

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# I teoremi di Noether: simmetrie, leggi di conservazione e teorie di gauge

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Matteo Zandi

Anno Accademico 2022/2023

## **Abstract**

Ad una simmetria globale dell'azione è possibile associare una legge di conservazione di una quantità fisica; mentre, se la simmetria dell'azione è locale, è possibile associare una relazione vincolante tra le equazioni del moto. Questo è il contenuto dei due teoremi di Noether e oggetto di studio di questa tesi. Nella prima parte, ci concentriamo sul primo teorema, sia per sistemi meccanici che per sistemi descritti da campi: introduciamo le nozioni di simmetria e di legge di conservazione, forniamo una dimostrazione del teorema e accompagniamo con numerosi esempi tra cui le dieci quantità conservate della particella libera o il tensore energia-impulso dell'elettrodinamica. Nella seconda parte, ci soffermiamo sul secondo teorema e in particolare sulle teorie che presentano simmetrie di gauge: ne descriviamo la struttura generale, con attenzione per i vincoli che emergono nella formulazione hamiltoniana, dimostriamo l'inverso del teorema, ovvero come ricavare una simmetria da un vincolo, e anche in questo caso forniamo degli esempi, tra cui la particella relativistica e nuovamente l'elettrodinamica.

# Indice

Indice . . . . .	ii
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Il primo teorema in meccanica classica</b>	<b>3</b>
2.1 Le equazioni del moto . . . . .	3
2.2 Meccanica lagrangiana . . . . .	5
2.2.1 Il principio di azione stazionaria e le equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	5
2.3 Simmetrie . . . . .	8
2.3.1 Trasformazioni temporali come deformazioni delle coordinate . . . . .	9
2.3.2 Variazioni on-shell . . . . .	10
2.4 Leggi di conservazione . . . . .	11
2.5 Enunciato e dimostrazione . . . . .	12
2.6 Esempi . . . . .	13
2.6.1 La particella conforme . . . . .	13
2.6.2 La particella libera . . . . .	17
2.6.3 La particella in un campo di background uniforme . . . . .	20
2.6.4 Due particelle in un campo centrale . . . . .	22
2.7 Meccanica hamiltoniana . . . . .	23
2.7.1 Le equazioni di Hamilton e le parentesi di Poisson . . . . .	23
2.7.2 Il teorema inverso e algebra di Lie delle cariche . . . . .	25
2.7.3 La particella conforme . . . . .	27
<b>3 Il primo teorema in teoria classica dei campi</b>	<b>29</b>
3.1 Cenni di relatività speciale . . . . .	29
3.2 Formalismo lagrangiano . . . . .	30
3.2.1 Equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	30
3.3 Simmetrie . . . . .	31
3.3.1 Trasformazioni spaziotemporali come deformazioni dei campi . . . . .	32
3.4 Enunciato e dimostrazione . . . . .	34
3.4.1 Equazione di continuità . . . . .	35
3.5 Tensore energia-impulso . . . . .	35
3.6 Campo scalare . . . . .	36
3.7 Campo elettromagnetico . . . . .	37

3.7.1	Simmetria spaziotemporale . . . . .	38
3.7.2	Simmetria conforme . . . . .	39
3.8	Campo di Schroedinger . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Secondo teorema e teorie di gauge</b>	<b>42</b>
4.1	Teoria di gauge . . . . .	42
4.1.1	Un esempio motivato dall'elettrodinamica . . . . .	43
4.1.2	Struttura generale delle teorie di gauge . . . . .	46
4.1.3	Il teorema di Noether inverso . . . . .	48
4.2	La particella relativistica . . . . .	49
4.2.1	L'azione di Polyakov . . . . .	50
4.3	Elettrodinamica . . . . .	52
	<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

La lungimiranza dell'articolo pubblicato dalla matematica tedesca Emmy Noether (1882–1935) nel 1918 dal titolo “Invariantenprobleme” (problemi sulle variazioni invarianti) è incredibile [1] [2]<sup>1</sup>. Le moderne teorie fisiche che descrivono le interazioni fondamentali sono formulate a partire da una teoria di gauge, che trova le sue basi proprio nel lavoro di Noether. La formulazione originale prevede che nell'ambito del calcolo delle variazioni ci sia una corrispondenza sia tra gruppi continui finiti di simmetria e leggi di conservazione che tra gruppi continui infiniti di simmetria e identità. In letteratura vengono chiamati rispettivamente il primo e il secondo teorema di Noether, anche se molto spesso si riferisce con l'espressione teorema di Noether solamente al primo.

Noether lavorò a Gottinga, matematicamente molto prolifica grazie alla presenza di Klein (1894 – 1977) e Hilbert (1862 – 1943). Fu proprio da un'idea di quest'ultimo sullo studio della conservazione di energia e quantità di moto nello spaziotempo della relatività generale, che diede la possibilità a Noether di dimostrare i teoremi, che vennero successivamente applicati da Eric Bessel-Hagen (1898 – 1946) per studiare le leggi di conservazione della meccanica classica e l'invarianza conforme dell'elettrodinamica. In realtà nella formulazione originale di Noether, non erano presenti invarianze con termini al bordo mentre furono introdotte da Bessel-Hagen per giustificare l'invarianza del moto del centro di massa in seguito ad una simmetria dovuta ad un boost di Galileo.

In questa tesi non enunceremo o dimostreremo le formulazioni originali del teorema, ma ci limiteremo a fornire una versione più fisica al fine di mostrare applicazioni immediate. Di seguito introduciamo brevemente in che modo è strutturata questa tesi.

Nel secondo capitolo tratteremo sistemi fisici appartenenti alla meccanica classica, ovvero non quantistica né relativistica. Dopo un'iniziale descrizione dei concetti di equazioni del moto, gradi di libertà e spazio delle configurazioni, introdurremo il formalismo lagrangiano con la funzione lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange. Successivamente studieremo le nozioni di simmetria e che cosa vuol dire che una quantità si conservi, per poi mostrare come si legano questi due concetti, attraverso il primo teorema di Noether per sistemi meccanici. Tratteremo quattro esempi che ci permettono di comprendere il

---

<sup>1</sup>Nella traduzione inglese dovuta a M. A. Tavel

teorema: la particella conforme, la particella libera, una particella in un campo di background e due particelle in un campo centrale. Concluderemo il capitolo con il formalismo hamiltoniano, descrivendo il passaggio dallo spazio delle configurazioni allo spazio delle fasi, la funzione hamiltoniana e le equazioni di Hamilton. Attraverso questa descrizione, dimostreremo due proposizioni collegate al primo teorema: il teorema inverso e l'algebra di Lie delle cariche, fornendo un esempio finale nuovamente sulla particella conforme.

Nel terzo capitolo, seguiremo le stesse linee guida del precedente, passando però alla teoria classica dei campi, in questo caso relativistici ma non quantizzati. Studieremo quindi il formalismo lagrangiano, la densità di lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange per campi. Successivamente analizzeremo il legame tra simmetrie e quantità conservate, che in questo caso non si conservano più nel tempo ma soddisfano un'equazione di continuità, attraverso il primo teorema di Noether per campi. Mostriamo poi come la corrente conservata delle simmetrie spaziotemporali porta alla definizione di tensore energia-impulso. Dopo aver brevemente presentato un generico campo scalare, introdurremo la teoria elettromagnetica di Maxwell e ne studieremo sia la simmetria spaziotemporale che la più generale simmetria conforme. Infine studieremo come applicando il primo teorema alla lagrangiana di Schroedinger, è possibile ritrovare la conservazione della probabilità, necessaria per l'interpretazione probabilistica.

Nel quarto e ultimo capitolo, non enunceremo il secondo teorema di Noether, ma mostreremo che cosa significhi una teoria di gauge attraverso prima un esempio motivato da una azione simile a quella elettromagnetica e poi attraverso un elenco più formale di quale sia la struttura matematica di tale teoria. Dimostreremo il secondo teorema inverso, che ad una azione hamiltoniana in cui è presente un vincolo, descritto da moltiplicatori di Lagrange, è possibile associare una simmetria di gauge che generi tale vincolo. Infine ci focalizzeremo sulla particella relativistica e sulla già studiata elettrodinamica, per mostrare come tutte le caratteristiche siano presenti nella loro descrizione hamiltoniana: dalla simmetria di gauge ai vincoli.

## Riferimenti bibliografici

I riferimenti bibliografici per il secondo capitolo sono [3], [4], [5], [6] e [7].

I riferimenti bibliografici per il terzo capitolo sono [5], [8], [9] e [10].

I riferimenti bibliografici per il quarto capitolo sono [5], [9] e [10].

# Capitolo 2

## Il primo teorema in meccanica classica

Il primo sistema fisico che prendiamo in considerazione è un sistema di particelle o punti materiali, ovvero un insieme discreto costituito da oggetti le cui dimensioni posso essere trascurate quando ad esserne descritto è il loro moto. Al fine di studiare la relazione tra simmetrie e leggi di conservazione, è necessario approfondire la struttura matematica per descrivere tali sistemi.

### 2.1 Le equazioni del moto

Introduciamo dapprima quali sono le quantità fisiche che ci permettono di analizzare il moto: posizione, velocità, accelerazione. Nell'ambito della fisica classica<sup>1</sup>, in cui svilupperemo questo capitolo, lo spazio matematico che utilizziamo per studiare il sistema fisico è lo spazio tridimensionale euclideo  $\mathbb{R}^3$  e inoltre assumiamo che il tempo sia assoluto.

Nel sistema cartesiano di assi coordinati ortogonali, la posizione di una particella viene generalmente indicata con un vettore  $\mathbf{r}$ , le cui componenti sono

$$r^i = (x, y, z)$$

con  $i = 1, 2, 3$ . La derivata prima rispetto al tempo del vettore posizione viene chiamata velocità  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , le cui componenti sono

$$\dot{r}^i = \frac{dr^i}{dt} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

mentre la derivata seconda rispetto al tempo del vettore posizione, o equivalentemente la derivata prima della velocità, viene chiamata accelerazione  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ , le cui componenti sono

$$\ddot{r}^i = \frac{d^2 r^i}{dt^2} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

---

<sup>1</sup>In questo caso classica ha l'accezione di non relativistica e non quantistica

Se per una singola particella definiamo 3 coordinate, per un sistema di  $N$  particelle libere sono necessarie  $3N$  coordinate,  $3N$  velocità,  $3N$  accelerazioni per descriverlo.

Il sistema cartesiano non è l'unico disponibile. Infatti è possibile utilizzare un generico sistema di assi coordinati purchè siano di numero pari al numero di gradi di libertà  $d$ , che corrisponde al numero di quantità indipendenti necessarie per definire univocamente la posizione di un sistema fisico. Una particella libera ha  $d = 3$ , mentre un sistema di  $N$  particelle ha  $d = 3N$ . Chiameremo queste quantità coordinate generalizzate  $q^i$  e, analogamente, chiameremo velocità generalizzate  $\dot{q}^i$  e accelerazioni generalizzate  $\ddot{q}^i$  le rispettive derivate prime e seconde. La configurazione istantanea del sistema, cioè ad un tempo fissato, può quindi essere rappresentata da un punto in uno spazio  $\mathcal{C}$ , chiamato spazio delle configurazioni, di dimensione pari al numero di gradi di libertà ed i cui assi coordinati sono le coordinate generalizzate. Come precedentemente indicato, nel caso di una particella, lo spazio delle configurazioni è lo spazio tridimensionale euclideo  $\mathbb{R}^3$ , mentre per un sistema di  $N$  particelle libere sarà il prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^{3N}$ .

Il moto del sistema è matematicamente descritto dalla posizione del sistema in funzione del tempo, chiamata traiettoria, ciò che geometricamente viene rappresentato da una curva  $q^i(t)$  nello spazio delle configurazioni. Conoscendo quest'ultima, siamo a conoscenza della completa evoluzione temporale del sistema. Come possiamo ricavarla? La traiettoria è soluzione di equazioni che legano accelerazioni, velocità e posizioni, chiamate equazioni del moto

$$f_j(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i) = 0 \quad (2.1)$$

dove  $j = 1, 2, \dots, d$ . Esse sono un sistema formato da  $d$  equazioni differenziali, una per ogni grado di libertà, e la presenza delle accelerazioni ci suggerisce che sono al secondo ordine, caratteristica che porta una importante conseguenza: per studiare come il sistema evolve nel tempo, la conoscenza delle sole coordinate in un dato istante non è sufficiente. Difatti, in modo tale che le accelerazioni siano univocamente determinate, è necessario fornire anche le velocità. Ciò deriva da un risultato dell'analisi matematica: conoscendo le condizioni iniziali, ovvero le  $d$  posizioni  $q^i(0) = q_0^i$  e le  $d$  velocità  $\dot{q}^i(0) = v_0^i$ , la soluzione del problema di Cauchy delle equazioni del moto è unica.

Come possiamo trovare esplicitamente le (2.1)? In meccanica classica, si distinguono principalmente tre differenti formalismi dovuti a tre importanti figure della storia della fisica: Isaac Newton (1642–1726), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) e William Rowan Hamilton (1805–1865).

La descrizione newtoniana consiste nel trovare le forze  $F^j(t, q^i, \dot{q}^i)$  che agiscono sul sistema e poi risolvere la celeberrima equazione conosciuta come secondo principio della dinamica

$$F^j(t, q^i, \dot{q}^i) = m\ddot{q}^j$$

o qualora la massa  $m$  non sia costante

$$F^j(t, q^i, \dot{q}^i) = \frac{dp^j}{dt}$$



dove  $p^j = m\dot{q}^j$  è la componente  $j$ -esima della quantità di moto. In ogni caso, in questa tesi non tratteremo questo formalismo, bensì nel prossimo paragrafo ci concentreremo principalmente sulla descrizione lagrangiana, mentre alla fine del capitolo illustreremo anche quella hamiltoniana.

## 2.2 Meccanica lagrangiana

Il formalismo lagrangiano consiste nell'associare ad un generico sistema meccanico una funzione  $L$  delle coordinate  $q^i$ , velocità  $\dot{q}^i$  ed eventualmente del tempo  $t$ , chiamata lagrangiana del sistema

$$L = L(t, q^i, \dot{q}^i) \quad (2.2)$$

Non c'è un criterio generale per trovare tale funzione, ma c'è una classe di sistemi meccanici in cui la lagrangiana può essere scritta nella forma  $L = T - U$ , dove  $T$  e  $U$  sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Tale sistema viene chiamato sistema conservativo e richiede che l'energia potenziale  $U = U(q^i)$  sia funzione soltanto delle coordinate.

Attraverso la lagrangiana (2.2), introduciamo il funzionale di azione  $S$  che associa un numero reale ad ogni curva  $q^i(t)$  dello spazio delle configurazioni, definita all'interno di un intervallo temporale fisso  $[t_1, t_2]$

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q^i, \dot{q}^i) \quad (2.3)$$

### 2.2.1 Il principio di azione stazionaria e le equazioni di Eulero-Lagrange

Enunciamo ora il principio che ci permette di trovare le equazioni del moto a partire dalla lagrangiana del sistema: il principio di azione stazionaria, chiamato anche impropriamente principio di minima azione.

**Principio 2.1** (Di azione stazionaria). *Tra tutte le curve nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  che collegano due estremi fissati  $q_1$  e  $q_2$  di un intervallo temporale anch'esso fissato  $[t_1, t_2]$  tale che*

$$q^i(t_1) = q_1^i \quad q^i(t_2) = q_2^i$$

*il sistema meccanico associato alla lagrangiana (2.2) percorre la curva  $q^i(t)$  che rende stazionaria la sua azione (2.3), in formule*

$$\delta S[q^i(t)] = 0 \quad (2.4)$$

Cerchiamo dunque di tradurre questo principio in equazioni che dipenderanno dalla lagrangiana del sistema e delle sue derivate e che siano equivalenti alle equazioni del moto (2.1). Siccome l'azione è un funzionale, ovvero una funzione che non dipende da

un numero discreto di variabili, ma il cui dominio è in uno spazio di funzioni infinito dimensionale, non possiamo utilizzare direttamente il calcolo differenziale ma è necessario attingere alla branca della matematica, chiamata calcolo delle variazioni, che studia come trovare la funzione nel dominio del funzionale tale che quest'ultimo sia stazionario, ovvero nel nostro caso quella che soddisfa il principio di azione stazionaria.

Supponiamo che la curva  $q^i(t)$  sia quella cercata, ovvero quella che rende stazionaria l'azione (2.4), e prendiamo un'altra curva  $\delta q^i(t)$ , che chiameremo variazione, definita sempre nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ , con la proprietà di essere arbitraria tranne che per gli estremi

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0 \quad (2.5)$$

Introduciamo una famiglia di curve  $q^i(t, \epsilon)$  dipendenti da un parametro  $\epsilon$ , definita nel seguente modo

$$q^i(t, \epsilon) = q^i(t, 0) + \epsilon \delta q^i(t) \quad (2.6)$$

ovvero una famiglia di curve che connetta la curva cercata  $q^i(t)$  con la variazione  $\delta q^i(t)$ . Segue dalla definizione (2.6) che se il parametro si annulla  $\epsilon = 0$ , la famiglia di curve si riduce alla curva cercata

$$q^i(t, 0) = q^i(t)$$

In questo modo, sostituendo nell'azione (2.3) la famiglia di curve (2.6), possiamo parametrizzarlo con il parametro reale  $\epsilon$

$$S(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q^i(t, \epsilon), \dot{q}^i(t, \epsilon))$$

ric conducendoci ad una funzione dipendente da una variabile reale, così da poter utilizzare le conosciute tecniche del calcolo differenziale. Definiamo la variazione dell'azione in  $q^i(t)$  come la derivata rispetto al parametro  $\epsilon$  calcolata in  $\epsilon = 0$

$$\delta S[q^i(t), \delta q^i(t)] = \left. \frac{d}{d\epsilon} S(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} S[q^i(t) + \epsilon \delta q^i(t)] \right|_{\epsilon=0} \quad (2.7)$$

e calcoliamo esplicitamente la derivata, differenziando sotto il segno di integrale

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \epsilon} \right)$$

Osserviamo che non è presente la derivata rispetto ad  $t$  perché quest'ultimo non dipende da  $\epsilon$ , conseguentemente le loro derivate commutano. L'integrazione per parti del secondo termine nell'integrale ci conduce a

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \epsilon} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial \epsilon} \right) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial \epsilon} \right|_{t_1}^{t_2} \quad (2.8)$$

Riprendendo la (2.6), notiamo che la derivata parziale della curva  $q^i$  rispetto al parametro  $\epsilon$  è la variazione della curva  $\delta q^i$

$$\frac{\partial q^i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} (q^i(t, 0) + \epsilon \delta q^i(t)) = \delta q^i(t) \quad (2.9)$$

Sostituendo (2.9) in (2.8), otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t) \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t) \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q^i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t_2) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i(t_1) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo raccolto un fattore comune  $\delta q^i(t)$ . Ricordando che agli estremi la variazione si annulla (2.5), gli ultimi due termini si cancellano e otteniamo la relazione

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q^i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \quad (2.10)$$

Adoperiamo il fatto che condizione necessaria affinché la curva cercata  $q^i(t)$  renda il funzionale d'azione stazionario è che la variazione di quest'ultimo si annulli (2.4), qualunque sia la variazione della curva  $\delta q^i(t)$

$$\delta S[q^i(t), \delta q^i(t)] = 0 \quad \forall \delta q^i(t) \quad (2.11)$$

Mettendo insieme (2.10) e (2.11), attraverso la (2.7), otteniamo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q^i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$$

Utilizzando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, possiamo asserire che l'integranda si annulla per qualsiasi variazione della curva  $\delta q^i(t)$  e dunque giungere al sistema di equazioni

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (2.12)$$

oppure anche scritte esplicitando la derivata temporale nel secondo termine

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = 0$$

Queste sono le equazioni del moto che stavamo cercando, equazioni differenziali al secondo ordine della lagrangiana, chiamate equazioni di Eulero-Lagrange. Una volta trovata la lagrangiana associata al sistema fisico che stiamo studiando, possiamo ricondurci alle (2.1) attraverso le (2.12).

Per completezza, concludiamo il paragrafo enunciando e dimostrando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.

**Lemma 2.1** (Fondamentale del calcolo delle variazioni). *Sia  $f(x)$  una funzione continua tale che*

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, g(x) f(x) = 0$$

*per ogni funzione  $g(x)$ , continua, insieme alle derivata prima e seconda, e che si annulli agli estremi*

$$g(x_1) = g(x_2) = 0$$

*allora  $f(x) = 0$*

Nel nostro caso abbiamo al posto di  $f$  le equazioni di Eulero-Lagrange e al posto di  $g$  la variazione  $\delta q^i(t)$ . Proponiamo una dimostrazione non formale ma intuitiva.

*Dimostrazione.* Per assurdo se  $f$  è positiva in un intorno di un punto  $[x'_1, x'_2]$  e nulla in ogni altro punto dell'intervallo  $[x_1, x_2]$ , data l'arbitrarietà di  $g$ , per qualsiasi funzione che sia positiva otteniamo

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, g(x) f(x) = \int_{x'_1}^{x'_2} dx \, g(x) f(x) > 0$$

che contraddice l'ipotesi che questo integrale sia nullo e mostrando l'assurdo. q.e.d.

## 2.3 Simmetrie

Introduciamo ora il concetto di simmetria dell'azione. The fundamental importance in physics of symmetries are summed up by Hermann Weyl, who said that “As far as I can see, all a priori statements in physics have their origin in symmetry”. Intuitivamente, un oggetto è simmetrico se sotto l'effetto di una trasformazione rimane uguale a se stesso. Esempi sono la rotazione di un arbitrario angolo di un cerchio o la riflessione di un oggetto a simmetria bilaterale rispetto all'asse di simmetria. Deduciamo quindi che una simmetria dell'azione è una speciale classe di trasformazioni delle coordinate che lasciano l'azione invariata.

Una trasformazione di coordinate è un cambio di coordinate spaziali per descrivere il problema, ovvero parametrizzare la nostra azione con differenti coordinate generalizzate  $q^i$ . Distinguiamo due modi differenti di interpretare una trasformazione di coordinate: quello passivo e quello attivo. Una trasformazione passiva è un cambio del sistema di riferimento, cioè l'oggetto viene descritto da due differenti osservatori; mentre in una trasformazione attiva si sposta effettivamente il sistema preso in considerazione mantenendo invariato il sistema di riferimento, cioè si sposta l'oggetto mantenendo l'osservatore invariato.

Possiamo definire l'invarianza dell'azione imponendo che quello espresso con le nuove coordinate  $S'$  conduce alle stesse equazioni del moto di quello espresso con le vecchie  $S$ . Portiamo particolare attenzione al significato di invarianza: non necessariamente significa

che la nuova e la vecchia azione siano identiche  $S' = S$  ma che siano uguali a meno di un termine al bordo  $K$ . Ciò è conseguenza del fatto che ad avere valore fisico sono le equazioni del moto e non la lagrangiana (2.2), che in effetti presenta un'ambiguità: aggiungendo la derivata totale rispetto ad un'arbitraria funzione  $K(q^i, t)$ , il termine al bordo, porta alle stesse equazioni del moto (2.12). Mostriamo quindi che nell'azione  $S'$  con il termine al bordo

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} K(q^i, t) \right)$$

la variazione del secondo termine è nulla

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K(q^i, t) = \frac{\partial K}{\partial q^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\partial K}{\partial q^i} \delta q^i(t_2) - \frac{\partial K}{\partial q^i} \delta q^i(t_1) = 0$$

dove abbiamo usato la (2.5). Dunque  $\delta S = \delta S'$  e le equazioni del moto non cambiano.

Formalizziamo il tutto.

**Definizione 2.1** (Simmetria dell'azione). *Definiamo una simmetria dell'azione come una trasformazione qualsiasi, non necessariamente infinitesima, delle coordinate spaziali*

$$\delta_s q^i(t) = q'(t) - q(t) \quad (2.13)$$

*tale che l'azione sia invariante a meno di un termine al bordo  $K$*

$$\delta S[q^i(t), \delta_s q^i(t)] = S[q^i(t) + \delta_s q^i(t)] - S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K \quad (2.14)$$

Le simmetrie  $\delta_s q^i$  sono quindi direzioni dello spazio generate dalle coordinate  $q^i$  che rendono invariante l'azione  $S$ . Vedremo come il termine al bordo non interferisce con l'esistenza delle quantità conservate ma sarà necessario per trovarle. Sottolineiamo il fatto che le variazioni di simmetria  $\delta_s q^i(t)$  devono soddisfare il vincolo dato dall'equazione (2.14), mentre le  $q^i(t)$  sono del tutto arbitrarie.

### 2.3.1 Trasformazioni temporali come deformazioni delle coordinate

Finora non abbiamo considerato trasformazioni riguardanti il tempo; le simmetrie sono solo cambi di coordinate spaziali. È possibile tradurre le traslazioni temporali in deformazioni delle coordinate. Consideriamo il caso più semplice unidimensionale dove due curve  $q^i(t)$  e  $q^i(t')$  sono collegate da un traslazione temporale  $t' = t + \epsilon$  nel seguente modo

$$q'(t') = q'(t + \epsilon) = q(t)$$

Trattando il parametro  $\epsilon$  come una quantità infinitesima, ovvero imponendo la condizione  $\epsilon \ll 1$ , espandiamo in serie di Taylor al primo ordine il termine  $q'(t + \epsilon)$  e otteniamo

$$q'(t + \epsilon) \simeq q'(t) + \epsilon \dot{q}(t) = q(t)$$

Quindi possiamo scrivere la variazione di simmetria (2.13)

$$\delta_s q(t) = -\epsilon \dot{q}(t) \quad (2.15)$$

che dunque coinvolge soltanto un istante  $t$  e non anche  $t'$  come prima. Conseguentemente, essendo  $\delta_s q(t)$  una differenza valutata allo stesso istante  $t$ , commuta con la derivata rispetto al tempo

$$\delta_s \dot{q}(t) = \delta_s \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \delta_s q(t) \quad (2.16)$$

Questa considerazione può essere evidenziata ricordando che nell'azione (2.3) il tempo è una variabile di integrazione, per definizione muta: effettuando una sostituzione, l'integrale non ne subisce gli effetti. Questa trasformazione non ha nulla a che vedere con le variazioni di simmetria dell'azione.

### 2.3.2 Variazioni on-shell

Le trasformazioni di simmetria dell'azione (2.13) non sono le uniche tipologie di variazioni, quando sono infinitesime. Infatti è possibile introdurre le cosiddette variazioni on-shell, dove il termine on-shell significa che vengono applicate le equazioni del moto.

**Definizione 2.2** (Variazione on-shell). *Definiamo una variazione on-shell una trasformazione infinitesima delle coordinate spaziali*

$$\delta q = q' - q$$

*tale che l'azione sia invariante a meno di una derivata temporale, dopo aver applicato le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12).*

$$\delta S[\bar{q}^i, \delta q^i] = S[\bar{q}^i + \delta q^i] - S[\bar{q}^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \quad (2.17)$$

dove la notazione  $\bar{q}^i$  indica che le  $q^i$  rispettano le equazioni del moto.

Infatti, effettuando una variazione dell'azione, otteniamo

$$\begin{aligned} \delta S[q^i, \delta q^i] &= S[q^i + \delta q^i] - S[q^i] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti, usato il fatto che le variazioni commutano con la derivata temporale (2.16) e raccolto un fattore comune  $\delta q^i$  nell'ultimo passaggio. Notiamo che il

primo termine comprende le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12), quindi le applichiamo, passando on-shell, e otteniamo

$$\delta S[\bar{q}^i, \delta q^i] = S[\bar{q}^i + \delta q^i] - S[\bar{q}^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

Concettualmente questa variazione è opposta rispetto a quella dell'azione, perchè quella sull'azione pone vincoli su  $\delta_s q^i(t)$  e lascia libere le  $q^i(t)$  mentre specularmente quella on-shell pone vincoli sulle  $\bar{q}^i$  e lascia libere le  $\delta q^i$ .

## 2.4 Leggi di conservazione

Soffermiamoci ora sulla nozione di quantità conservata.

**Definizione 2.3** (Quantità conservata). *Definiamo una quantità conservata come una funzione  $Q$  tale che il suo valore rimane costante nel tempo*

$$\frac{d}{dt} Q = 0 \quad (2.18)$$

Dallo studio delle equazioni di Eulero-Lagrange, notiamo che possiamo definirne già una: il momento coniugato di una coordinata ciclica. Una coordinata ciclica  $q^j$  è una coordinata che non è presente esplicitamente nella lagrangiana

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad (2.19)$$

mentre definiamo il momento coniugato  $p_j$  ad una coordinata  $q^j$  come la derivata parziale della lagrangiana rispetto alla velocità corrispondente a questa coordinata

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (2.20)$$

Prendendo in considerazione le (2.12)

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0$$

notiamo che se non è presente alcuna dipendenza esplicita della lagrangiana da una coordinata ciclica, il primo termine sarà nullo. Inserendo (2.20) e semplificando con (2.19), otteniamo

$$\frac{d}{dt} p_j = 0$$

Concludiamo quindi che nel caso di una coordinata ciclica, il suo momento coniugato si conserva.

Una importante osservazione sulle quantità conservate è che possono essere usate per trovare le soluzioni del moto. Considerando per semplicità un sistema unidimensionale, possiamo sfruttare la conoscenza di due quantità conservate per scrivere le soluzioni del moto in funzione di essere e dunque raggiungere il nostro obiettivo senza neanche aver risolto le equazioni del moto, che potrebbero essere di forma troppo complicata.

## 2.5 Enunciato e dimostrazione

Enunciamo ora e dimostriamo il teorema che sta al cuore del primo capitolo di questa tesi: il primo teorema di Noether, per sistemi fisici appartenenti al dominio della meccanica classica. Qualitativamente, asserisce che ad ogni simmetria globale dell'azione è possibile associare una quantità conservata. In questo paragrafo, non presenteremo tuttavia la versione originale, ma una versione più fisica.

Ricapitoliamo ciò che abbiamo concluso nei precedenti paragrafi: una variazione di simmetria  $\delta_s q^i(t)$  porta ad una variazione dell'azione data da (2.14)

$$\delta S[q^i(t), \delta_s q^i(t)] = S[q^i(t) + \delta_s q^i(t)] - S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K(q^i, t)$$

mentre una variazione on-shell porta ad una variazione dell'azione data da (2.17)

$$\delta S[\bar{q}^i, \delta q^i] = S[\bar{q}^i + \delta q^i] - S[\bar{q}^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

Entrambi presentano termini al bordo ma per ragioni differenti: la prima perché  $\delta_s q^i(t)$  soddisfa una determinata equazione mentre nella seconda è  $\bar{q}^i$  che ne soddisfa un'altra.

**Teorema 2.1** (Il primo teorema di Noether in meccanica classica). *Sia  $L(q^i, \dot{q}^i)$  la lagrangiana di un sistema fisico con  $i = 1, 2, \dots, d$ , dove  $d$  indica il numero di gradi di libertà,  $S$  l'azione associata al sistema nell'intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  definita come*

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i)$$

*Sia  $\delta_s q^i(t)$  una simmetria del sistema (2.13), ovvero una variazione che lascia invariate le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12). Allora esiste una quantità  $Q$  definita come*

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i \quad (2.21)$$

*tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi la legge di conservazione (2.18)*

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

*Dimostrazione.* Inserendo  $q^i(t) = \bar{q}^i(t)$  nella (2.14), ovvero vincolando che le  $q^i(t)$  soddisfino le equazioni del moto, otteniamo

$$\delta[\bar{q}^i(t), \delta_s q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K(q^i, t) \quad (2.22)$$



Dall'altra parte, inserendo  $\delta q^i(t) = \delta_s q^i(t)$  in (2.17), ovvero vincolando le le variazioni on-shell siano anche di simmetria, abbiamo

$$\delta S[\bar{q}^i, \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \quad (2.23)$$

In questi due passaggi abbiamo sostanzialmente imposto che  $\delta_s q^i(t)$  sia una variazione di simmetria e dunque necessariamente soddisfi l'equazione (2.13), mentre che  $\bar{q}^i(t)$  soddisfi le equazioni del moto (2.12). Ricordiamo che prima soltanto uno dei due era soggetto a rispettare un'equazione, mentre l'altra era arbitraria, e inoltre che in questa maniera la variazione debba essere necessariamente infinitesima. Notando che i membri sinistri delle equazioni (2.22) e (2.23) sono identici, troviamo

$$\delta[\bar{q}^i(t), \delta_s q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} K(q^i, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)$$

A questo punto sottraiamo il secondo con il terzo membro

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) = 0$$

Infine avremo che l'integranda si annulla e, riconoscendo la definizione di  $Q$  dalla (2.21), otteniamo la tesi che si voleva dimostrare

$$\frac{d}{dt} \left( K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) = \frac{d}{dt} Q = 0$$

q.e.d.

Chiameremo d'ora in poi la quantità  $Q$  carica conservata o carica di Noether associata alla simmetria. Chiudiamo il paragrafo precisando che sarebbe possibile ottenere tutte le quantità conservate direttamente dalle equazioni del moto ma che in questa tesi abbiamo scelto di ricavarle attraverso un procedimento più algoritmico, qual è il primo teorema di Noether.

## 2.6 Esempi

Le applicazioni sono molto spesso fondamentali per comprendere meglio e a fondo la teoria. In questo paragrafo proponiamo quattro differenti esempi in cui applicheremo il teorema appena dimostrato.

### 2.6.1 La particella conforme

Il primo esempio che studiamo è la cosiddetta particella conforme, ovvero una particella il cui potenziale dipende dall'inverso del quadrato della distanza. Vediamo come sarà possibile risolvere il moto senza conoscerne le equazioni, soltanto utilizzando le cariche di Noether.

**Esempio 2.1.** Consideriamo una particella di massa  $m$  che può muoversi soltanto in una dimensione  $x$ , soggetta ad un potenziale  $U$  dipendente dall'inverso del quadrato della posizione. La lagrangiana del sistema (2.2), scritta nella forma  $T - U$ , è

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \quad (2.24)$$

e di conseguenza, usando la definizione (2.3), l'azione del sistema è

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

La prima simmetria che osserviamo è la traslazione temporale: l'azione non dipende esplicitamente dal tempo, quindi la trasformazione

$$t' = t + \epsilon$$

dove  $\epsilon$  è una costante, è una simmetria dell'azione. Recuperiamo la (2.15), ovvero come viene deformata la  $x$  a seguito di una traslazione temporale

$$\delta_s x = x(t + \epsilon) - x(t) = -\epsilon \dot{x}(t)$$

e poi calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2}\delta_s(\dot{x}^2) - \alpha\delta_s\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -\epsilon m\dot{x}\ddot{x} - \epsilon\alpha\frac{2\dot{x}}{x^3} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( -\epsilon \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato dalla (2.14), che il termine al bordo  $K$  è

$$K = -\epsilon \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e troviamo la carica (2.21)

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta_s x = -\epsilon \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) - m\dot{x}(-\epsilon\dot{x}) = -\epsilon \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

che a meno di un segno meno e di un fattore  $\epsilon$  costante, è l'energia del sistema  $E$

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \quad (2.25)$$

Abbiamo dunque ottenuto la prima relazione algebrica tra  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ .

La seconda simmetria che notiamo è quella di scala, chiamata anche simmetria di Weyl

$$t' = \lambda t \quad x'(t') = \sqrt{\lambda} x(t)$$

dove  $\lambda$  è una costante. Osserviamo dapprima che la velocità si trasforma nel seguente modo

$$\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\sqrt{\lambda}}{d(\lambda t)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \dot{x}$$

e quindi l'azione rimane invariante

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt' \left( \frac{m}{2} \dot{x}'^2 - \frac{\alpha}{x'^2} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \lambda \left( \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda x^2} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) = S$$

Questa trasformazione mostra chiaramente che la simmetria non deve essere infinitesima, tuttavia per applicare il teorema di Noether, è necessario renderla tale. Scriviamo  $\lambda$  come  $\lambda = 1 + \epsilon$ , dove  $\epsilon \ll 1$  è una quantità infinitesima. Espandendo al primo ordine in  $\epsilon$ , otteniamo la variazione di simmetria

$$x'(t') = x'((1 + \epsilon)t) = x(t) + \frac{\epsilon}{2} x(t) \quad (2.26)$$

D'altra parte abbiamo che

$$x'(t') = x'((1 + \epsilon)t) = x'(t) + \dot{x}(t)\epsilon t \quad (2.27)$$

Mettendo insieme (2.26) e (2.27), otteniamo dunque

$$\delta_s x(t) = x'(t) - x(t) = x'(t') - \dot{x}(t)\epsilon t - x(t) = x(t) + \frac{\epsilon}{2} x(t) - \dot{x}(t)\epsilon t - x(t) = \frac{\epsilon}{2} x(t) - \dot{x}(t)\epsilon t$$

Alla luce di questo risultato, calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \delta_s (\dot{x}^2) - \alpha \delta_s \left( \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m \dot{x} \left( \frac{\epsilon}{2} \dot{x}(t) - \ddot{x} \epsilon t - \dot{x} \epsilon \right) + \frac{2\alpha}{x^3} \left( \frac{\epsilon}{2} x - \dot{x} \epsilon t \right) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \epsilon \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - m t \dot{x} \ddot{x} - m \dot{x}^2 + \frac{\alpha x - 2\alpha t \dot{x}}{x^3} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \epsilon \left( -\frac{m}{2} \dot{x}^2 - m t \dot{x} \ddot{x} + \frac{\alpha x - 2\alpha t \dot{x}}{x^3} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( -\frac{\epsilon t m \dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha \epsilon t}{x^2} \right) \end{aligned}$$

e troviamo, dalla (2.14), che il termina al bordo  $K$  è

$$K = -\epsilon t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e otteniamo la carica (2.21)

$$\begin{aligned} Q &= K - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta_s x \\ &= -\epsilon t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) - m \dot{x} \left( \frac{\epsilon}{2} x(t) - \dot{x}(t) \epsilon t \right) \\ &= -\epsilon \left( \frac{m x \dot{x}}{2} + t \frac{m \dot{x}^2}{2} - t \frac{\alpha}{x^2} \right) \\ &= -\epsilon \left( \frac{m x \dot{x}}{2} - t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \right) \right) \end{aligned}$$

che a meno di un segno meno e di un fattore  $\epsilon$  costante, è la carica di Noether associata alla simmetria di Weyl

$$Q = \frac{m x \dot{x}}{2} - t \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{\alpha}{x^2} \right) \quad (2.28)$$

Notiamo che almeno una carica deve avere una dipendenza esplicita dal tempo, altrimenti non ci sarebbe dinamica del sistema. Nel nostro caso è  $Q$ .

Le definizioni delle due cariche di Noether sono due equazioni algebriche che legano  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$ . A partire da esse è possibile risolvere il moto del sistema senza scrivere l'equazione del moto esplicitamente. Innanzitutto notiamo che gli ultimi due termini della (2.28) sono uguali all'energia (2.25) moltiplicata per  $t$ , e quindi  $Q$  può esser riscritta come

$$Q = \frac{m x \dot{x}}{2} - E t$$

Abbiamo dunque ottenuto un'equazione differenziale che, separando le variabili, è possibile risolvere e trovare la soluzione dell'equazione del moto

$$x = \pm \sqrt{\frac{4Q t + 2E t^2}{m}} \quad (2.29)$$

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12) alla nostra Lagrangiana (2.24), abbiamo

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right) = \frac{2\alpha}{x^3} - \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = \frac{2\alpha}{x^3} - m \ddot{x}$$

e quindi l'equazione del moto è

$$m \ddot{x} = \frac{2\alpha}{x^3} \quad (2.30)$$

È infine possibile verificare che (2.29) soddisfi (2.30).

### 2.6.2 La particella libera

Il secondo esempio che studiamo è la particella libera, ovvero senza un potenziale. Ricaviamo le sue quantità conservate: energia, quantità di moto (3), momento angolare (3), moto del centro di massa (3). È possibile vedere ognuna di esse come conseguenza delle simmetrie dello spazio-tempo: rispettivamente omogeneità del tempo, omogeneità e isotropia dello spazio e ‘galileianità’<sup>2</sup> dello spaziotempo.

**Esempio 2.2.** Consideriamo una particella di massa  $m$  libera di spostarsi nello spazio tridimensionale, ovvero in cui non è presente nessun potenziale  $U$ . In questo caso, la lagrangiana del sistema (2.2) coinciderà con l’energia cinetica

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

e di conseguenza, usando la definizione (2.3), l’azione del sistema sarà

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

#### Energia

La prima simmetria che andremo a indagare è una traslazione temporale

$$t' = t + \epsilon$$

dove  $\epsilon$  è una costante. L’azione è invariante perchè la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo  $t$ . Recuperando la variazione di simmetria (2.15), calcoliamo la variazione dell’azione

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \delta_s (\dot{\mathbf{r}}^2) = \int_{t_1}^{t_2} dt (-\epsilon m \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( -\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right)$$

e quindi abbiamo trovato, dalla (2.14), che il termine al bordo  $K$  è

$$K = -\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e otteniamo la carica (2.21)

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = -\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - m \dot{\mathbf{r}} \cdot (-\epsilon \dot{\mathbf{r}}) = \epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

che a meno di un fattore  $\epsilon$  costante, è l’energia del sistema  $E$

$$E = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

Dunque abbiamo dimostrato che una simmetria di traslazione temporale comporta la conservazione dell’energia  $E$ .

---

<sup>2</sup>Dato che non esiste un termine specifico, con ‘galileianità’ si intende che rispetti le trasformazioni di Galileo

### Quantità di moto

La seconda simmetria che andremo a studiare sarà una traslazione spaziale

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$$

dove  $\mathbf{a}$  è un vettore dalle componenti costanti. L'azione è invariante perchè la lagrangiana non dipende esplicitamente dalla posizione  $\mathbf{r}$ . La variazione di simmetria è

$$\delta_s \mathbf{r} = \mathbf{a}$$

Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \delta_s (\dot{\mathbf{r}}^2) = 0$$

e troviamo, dalla (2.14), che il termine al bordo  $K$  è nullo

$$K = 0$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e otteniamo la carica (2.21)

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = -m \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}$$

che è la quantità di moto del sistema  $\mathbf{p}$  lungo la direzione della traslazione  $\mathbf{a}$  a meno di un fattore costante  $a = \|\mathbf{a}\|$

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}$$

Dunque abbiamo dimostrato che una simmetria di traslazione spaziale comporta la conservazione della quantità di moto  $\mathbf{p}$ .

### Momento angolare

La terza simmetria che andremo a indagare sarà una rotazione spaziale, che per semplicità prendiamo rispetto ad un asse fissato con angolo  $\theta$

$$\mathbf{r}' = R(\theta) \mathbf{r}$$

dove  $R(\theta)$  è la matrice di rotazione. L'azione è invariante perchè una rotazione lascia invariata la norma del vettore velocità e quindi anche il suo quadrato  $\dot{\mathbf{r}}^2$ . A questo punto rendiamo infinitesima la rotazione, introducendo il vettore  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

La variazione di simmetria è

$$\delta_s \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \delta_s(\dot{\mathbf{r}}^2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0$$

e troviamo, dalla (2.14), che il termine al bordo  $K$  è nullo

$$K = 0$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e otteniamo la carica (2.21)

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = -m \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

che è il momento angolare del sistema  $\mathbf{L}$  lungo la direzione dell'asse di rotazione  $\boldsymbol{\omega}$  a meno di un fattore costante  $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$  e di un segno meno

$$\mathbf{L} = m \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$$

Dunque abbiamo dimostrato che una simmetria di rotazione spaziale comporta la conservazione del momento angolare  $\mathbf{L}$ .

### Moto del centro di massa

La quarta e ultima simmetria che studiamo è un boost di Galileo lungo una direzione

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità di movimento del sistema. La variazione di simmetria è

$$\delta_s \mathbf{r} = \mathbf{v}t$$

Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \delta_s(\dot{\mathbf{r}}^2) = \int_{t_1}^{t_2} dt m \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta_s(\dot{\mathbf{r}}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (m \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

e troviamo, dalla (2.14), che il termine al bordo  $K$  è

$$K = m \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e otteniamo la carica (2.21)

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta_s \mathbf{r} = m \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - m \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}t = \mathbf{v} \cdot (m \mathbf{r} - m \dot{\mathbf{r}}t)$$

che è la definizione di moto del centro di massa nella direzione di  $\mathbf{v}$  a meno di un fattore costante  $v = \|\mathbf{v}\|$

$$m \mathbf{r} - m \dot{\mathbf{r}}t = \text{const}$$

Dunque abbiamo dimostrato che una simmetria di boost di Galileo comporta la conservazione del moto del centro di massa.

### 2.6.3 La particella in un campo di background uniforme

Il terzo esempio mostra come una particella in un campo di background uniforme non avrà una carica conservata associata ad una simmetria a causa proprio del campo. Tuttavia sarà ugualmente possibile ottenere l'equazione differenziale che governa l'evoluzione temporale della carica non conservata.

**Esempio 2.3.** Consideriamo una particella di massa  $m$  immersa in un campo uniforme il cui potenziale dipendente dalla coordinata  $z$

$$U = Bz \quad (2.31)$$

dove  $B$  è una costante. Scrivendo la Lagrangiana nella forma  $T - U$ , sostituendo (2.31), otteniamo

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - Bz \quad (2.32)$$

e di conseguenza, usando la definizione (2.3), l'azione  $S$  del sistema sarà

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - Bz \right)$$

Riscriviamo il potenziale in modo differente, introducendo il vettore  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  e riscrivendo l'azione come

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \right)$$

Notiamo che applicando una rotazione, sia il primo termine che il secondo termine sono invarianti, mostrando quindi una simmetria rotazionale. Infatti essendo entrambi prodotti scalari, il primo tra  $\dot{\mathbf{r}}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$  mentre il secondo tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{r}$ , sono invarianti per trasformazione di coordinate. Tuttavia ciò non implica che la carica di Noether associata a questa simmetria, ovvero il momento angolare, si conservi. Ciò è dovuto alla presenza di un campo in background. Per vederlo, consideriamo una rotazione infinitesima come variazione di simmetria sia delle coordinate

$$\delta_s \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

che del campo

$$\delta_s \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$$

il cui vettore  $\boldsymbol{\omega}$  è lo stesso introdotto nell'esempio precedente. Derivando la variazione delle coordinate, abbiamo

$$\delta_s \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Alla luce di questo risultato, calcoliamo il termine al bordo  $K$

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \delta_s (\dot{\mathbf{r}}^2) - \delta_s (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt (m \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) = 0 \end{aligned}$$



che risulta essere nullo essendo tutti prodotti scalari tra vettori perpendicolari

$$K = 0$$

Calcoliamo ora l'equazione del moto applicando le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12) alla nostra lagrangiana (2.32)

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \right) = \mathbf{B} - m\ddot{\mathbf{x}}$$

e quindi l'equazione del moto è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{B} \quad (2.33)$$

Effettuiamo dunque la variazione on-shell, utilizzando le equazioni del moto (2.33)

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \delta_s(\dot{\mathbf{r}}^2) - \delta_s(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r}) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}$$

sostituito le variazioni, eliminato i termini nulli, e riconosciuto la definizione di momento angolare  $\mathbf{L}$ . Dunque, ponendo la simmetria uguale a zero, otteniamo l'equazione differenziale che governa come varia il momento angolare, che quindi non si conserva

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

Infine, affermiamo dunque che questa non è una simmetria dal punto di vista di Noether perchè la sua variazione non è una derivata totale ma presenta un termine ulteriore dipendente dal campo  $B$ .

### 2.6.4 Due particelle in un campo centrale

Il quarto esempio mostra come quando siamo in presenza di due particelle ad essere conservate non sono le singole cariche ma soltanto la carica totale: è la quantità di moto totale a conservarsi, non quella delle singole particelle<sup>3</sup>.

**Esempio 2.4.** Consideriamo due particelle rispettivamente di massa  $m_1$  e  $m_2$  tali che la prima particella  $q$  sia immersa nel campo molto più intenso della seconda particella  $Q$  e che quest'ultima sia vincolata ad essere ferma. La lagrangiana è dunque

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 - \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

e di conseguenza, usando la definizione (2.3), l'azione del sistema è

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 - \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)$$

A questo punto, notiamo che l'azione non è invariante per la trasformazione

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}$$

dove  $\mathbf{a}$  è una costante. Essendo questa una traslazione spaziale, dunque possiamo concludere che la quantità di moto  $\mathbf{p}_1$  della prima particella non si conserva. Tuttavia, aggiungendo anche l'energia cinetica della seconda particella e quindi la sua possibilità di muoversi, otteniamo la lagrangiana

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

e di conseguenza l'azione diventa

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - \frac{qQ}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)$$

Ora, notiamo che la traslazione spaziale

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a} \quad \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}$$

è una simmetria per cui l'azione è invariante. Come conseguenza, abbiamo la conservazione della quantità di moto totale del sistema

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$$

e non delle singole quantità di moto. Ciò si può vedere notando che le energie cinetiche sono invarianti per singole traslazioni  $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2$  ma il potenziale è invariante soltanto sotto la condizione  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ .

---

<sup>3</sup>Analoghi ragionamenti possono essere ripetuti per il momento angolare

## 2.7 Meccanica hamiltoniana

Il formalismo lagrangiano non è l'unico che possiamo utilizzare per descrivere un sistema fisico. Ricordiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange sono un sistema di equazioni differenziali al secondo ordine, la cui soluzione è una traiettoria nello spazio delle configurazioni generato da  $d$  variabili indipendenti. Diversamente la meccanica hamiltoniana fornisce un sistema di  $2d$  equazioni differenziali del primo ordine, la cui soluzione è una traiettoria in un nuovo spazio, lo spazio delle fasi, formato dalle coordinate e dai momenti associati ad esse, definiti nella (2.20), e quindi generato da  $2N$  variabili indipendenti. I due formalismi sono equivalenti, la scelta di uno o dell'altro dipende da tanti fattori, tra cui la facilità di soluzione in uno delle due descrizioni rispetto all'altra.

### 2.7.1 Le equazioni di Hamilton e le parentesi di Poisson

Vediamo ora come è possibile passare da una descrizione all'altra, aiutandoci con il principio di azione stazionaria. Consideriamo un sistema meccanico descritto da una lagrangiana (2.2) nello spazio delle configurazioni, generato dalle coordinate generalizzate  $q^i$ . Definiamo l'hamiltoniana del sistema  $H$ , una funzione delle coordinate  $q^i$ , dei momenti  $p_j$  ed eventualmente del tempo  $t$ , attraverso una trasformazione di Legendre

$$H(q^i, p_j, t) = p_i \dot{q}^i - L \quad (2.34)$$

Invertendo quest'ultima equazione, definiamo l'azione nello spazio delle fasi o azione hamiltoniana nel seguente modo

$$S[q^i, p_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_j, t))$$

Applichiamo il principio di azione stazionaria (2.4), calcolando la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}^i - H) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}^i \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \delta p_i \left( \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q^i \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti, posto gli estremi nulli (2.5), e nell'ultimo passaggio abbiamo raccolto un termine  $\delta q^i$  comune. Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, dato che le  $\delta q^i$  sono arbitrarie, l'integranda si annulla e le equazioni del moto, chiamate equazioni di Hamilton, diventano

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.35)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \quad (2.36)$$

Completiamo le equazioni introducendo la dipendenza sia della Lagrangiana che dell'Hamiltoniana dal tempo e vedendo che le derivate temporali sono uguali tra loro a meno di un segno negativo. Calcoliamo prima il differenziale della lagrangiana

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \dot{p}_i dq^i + p_i d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

dove abbiamo usato le equazioni (2.20) e (2.12), poi il differenziale dell'hamiltoniana

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}^i dp_i - d\dot{q}^i p_i - dL \\ &= \dot{q}^i dp_i + d\dot{q}^i p_i - \dot{p}_i dq^i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le equazioni (2.34), (2.35) e (2.36). Dalle ultime due uguaglianze, ricaviamo

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Solitamente, si usa esprimere la meccanica hamiltoniana introducendo le parentesi di Poisson.

**Definizione 2.4** (Parentesi di Poisson). *Date due funzioni  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  nello spazio delle fasi, definiamo le parentesi di Poisson come*

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (2.37)$$

Dalla definizione è possibile dimostrare le seguenti proprietà, dove  $h(q, p)$  è un'altra funzione nello spazio delle fasi e  $c, c_1, c_2$  sono costanti

1. Antisimmetria

$$[f, g] = -[g, f]$$

2. Bilinearità di entrambi gli argomenti

$$[c_1 f_1 + c_2 f_2, g] = c_1 [f_1, g] + c_2 [f_2, g]$$

$$[f, c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 [f, g_1] + c_2 [f, g_2]$$

3. Regola di Leibniz, simile a quella delle derivate

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]$$

$$[f, gh] = g[f, h] + h[f, g]$$

4. Identità di Jacobi

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (2.38)$$

Importanti relazioni emergono quando si sostituiscono le coordinate o i momenti al posto delle funzioni  $f$  e  $g$ . Queste parentesi di Poisson vengono chiamate parentesi canoniche ed esplicitamente sono

$$[q^i, q_j] = 0$$

$$[p^i, p_j] = 0$$

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j \quad (2.39)$$

Infine, attraverso le parentesi di Poisson possiamo riscrivere le equazioni di Hamilton. Infatti se sviluppiamo esplicitamente la (2.35), otteniamo

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \delta^i_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - 0 = \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial q^i}{\partial p_k} = [q^i, H]$$

mentre analogamente se sviluppiamo esplicitamente la (2.36), abbiamo

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = \delta^i_k \frac{\partial H}{\partial q^k} - 0 = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_i}{\partial q^k} = -\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\right) = -[p_i, H]$$

Quindi le equazioni di Hamilton diventano

$$\dot{q}^i = [q^i, H]$$

$$\dot{p}_j = -[p_j, H]$$

### 2.7.2 Il teorema inverso e algebra di Lie delle cariche

Enunciamo e dimostriamo in questo paragrafo due teoremi concernenti le simmetrie e le leggi di dimostrazione: il teorema di Noether inverso e l'algebra di Lie delle cariche. Attraverso le parentesi di Poisson, è possibile definire la legge di conservazione di una carica di Noether  $Q(q^i, p_i, t)$  nel seguente modo

$$\frac{d}{dt}Q(q^i, p_i, t) = \frac{\partial Q}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial Q}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial Q}{\partial p_i} + \frac{\partial Q}{\partial t} = [Q, H] + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (2.40)$$

Il primo teorema che dimostriamo è il teorema inverso: invece che derivare una carica conservata da una simmetria, compiano l'azione inversa, ovvero definita una carica conservata deriviamo una simmetria dell'azione.

**Teorema 2.2** (L'inverso del primo teorema di Noether). *Sia  $Q$  una carica di Noether, allora la seguente trasformazione*

$$\delta_s q^i = [q^i, \epsilon Q] = \epsilon \frac{\partial Q}{\partial p_i} \quad \delta_s p_i = [q_i, \epsilon Q] = -\epsilon \frac{\partial Q}{\partial q^i}$$

*è una simmetria dell'azione, dove  $\epsilon$  è un parametro infinitesimo.*

*Dimostrazione.* Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int dt (p\dot{q}^i - H) \\ &= \int dt (\delta_s p\dot{q} + p \frac{d}{dt} \delta_s q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta_s p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta_s q) \\ &= \int dt (-\epsilon \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} (p \delta_s q) - \epsilon \dot{p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \epsilon \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}) \\ &= \int dt (\epsilon (-\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, H]) + \frac{d}{dt} (p \delta_s q)) \\ &= \int dt \frac{d}{dt} (-\epsilon Q + p \delta_s q) \end{aligned}$$

che essendo una derivata totale, completa la dimostrazione.

q.e.d.

Il secondo teorema che dimostriamo è l'algebra di Lie delle cariche di Noether: le parentesi di Poisson di due cariche sono una carica conservata, qualunque forma abbiamo.

**Teorema 2.3** (Algebra di Lie delle cariche di Noether). *L'insieme di tutte le cariche conservate  $Q_a$  con  $a = 1, 2, \dots, N$  soddisfano un'algebra di Lie chiusa*

$$[Q_a, Q_b] = f_{ab}^c Q_c$$

dove  $f_{ab}^c$  sono le costanti di struttura.

*Dimostrazione.* La derivata temporale delle parentesi di Poisson di due cariche conservate  $Q_1$  e  $Q_2$  è

$$\frac{d}{dt} [Q_1, Q_2] = [[Q_1, Q_2], H] + \frac{\partial}{\partial t} [Q_1, Q_2] = -[[Q_2, H], Q_1] - [[H, Q_1], Q_2] + \frac{\partial}{\partial t} [Q_1, Q_2] = 0$$

dove abbiamo usato l'identità di Jacobi (2.38), essendo cariche la (2.40) e il fatto che non c'è dipendenza esplicita dal tempo<sup>4</sup>. Quindi a prescindere da quale sia il risultato delle parentesi (zero, una costante indipendente o proporzionale a  $Q_1$  o  $Q_2$ ), sicuramente si conserva e quindi definisce un'algebra di Lie

$$[Q_a, Q_b] = f_{ab}^c Q_c$$

che completa la dimostrazione.

q.e.d.

---

<sup>4</sup>È possibile estendere il teorema anche nel caso di dipendenza temporale delle cariche

### 2.7.3 La particella conforme

Riproponiamo l'esempio della particella conforme, utilizzata nel formalismo lagrangiano, ma questa volta studiata nella descrizione hamiltoniana. Ricordiamo che la lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha}{x^2}$$

e, attraverso una trasformazione di Legendre (2.34), calcoliamo l'hamiltoniana

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{x^2}$$

L'azione hamiltoniana è

$$S = \int dt \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{x^2} \right)$$

Il sistema presenta tre differenti cariche conservate: la prima è l'energia, dato che non c'è dipendenza dal tempo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{x^2}$$

la seconda è quella che abbiamo trovato nel formalismo lagrangiano

$$Q = -tH + \frac{px}{2}$$

e infine è possibile calcolarne un'ultima

$$K = t^2H + 2tQ^2 - \frac{m}{2}x^2$$

Tuttavia non tutte le cariche sono indipendenti, infatti notiamo che esiste una relazione fra le cariche

$$2KH + 2Q^2 + m\alpha = 0$$

Infine ci soffermiamo sull'algebra delle cariche: come ci dice il teorema del precedente paragrafo, le parentesi di Poisson fra le cariche sono anch'esse stesse delle cariche

$$[Q, H] = H$$

$$[Q, K] = -K$$

$$[K, H] = 2Q$$

Dimostriamo di seguito la prima delle precedenti relazioni per mostrare il teorema dell'algebra di Lie delle cariche in azione

$$\begin{aligned}
 [Q, H] &= \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial p} \\
 &= \left( -t \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{p}{2} \right) \left( \frac{p}{m} \right) - \left( -\frac{2\alpha}{x^3} \right) \left( -t \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{x}{2} \right) \\
 &= \left( \frac{2\alpha t}{x^3} + \frac{p}{2} \right) \left( \frac{p}{m} \right) - \left( -\frac{2\alpha}{x^3} \right) \left( -\frac{pt}{m} + \frac{x}{2} \right) \\
 &= \frac{2p\alpha t}{mx^3} + \frac{p^2}{2m} - \frac{2p\alpha t}{mx^3} + \frac{\alpha}{x^2} \\
 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{x^2} = H
 \end{aligned}$$



# Capitolo 3

## Il primo teorema in teoria classica dei campi

Il secondo sistema fisico che prendiamo in considerazione è un sistema continuo che presenta un'infinità di gradi di libertà, a differenza dei sistemi studiati nel precedente capitolo. Il nostro oggetto di indagine sarà quindi un'entità estesa nello spazio che rappresentiamo con una funzione delle coordinate e del tempo, appartenente alla teoria classica<sup>1</sup> dei campi. I campi scalari sono semplici funzioni che forniscono un numero per ogni punto, come ad esempio la temperatura, la pressione o la densità. Campi vettoriali (o tensoriali) invece associano vettori (o tensori) ad ogni punto, come ad esempio il campo elettrico o quello gravitazionale.

### 3.1 Cenni di relatività speciale

In questo capitolo, non ci limiteremo all'ambito della fisica newtoniana, ma useremo la formulazione relativistica einsteniana. I principi su cui si basa sono il principio di relatività, ovvero che le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, e la costanza della velocità della luce, ovvero che le onde elettromagnetiche viaggiano ad una velocità costante che nessun corpo massivo può superare. Lo spazio matematico che utilizzeremo è lo spaziotempo di Minkowski  $\mathcal{M}$ , ovvero uno spazio euclideo con l'aggiunta della coordinata temporale, in cui però è stata definita una metrica differente: non sarà più valido il teorema di Pitagora

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ma le distanze verranno misurate nel seguente modo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

---

<sup>1</sup>In questo caso classica ha l'accezione di relativistica e non quantistica

dove  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  è la metrica dello spazio di Minkovski e  $x^\mu$  il quadrivettore, definito come

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Analogamente al caso discreto, la dinamica del campo è descritta da equazioni differenziali che ne determinano l'evoluzione. Trattiamo solamente il caso di un campo scalare, ovvero definito attraverso una singola funzione  $\phi(x^\mu)$ , mentre per campi vettoriali (o tensoriali) si generalizza immediatamente. Definiamo le rispettive derivate dei campi rispetto alle coordinate come

$$\phi_{,\mu} = \partial_\mu \phi = \frac{d\phi}{dx^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right)$$

Conseguentemente, le equazioni del moto sono equazioni dipendenti dal campo, dalle sue derivate e dal quadrivettore posizione

$$f_j(x^\mu, \phi(x^\mu), \phi_{,\mu}(x^\mu)) = 0 \quad (3.1)$$

## 3.2 Formalismo lagrangiano

Il formalismo lagrangiano si basa sulla densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ , funzione del campo  $\phi$ , delle sue derivate  $\phi_{,\mu}$  ed eventualmente delle coordinate  $x^\mu$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}, x^\mu)$$

che integrata sullo spazio tridimensionale permette di ottenere la lagrangiana associata al sistema

$$L = \int d^3x \mathcal{L}$$

In questo modo possiamo definire l'azione in funzione della densità di lagrangiana

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}, x^\mu) \quad (3.2)$$

È importante osservare che l'azione è Lorentz-invariante, e quindi non dipende dal sistema di riferimento inerziale scelto.

### 3.2.1 Equazioni di Eulero-Lagrange

Seguendo le stesse linee guida che abbiamo utilizzato per sistemi discreti, è intuitivo pensare che il principio di azione stazionaria ci permetterà di trovare le equazioni del moto per la configurazione del campo che rende stazionaria la sua azione (3.2)

$$\delta S[\phi(x^\mu)] = 0 \quad (3.3)$$

Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L} \\
&= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi_{,\mu} \right) \\
&= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \delta \phi \right) + \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) \\
&= \int d^4x \delta \phi \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right)
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti e nell'ultimo passaggio posto uguale a zero le quattro componenti dell'ultimo termine, a causa delle condizioni agli estremi analoghe al caso discreto, e raccolto un termine comune  $\delta \phi$ . Imponendo la (3.3), otteniamo

$$\delta S = \int d^4x \delta \phi \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right) = 0$$

Per la generalizzazione del lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, e dunque per l'arbitrarietà della variazione  $\delta \phi$ , l'integranda deve annullarsi e troviamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0 \quad (3.4)$$

Questa è l'equazione del moto che stavamo cercando, una sola equazione differenziale alle derivate parziali. Dunque inserendo esplicitamente la densità di lagrangiana, le (3.4) diventano le (3.1). Nel caso di sistemi discreti a  $d$  gradi di libertà, avevamo ottenuto  $d$  equazioni differenziali mentre per sistemi continui a infiniti gradi di libertà, soltanto una equazione è apparsa. Tuttavia sono presenti anche le derivate parziali spaziali a differenza del caso precedente.

### 3.3 Simmetrie

Indaghiamo ora le simmetrie, generalizzando lo stesso concetto espresso per il capitolo precedente. Le simmetrie sono sempre classi speciali di trasformazioni del campo che lasciano l'azione invariata a meno di un termine al bordo. Quindi definiamo una variazione di simmetria dell'azione come una funzione infinitesima  $\delta_s \phi$  vincolata a risolvere l'equazione, per ogni arbitraria  $\phi$

$$\delta S[\phi, \delta_s \phi] = S[\phi + \delta_s \phi] - S[\phi] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu \quad \forall \phi \quad (3.5)$$

dove  $K^\mu$  è un termine al bordo. Anche in questo caso non chiediamo che sia strettamente invariante ma che la variazione sia nulla a meno di una quadridivergenza. Ciò deriva dalla

possibilità di aggiungere una quadridivergenza alla densità della lagrangiana senza che le equazioni del moto cambino. Definiamo perciò una variazione on-shell, ovvero tale che  $\phi$  debba soddisfare l'equazione del moto (3.4), come un'arbitraria variazione infinitesima  $\delta\phi$  tale che la variazione dell'azione sia una quadridivergenza

$$\begin{aligned}\delta S[\phi, \delta\phi] &= \int d^4x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} \delta\phi_{,\mu} \right) \\ &= \int d^4x \delta\phi \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} \right) + \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} \delta\phi \right)\end{aligned}$$

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange (3.4), il primo integrale si annulla e otteniamo

$$\delta S[\bar{\phi}, \delta_s\phi] = \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} \delta\phi \right) \quad (3.6)$$

### 3.3.1 Trasformazioni spaziotemporali come deformazioni dei campi

Nel precedente paragrafo, abbiamo imposto che le simmetrie agiscano sui campi e non sulle coordinate, allo stesso modo in cui le simmetrie nel caso discreto interessavano le coordinate e non il tempo. Ciò può sempre essere mostrato notando che le coordinate  $x$  sono variabili di integrazione e quindi mute. Vediamo dunque come trovare la deformazione dei campi in seguito a trasformazioni spaziotemporali. Consideriamo prima il caso di traslazioni spaziotemporali

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

dove  $\epsilon^\mu$  è un quadrivettore dalle componenti costanti. Dato un campo  $\phi(\mu)$ , costruiamo il campo traslato  $\phi'(x^\mu)$ , espandendo in serie e tenendo solo i termini lineari al primo ordine in  $\epsilon$

$$\phi'(x) = \phi(x - \epsilon) \simeq \phi(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

Abbiamo dunque ricavato la deformazione del campo in seguito alla traslazione spaziotemporale

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

Finora abbiamo studiato solamente campi scalari, generalizziamo quindi per quelli vettoriali o tensoriali. Solitamente, questi ultimi vengono definiti in base a come si comportano sotto l'effetto di leggi di trasformazione. Vediamo dunque esempi di come campi scalari, vettoriali, tensoriali di rango (0, 1) si trasformino in seguito all'applicazione di un cambio di coordinate:

1. Per campi scalari

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

2. Per campi vettoriali

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$$

3. Per campi tensoriali di rango (0, 1)

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x)$$

Consideriamo un generale cambio delle coordinate infinitesimo

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

e calcoliamo la versione infinitesima dello jacobiano precedentemente utilizzato

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu(x)$$

L'inverso invece è

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu \xi^\mu(x)$$

A questo punto applichiamo ai casi precedenti e troviamo le variazioni dei campi:

1. Per campi scalari, espandiamo al primo ordine

$$\phi'(x) = \phi(x - \xi) = \phi(x) - \xi^\mu(x) \partial_\mu \phi(x)$$

e otteniamo la variazione

$$\delta\phi(x) = -\xi^\mu(x) \partial_\mu \phi(x) \quad (3.7)$$

2. Per campi vettoriali, espandiamo al primo ordine sia il lato destro che sinistro

$$V'^\mu(x) + \xi^\nu(x) \partial_\nu V^\mu(x) = V^\mu(x) + \partial_\nu \xi^\mu(x) V^\nu(x)$$

e otteniamo la variazione

$$\delta V^\mu(x) = V'^\mu(x) - V^\mu(x) = \partial_\nu \xi^\mu(x) V^\nu(x) - \xi^\nu(x) \partial_\nu V^\mu(x)$$

3. Per campi tensoriali di rango (0, 1), espandiamo entrambi i membri

$$A'_\mu(x) + \xi^\nu(x) \partial_\nu A_\mu(x) = A_\mu(x) - A_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x)$$

e otteniamo la variazione

$$\delta A_\mu(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = -\xi^\nu(x) \partial_\nu A_\mu(x) = A_\mu(x) - A_\nu(x) \partial_\mu \xi^\nu(x) \quad (3.8)$$

### 3.4 Enunciato e dimostrazione

Enunciamo ora la trasposizione del primo teorema di Noether nell'ambito della teoria classica dei campi. Il teorema è del tutto analogo alla versione discreta, con l'unica differenza che la legge di conservazione è espressa tramite un'equazione di continuità.

**Teorema 3.1** (Il primo teorema di Noether in teoria dei campi). *Sia  $\mathcal{L}(\phi)$  la densità di lagrangiana di un sistema fisico con relativa azione*

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu})$$

*Sia  $\delta_s\phi(x)$  una trasformazione del campo che individua una variazione di simmetria del sistema (3.5), ovvero che lascia invariate le equazioni di Eulero-Lagrange (3.4). Allora esiste una quantità  $J^\mu$ , definita come*

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi - K^\mu \quad (3.9)$$

*tale che soddisfi l'equazione di continuità*

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.10)$$

*Dimostrazione.* Inserendo  $\phi = \bar{\phi}$  nella (3.5), ovvero vincolando che  $\phi$  soddisfi le equazioni del moto, otteniamo

$$\delta S[\bar{\phi}, \delta_s \phi] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu \quad (3.11)$$

Dall'altra parte, inserendo  $\delta\phi = \delta_s\phi$  in (3.6), ovvero vincolando le variazioni on-shell siano anche di simmetria, abbiamo

$$\delta S[\bar{\phi}, \delta_s \phi] = \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) \quad (3.12)$$

Notando che i membri sinistri delle (3.11) e (3.12) sono identici, abbiamo

$$\delta S[\bar{\phi}, \delta_s \phi] = \int d^4x \partial_\mu K^\mu = \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right)$$

A questo punto sottraiamo il secondo con il terzo membro

$$\int d^4x \partial_\mu \left( K^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) = 0$$

Infine avremo che l'integranda si annulla e, riconoscendo la definizione di corrente (3.9), otteniamo la tesi

$$\partial_\mu \left( K^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) = -\partial_\mu J^\mu = 0$$

q.e.d.

Chiameremo d'ora in poi la quantità  $J^\mu$  corrente di Noether associata alla simmetria.

### 3.4.1 Equazione di continuità

Soffermiamoci ora sulla nozione di legge di conservazione. L'equazione di continuità esprime la conservazione di una quantità fisica asserendo che la variazione di questa quantità sarà uguale al suo flusso uscente da una superficie chiusa. Per vedere ciò, scriviamo esplicitamente la (3.10)

$$0 = \partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \partial_0 J^0 + \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Troviamo che l'equazione di continuità può essere riscritta come

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Integriamo entrambi i membri su un volume  $V$  abbastanza grande da permettere che  $J$  vada a zero più velocemente della crescita dell'area di superficie

$$\int_V d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = - \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Utilizziamo il teorema della divergenza e riscriviamo il secondo termine

$$\int_V d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = - \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$$

Dalle ipotesi fatte su  $\mathbf{J}$  e su  $V$ , il secondo membro si annulla e troviamo la carica che si conserva

$$Q = \int_V d^3x J^0(x)$$

ovvero che soddisfi la legge di conservazione

$$\frac{d}{dt}Q = 0$$

## 3.5 Tensore energia-impulso

Speciale interesse poniamo sulle traslazioni spaziotemporali, poichè ci conducono alla definizione del tensore energia-impulso, la cui fondamentale applicazione è data dalle equazioni di campo di Einstein in relatività generale. Definiamo il tensore energia-impulso  $T^\mu_\nu$  come il tensore formato dalle correnti di Noether associate alle 4 traslazioni spaziotemporali

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

che possono essere decomposte nelle varie componenti: per  $\mu = 0$  abbiamo una traslazione temporale  $t' = t + \epsilon^0$  mentre per  $\mu = i = 1, 2, 3$  abbiamo una traslazione spaziale

$x'^i = x^i + \epsilon^i$ . Insieme ci sono 4 correnti di Noether che si conservano, che possiamo scrivere senza separarle come

$$J^\mu = T^\mu{}_\nu \epsilon^\nu \quad (3.13)$$

una per ogni indice  $\mu$ . La conservazione di  $J^\mu$ , ovvero l'equazione  $\partial_\mu J^\mu = 0$  implica anche che si conservi  $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ , essendo  $\epsilon^\nu$  una costante.

Il significato fisico delle componenti del tensore energia-impulso è il seguente:

1.  $T^{00}$  è la densità di energia,
2.  $T^{0j}$  è il flusso di energia lungo la  $j$ -esima direzione,
3.  $T^{i0}$  è la densità di quantità di moto lungo la  $i$ -esima direzione,
4.  $T^{ij}$  è il tensore degli sforzi.

## 3.6 Campo scalare

In questo e nel prossimo paragrafo, proponiamo due esempi di campi: un generico campo scalare e un campo tensoriale, ovvero quello elettromagnetico.

Consideriamo una densità di lagrangiana per un campo scalare  $\phi$ , che avrà la forma  $\mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu})$ . Dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente dalle coordinate  $x^\mu$ , sarà invariante per la variazione (3.7), dove poniamo  $\xi^\mu = \epsilon^\mu$

$$\delta\phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} \delta\phi_{,\rho} \right) \\ &= - \int d^4x \epsilon^\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi_{,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} \phi_{,\rho\sigma} \right) \\ &= \int d^4x \partial_\sigma (-\epsilon^\sigma \mathcal{L}) \end{aligned}$$

Quindi, secondo la (3.5), abbiamo trovato che il termine al bordo è

$$K^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L}$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e troviamo la corrente (3.9) generata dalle traslazione spaziotemporali

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi - K^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (-\epsilon^\sigma \phi_{,\sigma}) + \epsilon^\mu \mathcal{L} = -\epsilon^\sigma \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\sigma} - \delta^\mu{}_\sigma \mathcal{L} \right)$$



Quindi il tensore energia-impulso, definito dalla (3.13), è

$$T^\mu{}_\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\sigma} - \delta^\mu{}_\sigma \mathcal{L}$$

Proponiamo un esempio concreto, in cui prendiamo la lagrangiana più semplice.

**Esempio 3.1.** Sia la densità di lagrangiana per un campo scalare nella forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

Il suo tensore energia-impulso è

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi$$

### 3.7 Campo elettromagnetico

I fenomeni elettromagnetici sono interamente caratterizzati dalle equazioni di Maxwell, che possono essere derivate dal principio di azione stazionaria a partire dall'azione di Maxwell<sup>2</sup>

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.14)$$

dove  $A_\mu$  è il tensore  $(0,1)$  definito attraverso il potenziale vettore e scalare, e  $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  è il tensore elettromagnetico. Calcoliamo le equazioni del moto attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange (3.4)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

che sono proprio le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti<sup>3</sup>

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.15)$$

oppure scritte in funzione del quadripotenziale

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0 \quad (3.16)$$

Indaghiamo ora le simmetrie che l'elettrodinamica presenta.

---

<sup>2</sup>In questo caso useremo il sistema di unità di misura di Heaviside, dove  $4\pi$  viene sostituito con 4 nell'azione

<sup>3</sup>In realtà ci sarebbe un'altra equazione  $\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0$ , dove  $F^{*\mu\nu}$  è il tensore duale a  $F^{\mu\nu}$

### 3.7.1 Simmetria spaziotemporale

La prima simmetria che studiamo è una traslazione spaziotemporale, che porta come abbiamo precedentemente visto al tensore energia-impulso. Sappiamo che l'elettrodinamica è invariante per trasformazioni di gauge

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda(x)$$

dove  $\lambda(x)$  è una generica funzione, chiamata funzione di gauge, dipendente dalle coordinate. Come conseguenza, chiediamo che anche le cariche conservate siano invarianti di gauge come la teoria. Osserviamo tuttavia che prendendo una variazione di  $A_\mu$ , che abbiamo calcolato in (3.8),

$$\delta A_\mu = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu$$

e che lascia effettivamente invariata l'azione, a meno di un termine al bordo

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\ &= 2F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu (-\epsilon^\sigma \partial_\sigma A_\nu) - \partial_\nu (-\epsilon^\sigma \partial_\sigma A_\mu)) \\ &= -2\epsilon^\sigma F^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\sigma A_\nu - \partial_\nu \partial_\sigma A_\mu) \\ &= -2\epsilon^\sigma F^{\mu\nu} \partial_\sigma F_{\mu\nu} \\ &= \partial_\sigma (-\epsilon^\sigma F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

la variazione non è gauge invariante e si può già prevedere che non lo sarà neanche la corrente. Per ovviare a ciò, introduciamo una nuova variazione che questa volta rispetta i prerequisiti

$$\delta A_\mu = -\epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu (\epsilon^\nu A_\nu) = F_{\mu\nu} \epsilon^\nu$$

che è un invariante di gauge essendo il tensore elettromagnetico tale. Calcoliamo la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\ &= 2F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= -\epsilon^\sigma 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu F_{\nu\sigma} - \partial_\nu F_{\mu\sigma}) \\ &= 2F^{\mu\nu} \epsilon^\sigma (\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu}) \\ &= -2F^{\mu\nu} \epsilon^\sigma \partial_\sigma F_{\mu\nu} \\ &= \partial_\sigma (-\epsilon^\sigma F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

che essendo un termine al bordo, mostra che è una variazione di simmetria, con

$$K^\sigma = -\epsilon^\sigma \mathcal{L}$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e troviamo la corrente (3.9)

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= \frac{\partial L}{\partial A_{\rho,\mu}} \delta A_\rho - K^\mu \\
 &= -F^{\mu\rho} \epsilon^\sigma F_{\rho\sigma} + \epsilon^\mu L \\
 &= \epsilon^\sigma (-F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \delta^\mu_\sigma L) \\
 &= -\epsilon^\sigma \left( F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)
 \end{aligned}$$

ed usando la relazione che lega il tensore energia-impulso, otteniamo

$$T^\mu_\sigma = -F^{\mu\rho} F_{\sigma\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Notiamo che  $T$  è invariante di gauge dato che  $F$  lo è. A questo punto mostriamo che è veramente una carica che si conserva

$$\partial_\mu T^\mu_\sigma = -\partial_\mu F^{\mu\rho} F_{\sigma\rho} + \frac{1}{4} \partial_\mu \delta^\mu_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$$

dove abbiamo usato le equazioni di Maxwell (3.15).

### 3.7.2 Simmetria conforme

In realtà, la teoria elettromagnetica è invariante rispetto ad un gruppo molto più grande di trasformazioni, chiamato gruppo conforme. Consideriamo una trasformazione generica

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

dove  $\xi^\mu$  è un generico quadrivettore. La variazione che subisce  $A_\mu$  in seguito a questa trasformazione spaziotemporale è data dalla (3.8)

$$\delta A_\mu = -\xi^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \xi^\nu A_\nu$$

Tuttavia, come nel paragrafo precedente, chiediamo che la variazione sia invariante di gauge e quindi aggiungiamo un termine alla variazione

$$\delta A_\mu = -\xi^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \xi^\nu A_\nu + \partial_\mu (\xi^\nu A_\nu)$$

Potrebbe sembrare che l'aggiunta di un termine dovuto ad una trasformazione di gauge, porti ad una corrente di Noether differente e dunque ad una sbagliata legge di conservazione. Ciò non avviene perchè associate alle trasformazioni di gauge, non sono presenti cariche come nel caso di simmetrie incontrate finora, ma bensì vincoli. Nel prossimo capitolo, tratteremo più in dettaglio questa differenza.

L'azione (3.14), non è invariante per arbitrarie scelte di  $\xi^\mu$ , ma soltanto per trasformazioni appartenenti al gruppo conforme, cioè tali che soddisfi l'equazione

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi^\alpha_{,\alpha} \quad (3.17)$$

Dunque qualsiasi soluzione di questa equazione ci fornisce una simmetria a cui possiamo associare una corrente di Noether. È possibile separare le soluzioni in quattro differenti categorie

1. Traslazioni, già incontrate nel paragrafo precedente, in cui

$$\xi^\mu = \epsilon^\mu$$

dove  $\epsilon^\mu$  è un quadrivettore dalle componenti costanti.

2. Trasformazioni di Lorentz, tali che

$$\xi^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$$

dove  $\Lambda^\mu{}_\nu$  è la matrice di Lorentz antisimmetrica.

3. Dilatazioni, tali che

$$\xi^\mu = \lambda x^\mu$$

dove  $\lambda$  è un fattore di scala.

4. Trasformazioni conformi speciali, tali che

$$\xi^\mu = 2x^\nu b_\nu x^\mu - b^\mu x^\nu x_\nu$$

Mostriamo ora che l'azione è invariante per trasformazioni conformi

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} 2\partial_\mu (\xi^\rho F_{\nu\rho}) \\ &= F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} \partial_\mu \xi^\rho + F^{\mu\nu} \xi^\rho \partial_\mu F_{\nu\rho} \\ &= F^{\mu\nu} F_{\nu}{}^\rho \partial_\mu \xi^\rho + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \xi^\rho (\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) \\ &= -F^{\mu\nu} F_{\nu}{}^\rho \partial_\mu \xi^\rho - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \xi^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \\ &= -F^{\mu\nu} F_{\nu}{}^\rho \partial_\mu \xi^\rho - \frac{1}{4} \partial_\rho (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \xi^\rho \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\nu}{}^\rho (\partial_\mu \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha - \frac{1}{4} \partial_\rho (\xi^\rho F^2) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\nu}{}^\rho \left( \partial_\mu \xi_\rho + \partial_\rho \xi_\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\rho} \partial_\alpha \xi^\alpha \right) - \partial_\rho (\xi^\rho \mathcal{L}) \\ &= -\partial_\rho (\xi^\rho \mathcal{L}) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità di Bianchi e il fatto che  $\xi$  soddisfi l'equazione (3.17). Il termine al bordo è dunque

$$K = -\xi^\rho \mathcal{L}$$

Ora applichiamo il primo teorema di Noether e troviamo la corrente (3.9)

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\mu}} \delta A_\rho - K^\mu = F^{\mu\alpha} \xi^\beta F_{\alpha\beta} + \xi^\mu \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \xi^\beta \left( F^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

tale che soddisfi l'equazione di continuità  $\partial_\mu J^\mu$ .

## 3.8 Campo di Schroedinger

Concludiamo il capitolo, trattando brevemente un altro esempio di campo: la funzione d'onda  $\psi$  della meccanica quantistica. L'equazione che governa tale oggetto è l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = H\psi \quad (3.18)$$

Anch'essa può essere derivata attraverso il principio di azione stazionaria, utilizzando l'azione

$$S = \int dt \int d^3r \left( i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V(\mathbf{r}) \psi^* \psi \right)$$

Per mostrare ciò, consideriamo  $\psi$  e  $\psi^*$  come due campi differenti e applichiamo le equazioni di Eulero-Lagrange (3.4)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = i\hbar \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V\psi$$

che è proprio la (3.18).

Analogamente, derivando rispetto a  $\psi$  invece che a  $\psi^*$ , le equazioni di Eulero-lagrange ci portano alla stessa equazione ma complessa coniugata.

L'azione è invariante rispetto alla trasformazione di fase globale

$$\psi' = \psi e^{i\alpha}$$

dove  $\alpha$  è una costante. La variazione di simmetria è

$$\delta\psi = i\alpha\psi$$

Il termine al bordo  $K$  è nullo, dato che sono presenti termini  $e^{i\alpha}$  e  $e^{-i\alpha}$  che si elidono a vicenda. Effettuando la variazione on-shell, otteniamo

$$\delta S = \int dt \int d^3r \, i\hbar \frac{d}{dt} (\psi^* \delta\psi) = -\alpha \hbar \int dt \frac{d}{dt} \int d^3r \, \psi^* \psi$$

che ci porta alla conservazione della quantità

$$Q = \int d^3r \, \psi^* \psi$$

Secondo l'interpretazione di Copenaghen, questa quantità è proprio la probabilità di trovare una particella in una data regione dello spazio, quantità che necessariamente si deve conservare. Normalmente si pone  $Q = 1$  per avere la condizione di normalizzazione.

# Capitolo 4

## Secondo teorema e teorie di gauge

Nei primi due capitoli, abbiamo studiato sistemi fisici che presentano simmetrie globali, riconducibili a trasformazioni applicate a tutti i punti dello spaziotempo. Tuttavia in fisica sono presenti sistemi che possiedono simmetrie locali, ovvero trasformazioni che sono funzioni dei punti dello spaziotempo. Esse non associano quantità conservate che soddisfano leggi di conservazione ma identità o relazioni tra le equazioni del moto. Ciò significa che il sistema ha un numero di gradi di libertà sovrastimato, poichè non tutti sono ricavati dalle equazioni del moto.

Questo è il contenuto del cosiddetto secondo teorema di Noether. In questo capitolo non enunceremo né dimostreremo questo teorema, ma studieremo come esso sia strettamente collegato alle teorie di gauge. L'importanza di tali teorie risiede nello sviluppo della fisica moderna: tre delle quattro interazioni fondamentali (forte, debole ed elettromagnetica) sono descritte da teorie di gauge.

### 4.1 Teoria di gauge

Prima di studiare in dettaglio la struttura matematica di una teoria di gauge, presentiamo brevemente quali caratteristiche possiede. Consideriamo un sistema fisico descritto da una lagrangiana nell'ambito della teoria classica dei campi. Definiamo una simmetria di gauge come una simmetria locale, ovvero una trasformazione contenente un'arbitraria funzione delle coordinate spaziotemporali che lascia invariata l'azione del sistema. Ne consegue che ci saranno relazioni che legano le equazioni del moto: fissando arbitrariamente la nostra funzione, i gradi di libertà del sistema diminuiscono. Inoltre, passando alla descrizione hamiltoniana, emerge la presenza di vincoli generati dalla simmetria, a differenza delle cariche conservate nel caso di simmetrie globali. Particolare attenzione è posta su quanto possa essere fisica una teoria formulata in questo modo, che a prima vista potrebbe non sembrarlo affatto. Tuttavia possiamo introdurre il concetto di classi di equivalenza di configurazioni, ovvero campi che differiscono matematicamente solamente per una simmetria di gauge descrivono fisicamente la stessa realtà. Nel prossimo para-

grafo mostreremo quantitativamente tutte queste caratteristiche attraverso un semplice esempio di un sistema motivato dall'elettrodinamica di Maxwell.

#### 4.1.1 Un esempio motivato dall'elettrodinamica

Mostriamo dapprima che l'elettrodinamica è una teoria di gauge. Sia  $A_\mu$  un quadri-potenziale che soddisfa le equazioni di Maxwell, allora è possibile dimostrare che, aggiungendo un termine derivante dalla simmetria di gauge, il nuovo quadripotenziale continua a soddisfare le equazioni di Maxwell. Infatti prendendo

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad (4.1)$$

e mettendolo nelle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti (3.16)

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A'_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A'_\nu) &= \partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + \partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu \Lambda \\ &= \partial_\nu \partial^\nu A'_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) - \partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu \Lambda + \partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu \Lambda \\ &= \partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che il quadridivergenza commuta e nell'ultimo passaggio la (3.16).

Sulla falsariga di tale teoria, prendiamo ora in considerazione un'azione dipendente da due campi  $A$  e  $\psi$ , analoghi ai potenziali elettromagnetici, definito nel seguente modo

$$S[A(t), \psi(t)] = \frac{1}{2} \int dt (\dot{\psi} - A)^2$$

dove la lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\psi} - A)^2$$

Il primo passo da compiere è trovare la simmetria di gauge: l'azione è invariante sotto la trasformazione

$$\psi' = \psi + \epsilon(t) \quad A' = A + \dot{\epsilon}(t) \quad (4.2)$$

dove  $\epsilon(t)$  è un'arbitraria funzione del tempo. Infatti calcolando la variazione sotto tale trasformazione otteniamo

$$\begin{aligned} S[A'(t), \psi'(t)] &= \frac{1}{2} \int dt (\dot{\psi}' - A')^2 \\ &= \frac{1}{2} \int dt (\dot{\psi} + \dot{\epsilon} - A - \dot{\epsilon})^2 \\ &= \frac{1}{2} \int dt (\dot{\psi} - A)^2 \\ &= S[A(t), \psi(t)] \end{aligned}$$

Il secondo passo da compiere è trovare le relazioni tra le equazioni del moto. Come ampiamente descritto nei precedenti capitoli, data un'azione, le equazioni del moto sono le equazioni di Eulero-Lagrange (2.12). Per il campo  $A$  otteniamo

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{2} (\dot{\psi} - A)^2 \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{A}} \left( \frac{1}{2} (\dot{\psi} - A)^2 \right) = -(\dot{\psi} - A)$$

che porta alla prima equazione del moto

$$\dot{\psi} - A = 0 \quad (4.3)$$

invece per il campo  $\psi$  troviamo

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 2 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} - A)$$

che conduce alla seconda equazione del moto

$$\frac{d}{dt} (\dot{\psi} - A) = 0 \quad (4.4)$$

Confrontando le equazioni del moto, notiamo che non sono indipendenti: l'equazione per il campo  $A$  (4.3) contiene già l'equazione per  $\psi$  (4.4) (se una funzione è nulla, anche la derivata necessariamente lo è). Conseguentemente, non abbiamo trovato due equazioni del moto, ma ne è presente soltanto una.

Mostriamo ora che la trasformazione di simmetria (4.2), non modifica le soluzioni delle equazioni del moto. Scriviamo esplicitamente quest'ultime ipotizzando che  $\psi(t)$  sia una funzione  $f(t)$  e dalle equazioni del moto (4.3) ricaviamo che  $A(t)$  è la sua derivata

$$\psi(t) = f(t) \quad A(t) = \dot{f}(t)$$

Applicando la (4.2), otteniamo

$$\psi'(t) = \psi(t) + \epsilon(t) = f(t) + \epsilon(t) \quad A'(t) = A(t) + \dot{\epsilon}(t) = \dot{f}(t) + \dot{\epsilon}(t)$$

e mostriamo che soddisfano anch'esse le equazioni del moto

$$\dot{\psi}' - A' = \dot{\psi}(t) + \dot{\epsilon}(t) - A - \dot{\epsilon}(t) = \dot{\psi} - A = 0$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (4.3).

Infine il terzo passo da compiere è passare dal formalismo lagrangiano alla descrizione hamiltoniana e trovare i vincoli generati dalla simmetria di gauge. Definiamo prima il momento coniugato al campo  $\psi$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi} - A$$



e quello coniugato al campo  $A$

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} = 0$$

Osserviamo che il momento coniugato ad  $A$  è nullo, quindi non comparirà nell'hamiltoniana, mentre invertiamo la prima relazione per isolare la derivata di  $\psi$

$$\dot{\psi} = p_\psi + A \quad (4.5)$$

Successivamente applichiamo la trasformazione di Legendre (2.34) per ottenere l'hamiltoniana del sistema in funzione dei campi  $\psi$  e  $A$  e del momento coniugato  $p_\psi$

$$\begin{aligned} H(\psi, A, p_\psi) &= p_\psi \dot{\psi} - L \\ &= p_\psi \dot{\psi} - \frac{1}{2}(\dot{\psi} - A)^2 \\ &= p_\psi(p_\psi + A) - \frac{1}{2}(p_\psi + A - A)^2 \\ &= \frac{1}{2}p_\psi^2 + Ap_\psi \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la (4.5). Nel formalismo hamiltoniano, le equazioni del moto sono le equazioni di Hamilton (2.35) e (2.36). Per il campo  $A$  abbiamo

$$\dot{p}_A = -\frac{\partial H}{\partial A} = -p_\psi = 0 \quad (4.6)$$

poichè  $p_A = 0$ , mentre per il campo  $\psi$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = p_\psi + A \quad \dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad (4.7)$$

Notiamo nella prima equazione l'assenza di derivate temporali, ciò significa che non è un'equazione di evoluzione temporale ma un vincolo

$$p_\psi = 0$$

dove  $A$  è il moltiplicatore di Lagrange corrispondente. Inoltre osserviamo che anche in questo caso le equazioni del moto non sono indipendenti, infatti l'ultima (4.7) è la derivata temporale della prima (4.6). Analogamente al formalismo lagrangiano, abbiamo nuovamente equazioni del moto non indipendenti.

Concludiamo il paragrafo con una nota importante. Dato che le equazioni del moto per  $\psi$  sono contenute in quelle per  $A$ , (4.4) in (4.3) oppure (4.7) in (4.6), non è possibile scegliere arbitrariamente  $A = 0$  ma posso soltanto imporre  $\psi = 0$ . In effetti, ponendo  $\psi = 0$

$$S[\psi = 0, A] = \int dt A^2$$

porta all'equazione accettabile di un vincolo

$$A = 0$$

mentre scegliendo  $A = 0$

$$S[\psi, A = 0] = 0 = \int dt \dot{\psi}^2$$

conduce ad una inaccettabile equazione del moto

$$\ddot{\psi} = 0$$

poichè un'evoluzione temporale non può emergere dalla simmetria di gauge, soltanto un vincolo può.

### 4.1.2 Struttura generale delle teorie di gauge

Presentiamo in questo paragrafo la struttura matematica di una teoria di gauge nella sua formulazione hamiltoniana. Il vantaggio di studiare tale teoria in questa formulazione risiede nella possibilità di analizzare in generale caratteristiche valide per molti esempi. In presenza di vincoli, il metodo più generale per passare dalla descrizione lagrangiana a quella hamiltoniana è il metodo sviluppato da P. A. M. Dirac (1902 – 1984). Tuttavia salteremo quella procedura e partiremo direttamente dalla conoscenza dell'hamiltoniana e dell'azione.

Consideriamo dunque un'azione hamiltoniana nella forma generica

$$S[q^i, p_i, \lambda^a] = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0(q^i, p_i) + \lambda^a \phi_a(q^i, p_i)) \quad (4.8)$$

dove le variabili indipendenti sono  $p_i$ ,  $q^i$  e  $\lambda^a$ , rispettivamente i momenti coniugati, le coordinate e i moltiplicatori di Lagrange. L'hamiltoniana totale è definita come

$$H = H_0 - \lambda^a \phi_a$$

ed è composta da una parte che non contiene vincoli  $H_0$  e da una parte che contribuisce ad aggiungerli, dove le equazioni dei vincoli sono in funzione delle  $\phi_a$ . Le corrispondenti equazioni del moto, variando le tre variabili, sono

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \quad (4.9)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \quad (4.10)$$

$$\phi_a(q^i, p_i) = 0 \quad (4.11)$$

Le prime due equazioni determinano la dinamica del sistema, ovvero come evolvono  $q$  e  $p$  date le condizioni iniziali  $q_0$  e  $p_0$ . Tuttavia le condizioni iniziali non possono essere del

tutto arbitrarie ma devono soddisfare la terza equazione. Inoltre come scelgo le  $\lambda$ ? Con l'utilizzo delle parentesi di Poisson (2.37) e delle equazioni di Hamilton (4.9) e (4.10), calcoliamo la derivata temporale dei vincoli

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_a(q^i, p_i) &= \frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \lambda^b \frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\frac{\partial\phi_b}{\partial p_i} - \frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \lambda^b \frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\frac{\partial\phi_b}{\partial q^i} \\ &= \frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i} - \lambda^b \left( \frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\frac{\partial\phi_b}{\partial p_i} - \frac{\partial\phi_b}{\partial p_i}\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i} \right) \\ &= [\phi_a, H_0] - \lambda^b [\phi_a, \phi_b] \\ &= [\phi_a, H_0] - \lambda^b C_{ab} \end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato la matrice  $C_{ab} = [\phi_a, \phi_b]$ . Dato che la condizione vincolante è  $\phi_a = 0$ , non ci restringiamo a porre la derivata del vincolo nulla ma introduciamo il concetto di debolmente nulla, ovvero nulla soltanto quando  $\phi_a = 0$

$$[\phi_a, H_0] - \lambda^b C_{ab} \approx 0 \quad (4.12)$$

Distinguiamo ora due possibili casi, in base alle proprietà della matrice  $C_{ab}$ . Nel caso in cui sia invertibile, i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda^a$  sono fissati dall'equazione (4.12)

$$\lambda^b(t) = C_{ab}^{-1}[\phi_a, H_0]$$

dove il loro ruolo è quello di mantenere il vincolo nullo  $\phi = 0$  nel tempo. Vincoli di questo tipo sono chiamati di seconda classe e offrono una dinamica del sistema semplice: date le condizioni iniziali in modo che rispettino i vincoli, le  $\lambda$  assicurano che il vincolo sia mantenuto negli istanti successivi. Siamo in presenza di teorie non di gauge. Caso più interessante è quando la matrice è debolmente nulla  $C_{ab} \approx 0$ . I moltiplicatori di Lagrange non impongono alcuna condizione, poichè non compaiono nella (4.12), e le equazioni del moto rimangono non determinate univocamente. Vincoli di questo tipo sono chiamati di prima classe, ovvero quando soddisfano le condizioni

$$[\phi_a, H_0] = C_a^b \phi_b \approx 0 \quad [\phi_a, \phi_b] = C_{ab}^c \phi_c \approx 0 \quad (4.13)$$

In questo caso siamo in presenza di teorie di gauge.

Particolare attenzione bisogna porre ai gradi di libertà del sistema. Teorie non di gauge con l'azione del tipo

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0)$$

con  $i = 1, 2, \dots, N$ , possiedono  $2N$  costanti di integrazione per risolvere le equazioni di Hamilton, dunque i gradi di libertà sono  $\frac{1}{2}2N = N$ . Teorie di gauge invece, con l'azione del tipo

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \phi_a)$$

con  $a = 1, 2, \dots, V$ , possiedono anch'essi  $2N$  costanti di integrazione ma ci sono  $V$  vincoli dovuti a simmetrie di gauge che implicano la non necessità di conoscerle tutte: il numero di gradi di libertà è  $\frac{1}{2}(2N - 2V) = N - V$ .

### 4.1.3 Il teorema di Noether inverso

La presenza di vincoli di prima classe e dunque di teorie di gauge, porta come conseguenza il fatto che l'azione è invariante per trasformazioni del tipo

$$\delta q^i = [q^i, \phi_a] \epsilon^a(t) \quad (4.14)$$

$$\delta p_i = [p_i, \phi_a] \epsilon^a(t) \quad (4.15)$$

$$\delta \lambda^c = \dot{\epsilon}^c(t) + \epsilon^a(t) C_a^{\phantom{c}c} - \lambda^a \epsilon^b(t) C_{ab}^{\phantom{c}c} \quad (4.16)$$

dove  $\epsilon^a(t)$  è un'arbitraria funzione del tempo. Queste sono proprio trasformazioni di simmetria di gauge. Siamo quindi in presenza dell'inverso del secondo teorema di Noether.

**Teorema 4.1** (L'inverso del secondo teorema di Noether). *Un'azione del tipo (4.8) tale che i vincoli e l'hamiltoniana soddisfano (4.13), presenta delle trasformazioni di simmetria di gauge (4.14) (4.15) (4.16).*

Dimostriamo ora questo enunciato.

*Dimostrazione.* La variazione delle coordinate è data dalla (4.14)

$$\delta q^i = [q^i, \phi_a] \epsilon^a = \left( \frac{\partial q^i}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial p_i} \right) \epsilon^a = \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \epsilon^a \quad (4.17)$$

mentre quella dei momenti è data dalla (4.15)

$$\delta p_i = [p_i, \phi_a] \epsilon^a = \left( \frac{\partial p_i}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \right) \epsilon^a = -\frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \epsilon^a \quad (4.18)$$

dove abbiamo utilizzato le relazioni canoniche (2.39).

Calcoliamo ora la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int dt (\dot{q}^i p_i - H_0(q^i, p_i) + \lambda^a \phi_a(p, q)) \\ &= \int dt (\delta \dot{q}^i p_i + \dot{q}^i \delta p_i - \delta H_0(q^i, p_i) + \delta \lambda^a \phi_a(p, q) + \lambda^a \delta \phi_a(p, q)) \\ &= \int dt (-\delta q^i \dot{p}_i + \dot{q}^i \delta p_i - \delta H_0(q^i, p_i) + \delta \lambda^a \phi_a(p, q) + \lambda^a \delta \phi_a(p, q) + \frac{d}{dt}(q^i p_i)) \\ &= \int dt \left( -\epsilon^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \dot{p}_i - \epsilon^a \dot{q}^i \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} + \epsilon^a \left( \frac{\partial H_0}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} - \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \right) + \delta \lambda^a \phi_a \right. \\ &\quad \left. + \lambda^a \epsilon^b \left( \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \frac{\partial \phi_b}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_b}{\partial q^i} \right) + \frac{d}{dt}(q^i p_i) \right) \\ &= \int dt \left( -\epsilon^a \left( \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \dot{p}_i - \dot{q}^i \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \right) + \epsilon^a [H_0, \phi_a] + \delta \lambda^a \phi_a + \lambda^a \epsilon^b [\phi_a, \phi_b] + \frac{d}{dt}(q^i p_i) \right) \\ &= \int dt \left( -\epsilon^a \frac{d}{dt} \phi_a + \epsilon^a [H_0, \phi_a] + \delta \lambda^a \phi_a + \lambda^a \epsilon^b [\phi_a, \phi_b] + \frac{d}{dt}(q^i p_i) \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti nel terzo passaggio, sostituito le (4.17) e (4.18) nel terzo, applicato la definizione di parentesi di Poisson (2.37) e nell'ultimo passaggio la definizione di derivata del vincolo. Sviluppiamo ulteriormente i calcoli,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt \left( -\dot{\epsilon}^a \phi_a + \epsilon^a [H_0, \phi_a] + \delta \lambda^a \phi_a + \lambda^a \epsilon^b [\phi_a, \phi_b] + \frac{d}{dt}(q^i p_i + \epsilon^a \phi_a) \right) \\ &= \int dt \left( -\dot{\epsilon}^a \phi_a - \epsilon^a C_a^b \phi_b + \delta \lambda^a \phi_a + \lambda^a \epsilon^b C_{ab}^c \phi_c + \frac{d}{dt}(q^i p_i + \epsilon^a \phi_a) \right) \\ &= \int dt \left( (-\dot{\epsilon}^c - \epsilon^a C_a^c + \delta \lambda^c + \lambda^a \epsilon^b C_{ab}^c) \phi_c + \frac{d}{dt}(q^i p_i + \epsilon^a \phi_a) \right)\end{aligned}$$

dove abbiamo nuovamente per parti nel primo passaggio, nel secondo abbiamo usato l'ipotesi che i vincoli sono di seconda classe (4.13) e ridefinito gli indici. Usando infine la (4.16), otteniamo

$$\delta S = \int dt \frac{d}{dt}(q^i p_i + \epsilon^a \phi_a)$$

che essendo un termine al bordo, non influenza le equazioni del moto, chiudendo la dimostrazione, mostrando che è in effetti una trasformazione di simmetria di gauge. q.e.d.

Un'altra caratteristica di una simmetria di gauge è che la carica di Noether associata ad essa è nulla.

Per comprendere al meglio le nozioni annunciate nei paragrafi precedenti, proponiamo due esempi esplicatori: la particella descritta nell'ambito della relatività speciale e l'elettrodinamica in assenza di sorgenti.

## 4.2 La particella relativistica

Consideriamo un sistema fisico composto da una particella relativistica, descritta dalla linea di universo nello spazio di Minkovski  $x^\mu(\tau)$ . Il parametro  $\tau$  non deve necessariamente essere il tempo proprio. In unità naturali, la costante della luce è unitaria. L'azione associata a tale sistema è

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \quad (4.19)$$

Cambiando il parametro  $\tau$  non ha alcun risvolto fisico, poiché la linea di universo non cambia. Tale trasformazione è chiamata riparametrizzazione

$$\tau' = \tau'(t) \quad x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau)$$

e la sua versione infinitesima, prendendo  $\tau' = \tau + \epsilon(\tau)$ , diventa

$$\delta x^\mu(\tau) = -\epsilon(\tau) \dot{x}^\mu$$

Un simile risultato lo abbiamo già ottenuto nella (2.15).

Calcoliamo ora la variazione dell'azione

$$\delta S = -m \delta \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} = \int d\tau \frac{-\dot{x}^\mu \delta \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = -m \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left( \epsilon(\tau) \sqrt{-\dot{x}^2} \right)$$

e dunque il termine al bordo è

$$K = -m\epsilon(\tau)\sqrt{-\dot{x}^2}$$

Calcoliamo ora attraverso il teorema di Noether, la carica associata (2.21)

$$\begin{aligned} Q &= K - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta_s x^\mu \\ &= -m\epsilon(\tau)\sqrt{-\dot{x}^2} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (-m\sqrt{-\dot{x}^2}) (-\epsilon(\tau)\dot{x}^\mu) \\ &= -m\epsilon(\tau)\sqrt{-\dot{x}^2} + m\epsilon(\tau) \frac{-\dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \\ &= -m\epsilon(\tau)\sqrt{-\dot{x}^2} + m\epsilon(\tau)\sqrt{-\dot{x}^2} = 0 \end{aligned}$$

Dunque risulta che la carica associata è nulla, dato che è una simmetria di gauge.

Passiamo al formalismo hamiltoniano, scriviamo dapprima il momento canonico

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\nu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}$$

Tuttavia notiamo che non siamo in grado di risolvere  $\dot{x}^\mu$  in termini di  $p_\mu$ . Ciò è dovuto al fatto che non ci sono come sembrerebbe 4 equazioni indipendenti, ma soltanto 3 a causa del vincolo

$$\phi = p_\nu p^\nu + m^2 = 0$$

### 4.2.1 L'azione di Polyakov

A questo punto entrerebbe in gioco il metodo di Dirac per risolvere questa problematica. Noi ci soffermeremo invece sulla definizione di un'altra azione del tutto equivalente, dovuta a Polyakov. Introduciamo una variabile ausiliaria chiamata einbein  $e(\tau)$  che avrà il ruolo di moltiplicatore di Lagrange. La nuova azione è

$$S[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \frac{1}{2} \int d\tau \left( \frac{1}{e} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - em^2 \right) \quad (4.20)$$

Siccome la lagrangiana non contiene alcuna derivata di  $e$ , l'equazione del moto corrispondente ad  $e(\tau)$

$$\frac{\partial L}{\partial e} = 0$$

si riduce a

$$e(x^\mu) = \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^2}$$

che sostituendole alla (4.20) ritroviamo (4.19). Abbiamo appena dimostrato che le due azioni sono equivalenti.

Anche l'azione di Polyakov è invariante per riparametrizzazione, e in aggiunta alla variazione di  $x$  troviamo come varia  $e$

$$e'(\tau') = e(\tau) \frac{d\tau}{d\tau'}$$

e la controparte infinitesima  $e'(\tau + \epsilon) = e(1 - \dot{\epsilon})$  conduce alla variazione

$$\delta e(\tau) = -\frac{d}{d\tau}(\epsilon(\tau)e)$$

Ricapitolando, le variazioni dei campi  $x^\mu$  e  $e$  in seguito ad una riparametrizzazione di  $\tau$  porta a

$$\delta x^\mu(\tau) = -\epsilon(\tau)\dot{x}^\mu \quad \delta e(\tau) = -\frac{d}{d\tau}(\epsilon(\tau)e) \quad (4.21)$$

Calcoliamo ora la variazione dell'azione con l'aiuto della (4.21)

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \delta \int d\tau \left( \frac{1}{e} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - em^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \left( \frac{2e\dot{x}^\mu \delta x_\mu - \dot{x}^2 \delta e}{e^2} - m^2 \delta e \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left( \epsilon \left( \frac{\dot{x}^2}{e} - m^2 e \right) \right) \end{aligned}$$

e troviamo dunque il termine al bordo

$$K = -\frac{1}{2} \epsilon(\tau) \left( \frac{\dot{x}^2}{e} - m^2 \right) = -\epsilon(\tau) L$$

Anche in questo caso la carica associata alla simmetria di gauge è nulla.

Passiamo alla descrizione hamiltoniana associata, utilizzando la trasformata di Legendre

$$H(p_\mu, x^\mu, e) = p_\mu \dot{x}^\mu - L = \frac{1}{2} e (p_\mu p^\mu + m^2)$$

e dunque l'azione hamiltoniana diventa

$$S[p_\mu, x^\mu, e] = \int d\tau \left( p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} e (p_\mu p^\mu + m^2) \right)$$

Osserviamo che ha la stessa identica forma di (4.8), con  $H_0 = 0$  dato che per riparametrizzazioni l'hamiltoniana non è collegata ad alcun tempo. Dunque il vincolo è proprio  $\phi = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$  ed  $e$  sono i moltiplicatori di Lagrange.

Siccome è presente un solo vincolo, sarà di prima classe e  $C_{ab} = 0$ . Quindi la trasformazione di gauge è

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= [x^\mu, \epsilon(\tau) \frac{1}{2}(p^2 + m^2)] = \epsilon(\tau) p^\mu \\ \delta p_\mu &= [p_\mu, \epsilon(\tau) \frac{1}{2}(p^2 + m^2)] = 0 \\ \delta e &= \dot{\epsilon}(\tau)\end{aligned}$$

e quindi la variazione dell'azione è davvero un termine al bordo

$$\delta S = \int d\tau \left( p_\mu \delta \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} \delta e (p^2 + m^2) \right) = \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} \epsilon(\tau) (p^2 - m^2) \right)$$

### 4.3 Elettrodinamica

Consideriamo l'azione associata all'elettrodinamica di Maxwell

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

e la separiamo in componenti spaziali e temporali<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}S &= \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{i0} F_{i0} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right) \\ &= \int d^4x \left( -\frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\dot{A}_i - \partial_i A_0) (\dot{A}_i - \partial_i A_0) - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \dot{A}_i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà di antisimmetria del tensore elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  e la sua definizione in termini del quadripotenziale  $A_\mu$ .

Definiamo dunque il momento associato alle componenti spaziali  $A_i$ , essendo le uniche che presentano derivate temporali

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad (4.22)$$

ed usando la definizione di quadripotenziale  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  e l'espressione del campo elettrico in termini dei potenziali scalare e vettore, mostriamo che lo possiamo interpretare fisicamente come il campo elettrico

$$\boldsymbol{\pi} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \mathbf{E}$$

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che gli indici derivanti dall'alfabeto greco corrispondono a  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , mentre quelli derivanti dall'alfabeto latino corrispondono a  $i = 1, 2, 3$



Attraverso una trasformazione di Legendre (2.34) troviamo l'hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H(p, A) &= \pi_i \dot{A}^i - L = \pi_i \dot{A}^i - \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}^i + \dot{A}_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\
&= \pi_i (\pi^i + \partial^i A_0) - \frac{1}{2} (\pi^i + \partial^i A_0) (\pi_i + \partial_i A_0) + (\pi_i + \partial_i A_0) \partial^i A_0 \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\
&= \pi_i \pi^i + \pi_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \pi_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2} \partial^i A_0 \partial_i A_0 \\
&\quad + \pi_i \partial^i A_0 + \partial_i A_0 \partial^i A_0 - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A_0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} + \pi_i \partial^i A_0 \\
&= \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - A_0 \partial_i \pi^i + \partial^i (\pi_i A_0)
\end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito l'inverso della (4.22) e integrato per parti. L'ultimo termine, essendo un termine al bordo, può essere trascurato. L'azione nella descrizione hamiltoniana per l'elettrodinamica diventa

$$S[A_i, \pi_i, A_0] = \int d^4x \left( \pi_i \dot{A}^i - \left( \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right) + A_0 \partial_i \pi^i \right)$$

che si presenta nella forma cercata (4.8), in cui definiamo  $H_0$  come l'energia corrispondente all'hamiltoniana dinamica

$$H_0 = \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$

e  $A_0$  come il moltiplicatore di Lagrange, il cui vincolo è esattamente una delle equazioni di Maxwell, ovvero l'equazione di Gauss

$$\phi = \partial_i \pi^i = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Calcolando le corrispondenti equazioni del moto (4.9), (4.10) e (4.11)

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial A^i} \quad \dot{A}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi^i} \quad \phi = 0$$

ci troviamo nello stesso problema di dover garantire che il vincolo sia preservato durante l'evoluzione, cioè che  $\dot{\phi} = [\phi, H] = 0$ . Una ulteriore difficoltà sorge essendo nell'ambito della teoria dei campi, dove le parentesi di Poisson sono definite per due punti differenti dello spazio  $x$  e  $x'$

$$[\phi(x), H(x')] = \left[ \partial_i \pi^i(x), \frac{1}{2} \left( \pi_i \pi^i(x') + F_{ij} F^{ij}(x') - \frac{1}{2} A_0 \partial_i \pi^i(x') \right) \right]$$

Utilizzando le parentesi di Poisson canoniche derivanti dalla struttura simplettica, dove essendo in presenza di sistemi continui l'usuale delta di Kronecker è sostituita con la delta di Dirac,

$$[\pi_i(x), \pi_j(x')] = 0 \quad [A_i(x), A_j(x')] = 0 \quad [A_i(x), \pi_j(x')] = \delta_{ij}\delta^3(x - x')$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt}\phi = [\phi(x), H(x')] = 2\partial_k\partial'_i[\pi_k(x), A_j(x')]F^{ij}(x') = -2(\partial_k\partial'_i\delta^3(x - x'))F^{ij}(x') = 0$$

a causa della cancellazione dei termini dovuta alla simmetria delle derivate parziali e all'antisimmetria del tensore elettromagnetico. Conseguentemente quindi il vincolo si conserva sulle equazioni del moto e genera una simmetria di gauge.

A questo punto mostriamo il gauge, attraverso il seguente espediente: consideriamo come vincolo un funzionale  $\Phi[\Lambda(x)]$  dipendente dalla funzione di gauge  $\Lambda(x)$  definito come

$$\Phi[\Lambda(x)] = \int d^3x \Lambda(x) \partial_i \pi^i(x)$$

dove non abbiamo integrato nel tempo per mantenere la dipendenza temporale al fine di poter calcolare parentesi di Poisson allo stesso istante. La trasformazione di gauge sono definite come

$$\begin{aligned} \delta A_i(x) &= [A_i(t, x), \Phi[\Lambda]] \\ &= \int d^3x' \Lambda(x', t) \partial'_j [A_i(t, x), \pi^j(t, x')] \\ &= \int d^3x' \Lambda(t, x') \delta_{ji} \delta^3(x - x') \\ &= -\partial_i \Lambda(t, x) \end{aligned}$$

che è proprio l'invarianza di gauge presente in elettrodinamica (4.1). D'altra parte la trasformazione di gauge del momento coniugato deve essere nulla

$$\delta \pi_i(t, x) = [\pi_i, \Phi[\Lambda]] = \int d^3x' \Lambda(t, x') [\pi_i, \partial_j \pi^j] = 0$$

Infine calcoliamo la variazione dell'azione

$$\delta S = \delta \int d^4x (\pi_i \dot{A}^i - H_0 + A_0 \partial_i \pi^i) = \int d^4x (\delta \pi_i \dot{A}^i + \pi_i \delta \dot{A}^i - \delta H_0 + \delta A_0 \phi + A_0 \delta \phi)$$

Essendo invarianti di gauge, poniamo  $\delta \pi_i = 0$ ,  $\delta H_0 = 0$  e  $\delta \phi = 0$  e sviluppiamo ulteriormente i calcoli

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x (\pi_i \delta \dot{A}^i + \delta A_0 \phi) \\ &= \int d^4x (-\pi_i \partial^i \partial_0 \Lambda + \delta A_0 \partial_i \pi^i) \\ &= \int d^4x (\partial_i (-\pi^i \partial_0 \Lambda) + \partial_i \pi^i \partial_0 \Lambda + \delta A_0 \partial_i \pi^i) \\ &= \int d^4x (\partial_\mu K^\mu + \partial_i \pi^i (\delta A_0 + \partial_9 \Lambda)) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto il termine al bordo  $K^\mu = (0, -\pi^i \partial_0 \Lambda)$ . L'annullarsi della variazione dell'azione, ci porta a concludere che  $\delta A_0 = -\partial_0 \Lambda$ , per avere soltanto un termine al bordo che ai fini delle equazioni del moto è trascurabile. In questo modo, la trasformazione di gauge del campo  $A_\mu$  generata dal vincolo dell'equazione di Gauss è proprio quella aspettata: infatti abbiamo dimostrato che

$$\phi = \partial_i \pi^i = \nabla \cdot E = 0$$

genera

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \Lambda(x)$$

# Bibliografia

- [1] E. Noether. «Invariante Variationsprobleme». In: *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, 235–257 (1918).
- [2] E. Noether e M. A. Tavel. «Invariant Variation Problems». In: (). URL: <https://arxiv.org/abs/physics/0503066>.
- [3] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Fisica Teorica 1. Meccanica*. Editori Riuniti Univ. Press, 2010.
- [4] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko. *Classical Mechanics (3rd edition)*. Addison Wesley, 2002.
- [5] M. Banados e I. Reyes. «A short review on Noether’s theorems, gauge symmetries and boundary terms». In: (). URL: <https://arxiv.org/abs/1601.03616>.
- [6] E. L. Hill. «Hamilton’s Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics». In: *Rev. Mod. Phys.* 23, 253 (1951).
- [7] F. Bastianelli. «Lecture Notes». In: (). URL: <https://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/>.
- [8] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Fisica Teorica 2. Teoria dei campi*. Editori Riuniti Univ. Press, 2010.
- [9] V. Barone. *Relatività. Principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2010.
- [10] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons Inc, 1972.