I teoremi di Noether: simmetrie, leggi di conservazione e teorie di gauge

Matteo Zandi

15 settembre 2023

I teoremi di Noether

Contenuti nell'articolo«Invariante Variationsprobleme» del 1918 della matematica tedesca Emmy Noether (1882 – 1935).

I teoremi di Noether

Contenuti nell'articolo«Invariante Variationsprobleme» del 1918 della matematica tedesca Emmy Noether (1882 – 1935).

Possiamo riassumerli nel seguente modo :

- simmetria globale $\iff$ legge di conservazione ;
- simmetria locale $\iff$ identità tra le equazioni del moto.

I teoremi di Noether

Contenuti nell'articolo«Invariante Variationsprobleme» del 1918 della matematica tedesca Emmy Noether (1882 – 1935).

Possiamo riassumerli nel seguente modo :

- simmetria globale $\Longleftrightarrow$ legge di conservazione ;
- simmetria locale $\Longleftrightarrow$ identità tra le equazioni del moto.

Che cosa vuol dire simmetria ? Che cosa vuol dire che una quantità fisica si conserva ? Che cosa vuol dire che è presente un'identità tra le equazioni del moto ?

Formalismo lagrangiano

Un generico sistema fisico è descritto dal funzionale di azione

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t,\ q^i,\ \dot{q}^i) \qquad\qquad S[\phi] = \int d^4x\, \mathcal{L}(x^\mu,\ \phi,\ \phi_{,\mu})$$

Attraverso il principio di azione stazionaria,

$$\delta S = 0$$

si ricavano le equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0$$

Simmetrie

Una simmetria è una classe speciale di trasformazioni che lascia le equazioni del moto invariate, delle coordinate

$$\delta_s q^i : \delta S[q^i,\, \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} K \quad \forall q^i$$

o dei campi

$$\delta_s \phi : \delta S[\phi,\, \delta_s \phi] = \int d^4x\, \partial_\mu K^\mu \quad \forall \phi$$

Una variazione on-shell è una arbitraria trasformazione che usa le equazioni del moto, delle coordinate

$$\delta q^i : \delta S[\overline{q}^i,\, \delta q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

o dei campi

$$\delta \phi : \delta S[\overline{\phi},\, \delta_s \phi] = \int d^4x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right)$$

Deformazioni

Non abbiamo tuttavia considerato trasformazioni temporali perché producono deformazioni delle coordinate.

$$t' = t + \epsilon \Rightarrow \delta q(t) = -\epsilon \dot{q}(t)$$

Analogamente per campi

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \Rightarrow \delta\phi(x) = -\xi^{\mu}(x)\partial_{\mu}\phi(x)$$

o in particolare per campi tensoriali (0, 1)

$$\delta A_{\mu}(x) = -\xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}A_{\mu}(x) - A_{\nu}(x)\partial_{\mu}\xi^{\nu}(x)$$

dove un campo tensoriale (0, 1) viene definito dalla sua trasformazione

$$A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}(x)$$

Legge di conservazione (ed equazione di continuità)

Una quantità fisica si conserva se la sua derivata temporale è nulla

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

che può essere anche espressa tramite l'equazioni di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_0 J^0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$$

in cui a conservarsi è

$$Q = \int_V d^3x \, J^0(x)$$

Il primo teorema

Il primo teorema di Noether (in meccanica classica)

Sia $\delta_s q^i$ una simmetria del sistema. Allora esiste una carica di Noether Q definita come

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi la legge di conservazione

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

Il primo teorema di Noether (in teoria classica dei campi)

Sia $\delta_s \phi$ una simmetria del sistema. Allora esiste una corrente di Noether J^μ definita come

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi - K^\mu$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi l'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Dimostrazione

$$\delta S[\overline{q}^i,\ \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt} K = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = \frac{d}{dt} Q = 0$$

- C
- I
- A
- O

Grazie per l'attenzione