I teoremi di Noether: simmetrie, leggi di conservazione e teorie di gauge

Matteo Zandi

15 settembre 2023

Introduzione

Contenuti nell'articolo ≪Invariante Variationsprobleme≫ del 1918 della matematica tedesca Emmy Noether.

Possiamo riassumerli nel seguente modo:

- simmetria continua globale $\iff$ legge di conservazione,
- simmetria continua locale $\iff$ identità tra le equazioni del moto.

Formalismo lagrangiano

In meccanica classica[1], un generico sistema fisico è descritto dal funzionale di azione

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t,\ q^i,\ \dot{q}^i)$$

Attraverso il principio di azione stazionaria,

$$\delta S = 0$$

si ricavano le equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

[1] In questo caso classica ha l'accezione di non relativistica e non quantistica

Che cos'è una simmetria?

Una simmetria è una classe speciale di trasformazioni delle coordinate che lascia le equazioni del moto invariate

$$\delta_s q^i : \delta S[q^i,\ \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt} K$$

Una variazione on-shell è una arbitraria trasformazione delle coordinate che usa le equazioni del moto

$$\delta q^i : \delta S[\overline{q}^i,\ \delta q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)$$

Non abbiamo tuttavia considerato trasformazioni temporali perché producono deformazioni delle coordinate

$$t' = t + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \delta q(t) = -\epsilon \dot{q}(t)$$

Che cosa vuol dire che una quantità si conservi?

Una quantità fisica si conserva se la sua derivata temporale è nulla

$$\frac{d}{dt}Q = 0$$

Il primo teorema di Noether

Teorema

Sia $\delta_s q^i$ una simmetria dell'azione. Allora esiste una carica di Noether Q definita come

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi la legge di conservazione

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

Dimostrazione

Vincolando che le $\overline{q}^i$ soddisfino le equazioni del moto e che le $\delta_s q^i$ siano una simmetria dell'azione, troviamo

$$\delta S[\overline{q}^i,\ \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt} K = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)$$

Sottraendo il terzo dal secondo

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = 0$$

otteniamo la tesi ricercata

$$\frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = \frac{d}{dt} Q = 0$$

q.e.d.

La particella libera

L'azione di una particella libera è

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

La prima simmetria è quella di una traslazione temporale

$$t' = t + \epsilon$$

che porta ad una variazione dell'azione

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt}\Big(- \epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \Big)$$

con termine al bordo

$$K = -\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

La carica di Noether è quindi l'energia, a meno di un fattore costante

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = -\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

La seconda simmetria è quella di una traslazione spaziale

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$$

che porta ad una variazione dell'azione

$$\delta S = 0$$

con termine al bordo

$$K = 0$$

La carica di Noether è quindi la quantità di moto, a meno di un fattore costante

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = -\mathbf{a} \cdot m\dot{\mathbf{r}}$$

La terza simmetria è quella di una rotazione spaziale

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

che porta ad una variazione dell'azione

$$\delta S = 0$$

con termine al bordo

$$K = 0$$

La carica di Noether è quindi il momento angolare, a meno di un fattore costante

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$$

La quarta simmetria è quella di un boost di Galileo

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$$

che porta ad una variazione dell'azione

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\Big(m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\Big)$$

con termine al bordo

$$K = m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

La carica di Noether è quindi il moto del centro di massa, a meno di un fattore costante

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{r} - m\dot{\mathbf{r}}t)$$

Formalismo lagrangiano

In teoria classica[2] dei campi, un generico sistema fisico è descritto dal funzionale di azione

$$S[\phi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(x^\mu, \ \phi, \ \phi_{,\mu})$$

Attraverso il principio di azione stazionaria,

$$\delta S = 0$$

si ricavano le equazioni del moto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0$$

dove il quadrigradiente è definito come

$$\phi_{,\mu} = \partial_\mu \phi = \frac{d\phi}{dx^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \ \nabla \phi)$$

[2] In questo caso classica ha l'accezione di relativistica con metrica $g_{\mu\nu} = diag(1, \ -1, \ -1, \ -1)$ e non quantistica

Che cos'è una simmetria?

Una simmetria è una classe speciale di trasformazioni dei campi che lascia le equazioni del moto invariate

$$\delta_s\phi\colon\ \delta S[\phi,\ \delta_s\phi] = \int d^4x\,\partial_\mu K^\mu \quad \forall\phi$$

Una variazione on-shell è una arbitraria trasformazione dei campi che usa le equazioni del moto

$$\delta\phi\colon\ \delta S[\overline{\phi},\ \delta\phi] = \int d^4x\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi\right)$$

Non abbiamo tuttavia considerato trasformazioni delle coordinate perché producono deformazioni dei campi

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \Rightarrow \delta\phi(x) = -\xi^{\mu}(x)\partial_{\mu}\phi(x)$$

o in particolare per campi tensoriali (0, 1)

$$\delta A_{\mu}(x) = -\xi^{\nu}(x)\partial_{\nu}A_{\mu}(x) - A_{\nu}(x)\partial_{\mu}\xi^{\nu}(x)$$

dove un campo tensoriale (0, 1) viene definito dalla sua trasformazione

$$A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}(x)$$

Che cosa vuol dire che una corrente si conservi?

Una corrente si conserva se la sua quadridivergenza è nulla, che può essere espressa tramite l'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_0 J^0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$$

in cui a conservarsi è

$$Q = \int_V d^3x \, J^0(x)$$

Il primo teorema di Noether

Teorema

Sia $\delta_s\phi$ una simmetria dell'azione. Allora esiste una corrente di Noether J^μ definita come

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi - K^\mu$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi l'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

La dimostrazione è analoga al caso precedente.

Il tensore energia-impulso

Dalle 4 traslazioni spaziotemporali

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$$

definiamo il tensore energia-impulso

$$J^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu}\epsilon^{\nu}$$

il cui significato fisico delle componenti è

1. T^{00} è la densità di energia,
2. T^{0j} è il flusso di energia lungo la j-esima direzione,
3. T^{i0} è la densità di quantità di moto lungo la i-esima direzione,
4. T^{ij} è il tensore degli sforzi.

Elettrodinamica

L'azione dell'elettrodinamica in assenza di sorgenti è

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{1}$$

dove il tensore elettromagnetico è definito come

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

che conduce alla formulazione covariante delle equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

La variazione compatibile con la simmetria di gauge è

$$\delta A_\mu = F_{\mu\nu}\epsilon^\nu$$

che conduce ad una variazione dell'azione

$$\delta S = \int d^4x \, \partial_\sigma(-\epsilon^\sigma F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

ed al termine al bordo

$$K^\sigma = -\epsilon^\sigma \mathcal{L}$$

La corrente di Noether è

$$J^\mu = -\epsilon^\sigma \left(F^{\mu\rho}F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\sigma F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \right)$$

ed il tensore energia-impulso è

$$T^\mu{}_\sigma = -F^{\mu\rho}F_{\sigma\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\sigma F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

Formalismo hamiltoniano

Definiamo l'hamiltoniana attraverso una trasformazione di Legendre

$$H(q^i,\ p_j,\ t) = p_i \dot{q}^i - L$$

che attraverso il principio di azione stazionaria porta alle equazioni del moto

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$$

È possibile riformulare con l'uso delle parentesi di Poisson

$$[f,\ g] = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

diventando

$$\dot{q}^i = [q^i,\ H] \qquad\qquad \dot{p}_j = -[p_j,\ H]$$

Teoria di gauge

Consideriamo dunque un'azione hamiltoniana nella forma

$$S[q^i,\ p_i,\ \lambda^a] = \int dt\,(p_i\dot{q}^i - H_0(q^i,\ p_i) + \lambda^a\phi_a(q^i,\ p_i))$$

dove l'hamiltoniana totale è definita come

$$H = H_0 - \lambda^a\phi_a$$

Le equazioni del moto sono

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \lambda^a\frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \lambda^a\frac{\partial \phi_a}{\partial q^i}$$

$$\phi_a(q^i,\ p_i) = 0$$

Calcoliamo la derivata temporale dei vincoli

$$\frac{d}{dt}\phi_a(q^i,\ p_i) = [\phi_a,\ H_0] - \lambda^b[\phi_a,\ \phi_b] = [\phi_a,\ H_0] - \lambda^b C_{ab}$$

e la poniamo debolmente nulla

$$[\phi_a,\ H_0] - \lambda^b C_{ab} \approx 0$$

- Vincoli di prima classe, i moltiplicatori di Lagrange λ^a sono fissati dall'equazione

$$\lambda^b(t) = C_{ab}^{-1}[\phi_a,\ H_0]$$

  dove il loro ruolo è quello di mantenere il vincolo nullo $\phi = 0$ nel tempo.
- Vincoli di seconda classe, i moltiplicatori di Lagrange non impongono alcuna condizione e le equazioni del moto rimangono non determinate univocamente

$$[\phi_a,\ H_0] = C_a{}^b\phi_b \approx 0 \qquad [\phi_a,\ \phi_b] = C_{ab}{}^c\phi_c \approx 0$$

  Siamo in presenza di teorie di gauge.

Il secondo teorema

L'azione è invariante per trasformazioni di gauge

$$\delta q^i = [q^i,\ \phi_a]\epsilon^a(t) \tag{2}$$

$$\delta p_i = [p_i,\ \phi_a]\epsilon^a(t) \tag{3}$$

$$\delta\lambda^c = \dot{\epsilon}^c(t) + \epsilon^a(t)C_a{}^c - \lambda^a\epsilon^b(t)C_{ab}{}^c \tag{4}$$

Elettrodinamica

L'elettrodinamica è una teoria di gauge, infatti prendendo

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$$

e mettendolo nelle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0$$

otteniamo

$$\partial_\nu \partial^\nu A'_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A'_\nu) = 0$$

Consideriamo l'azione associata all'elettrodinamica di Maxwell

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i - \dot{A}_i\partial^i A_0 + \frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial^i A_0 - \frac{1}{4}F^{ij}Fij \right)$$

che nella descrizione hamiltoniana per l'elettrodinamica diventa

$$S[A_i,\ \pi_i,\ A_0] = \int d^4x \left(\pi_i\dot{A}^i - \left(\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \right) + A_0\partial_i\pi^i \right)$$

Attraverso il teorema inverso, il vincolo

$$\phi = \partial_i\pi^i = \nabla \cdot E = 0$$

genera la simmetria di gauge

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu\Lambda(x)$$

Grazie per l'attenzione.