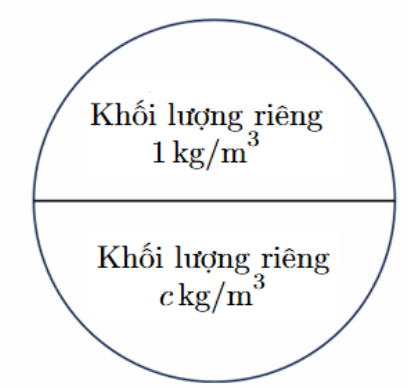
Đề thi và Lời giải
Olympic Vật lý Đồng bằng sông Châu Giang 2024
Vòng thứ nhất

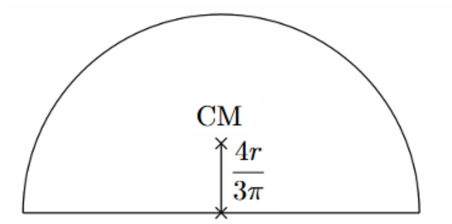
Sưu tầm và biên soạn bởi Physics Pen

Câu I:

Xét một khối trụ không đồng nhất được làm từ hai loại vật liệu có khối lượng riêng khác nhau. Khối trụ có bán kính r và chiều dài L, mặt cắt của nó được minh hoạ trên hình 1.1. Nửa dưới được làm từ vật liệu có khối lượng riêng $1\,\mathrm{kg/m^3}$ trong khi nửa trên được làm từ vật liệu có khối lượng riêng $c\,\mathrm{kg/m^3}$ với c là một tham số $0 < c < 1$. Biết rằng khối tâm của một bán trụ cso bán kính r nằm cách trục đối xứng một đoạn $\dfrac{4r}{3\pi}$ như được chỉ ra trên hình 1.2.



Hình 1.1



Hình 1.2

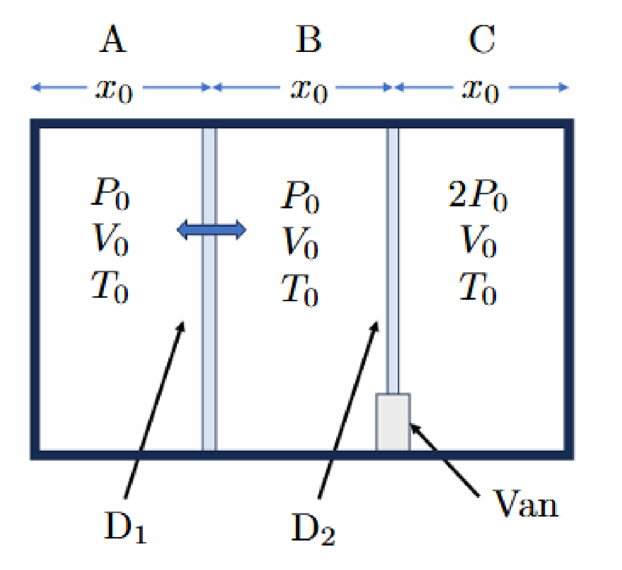
1. (a) Tính tổng khối lượng M của khối trụ không đồng nhất và khoảng cách d từ khối tâm của nó đến trục đối xứng theo r, L và c.
   (b) Tính momen quán tính I của khối trụ đối với trục đối xứng theo r, L và c.
2. Trục đối xứng của khối trụ được gắn cố định nằm ngang và khối trụ có thể quay tự do không ma sát quanh trục đối xứng của nó. Xác định chu kì dao động bé của khối trụ quanh vị trí cân bằng theo M, I, r, d và gia tốc trọng trường g.

Bây giờ, khối trụ có thể di chuyển tự do trên mặt bàn nằm ngang dưới tác dụng của trọng lực. Giả sử hệ số ma sát trượt giữ khối trụ và mặt bàn là rất lớn, nhờ đó khối trụ luôn lăn không trượt. Tại $t = 0$, khối trụ được thả ra từ vị trí cân bằng với tốc độ góc ω_0.

3. (a) Nếu ω_0 đủ nhỏ, khối trụ sẽ dao động quanh vị trí cân bằng của nó. Xác định chu kì dao động bé của khối trụ theo M, I, r, d và g.
   (b) Xác định giá trị nhỏ nhất của ω_0 để khối trụ có thể lăn mãi mãi về một phía. Biểu diễn kết quả theo M, I, r và d.

Câu II:

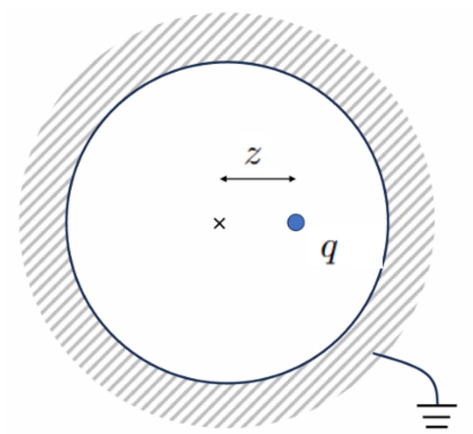
Một bình kín được chia thành 3 phần,A, B và C bởi hai vách ngăn D_1 và D_2 như được biểu diễn trên hình 2.1. Mỗi phần được lấp đầy bởi một lượng khí lí tưởng đơn nguyên tử có áp suất P, thể tích V và nhiệt độ tuyệt đối T như được chỉ ra trên hình vẽ. Vách ngăn D_1 có khối lượng m và có thể di chuyển tự do không ma sát, trong khi đó, vách ngăn D_2 được gắn cố định và có một van nhỏ được gắn trên nó. Mở van, khí trong phần B và C hoà làm một và hệ tiến tới trạng thái cân bằng trong khi vẫn duy trì nhiệt độ T_0.



Hình 2.1

1. Xác định áp suất và thể tích của khí trong các phần A, B và C khi hệ đạt trạng thái cân bằng.
2. Tính nhiệt lượng mà khí trong phần B và C đã nhận trong toàn bộ quá trình.
3. Tính độ biến thiên entropy ΔS của hệ.

Câu III:
Một quả bóng (có thể xem như điện tích điểm $q > 0$) có khối lượng m bị nhốt lại trong một hốc rỗng hình cầu bán kính R được khoét trong một khối điện môi nối đất rất lớn. Điện tích nằm cách tâm hốc cầu một khoảng z. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

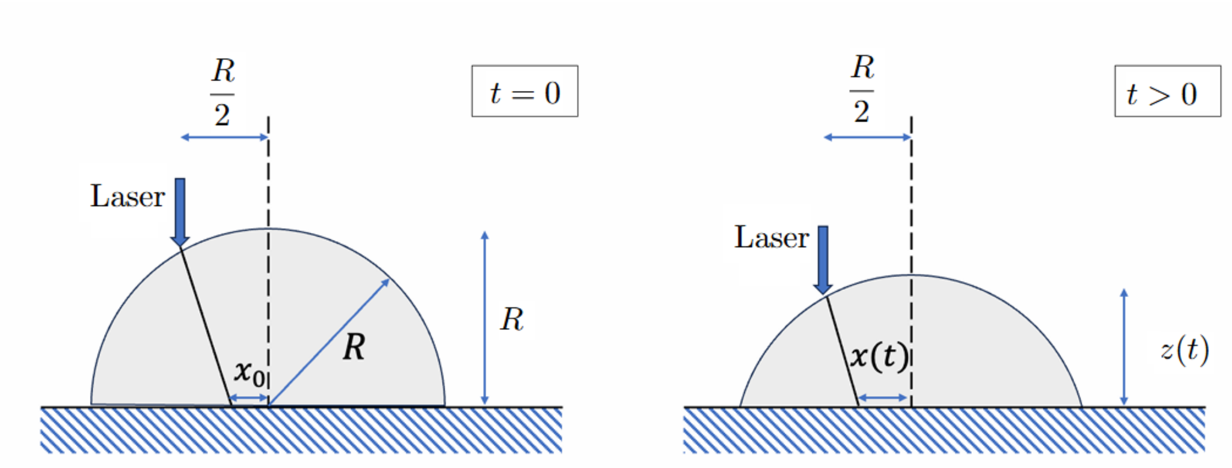


Hình 3.1

1. Phác hoạ các đường sức điện trường bên trong hốc cầu.
2. Xác định lực $F(z)$ tác dụng lên quả bóng theo q, z và R.
3. Quả bóng được thả ra tại tâm với vận tốc ban đầu rất nhỏ, tính vận tốc v của quả bóng khi nó cách tâm hốc cầu một khoảng $\dfrac{R}{2}$. Biểu diễn kết quả theo q, m và R.

Câu IV:
Một khối băng hình bán cầu có bán kính R và chiết suất n nằm trên một mặt bàn ấm và được đun nóng từ từ. Nhiệt lượng do bàn truyền cho khối băng tỉ lệ với diện tích tiếp xúc giữa chúng.

Biết rằng khối băng sẽ nóng chảy hoàn toàn sau thời gian T_0. Trong suốt quá trình, một chùm laser được chiếu vào khối băng. Chùm tia được chiếu theo phương vuông góc với bàn và cách trục đối xứng của băng một đoạn $\dfrac{R}{2}$ như hình 4.1.



Hình 4.1

Giả sử nhiệt độ của khối băng và không khí bao quanh nó là 0° trong suốt quá trình đun nóng. Chùm laser không truyền năng lượng cho khối băng. Toàn bộ lượng nước hình thành do sự nóng chảy đều chảy xuống bàn và khối băng không di chuyển trong suốt quá trình.

1. Xác định vị trí x_0 mà tia laser chạm bàn tại thời điểm $t = 0$ theo n và R.
2. Xác định độ cao của khối băng $z(t)$ tại thời điểm t theo R và T_0.
3. Xác định vị trí $x(t)$ mà tia laser chạm bàn tại thời điểm $t \geqslant 0$ theo n, R, T_0 và t.

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu I:
1a.

$$M = \frac{\pi r^2 L}{2}(1+c)$$

$$d = \frac{\dfrac{\pi r^2 L}{2}\left(\dfrac{4r}{3\pi} - \dfrac{4r}{3\pi}c\right)}{\dfrac{\pi r^2 L}{2}(1+c)} = \frac{4r}{3\pi}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)$$

1b. Momen quán tính của một khối trụ đặc có khối lượng M và bán kính r là $\frac{1}{2}Mr^2$ do đó

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^2 L}{2}\right)(1+c)r^2 = \frac{\pi r^4 L}{4}(1+c)$$

2. Định luật II Newton cho

$$\tau = I\ddot{\theta}$$

momen lực đối với trục đối xứng là

$$\tau = -Mgd\sin\theta$$
$$I\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I}\sin\theta$$
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

3a.
<u>**Cách 1**</u>: Phương trình chuyển động của khối trụ đối với trục quay đi qua điểm tiếp xúc

$$\tau = I_{\text{con}}\ddot{\theta}$$

momen lực tác dụng lên khối trụ tương tự như ý trên

$$\tau = -Mgd\sin\theta \approx -Mgd\theta$$

momen quán tính đối với trục quay qua điểm tiếp xúc được cho bởi

$$I_{\text{con}} = I_{cm} + M(r-d)^2$$

$$I = I_{cm} + Md^2$$

$$\Rightarrow I_{\text{con}} = I + M((r-d)^2 - d^2) = I + M(r^2 - 2rd)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I_{con}}\theta$$

chu kì dao động

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{con}}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I + M(r^2 - 2rd)}{Mgd}}$$

có thể thấy, khi $d \to 0$, chu kì $T \to 0$.

Cách 2: Hàm Lagrange là

$$L = T - U = \frac{1}{2}I_{con}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Mgd\theta^2$$

phương trình chuyển động được cho bởi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 &\Rightarrow I_{con}\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I_{con}}\theta \\ \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{con}}{Mgd}} &= 2\pi\sqrt{\frac{I + M(r^2 - 2rd)}{Mgd}}\end{aligned}$$

3b. Vì khối trụ chỉ có thể lăn không trượt, năng lượng của nó là bảo toàn. Để thoát khỏi sự dao động, khối trụ phải có đủ động năng để khối tâm có thể lên đến vị trí thế năng cực đại

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_0^2 + Mg(r-d) = Mg(r+d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}M\omega_0^2(r-d)^2 + \frac{1}{2}(I - Md^2)\omega_0^2 = 2Mgd$$
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4Mgd}{M(r-d)^2 + (I - Md^2)}}$$

có thể thấy, khi $d \to 0$, $\omega_0 \to 0$, điều này có nghĩa không có bất kì cân bằng bền nào trong giới hạn này và khối trụ sẽ tiếp tục di chuyển về một phía.

Câu II:

1. Gọi số mol khí ban đầu trong mỗi lần lần lượt là n_A, n_B và n_C. Sau khi mở van và trạng thái cân bằng được thiết lập, số mol khí là n'_A, n'_B, n'_C. Ở trạng thái cuối, áp suất trong tất cả các phần đều là p_f và nhiệt độ đều là T_0. Ta có

$$p_f V_A = n'_A R T_0$$

$$p_f V'_B = n'_B R T_0$$
$$p_f V'_C = n'_C R T_0$$

kết hợp 3 phương trình trên

$$p_f(V'_A + V'_B + V'_C) = 3V_0 p_f = (n'_A + n'_B + n'_C)RT_0 = (n_A + n_B + n_C)RT_0$$

$$\Rightarrow p_f = \frac{1}{3V_0}(n_A + n_B + n_C)RT_0 = \frac{1}{3V_0}(P_0V_0 + P_0V_0 + 2P_0V_0) = \frac{4}{3}P_0$$

Đối với phần A, vì $n'_A = n_A$

$$p_f V'_A = n'_A R T_0 = n_A R T_0 \Rightarrow V'_A = \frac{3}{4}V_0$$

$$V'_C = V_0$$

$$V_B' = 3V_0 - V_0 - \frac{3}{4}V_0 = \frac{5}{4}V_0$$

2.
<u>**Cách 1**</u>: Vì hệ được duy trì ở nhiệt độ T_0, ta có

$$\Delta Q_A + \Delta Q_{BC} = 0$$

nội năng của phần A là không đổi

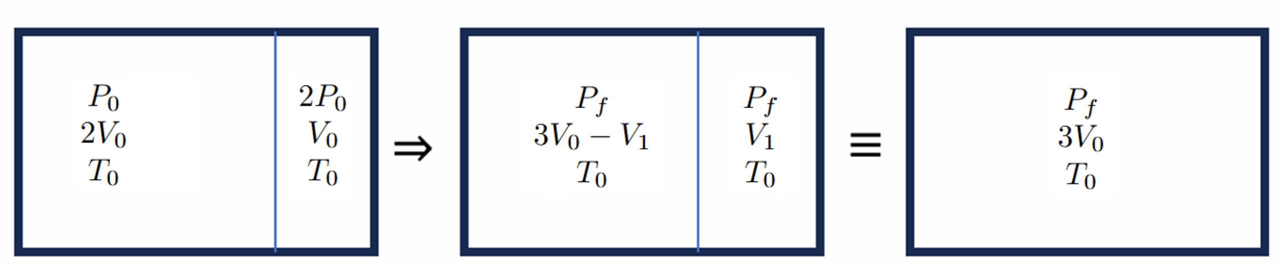
$$\Delta Q_A = \Delta W = \int_{V_0}^{\frac{3}{4}V_0} p_A dV_A = n_A R T_0 \int_{V_0}^{\frac{3}{4}V_0} \frac{1}{V_A} dV_A = P_0 V_0 \ln\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \Delta Q_{BC} = -\Delta Q_A = P_0 V_0 \ln\frac{4}{3} \approx 0.288 P_0 V_0$$

<u>**Cách 2**</u>: Vì khí được giữ ở nhiệt độ T_0, nội năng của nó không đổi

$$\Delta Q = \int_{V_0}^{\frac{5}{4}V_0} p_B dV_B = \int_{V_0}^{\frac{5}{4}V_0} p_A dV_B = \int_{V_0}^{\frac{5}{4}V_0} \frac{N_A k T_0}{2V_0 - V_B} dV_B = N_A k T_0 \ln\frac{4}{3} = P_0 V_0 \ln\frac{4}{3} \approx 0.288 P_0 V_0$$

3. Lưu ý rằng, vì quá trình khí di chuyển giữa hai phần B và C là không thuận ngịch, ta không thể sử dụng công thức
$$dS = \frac{dQ}{T}$$

<u>**Cách 1**</u>: Xét một quá trình thuận nghịch có thể đưa hệ từ trạng thái đầu đến trạng thái cuối. Tưởng tượng có một vách ngăn giữa các phần $A+B$ và C có thể di chuyển chậm rãi. Khí trong phần C có thể dãn nở do đó áp suất của nó sẽ giảm từ $2P_0$ xuống P_f tại đó thể tích của phần C là V_1
$$2P_0V_0 = \frac{4}{3}P_0V_1 \implies V_1 = \frac{3}{2}V_0$$



Hình 2.1

vách ngăn mà ta tưởng tượng có thể di chuyển từ từ

$$\Delta S = \frac{dQ}{T_0} = \frac{pdV}{T_0} = \frac{(p_C - p_{AB})dV_C}{T_0}$$
$$\Delta S = \int_{V_0}^{\frac{S_0}{2}V_0} \left(\frac{2Nk}{V_C} - \frac{2Nk}{3V_0 - V_C}\right) dV_C$$
$$= 2Nk \int_{V_0}^{\frac{S_0}{2}V_0} \left(\frac{1}{V_C} - \frac{1}{3V_0 - V_C}\right) dV_C = 2Nk\left(\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{4}\right) = 2Nk\ln\frac{9}{8} = 2\frac{P_0V_0}{T_0}\ln\frac{9}{8}$$
$$\approx 0.236\frac{P_0V_0}{T_0}$$

<u>**Cách 2**</u>: Để tính entropy của phần khí BC, ta có thể sử dụng phương trình Sackur-Tetrode cho khí lý tưởng

$$S = Nk\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{5}{2}\right] = Nk\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT_0}{h^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{5}{2}\right]$$
$$= Nk\left(\ln\frac{VT_0^{\frac{3}{2}}}{N}+c\right) = -Nk\ln P + C$$

với T_0 là hằng số. Entropy ở trạng thái đầu

$$S_i = -2\frac{P_0V_0}{T_0}\ln P_0 - \frac{2P_0V_0}{T_0}\ln 2P_0$$

entropy ở trạng thái cuối

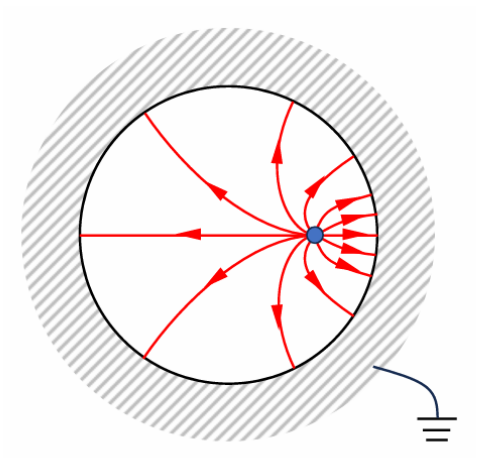
$$S_f = -4Nk\ln P_f = -4Nk\ln\frac{4}{3}P_0$$

$$\Delta S = S_f - S_i$$
$$= -\frac{4P_0V_0}{T_0}\ln\frac{4}{3}P_0 + 2\frac{P_0V_0}{T_0}\ln P_0 + \frac{2P_0V_0}{T_0}\ln 2P_0$$
$$= \frac{P_0V_0}{T_0}\left(-4\ln\frac{4}{3}P_0 + 2\ln P_0 + 2\ln 2P_0\right)$$

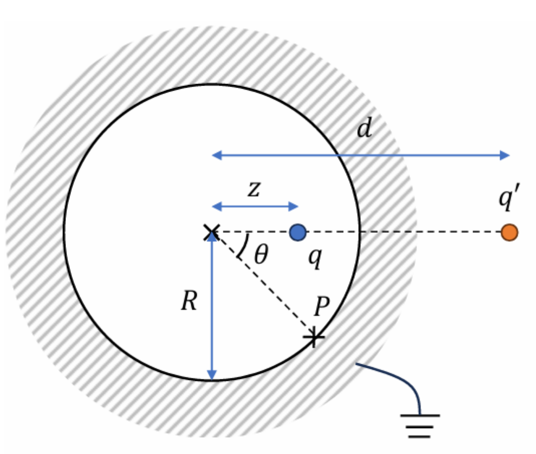
$$= \frac{P_0V_0}{T_0}\left(-4\ln\frac{4}{3}+2\ln 2\right) = 2\frac{P_0V_0}{T_0}\left(\ln\frac{9}{8}\right) \approx 0.236\frac{P_0V_0}{T_0}$$

Câu III:

1. Bên trong vật dẫn, điện trường bằng không. Các được sức phải vuông góc với mặt khoét. Do sự tích tụ các điện tích mặt, cường độ điện trường ở phía bên phải điện tích sẽ mạnh hơn phía bên trái do đó mật độ đường sức bên phải sẽ lớn hơn. Cuối cùng, lưu ý rằng điện tích là dương, các đường sức phải hướng ra ngoài điện tích. Với những lập luận trên, ta có thể phác hoạ các đường sức như hình 1.1:



Hình 3.1



Hình 3.2

2. Để giải quyết bài toán này, ta sẽ sử dụng phương pháp ảnh điện với điện tích ảnh $q' < 0$ được cách tâm hốc cầu một khoảng d như hình 1.2. Điện thế tại một điểm P nằm trên mặt hốc được cho bởi

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{d^2+R^2-2dR\cos\theta}}\right)=\phi_P(\theta)=0$$
$$\Rightarrow \frac{q^2}{z^2+R^2-2zR\cos\theta}=\frac{q'^2}{d^2+R^2-2dR\cos\theta}$$
$$\Rightarrow q^2(d^2+R^2)-q'^2(z^2+R^2)+2R(q'^2z-dq^2)\cos\theta=0$$

điều này phải đúng với mọi θ

$$\begin{cases} q'^2z-dq^2=0 \\ q^2(d^2+R^2)-q'^2(z^2+R^2)=0 \end{cases}$$

giải ra ta được

$$d=\frac{R^2}{z} \quad \text{và} \quad q'=-\frac{qR}{z}$$

lực tác dụng lên điện tích điểm có độ lớn

$$|F|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qq'|}{(d-z)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rz}{(R^2-z^2)^2}$$

3. Theo định lý công - động năng, vận tốc tại $z=\dfrac{R}{2}$ được cho bởi

$$\frac{1}{2}m(v^2-0^2)=\int_0^{k/2}F(z)\mathrm{d}z$$

$$v=\sqrt{\frac{2}{m}\int_0^{R/2}F(z)\mathrm{d}z}=\sqrt{\frac{q^2R}{2\pi\epsilon_0 m}\int_0^{R/2}\frac{z}{(R^2-z^2)^2}dz}=\sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mR}\int_0^{1/2}\frac{u}{(1-u^2)^2}du}$$
$$v=\sqrt{\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{mR}}$$

Câu IV:

1. Như được chỉ ra trên hình 4.1, góc vì $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ nên $\alpha=30°$. Theo định luật khúc xạ ánh sáng

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}=\frac{1}{2n}\Rightarrow \tan\beta=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$$

từ hình vẽ, dễ dàng nhận thấy

$$x_0=\frac{R}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}R\tan\gamma$$
$$\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{4n^2-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{12n^2-3}+1}$$
$$x_0=\frac{R}{2}\left(1-\frac{\sqrt{12n^2-3}-3}{\sqrt{12n^2-3}+1}\right)=\frac{2R}{\sqrt{12n^2-3}+1}$$

2. Tại thời điểm t, mặt tiếp xúc sẽ có dạng một hình tròn bán kính r. Trong thời gian dt tiếp theo, nhiệt lượng truyền vào khối băng là

$$\mathrm{d}Q=K\pi r^2dt$$

với K là hằng số. Thể tích băng nóng chảy là

$$dQ = Ldm = L\rho\pi r^2 dz$$

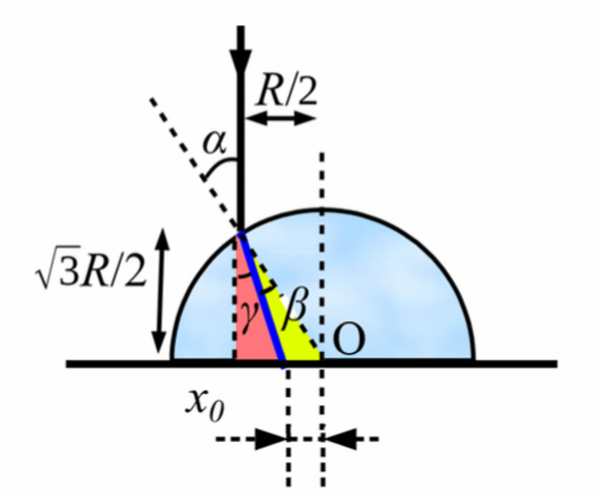
với L và ρ tương ứng là ẩn nhiệt chuyển pha và khối lượng riêng của băng. Như vậy ta có

$$K\pi r^2 dt = -L\rho\pi r^2 dz$$

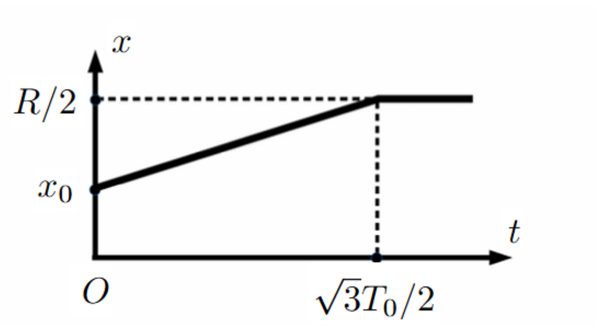
$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{K}{L\rho} = \text{const}$$

do đó

$$z(t) = R\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)$$



Hình 4.1



Hình 4.2

3. Khi bán kính của khối băng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{R}{2}$, chùm laser sẽ chiếu thẳng xuống bàn, tức $x(t) = \frac{R}{2}$. Khi này độ cao của khối băng là $z(t) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R$, điều này sẽ xảy ra tại $t = \frac{\sqrt{3}}{2}T_0$. Như vậy, với $t > \frac{\sqrt{3}}{2}T_0$, ta có $x(t) = \frac{R}{2}$.

Với $t < \frac{\sqrt{3}}{2}T_0$, ta sẽ sử dụng các tam giác đồng dạng

$$\frac{\frac{R}{2} - x_0}{\frac{R}{2} - x(t)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{T_0}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R}{2} - x_0\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{T_0}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{R}{2} - \left(\frac{R}{2} - x_0\right)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{t}{T_0}\right) = \frac{R}{2} - \frac{R}{2}\left(1 - \frac{4}{\sqrt{12n^2 - 3} + 1}\right)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{t}{T_0}\right)$$