I teoremi di Noether: simmetrie, leggi di conservazione e teorie di gauge

Matteo Zandi

15 settembre 2023

I teoremi di Noether

Enunciati e dimostrati della matematica tedesca Emmy Noether nell'articolo del 1918.

Possiamo riassumerli nel seguente modo:

- simmetria globale $\iff$ legge di conservazione,
- simmetria locale $\iff$ identità tra le equazioni del moto.

Formalismo lagrangiano

In meccanica classica[1], un generico sistema fisico è descritto dal funzionale di azione

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t,\ q^i,\ \dot{q}^i)$$

Attraverso il principio di azione stazionaria, si ricavano le equazioni del moto

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

[1] In questo caso classica ha l'accezione di non relativistica e non quantistica

Che cos'è una simmetria?

Una simmetria è una trasformazione delle coordinate che lascia l'azione invariata a meno di un termine al bordo

$$\delta S[q^i,\ \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt} K$$

Una variazione on-shell è una arbitraria trasformazione infinitesima delle coordinate che usa le equazioni del moto

$$\delta S[\overline{q}^i,\ \delta q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)$$

Il primo teorema di Noether

Teorema

Sia $\delta_s q^i$ una simmetria dell'azione. Allora esiste una carica di Noether Q definita come

$$Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_s q^i$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi la legge di conservazione

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

Dimostrazione

Vincolando che le $\overline{q}^i$ soddisfino le equazioni del moto e che le $\delta_s q^i$ siano una simmetria dell'azione, troviamo

$$\delta S[\overline{q}^i,\ \delta_s q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt} K = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right)$$

Sottraendo il terzo dal secondo

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = 0$$

otteniamo la tesi ricercata

$$\frac{d}{dt}\left(K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) = \frac{d}{dt} Q = 0$$

q.e.d.

Esempio: la particella libera

L'azione di una particella libera è

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

La carica di una traslazione temporale è l'energia

$$\delta_s t = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\Big(-\epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \Big) \quad \Rightarrow \quad Q = \epsilon \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2$$

La carica di una traslazione spaziale è la quantità di moto

$$\delta_s \mathbf{r} = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a}$$

La carica di una rotazione spaziale è il momento angolare

$$\delta_s \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$$

La carica di un boost di Galileo è il moto del centro di massa

$$\delta_s \mathbf{r} = \mathbf{v} t \quad \Rightarrow \quad \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\Big(m\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \Big) \quad \Rightarrow \quad Q = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{r} - m\dot{\mathbf{r}} t)$$

Formalismo lagrangiano

In teoria classica[2] dei campi, un generico sistema fisico è descritto dal funzionale di azione

$$S[\phi] = \int d^4x \, \mathcal{L}(x^\mu, \, \phi, \, \phi_{,\mu})$$

dove la densità di lagrangiana è definita come

$$L = \int d^3x \, \mathcal{L}$$

Attraverso il principio di azione stazionaria, si ricavano le equazioni del moto

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0$$

[2] In questo caso classica ha l'accezione di relativistica e non quantistica

Che cos'è una simmetria?

Una simmetria è una trasformazione dei campi che lascia l'azione invariata a meno di un termine al bordo

$$\delta S[\phi,\ \delta_s \phi] = \int d^4x\, \partial_\mu K^\mu$$

Una variazione on-shell è una arbitraria trasformazione infinitesima dei campi che usa le equazioni del moto

$$\delta S[\overline{\phi},\ \delta\phi] = \int d^4x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi \right)$$

Il primo teorema di Noether

Teorema

Sia $\delta_s\phi$ una simmetria dell'azione. Allora esiste una corrente di Noether J^μ definita come

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi - K^\mu$$

tale che sia conservata lungo le equazioni del moto e quindi soddisfi l'equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Il tensore energia-impulso

Dalle 4 traslazioni spaziotemporali

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$$

definiamo il tensore energia-impulso

$$J^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu}\epsilon^{\nu}$$

Esempio: l'elettrodinamica

L'azione dell'elettrodinamica in assenza di sorgenti è

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

dove il tensore elettromagnetico è definito come

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Le equazioni del moto sono le equazioni di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

La corrente di una traslazione spaziotemporale, compatibile con l'invarianza di gauge, è

$$\delta A_\mu = F_{\mu\nu}\epsilon^\nu \quad \Rightarrow \quad \delta S = \int d^4x\, \partial_\sigma(-\epsilon^\sigma F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

$$\Rightarrow \quad J^\mu = -\epsilon^\sigma \left(F^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

ed il tensore energia-impulso è

$$T^\mu{}_\sigma = -F^{\mu\rho} F_{\sigma\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\sigma F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Formalismo hamiltoniano

Definiamo l'hamiltoniana attraverso la trasformazione di Legendre

$$H(q^i,\ p_j,\ t) = p_i \dot{q}^i - L$$

che, per il principio di azione stazionaria, porta alle equazioni del moto

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$$

Che cos'è una teoria di gauge?

Definiamo una simmetria di gauge come una trasformazione contenente un'arbitraria funzione delle coordinate spaziotemporali che lascia invariata l'azione del sistema.

L'elettrodinamica è una teoria di gauge, infatti prendendo

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \Lambda$$

e mettendolo nelle equazioni di Maxwell, otteniamo

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu \partial^\nu A'_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu A'_\nu) = 0$$

Il secondo teorema inverso

Teorema

Un'azione hamiltoniana nella forma

$$S[q^i,\ p_i,\ \lambda^a] = \int dt\ (p_i \dot{q}^i - H_0(q^i,\ p_i) + \lambda^a \phi_a(q^i,\ p_i))$$

dove l'hamiltoniana totale è

$$H = H_0 - \lambda^a \phi_a$$

tale che presenti vincoli (di seconda classe) è invariante per trasformazioni di gauge.

Esempio: l'elettrodinamica

Consideriamo l'azione associata all'elettrodinamica di Maxwell

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i - \dot{A}_i\partial^i A_0 + \frac{1}{2}\partial_i A_0 \partial^i A_0 - \frac{1}{4}F^{ij}F ij \right)$$

che nella descrizione hamiltoniana diventa

$$S[A_i,\ \pi_i,\ A_0] = \int d^4x \left(\pi_i \dot{A}^i - \left(\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \right) + A_0\partial_i\pi^i \right)$$

dove il momento coniugato ad A_i è

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i + \partial_i A_0 = -E_i$$

Attraverso il teorema inverso, il vincolo

$$\phi = \partial_i \pi^i = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0$$

genera la simmetria di gauge

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \Lambda(x)$$

Grazie per l'attenzione.