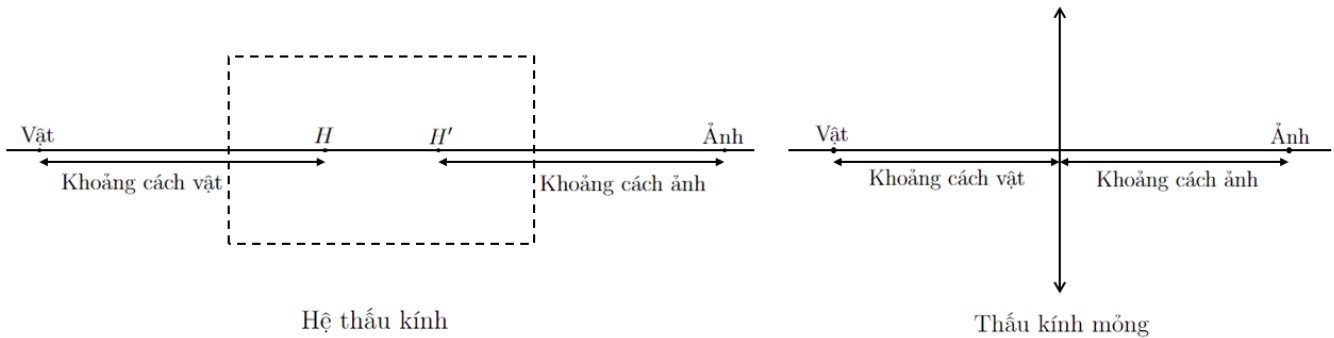


Đề thi và Lời giải Olympic Vật lý Trung Quốc năm 2023 Vòng Bán kết

Sưu tầm và biên soạn bởi Physics Pen

Câu I:

Ta có thể thực hiện một thí nghiệm quang học đơn giản bằng cách sử dụng camera của điện thoại thông minh. Camera điện thoại là một hệ gồm nhiều thấu kính, sau khi lắp ráp chỉ dày khoảng vài milimet nhờ đó có thể lắp đặt trong các chiếc điện thoại có độ dày chưa đến một centimet. Cảm biến hình ảnh của camera ghi lại hình ảnh của vật thể dưới dạng các điểm ảnh, sau đó sử dụng một phần mềm phân tích để xác định kính thước thực của ảnh. Trong các câu hỏi sau, xem camera điện thoại như một hệ thấu kính đồng trục lý tưởng được gắn cố định, ta có thể chứng minh rằng mối quan hệ giữa vật và ảnh cho bởi hệ thấu kính này tương tự với một thấu kính hội tụ và có thể sử dụng công thức thấu kính mỏng để thực hiện các tính toán liên quan. Khác với thấu kính mỏng, ta cần xác định các điểm H và H' (được gọi là các điểm chính) nằm trên quang trục làm điểm tham chiếu để xác định khoảng cách của vật, khoảng cách của ảnh và tiêu cự như được chỉ ra trong hình 1. Tất cả các tia sáng trong câu hỏi này đều thỏa mãn điều kiện傍 trục.



Hình 1: Quan hệ vật - ảnh của hệ thấu kính và thấu kính mỏng

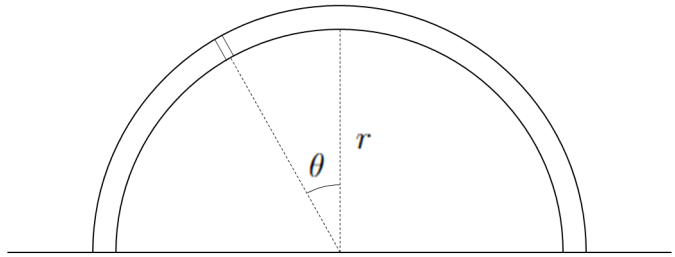
- Khi ta dùng điện thoại để chụp một vật thể, do hệ thấu kính được lắp đặt bên trong điện thoại nên không thể xác định trực tiếp vị trí của điểm chính khi không biết cấu trúc và thông số của ống kính, dẫn đến không thể đo trực tiếp khoảng cách vật bằng thước. Trong thí nghiệm này, ban đầu ta đặt một nguồn sáng điểm cách trục chính một khoảng l , sau đó di chuyển nó dọc theo trục chính, tại các khoảng cách vật u_1 và u_2 , nguồn sáng này lần lượt cho ra các ảnh nằm cách trục chính một khoảng l_1 và l_2 . Gọi $s = u_2 - u_1$ là độ dịch chuyển của vật trên phương trục chính. Hãy tính:
 - Tiêu cự tương đương F của camera theo l, l_1, l_2 và s ;
 - Khoảng cách vật u_1 theo l, l_1, l_2 và s .
- Giả sử hệ thấu kính được sử dụng bao gồm hai thấu kính hội tụ mỏng đồng trục có tiêu cự lần lượt là f_1, f_2 và quang tâm O_1, O_2 tương ứng được đặt cách nhau một khoảng d . Ánh sáng xuất phát từ vật (thật hay ảo) sẽ lần lượt đi qua thấu kính O_1 và O_2 để tạo ảnh, hệ thấu kính tồn tại một mặt phẳng vật và một mặt phẳng ảnh có độ phóng đại ngang là 1 (chúng được gọi

là các mặt phẳng chính), giao điểm của các mặt phẳng này với quang trục lần lượt là điểm vật chính H và điểm ảnh chính H' .

- Hãy coi H là vật của thấu kính O_1 , tính khoảng cách vật của H so với O_1 . Coi H' là ảnh của thấu kính O_2 , tính khoảng cách ảnh của H' so với O_2 ;
- Trong quá trình tạo ảnh qua hệ thấu kính, khoảng cách vật và tiêu cự vật được tính từ điểm vật chính H , khoảng cách ảnh và tiêu cự ảnh được tính từ điểm ảnh chính H' . Hãy tính tiêu cự vật F và tiêu cự ảnh F' .

Câu II:

Một ống thủy tinh mỏng, tiết diện đều, hai đầu bịt kín được uốn thành một nửa đường tròn bán kính r (bán kính tiết diện của ống rất nhỏ so với r) sau đó được gắn cố định trên trên mặt sàn nằm ngang sao cho toàn bộ ống nằm trong mặt phẳng thẳng đứng như hình 2. Bên trong ống có một piston mỏng có khối lượng m được làm bằng kim loại, diện tích của piston bằng với tiết diện của ống thủy tinh. Đường nối tâm đường tròn và vị trí của piston hợp với phương thẳng đứng một góc θ . Hai bên piston đều chứa n mol khí lý tưởng, giả sử nhiệt độ của khí luôn bằng nhiệt độ T của môi trường bên ngoài. Cho biết gia tốc trọng trường có độ lớn g , hằng số khí lý tưởng R , xem như tất cả các quá trình biến đổi trạng thái của khí đều chuẩn tĩnh. Bỏ qua mọi ma sát.



Hình 2

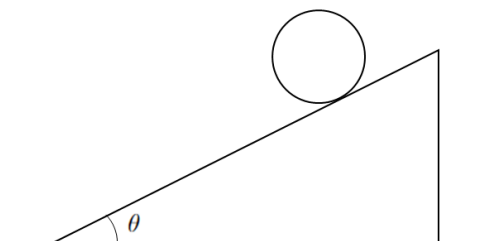
- Khi nhiệt độ T lớn hơn một nhiệt độ tới hạn T_C nào đó, vị trí cân bằng bền của piston nằm ngay chính giữa ống ($\theta = 0$). Hãy tìm biểu thức của T_C và xác định tần số góc trong dao động bé của piston quanh vị trí cân bằng này.
- Khi $T = T_C$, hãy đánh giá tính ổn định của piston khi nó nằm cân bằng ở giữa ống ($\theta = 0$).

Đối với các câu hỏi bên dưới, xem T_C như một thông số đã biết và không cần thay vào giá trị mà bạn đã tìm được ở ý 1.

- Khi $T < T_C$, piston cân bằng tại vị trí góc θ_0 , tìm phương trình mà θ_0 phải thỏa mãn. Xác định biểu thức gần đúng khi nhiệt độ T giảm nhẹ (xấp xỉ đến bậc thấp nhất khác 0).
- Khi $T < T_C$, xác định tần số góc ω_0 trong dao động bé của piston quanh vị trí cân bằng tại θ_0 , tần số này bằng bao nhiêu khi nhiệt độ của khí lớn hơn và nhỏ hơn T_C một chút.
- Khi $T < T_C$, giả sử vận tốc ban đầu của piston gần như bằng không, hãy tìm độ lớn vận tốc góc của piston khi nó di chuyển từ vị trí chính giữa ($\theta = 0$) đến vị trí góc lớn nhất θ mà nó có thể đi được.

Câu III:

Một nêm hình tam giác có góc nghiêng θ , khối lượng M , nằm trên mặt sàn ngang, trơn nhẵn như hình 3. Trên mặt nêm có đặt một quả cầu đồng chất khối lượng m , bán kính R . Quả cầu được thả ra từ trạng thái tĩnh và bắt đầu lăn tự do xuống dưới. Trong toàn bộ quá trình, nêm không quay. Biết gia tốc trọng trường có độ lớn g , giả sử hệ số ma sát nghỉ và hệ số ma sát trượt giữa quả cầu và mặt nêm đều bằng μ .



Hình 3

1. Trong trường hợp μ đủ lớn để quả cầu lăn không trượt, hãy tính:
 - a. Độ lớn gia tốc a_0 của nêm so với sàn.
 - b. Độ lớn gia tốc a_C của khối tâm quả cầu so với nêm.
 - c. Độ lớn phản lực N do mặt đất tác dụng lên nêm.
 - d. Độ lớn phản lực N_1 do nêm tác dụng lên quả cầu.
 - e. Giá trị nhỏ nhất μ_0 của μ để quả cầu có thể lăn không trượt.
2. Trong trường hợp μ nhỏ hơn giá trị μ_0 tìm được và mặt nghiêng của nêm đủ dài, hãy xác định vận tốc điểm P (điểm tiếp xúc giữa quả cầu và nêm) tại thời điểm t kể từ khi quả cầu bắt đầu chuyển động từ trạng thái tĩnh.

Câu IV:

Trong tác phẩm nổi tiếng "Thanh Minh Thượng Hà Đồ" của họa sĩ thời Bắc Tống, Trương Trách Doan, có một cây cầu vòm bằng gỗ, được gọi là "cầu gỗ ghép", tạo thành một vòng cung bắc qua sông (Hình 4a). Hơn 400 năm sau, Leonardo da Vinci cũng đã để lại một bản thiết kế tương tự, khiến người đời kinh ngạc. Hình 4b là hình ảnh thực tế của một cây cầu gỗ ghép gồm 5 phần, mỗi phần bao gồm một cặp thanh dài song song và một thanh ngắn vuông góc với cả hai thanh đó. Cầu trúc này không cần sử dụng đến đinh hay dây buộc để cố định, kết cấu của cầu được duy trì nhờ tác dụng của trọng lực, các phản lực (lực đỡ) và lực ma sát. Trong đời sống, cầu gỗ ghép cần được khắc rãnh để đảm bảo an toàn.



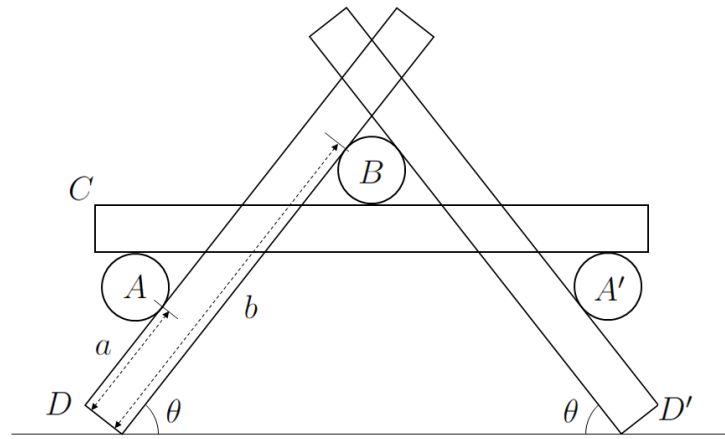
Hình 4a: Tác phẩm "Thanh Minh Thượng Hà Đồ" của Trương Trách Doan.



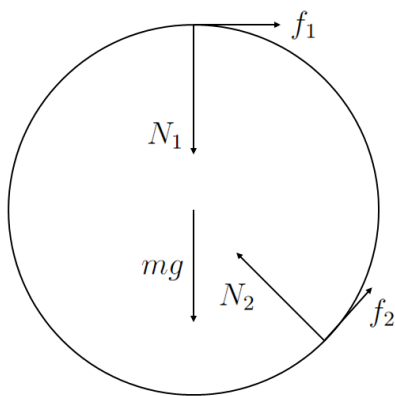
Hình 4b: Mô hình cầu gỗ ghép.

Trên hình 4c là một mô hình cầu gỗ ghép đơn giản gồm 3 phần. Trong mô hình này, ta sẽ xem xét sự cân bằng của cầu gỗ trong mặt phẳng thẳng đứng, mỗi cặp thanh dài song song với mặt giấy được xem như một thanh có khối lượng M , nhờ đó cầu gỗ ghép có thể được đơn giản hoá thành 6 thanh: 3 thanh ngắn A, A', B và 3 thanh dài C, D, D' . Tất cả các thanh đều có bán kính tiết diện R và được khắc rãnh. Khối lượng của các thanh ngắn là m và tất cả các thanh đều có chiều dài L , các thanh dài không tiếp xúc với nhau. Bề mặt của thanh ngắn B là trơn và nhẵn, hệ số ma sát nghỉ giữa các thanh còn lại là μ và hệ số ma sát nghỉ giữa thanh và mặt đất là μ' . Các thanh dài D và D' tạo với phương ngang một góc α . Gia tốc trọng trường có độ lớn là g .

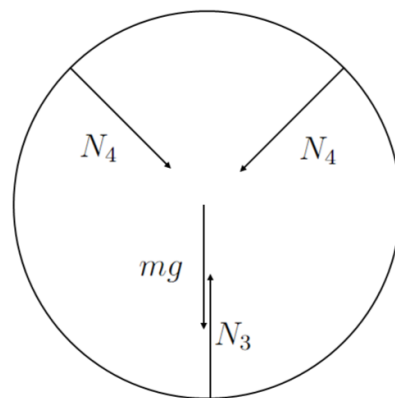
1. Biết rằng trong hình 4c, khoảng cách từ đầu dưới của thanh D đến điểm tiếp xúc với thanh A là a , hãy xác định khoảng cách b từ đầu dưới của thanh D đến điểm tiếp xúc với thanh B .
2. Khi hệ đang ở trạng thái cân bằng, hình 4d và 4e biểu diễn các lực tác dụng lên các thanh A và B . Hãy biểu diễn các lực tác dụng lên các thanh C và D . Lập phương trình cân bằng cho từng thanh A, B, C và D .



Hình 4c: Mô hình cầu gỗ ghép đơn giản.



Hình 4d: Các lực tác dụng lên thanh A.



Hình 4e: Các lực tác dụng lên thanh B.

3. Giả sử $M = 6m$, $\theta = 45^\circ$, $L = 30 \text{ cm}$, $a = 16 \text{ cm}$, $R = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$, hãy xác định điều kiện của hệ số ma sát nghỉ μ sao cho cầu có thể cân bằng. Kết quả làm tròn đến ba chữ số có nghĩa.

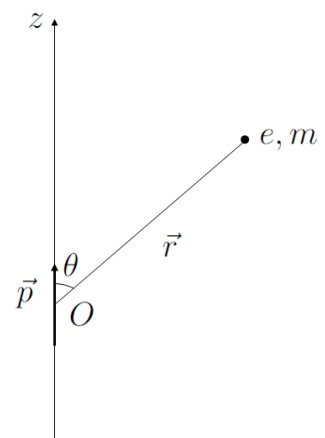
Câu V:

Một hạt có khối lượng m , điện tích e chuyển động dưới tác dụng của một lưỡng cực điện được đặt cố định tại gốc toạ độ (Hình 5). Momen lưỡng cực \vec{p} hướng dọc theo chiều dương của trục Oz . Gọi $\vec{r}(t)$ là vector vị trí của hạt tại thời điểm t , $\vec{r}(t)$ có độ lớn $r(t)$ và hợp với momen lưỡng cực \vec{p} một góc $\theta(t)$. Biết $r(t = 0) = r_0 > 0$, $\theta(t = 0) = \theta_0$. Hằng số điện môi trong chân không là ϵ_0 và biểu thức của điện trường và điện thế do lưỡng cực tạo ra có dạng:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

trong đó \hat{r} là vector đơn vị theo hướng \vec{r} .

- Giả sử hạt chuyển động trong mặt phẳng vuông góc với trục Oz trên một quỹ đạo tròn quanh trục Oz , hãy xác định góc θ_0 khi đó và độ lớn vận tốc v_0 của hạt.
- Giả sử tại $t = 0$, hạt đứng yên:

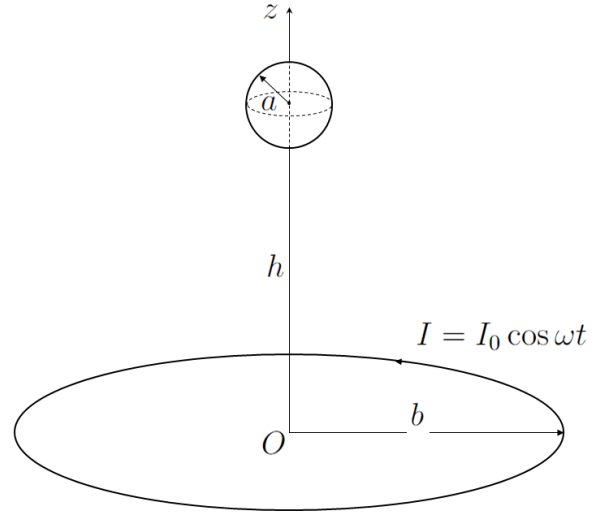


Hình 5

- Xác định mối liên hệ giữa độ lớn momen động lượng của hạt so với gốc toạ độ O và góc θ trong quá trình chuyển động sau đó.
- Xác định mối liên hệ giữa độ lớn vận tốc của hạt trên phương hướng tâm v_r và r sau đó.
- Tìm điều kiện của θ_0 để phạm vi chuyển động của hạt bị giới hạn, không tính đến trường hợp hạt va chạm với lưỡng cực. Trong trường hợp giá trị của θ_0 bằng với giá trị tới hạn vừa tìm được, hãy xác định quỹ đạo chuyển động của hạt trong mặt phẳng thẳng đứng.
- Trong trường hợp θ_0 không thoả mãn điều kiện tìm được ở ý trên, hãy xác định biểu thức của $r(t)$.

Câu VI:

Khi một vật dẫn điện được đặt trong từ trường biến thiên, dòng điện Foucault (dòng điện xoáy) sẽ xuất hiện bên trong nó. Dòng Foucault có thể tạo ra tác dụng nhiệt được sử dụng để nung nóng và rèn kim loại; bên cạnh đó, tác dụng cơ của dòng điện này còn được ứng dụng để hãm chuyển động, truyền động, treo các vật thể dẫn điện, ... Để nghiên cứu hai tác dụng nêu trên của dòng điện xoáy, ta sẽ sử dụng một thiết bị như hình 6: một cuộn dây bán kính b được đặt cố định trên mặt bàn nằm ngang, mang dòng điện xoay chiều có cường độ $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Một quả cầu dẫn điện có trọng lượng G , bán kính b , độ dẫn điện σ được đặt sao cho tâm quả cầu nằm trên trục đối xứng của vòng dây, cách tâm vòng dây một khoảng $h \ll a$. Giả sử $a \ll b$ và độ sâu bề mặt của quả cầu là $\sigma = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \ll a$ với



Hình 6

μ_0 là độ từ thẩm trong chân không. Bỏ qua hiện tượng bức xạ điện từ.

- Đặt một quả cầu dẫn lý tưởng ($\sigma \rightarrow \infty$) bán kính a trong một từ trường đều và ổn định $\vec{B}_e = B_e \hat{z}$, dòng điện từ hoá bên trong quả cầu sẽ tạo ra một từ trường \vec{B}' bên ngoài quả cầu, từ trường này tương tự với từ trường do một lưỡng cực từ lý tưởng đặt tại tâm quả cầu tạo ra:

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}$$

trong đó \vec{m} là momen lưỡng cực từ của lưỡng cực, cũng là momen lưỡng cực của quả cầu dẫn lý tưởng này. Xem \vec{B}_e như một đại lượng đã biết, xác định \vec{m} và phân bố dòng điện trên bề mặt quả cầu dẫn.

- Xác định cảm ứng từ \vec{B} do dòng điện trong dây dẫn tạo ra tại tâm quả cầu vào thời điểm t .
- Xác định giá trị của I_0 để quả cầu có thể cân bằng tại vị trí như hình 6. Giả sử I_0 đủ lớn để biên độ dao động của quả cầu dẫn quanh vị trí cân bằng có thể bỏ qua. Cho biết: Nếu momen từ \vec{m} của lưỡng cực từ và từ trường ngoài \vec{B}_e tại vị trí của lưỡng cực có phương song song với Oz , các thành phần tương ứng của chúng là m và $B_e = B_e(z)$ thì lực tác dụng lên lưỡng cực có dạng:

$$\vec{F} = m \frac{dB_e}{dz} \hat{z}$$

- Khi khảo sát tác dụng nhiệt của dòng điện xoáy, ta phải xét đến hiệu ứng bề mặt của quả cầu dẫn. Giả sử dòng điện xoáy được phân bố đều trên phương bán kính trong độ sâu bề mặt và bằng không ở mọi nơi khác bên trong quả cầu. Xác định biểu thức gần đúng của nhiệt năng trung bình do quả cầu tỏa ra trong một chu kỳ.

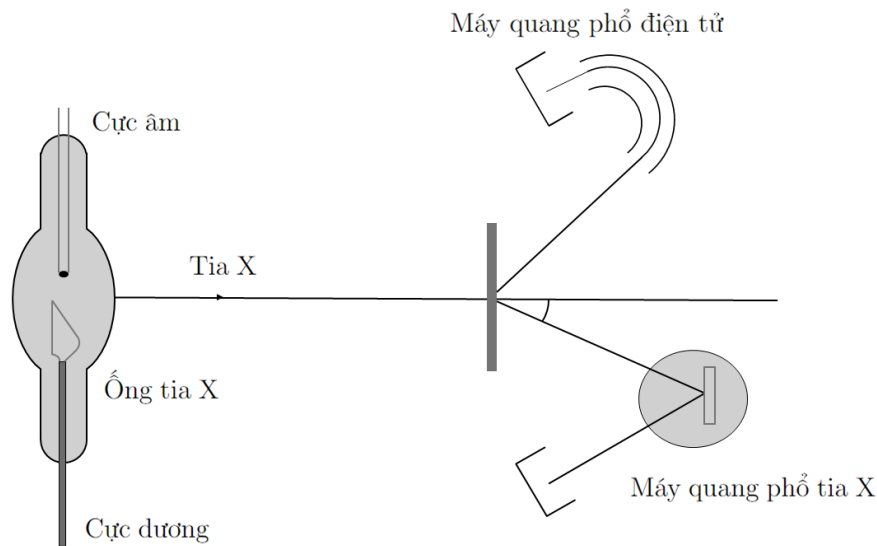
Câu VII:

Tầng thấp nhất của khí quyển là tầng đối lưu, có độ dày khoảng 10 km. Trong tầng đối lưu, khi càng lên cao thì nhiệt độ không khí càng giảm. Bên trên tầng đối lưu là tầng bình lưu, trong khoảng 10 km, nhiệt độ gần như không thay đổi theo độ cao. Phía trên tầng bình lưu, trong một khoảng độ cao nhất định, nhiệt độ khí quyển lại tăng dần theo độ cao, tầng này được gọi là tầng nghịch (Hình 7).

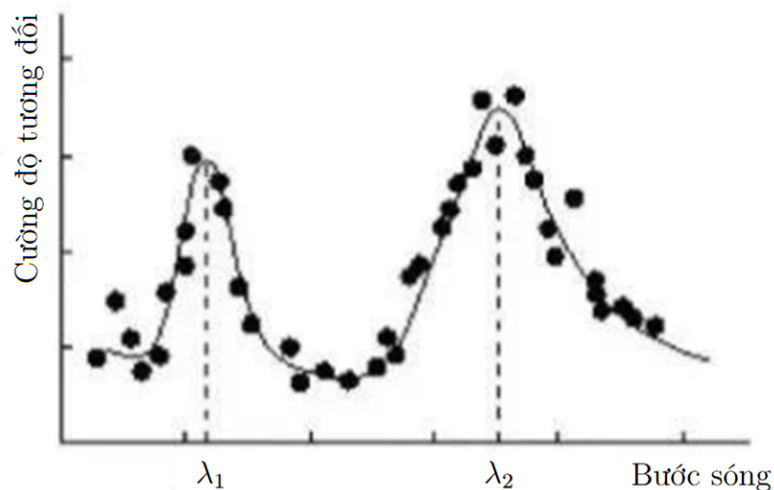
1. Do ánh nắng Mặt Trời, nhiệt độ không khí gần mặt đất cao hơn. Sự thay đổi nhiệt độ khí quyển trong tầng đối lưu có thể xem là kết quả của quá trình biến đổi đoạn nhiệt của không khí. Xác định mối liên hệ giữa nhiệt độ không khí và độ cao tính từ mặt đất. Giả sử nhiệt độ không khí ngay sát mặt đất là T_0 , không khí là khí lý tưởng có khối lượng mol μ , hệ số đoạn nhiệt γ , và hằng số khí lý tưởng R . Gia tốc trọng trường trong tầng đối lưu có thể xem là hằng số và bằng g .
2. Vận tốc truyền âm trong không khí được tính bởi $v_s = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$, trong đó p là áp suất và ρ là khối lượng riêng của không khí. Bỏ qua ảnh hưởng của gió, xác định mối liên hệ giữa vận tốc âm thanh và nhiệt độ T của không khí. Nhiệt độ này thay đổi như thế nào theo độ cao?
3. Khi sóng âm truyền trong các môi trường có vận tốc âm thanh khác nhau, nó cũng xảy ra hiện tượng phản xạ và khúc xạ, các hiện tượng này xảy ra tương tự với hiện tượng phản xạ và khúc xạ ánh sáng. Để đơn giản hoá, ta có thể coi bề mặt phân cách giữa các lớp khí quyển là phẳng, giả sử nhiệt độ trong tầng đối lưu, tầng nghịch là -10°C và trong tầng bình lưu là -55°C . Trong mô hình này, xét một nguồn âm trong tầng bình lưu, các sóng âm phát ra sẽ đi tới mặt phân cách giữa tầng bình lưu và tầng đối lưu (hay tầng nghịch). Hãy phân tích hiện tượng phản xạ và khúc xạ của sóng âm ứng với các góc tới khác nhau: trong trường hợp nào thì xảy ra khúc xạ?, trong trường hợp nào thì xảy ra phản xạ toàn phần? Đồng thời, vẽ sơ đồ truyền sóng âm cho từng trường hợp. Biết $0^\circ\text{C}=273.15\text{K}$.
4. Tiếp tục đơn giản hoá, giả sử nhiệt độ khí quyển không thay đổi theo độ cao, các mặt phân cách là các mặt cầu đồng tâm, nhiệt độ của tầng đối lưu và tầng nghịch giống nhau và đều cao hơn nhiệt độ của tầng bình lưu. Xét một nguồn âm và một khí cầu có gắn một đầu thu âm thanh, cả hai đều có thể ở trong tầng đối lưu hoặc tầng bình lưu. Bỏ qua sự phản xạ sóng âm trên mặt đất cũng như sự hấp thụ năng lượng của sóng âm trong khí quyển. Với 4 trường hợp khác nhau khi nguồn âm và đầu thu nằm lần lượt trong tầng đối lưu và tầng bình lưu, hãy xác định trong trường hợp nào khí cầu có thể phát hiện âm thanh từ khoảng cách xa (vài nghìn km), và trong trường hợp nào khí cầu chỉ có thể phát hiện âm thanh từ khoảng cách gần (dưới 1000 km). Giải thích thông qua các tính toán định lượng. Cho biết bán kính Trái Đất và khoảng $R_e = 6371\text{ km}$.

Câu VIII:

Bằng cách sử dụng quang phổ tia X và phổ quang điện tử, ta có thể thu được thông tin về cấu trúc của vật chất. Sơ đồ bố trí thiết bị thí nghiệm được chỉ ra trong hình 8. Ống tia X bao gồm một cathode của súng điện tử và một anode kim loại. Các electron phát ra từ cathode sẽ được tăng tốc bởi điện áp, sau đó va chạm với anode kim loại để tạo ra tia X (không tính đến bức xạ trước khi electron va chạm với anode). Phổ của nó bao gồm phổ liên tục của bức xạ hãm và phổ đặc trưng rời rạc. Trong thí nghiệm, người ta sử dụng tia X có bước sóng nhất định để tương tác với bia vật liệu, sau đó sử dụng đầu thu quang phổ tia X và đầu thu phổ quang điện tử để phát hiện tia X và quang điện tử phát ra.



Hình 8a: Sơ đồ bố trí thí nghiệm.



Hình 8b: Quang phổ tia X.

Biết hằng số Rydberg $R_\infty = 10\,973\,731\,\text{m}^{-1}$, $hc = 1240\,\text{nm}\cdot\text{eV}$ trong đó h và c lần lượt là hằng số Planck và vận tốc ánh sáng trong chân không.

1. Lý thuyết Bohr có thể lý giải các mức năng lượng và phổ của nguyên tử Hydrogen hoặc hệ ion hoá giống Hydrogen. Năng lượng và trạng thái của electron trong hệ phụ thuộc vào số lượng tử n . Đối với hệ nguyên tử gồm nhiều electron, electron trong nguyên tử có thể được chia thành các lớp vỏ $K(n=1)$, $L(n=2)$ và $M(n=3)$ tùy thuộc vào giá trị của n . Biết rằng năng lượng của electron trong lớp K của nguyên tử kim loại ở anode là $-20.1\,\text{keV}$.
 - a. Xác định điện áp tối thiểu cần sử dụng để ion hoá một electron trong lớp vỏ K của nguyên tử kim loại, từ đó gây ra sự chuyển dịch mức năng lượng của electron từ lớp L về lớp K và phát ra tia X. Kết quả làm tròn đến ba chữ số thập phân.
 - b. Với điện áp tính được ở ý a, bước sóng ngắn nhất của tia X phát ra từ ống tia X là bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến ba chữ số thập phân.
 - c. Nếu năng lượng của photon tia X đặc trưng K_α phát ra từ nguyên tử kim loại là $17.44\,\text{keV}$, hãy xác định số điện tích hạt nhân của nguyên tử này.

2. Sử dụng tia X đặc trưng K_α có bước sóng λ tác động vào một bia vật liệu, giả sử electron trong bia vật liệu ở trạng thái tĩnh và có khối lượng nghỉ là m . Biết góc tán xạ (góc giữa tia X tán xạ và tia X tới) là θ . Hãy tìm bước sóng của tia X tán xạ và động năng của electron quang điện tử.
3. Trong thí nghiệm, phổ tán xạ đo được tại góc $\theta = 135^\circ$. Hình 8b cho thấy có hai đỉnh phổ ứng với các bước sóng λ_1 và λ_2 . Giải thích nguồn gốc hai đỉnh phổ này và nguyên nhân khiến cho độ rộng của đỉnh phổ λ_1 lớn hơn độ rộng của đỉnh phổ λ_2 .

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu I:

1a. Gọi v_1 là khoảng cách ảnh ứng với khoảng cách vật u_1 , ta có:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{F} \quad (1)$$

độ phóng đại ngang là:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{l_1}{l} \quad (2)$$

từ (1) và (2) ta có:

$$u_1 = F \left(1 + \frac{l}{l_1} \right) \quad (3)$$

Tương tự với khoảng cách vật u_2 :

$$u_2 = F \left(1 + \frac{l}{l_2} \right) \quad (4)$$

Như vậy ta có:

$$s = u_2 - u_1 = F \left(\frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right) \quad (5)$$

suy ra:

$$F = \frac{s}{\frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1}} = \frac{sl_1l_2}{l(l_1 - l_2)} \quad (6)$$

1b. Thay (6) vào (3) ta được:

$$u_1 = \frac{sl_2(l_1 + l)}{l(l_1 - l_2)} \quad (7)$$

2a. Giả sử khi chụp ảnh, khoảng cách vật và khoảng cách ảnh tương ứng với thấu kính O_1 lần lượt là u_1, v_1 và tương ứng với thấu kính O_2 lần lượt là u_2, v_2 . Ta có:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \quad , \quad \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} \quad (8)$$

độ phóng đại ngang của mỗi thấu kính lần lượt là:

$$m_1 = -\frac{v_1}{u_1} \quad , \quad m_2 = -\frac{v_2}{u_2} \quad (9)$$

kết hợp (8) và (9) ta được:

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{u_1}{f_1} \quad , \quad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{u_2}{f_2} \quad (10)$$

ngịch đảo độ phóng đại của hệ thấu kính là:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{m_2} = \left(1 - \frac{u_1}{f_1} \right) \left(1 - \frac{u_2}{f_2} \right) \quad (11)$$

vì ảnh của thấu kính O_1 là vật của thấu kính O_2 và khoảng cách giữa hai thấu kính là d nên

$$u_2 = d - u_1 = d - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} \quad (12)$$

thay (12) vào (11) ta có:

$$\frac{1}{m} = \left(1 - \frac{u_1}{f_1}\right) \left(1 - \frac{d - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}}{f_2}\right) = 1 - \frac{d}{f_2} - u_1 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) \quad (13)$$

cho $m = 1$, ta tìm được khoảng cách từ H đến O_1 :

$$u_H = u_1 = \frac{f_1}{d - f_1 - f_2} \quad (14)$$

thay (12) và (14) vào (8) ta tìm được khoảng cách từ H' đến O_2 :

$$v_{H'} = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} \quad (15)$$

2b. Khi vật nằm tại vô cùng, ảnh của nó qua hệ thấu kính sẽ nằm tại tiêu điểm ảnh. Giả sử $u_1 = \infty$, $v_1 = f_1$, $u_2 = d - v_1$, thay vào (8) ta được:

$$v_{F'} = v_2 = \frac{(d - f_1)f_2}{d - f_1 - f_2} \quad (16)$$

kết hợp (15) và (16) ta tìm được tiêu cự ảnh của camera:

$$F' = v_{F'} - v_{H'} = -\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2} \quad (17)$$

thực hiện tương tự ta cũng sẽ tìm được tiêu cự vật của camera:

$$F = -\frac{f_1 f_2}{d - f_1 - f_2} = F' \quad (18)$$

Câu II:

1. Giả sử piston chịu một tác động nhẹ và rời khỏi vị trí cân bằng một góc $|\theta| \ll 1$, phương trình chuyển động của piston là:

$$mr \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)} \quad (1)$$

vì $|\theta| \ll 1$ nên:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}, \quad \frac{1}{\pi/2 - \theta} \approx \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\theta + \frac{8}{\pi^3}\theta^2 + \frac{16}{\pi^4}\theta^3, \quad \frac{1}{\pi/2 + \theta} \approx \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\theta + \frac{8}{\pi^3}\theta^2 - \frac{16}{\pi^4}\theta^3 \quad (2)$$

nhờ đó, phương trình chuyển động của piston có thể được viết dưới dạng:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r} \left(g - \frac{8nRT}{\pi^2 rm} \right) \theta \quad (3)$$

nếu piston cân bằng bền tại $\theta = 0$ thì ta cần phải có:

$$g - \frac{8nRT}{\pi^2 rm} < 0 \quad (4)$$

suy ra:

$$T > \frac{\pi^2 mgr}{8nR} \quad (5)$$

vậy nhiệt độ tối hạn là:

$$T_C = \frac{\pi^2 mgr}{8nR} \quad (6)$$

Lúc này, piston sẽ dao động điều hoà đơn giản quanh vị trí cân bằng, tần số góc là:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{r} \left(\frac{8nRT}{\pi^2 rm} - g \right)} \quad (7)$$

2. Khi $T = T_C$ phương trình (1) có thể được đơn giản hoá bằng cách sử dụng phương trình (3):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{24 + \pi^2}{6\pi^2} \frac{g}{r} \theta^3 \quad (8)$$

có thể thấy, piston chịu tác dụng của một lực phục hồi có độ lớn tỉ lệ với θ^3 , do đó vị trí cân bằng này là bền.

3. Khi $T < T_C$, vị trí cân bằng của piston có thể nằm bên trái hoặc bên phải của ống thuỷ tinh, vị trí góc của nó khi đó là θ_0 , hợp lực tác dụng lên piston lúc này bằng không:

$$mg \sin \theta_0 - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta_0)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta_0)} = 0 \quad (9)$$

rút gọn ta được:

$$\frac{2nRT}{mgr} = \left(\frac{\pi^2}{4} - \theta_0^2 \right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (10)$$

với $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số ở vế phải của phương trình (10): $f(\theta_0) = \left(\frac{\pi^2}{4} - \theta_0^2\right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ nghịch biến theo θ_0 ; khi $\theta_0 \rightarrow 0$, $f(\theta_0)$ đạt giá trị lớn nhất. Điều kiện để phương trình (10) có nghiệm khác không là:

$$T < \frac{\pi^2 mgr}{8nR}$$

tức là $T < T_C$, điều này phù hợp với yêu cầu đề bài. Thay (6) vào (10) ta có:

$$\frac{T}{T_C} = \left(1 - \frac{4\theta_0^2}{\pi^2}\right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (11)$$

khi nhiệt độ T giảm nhẹ so với T_C , $\theta_0 \approx 0$ và:

$$\frac{T}{T_C} \approx 1 - \frac{24 + \pi^2}{6\pi^2} \theta_0^2 \quad (12)$$

vì vậy:

$$\theta_0 = \pm \sqrt{\frac{6\pi^2}{24 + \pi^2} \frac{T_C - T}{T_C}} \quad (13)$$

dấu \pm cho thấy vị trí cân bằng này có thể nằm bên trái hoặc bên phải ống thủy tinh.

4. Khi piston dao động bé quanh vị trí cân bằng θ_0 , góc giữa nó và phương thẳng đứng là $\theta_0 + \theta$, $|\theta| \ll 1$. Khi đó phương trình chuyển động của piston có dạng:

$$mr \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin(\theta_0 + \theta) - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta_0 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta_0 + \theta)} \quad (14)$$

vì $|\theta| \ll 1$ nên ta có:

$$\sin(\theta_0 + \theta) \approx \sin \theta_0 + \theta \cos \theta_0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi/2 - \theta_0 - \theta} \approx \frac{1}{\pi/2 - \theta_0} + \frac{\theta}{(\pi/2 - \theta_0)^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi/2 + \theta_0 + \theta} \approx \frac{1}{\pi/2 + \theta_0} - \frac{\theta}{(\pi/2 + \theta_0)^2} \quad (17)$$

do đó, phương trình chuyển động của piston quanh vị trí cân bằng là:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cos \theta_0}{r} \left[1 - \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \frac{\pi^2/2 + 2\theta_0^2}{\pi^2/2 - 2\theta_0^2} \right] \quad (18)$$

theo đó, piston sẽ dao động bé quanh vị trí cân bằng với tần số góc:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{r} \left[\frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \frac{\pi^2/2 + 2\theta_0^2}{\pi^2/2 - 2\theta_0^2} - 1 \right]} \quad (19)$$

khi $T < T_C$, ta có thể sử dụng phương trình (6) và (7)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \left(\frac{8nRT}{\pi^2 mgr} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{T - T_C}{T_C}} \quad (20)$$

khi $T < T_C$, vì T chỉ nhỏ hơn T_C một chút, $|\theta| \ll 1$, khi đó tần số góc là

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{r} \frac{24 + \pi^2}{3\pi^2} \theta_0^2} = \sqrt{\frac{2g}{r} \frac{T_C - T}{T_C}} \quad (21)$$

5. Gọi góc giữa piston và phương thẳng đứng là θ , khi đó phương trình chuyển động của piston (chẳng hạn như phương trình (1)) là:

$$mr \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)}$$

nhân cả hai vế của phương trình trên với $d\theta$ sau đó lấy tích phân ta được:

$$\int_0^\theta mr\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^\theta \left[mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)} \right] d\theta \quad (22)$$

vì vận tốc ban đầu của piston xấp xỉ bằng không nên ta có:

$$\frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 = mg(1 - \cos \theta) + \frac{nRT}{r} \ln \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right) \quad (23)$$

vận tốc góc của piston tại vị trí cuối θ là:

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2g}{r}(1 - \cos \theta) + \frac{2nRT}{mr^2} \ln \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right)} \quad (24)$$

Câu III:

1a. Gọi vận tốc và gia tốc của nêm so với mặt đất là \vec{v}_0 và \vec{a}_0 , vận tốc và gia tốc của quả cầu so với nêm là \vec{v}_C và \vec{a}_C . Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, quả cầu chịu tác dụng của lực quán tính tịnh tiến, trọng lực, phản lực và lực ma sát; phương trình chuyển động của quả cầu là:

$$ma_C = ma_0 \cos \theta + mg \sin \theta - f \quad (1)$$

đối với chuyển động quay:

$$I_C \ddot{\varphi} = fr \quad (2)$$

gọi φ là góc quay của quả cầu so với khối tâm của nó, điều kiện lăn không trượt:

$$v_C = r\dot{\varphi} \quad (3)$$

$$a_C = r\ddot{\varphi} \quad (4)$$

momen quán tính của quả cầu đối với khối tâm của nó là:

$$I_C = \frac{2}{5}mr^2 \quad (5)$$

thay (4) và (5) vào (2) ta được:

$$f = \frac{2}{5}ma_C \quad (6)$$

bảo toàn động lượng theo phương ngang:

$$m(v_C \cos \theta - v_0) = Mv_0 \quad (7)$$

đạo hàm hai vế phương trình (7) theo thời gian ta được:

$$m(a_C \cos \theta - a_0) = Ma_0 \quad (8)$$

từ (1), (6) và (8) ta tìm được:

$$a_0 = \frac{\frac{5}{7}mg \sin \theta \cos \theta}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (9)$$

1b. Thay (9) vào (8) ta được:

$$a_C = \frac{\frac{5}{7}(M + m)g \sin \theta}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (10)$$

1c. Xét hệ gồm nêm và quả cầu, thành phần vận tốc khối tâm của hệ theo phương thẳng đứng (chiều dương hướng lên) là:

$$v_y = -\frac{mv_C \sin \theta}{M + m} \quad (11)$$

lấy đạo hàm hai vế phương trình (11) theo thời gian ta được:

$$a_y = -\frac{ma_C \sin \theta}{M + m} \quad (12)$$

giả sử phản lực N hướng lên trên, phương trình chuyển động của khối tâm của hệ trên phương thẳng đứng là:

$$(M + m)a_y = N - (M + m)g \quad (13)$$

từ (12) và (13) ta tìm được:

$$N = (M + m)g \frac{M + \frac{2}{7}m}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (14)$$

1d. Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, giả sử phản lực N_1 do nêm tác dụng lên quả cầu vuông góc với mặt nghiêng của nêm và hướng lên; khi đó, cân bằng lực đối với quả bóng theo phương vuông góc với mặt nghiêng cho:

$$N_1 + ma_0 \cos \theta = mg \cos \theta \quad (15)$$

thay (9) vào (15) ta được:

$$N_1 = mg \cos \theta \frac{M + \frac{2}{7}m}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (16)$$

1e. Hệ số ma sát tối thiểu là:

$$\mu_0 = \frac{f}{N_1} \quad (17)$$

thay (6), (10) và (16) vào (17) ta được:

$$\mu_0 = \frac{2(M + m)}{(7M + 2m)} \tan \theta \quad (18)$$

2. Khi $\mu < \mu_0$, quả cầu vừa lăn vừa trượt. Trong hệ quy chiếu gắn với nêm, phương trình chuyển động của quả cầu vẫn được cho bởi (1)

$$ma_C = ma_0 \cos \theta + mg \sin \theta - f$$

lực ma sát khi này không đổi và bằng:

$$f = \mu N \quad (19)$$

từ (1), (18), (15) và (19) ta tìm được:

$$a_C = \frac{(M + m)g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{M + m - m \cos^2 \theta - \mu m \sin \theta \cos \theta} \quad (20)$$

$$f = \frac{\mu M mg}{\frac{M + m}{\cos \theta} - m \cos \theta - \mu m \sin \theta} \quad (21)$$

gia tốc góc của quả cầu:

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{2} \frac{f}{mr} \quad (22)$$

vận tốc của điểm tiếp xúc P được tính bởi:

$$v_P = v_C - r\dot{\varphi} = a_C t - r\ddot{\varphi} t \quad (23)$$

thay (20), (21) và (22) vào (23) ta tìm được:

$$v_P = \frac{(M + m)g \sin \theta - \mu(m + \frac{7}{2}M)g \cos \theta}{M + m - m \cos^2 \theta - \mu m \sin \theta \cos \theta} t \quad (24)$$

Câu IV:

1. Kết quả có thể tìm được từ quan hệ hình học:

$$b = a + 4R \cot \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

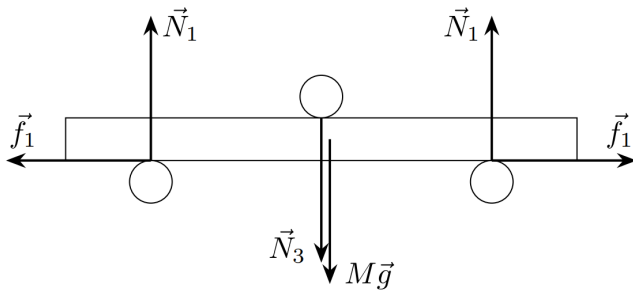
2. Các lực tác dụng lên thanh C và D được biểu diễn trên hình 4a và hình 4b. Đối với thanh A , phương trình cân bằng lực là:

$$N_1 + mg = N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta \quad (2)$$

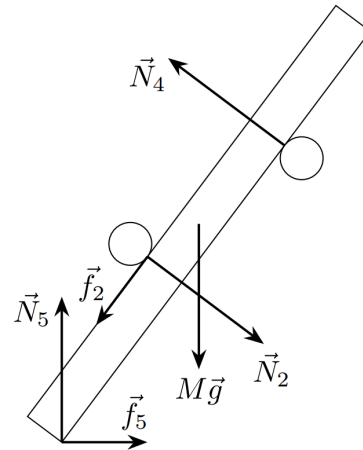
$$f_1 + f_2 \cos \theta = N_2 \sin \theta \quad (3)$$

phương trình cân bằng momen đối với trục quay đi qua khối tâm của thanh A là:

$$f_1 R = f_2 R \quad (4)$$



Hình 4a: Các lực tác dụng lên thanh C .



Hình 4b: Các lực tác dụng lên thanh D .

đối với thanh B , phương trình cân bằng lực là:

$$N_3 = 2N_4 \cos \theta + mg \quad (5)$$

đối với thanh C , phương trình cân bằng lực là:

$$2N_1 = N_3 + Mg \quad (6)$$

đối với thanh D , phương trình cân bằng lực là:

$$N_5 + N_4 \cos \theta = N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta + Mg \quad (7)$$

$$f_5 + N_2 \sin \theta = N_4 \sin \theta + f_2 \cos \theta \quad (8)$$

phương trình cân bằng momen đối với trục quay đi qua điểm tiếp xúc của thanh D với mặt đất:

$$N_2 a + Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) = N_4 b + f_2 2R \quad (9)$$

3. Ta có:

$$b = a + 4R \cot \frac{\theta}{2} = 24 \text{ cm} \quad (10)$$

từ (2), (3) và (4) ta có:

$$f_1 = f_2 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} N_2 \quad (11)$$

$$N_1 + mg = N_2 \quad (12)$$

từ (5) và (6):

$$N_1 = N_4 \cos \theta + \frac{1}{2}(M + m)g \quad (13)$$

thay (11), (12), (13) vào (9) ta có:

$$(N_1 + mg)a + Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) = \left(N_1 - \frac{1}{2}(M + m)g \right) \frac{b}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (N_1 + mg)2R \quad (14)$$

suy ra:

$$N_1 = \frac{mga + Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) + \frac{1}{2}(M + m)g \frac{b}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} mg2R}{\frac{b}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} 2R - a} = 10,427mg \quad (15)$$

từ (11) và (12) ta có:

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (N_1 + mg) \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) + \frac{1}{2}(M + 3m)g \frac{b}{\cos \theta}}{mga + Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) + \frac{1}{2}(M + m)g \frac{b}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} mg2R} \\ &= 4,733mg \end{aligned} \quad (16)$$

để hệ duy trì được sự cân bằng:

$$f_1 \leq \mu N_1, \quad f_2 \leq \mu N_2 \quad (17)$$

suy ra:

$$\begin{aligned} \mu \geq \frac{f_1}{N_1} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) + \frac{1}{2}(M + 3m)g \frac{b}{\cos \theta}}{mga + Mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) + \frac{1}{2}(M + m)g \frac{b}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} mg2R} \\ &= 0,454 \end{aligned} \quad (18)$$

từ (2), (5), (6), (7) ta có:

$$N_5 = \frac{3}{2}(M + m)g = \frac{21}{2}mg \quad (19)$$

từ (8), (10), (11), (12) ta có:

$$f_5 = N_1 \left(\tan \theta - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{1}{2}(M + m)g \tan \theta - mg \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) = 2,149mg \quad (20)$$

điều kiện cân bằng:

$$f_5 \leq \mu' N_5 \quad (21)$$

suy ra:

$$\mu' \geq \frac{f_5}{N_5} = \frac{2N_1}{3(M + m)g} \left(\tan \theta - \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) - \frac{1}{3} \tan \theta - \frac{2m}{3(M + m)} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 0,209 \quad (22)$$

Câu V:

1. Khi hạt chuyển động tròn đều trong mặt phẳng vuông góc với trục Oz , nó không chịu tác dụng của lực nào trên phương Oz , do đó:

$$\hat{z} \cdot e\vec{E} = \frac{ep}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} (3\cos^2\theta_0 - 1) = 0 \quad (1)$$

suy ra:

$$\cos\theta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

và vì hạt chuyển động tròn, lực tác dụng lên nó trong mặt phẳng Oxy phải có phương hướng tâm. Phương trình (2) chỉ có hai nghiệm, đó là:

$$F = \frac{-3ep}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \cos\theta_0 \sin\theta_0 > 0 \quad (3)$$

trong phương trình (2) chỉ có một nghiệm thoả mãn yêu cầu $\cos\theta_0 < 0$, tức là ta có:

$$\cos\theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \implies \theta_0 = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

bán kính quỹ đạo của hạt là $R = r_0 \sin\theta_0$, thay (3) vào phương trình của định luật II Newton:

$$F = m \frac{v_0^2}{R} \quad (5)$$

ta có:

$$v_0 = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{-\frac{3eq}{4\pi\epsilon_0 mr_0^2} \cos\theta_0 \sin^2\theta_0} = \sqrt{-\frac{3eq}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \cos\theta_0 (1 - \cos^2\theta_0)}$$

sử dụng (4) ta được:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}eq}{6\pi\epsilon_0 mr_0^2}} \quad (6)$$

2a. Momen động lượng của hạt là:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{n} \quad (7)$$

momen lực tác dụng lên hạt:

$$\tau = \vec{r} \times e\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n} \quad (8)$$

với $\hat{n} = \hat{r} \times \hat{\theta}$. Phương trình chuyển động của hạt:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (9)$$

nhân vế theo vế phương trình (9) với $L = mr^2\dot{\theta}$ ta được:

$$L \frac{dL}{dt} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{mep \sin\theta}{5\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{dt}$$

điều này dẫn tới:

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{mep}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta \right)$$

suy ra:

$$L^2 + \frac{mep}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta = \text{const} \quad (10)$$

hạt đứng yên tại $t = 0$, nghĩa là:

$$L^2 = \frac{mep}{2\pi\epsilon_0} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (11)$$

2b. Điện thế do lưỡng cực điện tạo ra:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

bảo toàn năng lượng:

$$\frac{1}{2}mv^2 + e\varphi = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{ep \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ep \cos \theta_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (12)$$

hay dưới dạng động lượng $p_r = mv_r$ và momen động lượng $L = mr^2\dot{\theta}$:

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{ep \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ep \cos \theta_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (13)$$

thay (11) vào (13) ta được:

$$v_r^2 = \frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

suy ra:

$$v_r = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)} \quad (14)$$

2c. Vì $v_r^2 \geq 0$ nên từ (14) ta có:

$$\text{khi } \theta_0 < \frac{\pi}{2}, r \geq r_0$$

lúc này, $v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$ tăng khi r tăng. Chuyển động của hạt không bị giới hạn.

$$\text{khi } \theta_0 > \frac{\pi}{2}, r \leq r_0$$

$$\text{khi } \theta_0 = \frac{\pi}{2}, r = r_0$$

trong cả hai trường hợp trên, chuyển động của hạt đều bị giới hạn. Do đó, điều kiện cần tìm là:

$$\theta_0 \geq \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

nếu $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, chuyển động của hạt bị giới hạn hoàn toàn, $v_r = \dot{r} = 0$. Khoảng cách từ hạt đến gốc toạ độ không đổi trong suốt quá trình chuyển động và bằng r_0 ; và vì $L \geq 0$, phương trình (11) đòi hỏi:

$$L^2 = -\frac{mep}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta \geq 0 \quad (16)$$

như vậy, chuyển động của hạt thoả mãn

$$r = r_0, \cos \theta \leq 0 \quad (17)$$

có thể thấy, quỹ đạo của nó là một đường bán nguyệt có bán kính r_0 $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ trong mặt phẳng thẳng đứng.

2d. Trong trường hợp chuyển động của hạt không bị giới hạn, phương trình (14) có thể được viết lại dưới dạng:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)} \quad (18)$$

hay:

$$\sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi\epsilon_0 m r_0^2}} dt = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = d\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

qua đó:

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} - \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi\epsilon_0 m r_0^2}} t = \text{const} \quad (19)$$

sử dụng điều kiện bao đầu $r(t=0) = r_0 > 0$, ta có:

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} - \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi\epsilon_0 m r_0^2}} t = 0$$

suy ra:

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{ep \cos \theta_0}{2\pi\epsilon_0 m r_0^2} t^2} \quad (20)$$

Câu VI:

1. Từ trường bên ngoài quả cầu là:

$$\vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}' = \vec{B}_e + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}] \quad (1)$$

đối với một vật dẫn lý tưởng, từ trường bên trong nó bằng không, mặt khác, theo định lý Gauss cho từ trường, thành phần theo phương pháp tuyến của từ trường là liên tục, do đó:

$$\hat{r} \cdot \vec{B}|_{r=a} = \hat{r} \cdot \vec{B}_e + \frac{\mu_0}{2\pi a^3} (\vec{m} \cdot \hat{r}) = 0 \quad (2)$$

do tính đối xứng, \vec{m} phải song song hoặc phản song song với \vec{B}_e , theo đó, từ (2) ta có:

$$\vec{m} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \vec{B}_e \quad (3)$$

từ trường bên ngoài là chồng chập của trường được tạo ra từ dòng điện từ hoá trên quả cầu (tương tự với từ trường tạo ra bởi lưỡng cực từ \vec{m}) và từ trường ngoài \vec{B}_e . Thay (3) vào (1) ta được:

$$\vec{B} = \vec{B}_e - \frac{a^3}{2r^3} [3(\vec{B}_e \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{B}_e] \quad (4)$$

theo định lý Ampere, mật độ dòng điện trên bề mặt quả cầu được cho bởi:

$$\mu \vec{i} = \hat{r} \times \vec{B}|_{r=a} \quad (5)$$

thay (4) vào (5) ta được:

$$\vec{i} = \hat{r} \times \frac{3\vec{B}_e}{2\mu_0} = \left(-\frac{3B_e}{2\mu_0 \sin \theta} \right) \hat{\phi} \quad (6)$$

2. Do tính đối xứng, cảm ứng từ do dòng điện trong dây dẫn tạo ra tại một điểm nằm trên trục đối xứng của nó có hướng dọc theo trục Oz . Sử dụng định luật Biot-Savart-Laplace, ta có:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(b^2 + h^2)} \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} 2\pi b \hat{z}$$

hay:

$$\vec{B} = \left[\frac{\mu_0 I_0 b^2}{2(b^2 + h^2)^{3/2}} \cos \omega t \right] \hat{z} = B_0 \cos \omega t \hat{z} \quad (7)$$

trong đó:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0 b^2}{2(b^2 + h^2)^{3/2}}$$

3. Vì $a \ll b$ nên từ trường do vòng dây tạo ra ở khu vực gần quả cầu dẫn gần như là đều, xấp xỉ từ trường tại tâm quả cầu, được cho bởi phương trình (7). Và vì $b \ll a$, quả cầu dẫn có thể xem là lý tưởng và momen lưỡng cực từ của nó có thể tìm được từ phương trình (3):

$$\vec{m} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \vec{B} \quad (8)$$

vì \vec{m} và \vec{B} đều hướng dọc theo trục Oz nên lực tác dụng lên quả cầu là:

$$\vec{F}(t) = m \frac{dB}{dz} \hat{z}$$

do đó:

$$\vec{F} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} B \frac{dB}{dz} \hat{z} = -\frac{\pi a^3}{\mu_0} \frac{dB^2}{dz} \hat{z}$$

thay (7) vào ta được:

$$\vec{F}(t) = -\frac{\pi a^3}{\mu_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{\mu_0^2 I_0^2 b^4}{4(b^2 + z^2)^3} \cos^2 \omega t \right] = \frac{3\pi a^3 b^4 z}{2(b^2 + z^2)^4} \mu_0 I_0^2 \cos^2 \omega t \hat{z} \quad (9)$$

mặt khác:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

do đó:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{F} dt = \frac{3\pi a^3 b^4 h}{4(b^2 + h^2)^4} \mu_0 I_0^2 \hat{z} \quad (10)$$

phương trình cân bằng:

$$\langle F \rangle = G \quad (11)$$

từ đây ta tìm được:

$$I_0 = \sqrt{\frac{4G(b^2 + h^2)^4}{3\pi a^3 b^4 \mu_0 h}} \quad (12)$$

4. Thay (6) vào (7) ta tìm được mật độ dòng điện bề mặt gần đúng trên quả cầu dẫn. Do đó, mật độ dòng điện trong bề dày đặc trưng của quả cầu là:

$$\vec{J} = \frac{\vec{i}}{\delta} = \left(-\frac{3B}{2\mu_0 \delta} \sin \theta \right) \hat{\phi} \quad (13)$$

theo định luật Joule, mật độ công suất nhiệt là:

$$p = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{9B^2}{4\mu_0^2 \sigma \delta^2} \sin^2 \theta \quad (14)$$

do đó, tổng công suất toả nhiệt là:

$$P(t) = \int p dV = \int p 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{9\pi B^2}{2\mu_0^2 \sigma \delta^2} \int_{a-\delta}^a r^2 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (15)$$

trong đó:

$$\int_{a-\delta}^a r^2 dr = \frac{1}{3} [a^3 - (a - \delta)^3] \approx a^2 \delta \quad (16)$$

và:

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{4}{3} \quad (17)$$

do đó:

$$P(t) = 6\pi a^2 \frac{B^2}{\mu_0^2 \sigma \delta} \quad (18)$$

thay (7) và $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$ vào (18) ta được:

$$P(t) = \frac{3}{4} \frac{\pi a^2 b^4 I_0^2}{(b^2 + h^2)^3} \sqrt{\frac{2\omega \mu_0}{\sigma}} \cos^2 \omega t \quad (19)$$

vì vậy, công suất toả nhiệt trung bình là:

$$\langle P \rangle = \frac{3}{8} \frac{\pi a^2 b^4 I_0^2}{(b^2 + h^2)^3} \sqrt{\frac{2\omega \mu_0}{\sigma}} \quad (20)$$

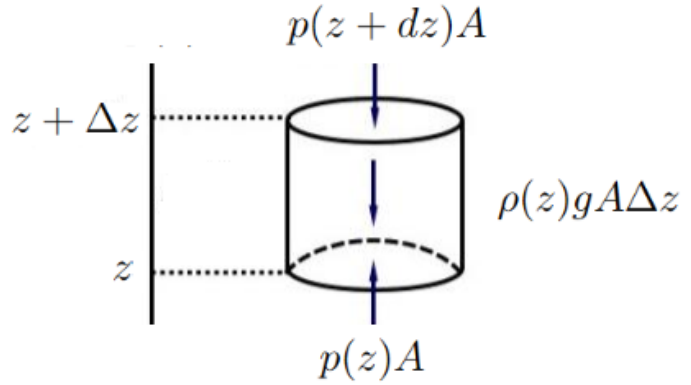
Câu VII:

1. Ở độ cao z , áp suất khí quyển là $p(z)$, nhiệt độ là $T(z)$, sử dụng phương trình trạng thái khí lý tưởng, ta tìm được khối lượng riêng của không khí là:

$$\rho(z) = \frac{n\mu}{V} = \frac{pz\mu}{RT(z)} \quad (1)$$

trong đó n là số mol, V là thể tích của khí. Như trong hình 7a, trọng lượng của khí nằm trong một hình trụ bán kính đáy A , chiều cao Δz ở độ cao z là $\rho(z)gA\Delta z$, mặt trên của hình trụ chịu tác dụng của

một lực có độ lớn $p(z + \Delta z)A$ trong khi lực tác dụng lên mặt dưới có độ lớn $p(z)A$. Vì khí bay lên từ từ, các lực tác dụng lên nó phải cân bằng với nhau:



Hình 7a

$$p(z + \Delta z)A + \rho(z)A\Delta z g = p(z)A \quad (2)$$

cho $\Delta z \rightarrow 0$, phương trình (2) có thể được viết dưới dạng:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3)$$

sử dụng phương trình (1), ta được:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\mu g}{RT} \quad (4)$$

chia cả hai vế cho p , ta có:

$$\frac{d \ln p}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} \quad (5)$$

trong quá trình đoạn nhiệt, pV^γ là hằng số, theo phương trình trạng thái khí lý tưởng, $p^{1-\gamma}T^\gamma$ cũng là hằng số, tức:

$$C = -(\gamma - 1) \ln p + \gamma \ln T \quad (6)$$

lấy đạo hàm hai vế phương trình (6) theo z ta có:

$$0 = -(\gamma - 1) \frac{d \ln p}{dz} + \gamma \frac{d \ln T}{dz} \quad (7)$$

sử dụng phương trình (5):

$$\frac{d \ln T}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT} \quad (8)$$

vì thế:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{(\gamma - 1)\mu g}{\gamma R} \quad (9)$$

sau khi lấy tích phân, ta nhận được:

$$T(z) = T_0 - \frac{(\gamma - 1)\mu g}{\gamma R} z \quad (10)$$

2. Đối với quá trình đoạn nhiệt, pV^γ là hằng số, do đó ta có thể viết $p = C\rho^\gamma$, suy ra:

$$v_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s = \frac{d(C\rho^\gamma)}{d\rho} = \gamma C\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{C\rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

thay $\rho = \frac{n\mu}{V}$ vào phương trình trạng thái khí lý tưởng $pV = nRT$ để có:

$$v_s^2 = \gamma \frac{pV}{n\mu} = \gamma \frac{nRT}{n\mu} = \gamma \frac{RT}{\mu} \quad (12)$$

Do đó, ở tầng đối lưu, tốc độ truyền âm giảm khi độ cao tăng. Ở tầng bình lưu, nhiệt độ gần như không thay đổi nên tốc độ âm thanh cũng gần như không thay đổi theo độ cao; Ở tầng nghịch, nhiệt độ tăng dần theo độ cao do đó tốc độ âm thanh cũng tăng dần theo độ cao.

3. Trong mô hình đơn giản được giới thiệu, nhiệt độ khí bên ngoài tầng bình lưu là:

$$-10^\circ\text{C} = 263.15\text{ K}$$

và nhiệt độ trong tầng bình lưu là:

$$-55^\circ\text{C} = 218.15\text{ K}$$

do đó, tỉ số giữa vận tốc âm thanh bên ngoài tầng bình lưu và vận tốc âm thanh bên trong tầng bình lưu là:

$$\frac{v_0}{v_i} = \sqrt{\frac{263,15}{218,15}} \approx 1,098 \quad (13)$$

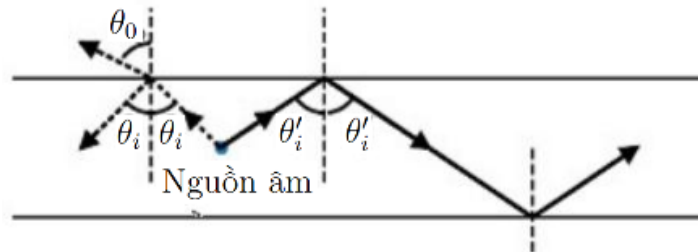
khi sóng âm trong tầng bình lưu truyền đến mặt phân cách, nếu góc tới bằng θ_i thì theo định luật khúc xạ, góc khúc xạ θ_0 phải thỏa mãn:

$$\sin \theta_0 = \frac{v_0}{v_i} \sin \theta_i \approx 1,098 \sin \theta_i \quad (14)$$

Từ biểu thức trên, ta nhận thấy có một góc tới tới hạn:

$$\theta_i^m = \arcsin \frac{v_i}{v_0} \approx 65,61^\circ \quad (15)$$

khi góc tới nhỏ hơn θ_i^m thì định luật khúc xạ được thỏa mãn và hiện tượng khúc xạ có thể xảy ra, khi góc tới lớn hơn θ_i^m thì định luật khúc xạ không được thỏa mãn do đó sẽ xảy ra hiện tượng phản xạ toàn phần. Do đó, biểu hiện của khúc xạ và phản xạ là góc tới nhỏ hơn hay lớn hơn θ_i^m . Như được biểu diễn bằng đường nét đứt trên hình 7b, khi góc tới nhỏ hơn θ_i^m , sóng âm có thể phản xạ hoặc khúc xạ cùng lúc, nhờ đó âm thanh có thể được truyền vào tầng nghịch. Như được biểu diễn bằng nét liền trên hình 7b, khi góc tới lớn hơn θ_i^m , sóng âm sẽ bị phản xạ toàn phần, do đó âm thanh không thể truyền vào tầng nghịch.



4. Khi khoảng cách là tương đối lớn, ta cần xét đến hình dạng của Trái Đất. Ở đây ta có thể chia vấn đề thành 4 trường hợp, tùy thuộc vào vị trí của nguồn âm và đầu thu:

- A. Khi nguồn âm và đầu thu đều nằm trong tầng đối lưu, sẽ không có hiện tượng phản xạ toàn phần xảy ra. Vì không có hiện tượng phản xạ, đầu thu chỉ có thể thu được âm thanh nếu không bị Trái Đất cản trở, đường đi của sóng âm được biểu diễn bằng mũi tên A trong hình 7c. Trong trường hợp này, khoảng cách phát hiện tối đa là:

$$l_1 = \sqrt{(R_e + h_1)^2 - R_e^2} \approx 2\sqrt{2R_e h_1} \approx 714 \text{ km}$$

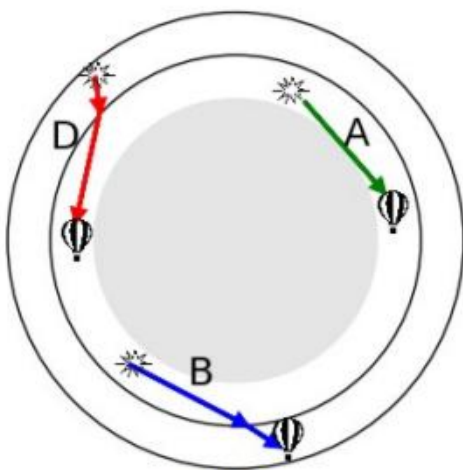
Vì vậy, trong trường hợp này, ta không thể phát hiện được nguồn âm ở cách xa hàng nghìn kilomet.

- B. Nguồn âm ở tầng đối lưu và đầu thu ở tầng bình lưu, do không xảy ra hiện tượng phản xạ, ta chỉ có thể thu được âm khi không bị Trái Đất cản trở, đường đi của sóng âm trong trường hợp này được biểu diễn bằng mũi tên B trong hình 7c. Trong trường hợp này, khoảng cách phát hiện xa nhất sẽ không vượt quá khoảng cách từ một điểm trên đỉnh của tầng đối lưu, dọc theo tiếp tuyến của mặt phân cách đến một điểm trên đỉnh tầng bình lưu, nghĩa là nó sẽ không vượt quá:

$$l_1 = \sqrt{(R_e + h_2)^2 - R_e^2} - \sqrt{(R_e + h_1)^2 - R_e^2} \approx 2\sqrt{2R_e h_2} + 2\sqrt{2R_e h_1} \approx 862 \text{ km}$$

Vì vậy, trong trường hợp này, ta không thể phát hiện được nguồn âm ở cách xa hàng nghìn kilomet.

- C. Nguồn âm và đầu thu cùng ở tầng bình lưu. Vì khoảng cách giữa hai bề mặt khí quyển rất nhỏ so với bán kính Trái Đất nên sóng âm bị phản xạ toàn phần trên mặt này cũng sẽ phản xạ toàn phần trên bề mặt kia. Do đó, âm thanh có góc tới nhỏ trong tầng bình lưu có thể bị phản xạ liên tục qua hai mặt phân cách và sẽ bị giới hạn trong tầng bình lưu, do đó nó sẽ tiếp tục là truyền như được biểu diễn trên hình 7d. Vì vậy, trong trường hợp này ta có thể thu được âm thanh ở cách xa vài nghìn kilomet.
- D. Nguồn âm ở tầng bình lưu và khí cầu ở tầng đối lưu, tương tự như trường hợp A và B , ta không thể thu được âm thanh ở cách xa vài nghìn kilomet.



Hình 7c



Hình 7d

Câu VIII:

1a. Quá trình tạo ra tia X dòng K có thể được mô tả như sau: Electron va chạm với nguyên tử bia ở cực dương làm ion hoá một electron trong lớp K của vỏ nguyên tử bia, dẫn đến một chỗ trống trong lớp K của nguyên tử bia, electron ở lớp L ngay lập tức nhảy sang lớp K và đồng thời phát ra tia X đặc trưng K_α . Giả sử động năng của các electron sinh ra ở cực âm sau khi được gia tốc bởi điện trường là:

$$T_e = eU \quad (1)$$

năng lượng ion hoá của các electron ở lớp K của nguyên tử bia là:

$$E_k = 20.1 \text{ keV}$$

do đó, điều kiện để một chỗ trống xuất hiện trong lớp K của nguyên tử bia là:

$$T_e \geq E_k \quad (2)$$

từ (1) và (2), điện áp tối thiểu cần sử dụng bằng:

$$U_{min} = \frac{E_k}{e} = 20.1 \text{ keV} \quad (3)$$

1b. Tia X liên tục phát ra từ ống tia X có nguồn gốc từ bức xạ hãm do các electron va chạm với anode của tấm kim loại tạo ra. Dưới điện áp tối thiểu U_{min} , giả sử bước sóng ngắn nhất của tia X phát ra là λ_{min} , ta có:

$$T_e h = \nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \quad (4)$$

từ (1) và (4):

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU} \approx 0.0617 \text{ nm} \quad (5)$$

8c. Năng lượng của tia X đặc trưng K_α do nguyên tử kim loại phát ra là $E = 17.44 \text{ keV}$, nghĩa là:

$$E = \frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}} = 17.44 \text{ keV} \quad (6)$$

gọi λ_{K_α} là bước sóng của tia X đặc trưng K_α . Đặc điểm cấu trúc quang phổ của tia X dãy K tạo ra do sự va chạm của electron và nguyên tử bia kim loại có liên quan đến tính chất tia của nguyên tử hydrogen. Các quang phổ của hệ thống tương tự như nhau, sự khác biệt nằm ở các điện tích hạt nhân khác nhau mà electron trong nguyên tử cảm nhận được. Vì có một electron sau khi làm xuất hiện một lỗ trống trên lớp vỏ K của nguyên tử bia, nên electron này có tác dụng che chắn hạt nhân. Số điện tích hạt nhân mà electron lớp L cảm nhận được là một giá trị lớn hơn $Z - 1$ và nhỏ hơn Z . Thông thường, nó được gọi là điện tích hạt nhân hiệu dụng Z^* . Theo lý thuyết Bohr, tương tự như phổ hệ thống của nguyên tử hydrogen, bước sóng của tia X đặc trưng K_α phát ra từ bia kim loại thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = R_\infty Z^{*2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \quad (7)$$

trong đó R_∞ là hằng số Rydgerd và Z^* là điện tích hạt nhân hiệu dụng. Từ (6) và (7) ta có:

$$Z^* = \sqrt{\frac{4}{3R_\infty \lambda_{K_\alpha}}} \sqrt{\frac{4E}{3hcR_\infty}} \approx 41,35 \quad (8)$$

vì $Z - 1 < Z^* < Z$ nên

$$Z^* < Z < Z^* + 1$$

từ (8) ta có:

$$Z = 42 \quad (9)$$

2. Năng lượng liên kết của các electron trong bìa kim loại tương đối nhỏ so với năng lượng của các photon tia X và sự tương tác của tia X và bìa kim loại có thể xem như sự tán xạ của tia X và electron tự do. Gọi năng lượng của photon tới là E_0 , động lượng là \vec{p}_0 và electron bìa ban đầu đứng yên. Sau khi photon tia X va chạm với electron bìa, năng lượng của electron phát ra là E_1 , động lượng là \vec{p}_1 , góc giữa nó và photon tới là θ ; quang điện tử phát ra có năng lượng E_2 , động lượng \vec{p}_2 . Vì năng lượng của photon X rất cao nên động năng của các electron phát ra cũng rất cao, do đó ta phải xét tới hiệu ứng tương đối tính. Năng lượng của quang điện tử phát ra là:

$$E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10)$$

động năng:

$$T_2 = E_2 - mc^2 \quad (11)$$

động lượng là:

$$\vec{p}_2 = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12)$$

từ (11) và (12) ta có:

$$E_2^2 = m^2c^4 + p_2^2c^2 \quad (13)$$

bảo toàn động lượng:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (14)$$

như vậy:

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \theta \quad (15)$$

bảo toàn năng lượng:

$$E_0 + mc^2 = E_1 + \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} \quad (16)$$

động năng của electron sau va chạm là:

$$T_2 = \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} - mc^2 = E_0 - E_1 = c(p_0 - p_1) \quad (17)$$

suy ra:

$$p_2^2 = (p_0 - p_1)^2 + 2mc(p_0 - p_1) \quad (18)$$

từ (15) và (16):

$$mc(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos \theta) = 2p_0p_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

thay $\lambda_0 = \frac{h}{p_0}$ và $\lambda_1 = \frac{h}{p_1}$ vào (19) ta có:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (20)$$

trong đó λ_C được gọi là bước sóng Compton của electron:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,426.10^{-12}\text{m} \quad (21)$$

có thể thấy, sự chênh lệch bước sóng là:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_1 = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

theo định luật bảo toàn năng lượng, động năng của quang điện tử là:

$$T_2 = E_0 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc(1 - \cos \theta)}{\lambda_0 \left(1 - \cos \theta + \frac{\lambda_0}{\lambda_C}\right)} \quad (22)$$

4. Đỉnh phổ λ_2 bắt nguồn từ quá trình tán xạ gần như đàn hồi của các photon tia X với các nguyên tử bia. Năng lượng giật lùi của các nguyên tử bia là không đáng kể và bước sóng ánh sáng tán xạ gần như không thay đổi.

Đỉnh phổ λ_1 bắt nguồn từ quá trình ion hoá do sự va chạm của photon tia X với các electron bia, do mất mát năng lượng, bước sóng của photon tán xạ trở nên dài hơn.

Đỉnh phổ λ_2 rộng hơn vì sự chuyển động của các electron trong bia kim loại. Hình dạng của quang phổ sẽ phản ánh đặc tính phân bố động lượng của các electron bia.