

Versuchsprotokoll

Holographie

Tom Drechsler, Konstantin Schmid

Protokoll: 10. November 2019

Messung: 14.11.2019

Ort: <Ort>

Betreuer: Karla Roszeitis

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel und Überblick	2
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Das Grundprinzip der Holographie	2
2.2	Mathematische Grundlagen und Definitionen	2
2.2.1	Intensität elektromagnetischer Wellen	2
2.2.2	Die Fourierdarstellung	3
2.2.3	Die Interferenz von Wellen	4
2.3	Kohärenz und Kontrastfunktion	4
2.3.1	Ebene Wellen und reale Wellenzüge	4
2.3.2	Präzise Definition der Kohärenzlänge, Kontrastfunktion	6
2.3.3	Anwendung auf den Laser	8

1 Versuchsziel und Überblick

Der Versuch hat das Ziel, sich mit Komponenten und Arbeitstechniken in einem Laserlabor vertraut zu machen.

Zuerst wird ein Michelson-Interferometer aufgebaut und Stabilität sowie Kohärenzlänge werden untersucht. Danach wird die Holographie-Anordnung für Weißlicht-Reflexionshologramme aufgebaut und schließlich das Hologramm aufgezeichnet, entwickelt und untersucht. Als Vorkenntnisse werden Elektrodynamik, Fourieranalyse und das Grundprinzip des Lasers benötigt, welche im Folgenden nochmal zusammengefasst sind.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Das Grundprinzip der Holographie

Klassische Fotografie hat den Nachteil, dass bloß die Intensitätsverteilung reproduziert werden kann und so die Phaseninformation der einfallenden Wellen, wie beschrieben durch Gleichung (1), verloren geht.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{a}_i \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi_i) \quad (1)$$

In der Holographie wird das Lichtfeld des Objektes mit einer Referenzwelle überlagert und bei der Rekonstruktion des Lichtmusters wird das Hologramm wieder mit dieser Referenzwelle beleuchtet, sodass die rekonstruierte Welle in Phase und Amplitude der Originalwelle entspricht.

2.2 Mathematische Grundlagen und Definitionen

2.2.1 Intensität elektromagnetischer Wellen

Die tatsächliche Intensität elektromagnetischer Strahlung ist ein Maß für die Energie pro Fläche und Zeitintervall. Im Allgemeinen wird die tatsächliche Intensität I_t mit Hilfe des Poynting-Vektors \vec{S} über die Gleichung (2) bestimmt.

$$I_t = |\langle \vec{S} \rangle| \quad (2)$$

Dies vereinfacht sich in linearen Medien zu (3)

$$I_t(t) = \varepsilon_0 c n \vec{E}^2 \stackrel{n=1}{=} \varepsilon_0 c \vec{E}(t)^2 \quad (3)$$

Durch zeitliche Mittelung ergibt sich der finale Ausdruck für die Intensität:

$$I = \langle I_t \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} I_t(t) dt = \varepsilon_0 c \langle \vec{E}^2 \rangle \quad (4)$$

Im allgemeinen Fall wird tatsächlich der gesamte Vektor $\vec{E}(\vec{r}, t)$ benötigt. Wir betrachten im folgenden ausschließlich den Spezialfall für **linear polarisiertes** Licht. Hier oszilliert der Feldstärkevektor $\vec{E}(\vec{r}, t)$ in einer festen Ebene. Da man das Koordinatensystem beliebig wählen kann, ist es keine Einschränkung wenn man

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t) \vec{e}_x$$

d.h. $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ legt. Dann ist aber $\vec{E}(\vec{r}, t)^2 = E(\vec{r}, t)^2$, weshalb es ausreichend ist, mit **skalaren** Größen zu rechnen. Wir lassen daher ab sofort den Vektorpfeil weg. Außerdem ist für viele Rechnungen sehr praktisch, elektromagnetische Wellen durch die komplexe Exponentialfunktion zu beschreiben. Für die ebene Welle mit harmonischer Zeit- und Ortsabhängigkeit

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \Omega t)$$

führt man das komplexe elektrische Feld \hat{E} ein:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \Omega t)} = E_0 \left[\cos(\vec{k}\vec{r} - \Omega t) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \Omega t) \right]$$

Aus diesem ergibt sich das beobachtbare reelle elektrische Feld E durch Bildung des Realteils:

$$E(\vec{r}, t) = \Re \hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{E}(\vec{r}, t) + \hat{E}^*(\vec{r}, t) \right)$$

wobei $*$ die komplexe Konjugation bedeutet. Mithilfe des komplexen Feldes \hat{E} kann das Betragsquadrat des elektrischen Feldstärkevektors umformuliert werden und (4) wird zu:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \langle \hat{E} \hat{E}^* \rangle \quad (5)$$

2.2.2 Die Fourierdarstellung

Das Fourierspektrum des reellen elektrischen Feldes ist definiert als:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt, \omega \geq 0 \quad (6)$$

Da allerdings für kontinuierliche Strahlung die Gesamtenergie divergiert, verwendet man stattdessen eine mittlere Leistung, wozu man einen zeitlichen Ausschnitt E_T von $E(t)$

benötigt. Das dementsprechende Fourierspektrum $H_T(\omega)$ kann man analog über (6) ermitteln. Als Grenzwert findet man dann die spektrale Dichte $S(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H_T(\omega)|^2}{T} \quad (7)$$

Mit dieser ist es möglich die mittlere Intensität als Integral über $S(\omega)$ auszudrücken:

$$I = \varepsilon_0 c \int_0^\infty S(\omega) d\omega \quad (8)$$

2.2.3 Die Interferenz von Wellen

Als Ansatz betrachten wir zwei sich überlagernde ebene harmonische Wellen, gegeben durch (9)

$$\hat{E}_i = a_i e^{i(\vec{k}_i \vec{r} - \omega t - \varphi_i)}, i = 1, 2 \quad (9)$$

Im Folgenden bezeichnet \hat{E}_{tot} die Superposition der beiden einzelnen Amplituden. Die totale mittlere Intensität der beiden Wellen ist dann:

$$I_{tot}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \langle \hat{E}_{tot} \hat{E}_{tot}^* \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\phi(\vec{r})) \text{ mit } \phi(\vec{r}) = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r} - (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (10)$$

2.3 Kohärenz und Kontrastfunktion

2.3.1 Ebene Wellen und reale Wellenzüge

Alle bisherigen Überlegungen wurden mit ebenen Wellen durchgeführt. Diese bilden das denkbar einfachste Modell und erfüllen auch die Maxwell'schen Gleichungen. Sie haben allerdings den Nachteil, dass sie der Realität nur bedingt nahe kommen: Da die ebenen Wellen mathematisch durch Sinus- und Cosinusfunktionen oder die komplexe Exponentialfunktion beschrieben werden, sind sie zwangsläufig sowohl zeitlich als auch örtlich unendlich weit ausgedehnt. Jede reale Lichtquelle sendet aber stets nur Wellenzüge von endlicher Länge aus. Das hat aber eine recht unangenehme Konsequenz: Betrachten wir beispielsweise einen Wellenzug, die während des Zeitintervalls $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ durch eine ebene Welle beschrieben werden kann und davor und danach verschwindet:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \vec{r} - \Omega t)} \cdot \left[\Theta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \Theta\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

mit der Heaviside-Funktion Θ . Die Fouriertransformierte des Realteils von \hat{E} im Zeitbereich liefert dann das Frequenzspektrum von E :

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Re \hat{E}(\vec{r}, t) dt \\
 &= \frac{E_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\omega t} \left[e^{i(\vec{k}\vec{r} - \Omega t)} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \Omega t)} \right] dt \\
 &= \frac{E_0}{2} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{r}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega - \Omega)t} dt + e^{-i\vec{k}\vec{r}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega + \Omega)t} dt \right\} \\
 &= E_0 \left\{ \frac{\sin\left[(\omega - \Omega)\frac{T}{2}\right]}{\omega - \Omega} \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{\sin\left[(\omega + \Omega)\frac{T}{2}\right]}{\omega + \Omega} \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right\}
 \end{aligned}$$

Für die spezielle Wahl $\vec{r} = \vec{o}$ ist das Frequenzspektrum in der folgenden Abbildung dargestellt:

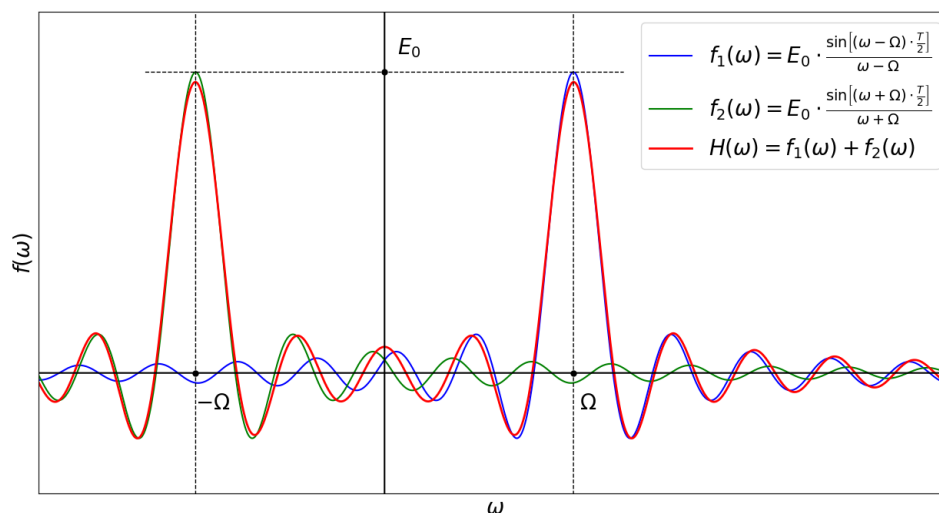


Abbildung 1: Frequenzspektrum $H(\omega)$ bei $\vec{r} = \vec{o}$, in willkürlichen Einheiten

Für Orte $\vec{r} \neq \vec{o}$ kommt es lediglich zu einer örtlichen Oszillation, die wir im folgenden nicht weiter betrachten. Auffällig ist, dass das Spektrum $H(\omega)$ für große ω im wesentlichen vom ersten Summanden bestimmt wird, weil die Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ ein sehr ausgeprägtes Maximum hat und dann rasch abfällt. Da H ohnehin nur für positive Ω benötigt wird,

kann man in sehr guter Näherung schreiben:

$$H(\omega) \approx E_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot \frac{\sin\left[(\omega - \Omega)\frac{T}{2}\right]}{\omega - \Omega} \quad (11)$$

Die exakte Berechnung der spektralen Energiedichte ist mathematisch nicht ganz trivial, weil man streng genommen über ein genügend großes Ensemble zu mitteln hat. Abgesehen von numerischen Faktoren ergibt sich aber im wesentlichen folgender funktionaler Zusammenhang:

$$S(\omega) \sim \frac{\sin^2\left[(\omega - \Omega)\frac{T}{2}\right]}{(\omega - \Omega)^2} \quad (12)$$

Man kann sich anhand von ?? leicht klar machen, dass S einen scharfen Peak bei $\omega = \Omega$ hat. Die nächsten beiden Nullstellen sind dann offenbar die Nullstellen der Sinusfunktion im Zähler, die bei $\omega = \Omega \pm \frac{2\pi}{T}$ liegen. Der Peak hat demnach eine charakteristische **Frequenzbreite** von

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

Im Gegensatz zur ebenen Welle hat ein endlicher Wellenzug also stets ein Frequenzspektrum, dass keine Delta-Distribution ist und deswegen auch eine von null verschiedene Frequenzbreite. Dies ist eine grundsätzliche Eigenschaft der Fouriertransformation und wesentlich für die gesamte Wellenoptik. Die Strecke, die der Wellenzug während der Zeit T zurücklegt, nennt man die **Kohärenzlänge**

$$l_C := c \cdot T = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (14)$$

Je kleiner die Frequenzbreite d.h. je schärfer der Peak, desto größer die Kohärenzlänge und umgekehrt. Die ebene Welle hat definitionsgemäß eine unendliche Kohärenzlänge, weil l_C für $\Delta\omega$ divergiert.

2.3.2 Präzise Definition der Kohärenzlänge, Kontrastfunktion

Bis jetzt wurde nur ein qualitatives Verständnis für die Bedeutung der Kohärenz gegeben. Für die Rechnung am Laser benötigt man aber eine leistungsfähigere Definition der Kohärenzlänge. Dazu überlegt man sich folgendes: In Interferenzexperimenten, für die die Kohärenz ja das wesentliche Kriterium ist, führt man stets zwei Lichtstrahlen mit unterschiedlichen Laufwegen und dementsprechend verschiedenen Laufzeiten zusammen. Betrachten wir also ein resultierendes komplexes Feld

$$\hat{E}_{\text{res}}(t) = \hat{E}(t) + \hat{E}(t + \tau)$$

das sich aus zwei um die Zeit τ verschobenen Signalen ergibt. Die Ortsabhängigkeit kann hier unterdrückt werden, weil die Wellen ja am selben Ort überlagert werden. Die Intensität der resultierenden Welle berechnet sich dann zu:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{res}}(\tau) &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left\langle \hat{E}_{\text{res}}(t) \hat{E}_{\text{res}}^*(t) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left\langle \left[\hat{E}(t) + \hat{E}(t + \tau) \right] + \left[\hat{E}^*(t) + \hat{E}^*(t + \tau) \right] \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left\{ \left\langle \hat{E}(t) \hat{E}^*(t) \right\rangle + \left\langle \hat{E}(t) \hat{E}^*(t + \tau) \right\rangle + \left\langle \hat{E}(t + \tau) \hat{E}^*(t) \right\rangle + \left\langle \hat{E}(t + \tau) \hat{E}^*(t + \tau) \right\rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left\{ \left\langle \hat{E}(t) \hat{E}^*(t) \right\rangle + \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \right\rangle^* + \left\langle \hat{E}(t + \tau) \hat{E}^*(t) \right\rangle + \left\langle \hat{E}(t + \tau) \hat{E}^*(t + \tau) \right\rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left\{ \frac{2}{c \varepsilon_0} I_1 + 2 \cdot \Re \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \right\rangle + \frac{2}{c \varepsilon_0} I_1 \right\} \\
 &= 2I_1 + \varepsilon_0 c \Re \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \right\rangle
 \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\langle \hat{E}(t) \hat{E}^*(t) \rangle = \langle \hat{E}(t + \tau) \hat{E}^*(t + \tau) \rangle = I_1$ die zeitgemittelte Intensität ist. Die hier noch auftretende Mittelwert wird als sogenannte **Selbstkohärenzfunktion** definiert:

$$\Gamma(\tau) := \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) dt \quad (15)$$

Insbesondere erhält man für $\tau = 0$ die Intensität zurück:

$$\Gamma(0) = \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t) \right\rangle = \frac{2}{\varepsilon_0 c} I_1$$

Es ist sehr nützlich, nach Division durch I_1 die **normierte Selbstkohärenzfunktion** einzuführen:

$$\gamma(\tau) := \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \frac{\varepsilon c}{2I_1} \Gamma(\tau) \quad (16)$$

Durch Umstellen findet man leicht:

$$2I_1 \gamma(\tau) = \varepsilon c \Gamma(\tau) = \varepsilon_0 c \left\langle \hat{E}^*(t) \hat{E}(t + \tau) \right\rangle$$

Einsetzen in die Gleichung für $I_{\text{res}}(\tau)$ ergibt eine sehr kompakte Darstellung:

$$\underline{\underline{I_{\text{res}}(\tau) = 2I_1 [1 + \Re \gamma(\tau)]}} \quad (17)$$

Mithilfe der Intensität kann nun der **Interferenzkontrast** zwischen benachbarten Maxima und Minima definiert werden:

$$K(\tau) := \frac{I_{\text{res}}(\tau_{\text{max}}) - I_{\text{res}}(\tau_{\text{min}})}{I_{\text{res}}(\tau_{\text{max}}) + I_{\text{res}}(\tau_{\text{min}})} \quad (18)$$

Man kann einen nützlichen Zusammenhang zwischen K und γ herleiten: Bei typischen Interferenzversuchen wird mit praktisch monochromatischem Licht von geringer Frequenzunschärfe gearbeitet. In diesem Fall kann man die Intensität annähern durch:

$$\begin{aligned} I_{\text{res}}(\tau_{\min}) &\approx 2I_1 [1 - |\gamma(\tau)|] \\ I_{\text{res}}(\tau_{\max}) &\approx 2I_1 [1 + |\gamma(\tau)|] \end{aligned}$$

Einsetzen in den Kontrast und vereinfachen ergibt für den Spezialfall von praktisch monochromatischem Licht:

$$K(\tau) = |\gamma(\tau)| \quad (19)$$

Damit ist die Kohärenzzeit τ_C präzise definierbar als die Zeitspanne, nach der der Kontrast auf einen bestimmten Wert abgefallen ist. Welchen Wert man hierfür nimmt, ist eine reine Frage der Zweckmäßigkeit. Zwei weit verbreitete Systeme definieren die Kohärenzzeit durch

$$\underline{\underline{K(\tau_C) := \frac{1}{e}}} \quad \text{oder} \quad K(\tau_C) := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

wobei wir in dieser Arbeit der unterstrichenen Konvention folgen. Die Kohärenzlänge kann dann wie üblich definiert werden als Länge, die das Licht während der Zeit τ_C zurücklegt:

$$l_C := c \cdot \tau_C \quad (21)$$

2.3.3 Anwendung auf den Laser

Für praktische Anwendungen ist es nützlich, die normierte Selbstkohärenzfunktion $\gamma(\tau)$ durch die Spektrale Leistungsdichte $S(\omega)$ auszudrücken, weil diese eine charakteristische Eigenschaft der Lichtquelle ist. Man erhält für nahezu monochromatisches Licht den folgenden Ausdruck:

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_0^\infty S(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int_0^\infty S(\omega) d\omega} \quad (22)$$

Wenn man weiß, wie die Frequenzen im verwendeten Licht verteilt sind, kann damit sofort der Kontrast und auch die Kohärenzlänge berechnet werden, solange es sich um genügend kleine Frequenzunscharfen handelt. In unserem Versuch wird ein Helium-Neon-Gaslaser verwendet. Dieser verwendet Neon als Lasermedium und das Helium als Pumpmedium. Vom Prinzip her funktioniert dieser Lasertyp wie folgt:

- Durch eine elektrische Entladung zwischen zwei Elektroden bei einer Spannung von $U \sim 2\text{kV}$ werden die Heliumatome vom Grundzustand in einen angeregten Zustand versetzt. Durch einen sogenannten Stoß zweiter Art gehen die Heliumatome in den Grundzustand zurück und überführen die Neonatome in den angeregten Zustand.

- Die angeregten Zustände des Heliums sind für ein Atom vergleichsweise langlebig ($t \sim 1\text{ms}$), sodass bei kontinuierlicher Energiezufuhr stets ausreichend viele angeregte Heliumatome vorhanden sind, um die Neonatome durch Stöße anzuregen. Somit kommt es im Neon zu einer Besetzungsinversion.
- Durch Beschuss mit einem Photon passender Energie wird das Neon zur stimulierten Emission gebracht. Es geht in einen energetisch tieferen Zustand über und erzeugt eine exakte Kopie des eingestrahnten Photons. Die Photonen laufen dabei zwischen zwei halbdurchlässigen Spiegeln, die einen optischen Resonator bilden. Durch das mehrmalige durchlaufen erhöht sich einerseits die Chance auf stimulierte Emission. Andererseits werden auch alle Photonen, die keine stehenden Wellen im Resonator bilden können, ausgelöscht.
- Das Neon geht durch spontane Emission in seinen Grundzustand zurück. Durch erneute Stoßanregung beginnt der Prozess von vorn. Sobald die durch Pumpen zugeführte Energie sämtliche Verluste (Streuung, Auskopplung am Ende des Lasers, ...) ausgleicht, ist die sogenannte **Laserschwelle** erreicht und es kommt zu einer lawinenartigen Verstärkung des Lichts.

In einem optischen Resonator der Länge L können sich nur stehende Wellen mit einer Wellenlänge beziehungsweise einer Kreisfrequenz von

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = n \frac{\pi \cdot c}{L}$$

ausbilden. Alle anderen Frequenzen werden durch destruktive Interferenz ausgelöscht. Es ergeben sich mehrere Frequenzen in äquidistanten Abständen, die man als **longitudinale Moden** des Lasers bezeichnet:

$$\Delta\omega = \frac{\pi \cdot c}{L} \quad (23)$$

Aus der Theorie der optischen Resonatoren (z.B. Fabry-Perot-Interferometer) weiß man, dass diese Linien abhängig vom Reflexionsvermögen der Spiegel mehr oder weniger schmale Lorentzkurven sind. Da der Reflexionsgrad beim Laser aber sehr hoch ist, sind diese Peaks so schmal im Vergleich zur Dopplerbite, dass man sie durch Delta-Distributionen annähern kann.

Das Laserspektrum setzt sich nun wie folgt zusammen: Der Laserübergang des Neonatoms im sichtbaren Bereich liegt bei $\lambda = 632.8\text{nm}$. Diese Wellenlänge ist aufgrund mehrerer Störfaktoren nicht scharf definiert. Der dominante Effekt ist die Dopplerverbreiterung aufgrund der thermischen Bewegung der Gasatome. Dieser führt zu einer gaußförmigen spektralen Leistungsdichte mit

$$S(\omega) = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\omega - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) \quad (24)$$

Dabei ist $\Omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 2.97 \cdot 10^{15}$ Hz die zentrale Kreisfrequenz und σ die Standardabweichung der Gaußkurve, die sich für die Dopplerverbreiterung gemäß

$$\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} \cdot \Omega = 3.48 \text{ GHz} \quad \text{bei } T = 300 \text{ K}$$

berechnet. Sie wird hier als Standardabweichung angegeben, es ist aber oft auch üblich sie als Halbwertsbreite **FWHM** zu nutzen. Die Umrechnung auf eine Halbwertsbreite ergäbe für die Gaußkurve

$$\mathbf{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln(2)} \sigma = 8.20 \text{ GHz}$$

Von diesem relativ schmalen aber kontinuierlichen Spektrum werden durch die Wirkung des Resonators der Länge $L = 46.87$ cm nur die diskreten Lasermode in äquidistantem Abstand von $a = \frac{\pi \cdot c}{L} = 2.01$ GHz (hier auch als Kreisfrequenz angegeben!) durchgelassen. Allerdings sind nicht alle Moden auch beobachtbar. Neben dem Intensitätsgewinn durch stimulierte Emission kommt es im Resonator auch zu Verlusten durch Absorption, Streuung und die Auskopplung des Lichts am Ende des Lasers. Eine Lasermode kann daher nur beobachtet werden, wenn der Gewinn die Verluste mindestens ausgleicht. Diesen Effekt bezeichnet man als **Laserschwelle**. Er sorgt dafür, dass aus allen Moden unter der Gaußkurve nur einige aus dem inneren Bereich zum tatsächlichen Spektrum beitragen. Wenn wir die Kreisfrequenz der ersten beobachtbaren Mode mit Ω_{\min} bezeichnen und der Laser insgesamt N -viele Moden hat, nimmt das Intensitätsspektrum die folgende Form an:

$$S_{\text{res}}(\omega) = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\omega - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \delta[\omega - (\Omega_{\min} + n \cdot a)] \quad (25)$$

Durch die Wirkung der Delta-Distribution lassen sich die benötigten Integrale für die Kohärenzfunktion leicht auswerten:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty S_{\text{res}}(\omega) d\omega &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Omega_{\min} + n \cdot a - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) \\ \int_0^\infty S_{\text{res}}(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Omega_{\min} + n \cdot a - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) \exp[-i(\Omega_{\min} + n \cdot a)\tau] \\ &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-i\Omega_{\min}\tau} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Omega_{\min} + n \cdot a - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) e^{-i \cdot n \cdot a \tau} \end{aligned}$$

Dabei lassen sich die Faktoren

$$\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Omega_{\min} + n \cdot a - \Omega)^2}{\sigma^2}\right) =: \alpha_n$$

als Gewichtsfunktionen für jede einzelne Mode verstehen. Strukturell hat die normierte Selbstkohärenzfunktion des N -Modenlasers damit die Form:

$$\gamma(\tau) = e^{-i\Omega_{\min}\tau} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n e^{-i \cdot n a \tau}}{\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n} \quad (26)$$

Eine erste Näherung kann man dadurch erhalten, dass man jede Mode gleichstark gewichtet, d.h. indem man einfach alle $\alpha_n = 1$ setzt. In diesem Fall lassen sich die Summen dann elementar ausführen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \\ \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n e^{-2\pi i \cdot n a \tau} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i \cdot n a \tau} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-i \cdot a \tau})^n \quad | \text{ geometrische Summe} \\ &= \frac{1 - e^{-i \cdot N a \tau}}{1 - e^{-i \cdot a \tau}} \\ &= \frac{e^{-i \cdot N a \tau} - 1}{e^{-i \cdot a \tau} - 1} \\ \Rightarrow \gamma(\tau) &= \frac{1}{N} e^{-i\Omega_{\min}\tau} \cdot \frac{e^{-i \cdot N a \tau} - 1}{e^{-i \cdot a \tau} - 1} \end{aligned} \quad (27)$$

Durch Bildung des komplexen Betrages gelangt man zum Interferenzkontrast:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= |\gamma(\tau)| \\ &= \frac{1}{N} \cdot |e^{-i\Omega_{\min}\tau}| \cdot \left| \frac{e^{-i \cdot N a \tau} - 1}{e^{-i \cdot a \tau} - 1} \right| \\ &= \frac{1}{N} \frac{|\cos(N a \tau) - 1 - i \sin(N a \tau)|}{|\cos(a \tau) - 1 - i \sin(a \tau)|} \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{\frac{[\cos(N a \tau) - 1]^2 + \sin^2(N a \tau)}{[\cos(a \tau) - 1]^2 + \sin^2(a \tau)}} \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\cos^2(N a \tau) - 2 \cos(N a \tau) + 1 + \sin^2(N a \tau)}{\cos^2(a \tau) - 2 \cos(a \tau) + 1 + \sin^2(a \tau)}} \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{\frac{1 - \cos(N a \tau)}{1 - \cos(a \tau)}} \quad \left| \text{ nutze } \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K(\tau) = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}Na\tau\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}a\tau\right)} \right|}} \quad (28)$$

Der Kontrast hat Nullstellen bei $\frac{1}{2}Na\tau = l\pi$ mit ganzen Zahlen l . Die erste nichttriviale Nullstelle liegt demnach bei

$$\tau_C = \frac{2\pi}{Na}$$

was man mit der Kohärenzzeit interpretieren kann. Die Kohärenzlänge eines Lasers mit N -vielen annähernd gleichintensiven Moden liegt also bei

$$l_C = c \cdot \tau_C = \frac{2\pi c}{Na} \quad (29)$$

Mit dem bereits berechneten Modenabstand ergeben sich dabei folgende Kohärenzlängen in Abhängigkeit von der Anzahl angeregter Lasermoden:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_C/cm	93.8	46.9	31.3	23.4	18.8	15.6	13.4	11.7	10.4	9.4

Die Kohärenzlänge liegt damit im Bereich von knapp einem Meter bis einigen Dezimetern, d.h. in der Größenordnung der Länge des Resonators. Das ist aber auch nicht weiter verwunderlich, denn für den Abstand der Moden gilt ja

$$a = \frac{\pi \cdot c}{L}$$

Damit kann man die Kohärenzlänge umschreiben zu

$$l_C = \frac{2\pi c}{Na} = \frac{2\pi c}{N} \cdot \frac{L}{\pi \cdot c} = \frac{2L}{N} \quad (30)$$

Auf völlig analoge Weise lassen sich nun auch Kohärenzfunktion und Kontrast für einen Laser mit Moden von ungleicher Intensität berechnen; es müssen lediglich die Gewichte angepasst werden. Wir geben zur späteren Diskussion nur das Ergebnis für folgende Fälle an:

- Laser mit 3 Moden im Intensitätsverhältnis 1 : 1.4 : 1 (beste 3-Modennäherung). Durch die Setzung $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1.4, \alpha_2 = 1$ erhält man als Ergebnis

$$\gamma(\tau) = \frac{5}{17} e^{-i\Omega_{\min}\tau} [1 + 1.4e^{-ia\tau} + e^{-2ia\tau}]$$

$$K(\tau) = \frac{5}{17} \cdot \sqrt{3.96 + 5.6 \cos(a\tau) + 2 \cos(2a\tau)} = \frac{5}{17} \sqrt{4 \cos^2(a\tau) + 5.6 \cos(a\tau) + 1.96}$$

Die Nullstellen des Kontrastes ergeben sich durch Lösen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{5}{17} \sqrt{4 \cos^2(a\tau) + 5.6 \cos(a\tau) + 1.96} \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \cos^2(a\tau) + 1.4 \cos(a\tau) + 0.49 &= 0 \\ \implies \cos(a\tau) &= -0.7 \pm \sqrt{(-0.7)^2 - 0.49} \\ \implies \cos(a\tau_{1,2}) &= -0.7 \quad \text{doppelte Nullstelle} \end{aligned}$$

Die Auflösung nach dem Argument der Cosinusfunktion ergibt dann zunächst:

$$a \cdot \tau_C = \arccos(-0.7) \approx 2.3461$$

Mit der Resonatorlänge von $L = 46.87$ cm hatten wir bereits vorher einen longitudinalen Modenabstand von $a = \frac{\pi \cdot c}{L} = 2.01$ GHz ermittelt. Damit ergibt dann als Schlussresultat:

$$\underline{\underline{\tau_C = 1.167 \cdot 10^{-9} \text{ s}}} \quad \underline{\underline{l_C = c \cdot \tau_C = 35.0 \text{ cm}}}$$

- Laser mit 4 Moden im Intensitätsverhältnis $0.28 : 0.56 : 0.56 : 0.28$ (beste 4-Modennäherung). Durch die Setzung $\alpha_0 = 0.28, \alpha_1 = 0.56, \alpha_2 = 0.56, \alpha_3 = 0.28$ erhält man als Ergebnis

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{25}{42} e^{-i\Omega_{\min}\tau} [0.28 + 0.56e^{-ia\tau} + 0.56e^{-2ia\tau} + 0.28e^{-3ia\tau}] \\ K(\tau) &= \frac{25}{42} \sqrt{\frac{49}{625} \cos(3a\tau) + \frac{196}{625} \cos(2a\tau) + \frac{784}{625} \cos(a\tau) + \frac{98}{625}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\cos(3a\tau) + 4 \cos(2a\tau) + 16 \cos(a\tau) + 2} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Kohärenzlänge ist diesmal die Gleichung

$$K(\tau) = \frac{1}{6} \sqrt{\cos(3a\tau) + 4 \cos(2a\tau) + 16 \cos(a\tau) + 2} \stackrel{!}{=} 0$$

zu lösen, was wieder äquivalent dazu ist, dass die Wurzel null wird. Mithilfe der Identitäten

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) = \cos^3(x) - 3 [1 - \cos^2(x)] \cos(x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - [1 - \cos^2(x)] = 2 \cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

überführt man den Ausdruck unter der Wurzel in eine kubische Gleichung, die nur noch Cosinusterme enthält:

$$4 \cos^3(a\tau) + 8 \cos^2(a\tau) + 13 \cos(a\tau) - 2 = 0$$

Diese Gleichung kann jetzt wahlweise analytisch mit der Cardanischen Formel oder numerisch, etwa mit dem Newton'schen Verfahren, gelöst werden. Es ergeben sich eine reelle und zwei echt-komplexe Lösungen, von denen aber nur die reelle benötigt wird, da a und τ nach Definition reell sind:

$$\cos(a\tau_C) \approx 0.1408$$

Die Auflösung ergibt zunächst

$$a\tau_C = 1.4295$$

und mit $a = 2.01$ GHz völlig analog zum 3-Modenlaser folgendes Ergebnis:

$$\underline{\tau_C = 7.11 \cdot 10^{-10} \text{ s}} \quad \underline{l_C = c \cdot \tau_C = 21.3 \text{ cm}}$$

Die Anregung von vier statt nur drei Lasermode führt also dazu, dass die Kohärenzlänge um immerhin etwa 39.1% abnimmt. Ein guter Helium-Neon-Laser sollte demnach so gebaut sein, dass nur sehr wenige Mode beitragen. Das ließe sich über ein genügend schmales Gaußspektrum erreichen, jedoch lässt sich die Dopplerverbreiterung nicht beliebig weit unterdrücken. Der Ausweg besteht dann darin, die Laserschwelle möglichst nahe an 1 heranzubringen, damit nur ein sehr schmales Frequenzintervall aus der Mitte der Glocke beiträgt. Der Verlauf des Interferenzkontrastes ist in folgender Abbildung dargestellt:

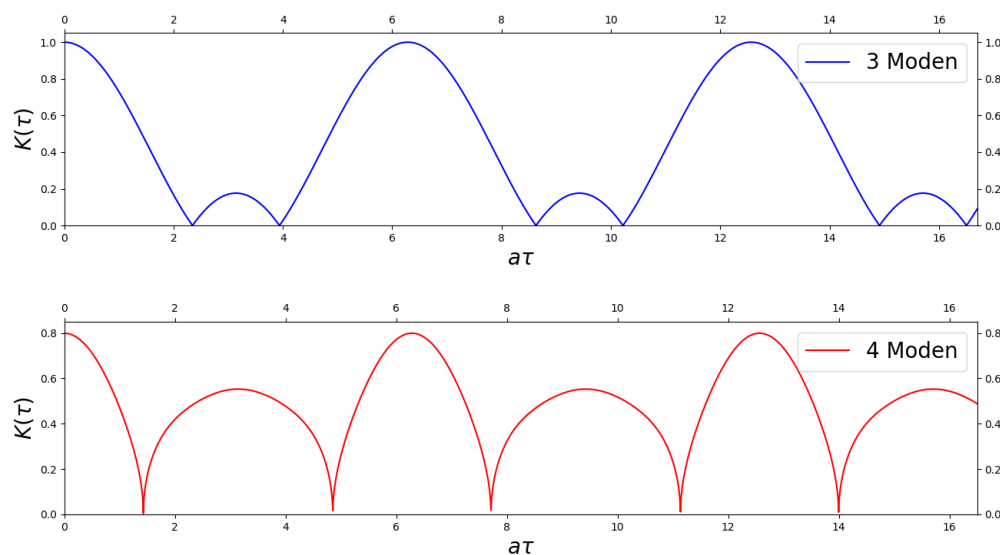


Abbildung 2: Der Interferenzkontrast $K(\tau)$ für einen Helium-Neon-Laser mit drei beziehungsweise vier angeregten Lasermode in jeweils bester Modennäherung.

Zum Vergleich geben wir entsprechende Werte für Gasentladungslampen an:

- Eine Hochdruck-Gasentladungslampe mit Quecksilber als Leuchtstoff arbeitet bei Temperaturen im Bereich $T = 3200 \dots 4200$ K. Von den besonders intensiven Spektrallinien liegen fünf im UV-Bereich, zwei an der blaviolettten Grenze des sichtbaren Lichts und eine Doppellinie im orangen Bereich. Nur die letzte wäre für holographische Anwendungen sinnvoll, da sie deutlich sichtbar ist. Die Wellenlänge von $\lambda = 597$ nm ist im Rahmen einer Modellrechnung mit der vom Helium-Neon-Laser vergleichbar. Für diese Linie erhält man folgende Kreisfrequenz und Standardabweichung durch Dopplerverbreiterung:

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.26 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} \Omega = 4.25 \text{ GHz} \quad \text{bei } T = 3700 \text{ K}$$

Unter der Annahme einer gaußförmigen Verteilung erhält man dann folgende Kohärenzlänge:

$$\tau_C = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{l_C = 10.0 \text{ cm}}}$$

- Natriumdampflampen in Niederdruckausführung arbeiten bei einer deutlich geringeren Temperatur von etwa $T = 600$ K. Markant ist hier besonders die *D*-Linie bei $\lambda = 589$ nm, die sich aufgrund der ähnlichen Größenordnung ebenfalls gut für eine Modellrechnung eignet. Hier erhält man für die Kreisfrequenz:

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.20 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} \Omega = 4.97 \text{ GHz} \quad \text{bei } T = 600 \text{ K}$$

und für die Kohärenzlänge:

$$\tau_C = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = 2.85 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{l_C = 8.5 \text{ cm}}}$$

Beide Beispiele zeigen, dass die Kohärenzlänge von Gasentladungslampen kleiner ist als beim Laser, aber zumindest noch in einer ähnlichen Größenordnung. Der wesentliche Unterschied, der den Laser hier auszeichnet, ist vor allem die definierte Wellenlänge: Aufgrund der Dopplerverbreiterung erhält man bei den Gasentladungslampen eine Unschärfe in der Wellenlänge von ungefähr $\Delta\lambda_{\text{Hg}} = 0.44$ nm für Quecksilber beziehungsweise $\Delta\lambda_{\text{Na}} = 0.37$ nm für Natrium. Dieser Fehler von knapp 7% sorgt dafür, dass die Spektrallinien nicht mehr scharf genug definiert sind um ein Hologramm anzufertigen. Beim Laser ist das Gaußpaket zwar ähnlich breit, aber aufgrund der filternden Wirkung des Resonators enthält das Paket kein Kontinuum an Wellenlängen sondern nur wohldefinierte Linien.

Literatur

- [1] Wikipedia, *Intensität (Physik)*, [https://de.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A4t_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A4t_(Physik)), 25. Okt. 2019.