varphi = (2h - x_0)\cos\varphi d\varphi$$

tại $y = 0$ thì $\varphi = 0$, do đó:

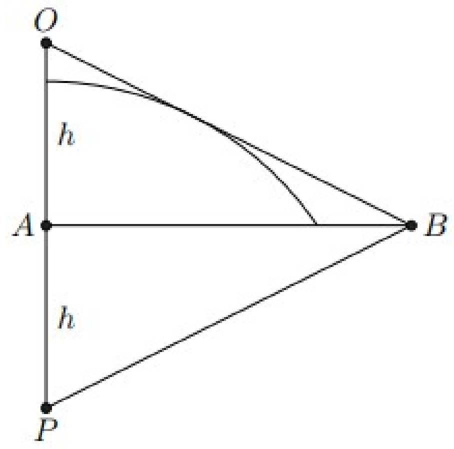
$$y(\varphi) = (2h - x_0)\int_0^{\varphi}\cos\varphi d\varphi = (2h - x_0)\sin\varphi$$

vì:

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \left(\frac{y}{2h - x_0}\right)^2 + \left(\frac{x - 2h}{2h - x_0}\right)^2$$

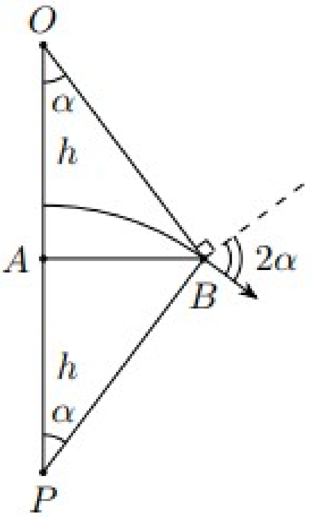
nên:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2$$



2. Từ kết quả của ý trên, ta nhận thấy rằng quỹ đạo của bất kỳ tia sáng nào bên trong lăng kính, trước khi đi đến các mặt AB và OB, đều là các cung tròn có tâm P nằm tại điểm có toạ độ (x_P, y_P), với $x_P = 2h$ và $y_P = 0$. Bán kính của các cung tròn giảm dần khi toạ độ x_0 tăng lên. Khoảng cách từ điểm P đến giao điểm của cung tròn với OB sẽ giảm dần cho đến khi cung tròn chạm tới cạnh đang xét. Khi toạ độ x_0 tiếp tục tăng, các cung tròn sẽ không còn đi qua cạnh OB. Do đó, để các tia chạm đến mọi điểm trên mặt OB, góc $P\hat{B}O$ không được là góc nhọn, vì tam giác OPB là tâm giác cân, ta có:

$$P\hat{B}O = 180^\circ - 2\alpha \geqslant 90^\circ \implies \alpha \leqslant 45^\circ$$



3. Khi toạ độ x_0 tăng lên, góc tới của các tia sáng trên mặt bên OB sẽ tăng. Để các tia sáng đi đến OB đều khúc xạ ra bên ngoài, hiện tượng phản xạ toàn phần không được xảy ra. Vì ban đầu góc tới của các tia sáng so với OB là α, sau khi chúng di chuyển theo cung tròn, góc tới này sẽ bị quay một góc α, như vậy, góc tới của các tia sáng khi chiếu đến mặt bên OB là 2α. Ta có:

$$n(h)\sin 2\alpha = 3\sin 2\alpha \geqslant 1 \implies \alpha \leqslant \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} \approx 9,74^\circ$$