Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin \frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos \frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Алесь Бинкевич

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$;
   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}, \ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Сергей Бакуменко

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1)\cdot\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.
2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.
3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)
4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0, \delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.
5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.
6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.
7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.
8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Кирилл Балбек

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8}$, $x_0 = 2$.
2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)
3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \neq \pi/2 \\ 0,\ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Валерия Ведерникова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Маргарита Голиус

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;
   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.

   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0]$: $\forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Елизавета Гришкова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}$, $x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.

   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, \, x \neq \pi/2 \\ 0, \, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Александр Ермоленко

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}, \ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.

3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin \frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos \frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0, \delta_0]$: $\forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Анастасия Захарова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}$, $x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, то $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.*)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Михаил Клюкин

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1)\cdot\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.

   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0]:\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0):$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Татьяна Коновалова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1)\cdot\sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.

   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.

   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0, \delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \neq \pi/2 \\ 0, \ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Михаил Кренгауз

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8}, \ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.

   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}\ (x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.
   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.
2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.
3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)
4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.
   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.
   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0,\delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.
5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, x \neq \pi/2 \\ 0, x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.
6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.
7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.
8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Глеб Кузь

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5, \ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}, \ x_0 = 2$.
2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)
3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.

   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \neq \pi/2 \\ 0,\ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Анастасия Лазарева

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-8},\ x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.

   (*Указание: использовать, что если $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, то $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.*)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R},\ x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}\ (x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.

2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.

3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.

5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \neq \pi/2 \\ 0, \ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} g(x) = 1$.

6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.

8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Екатерина Маркелова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}$, $x_0 = 2$.

2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)

3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что $\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.
   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.
2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.
3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)
4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.
   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.
   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] : \ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.
5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \neq \pi/2 \\ 0, \ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.
6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.
7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.
8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists \ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Александр Синькин

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8}$, $x_0 = 2$.
2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)
3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.
   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.
2. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.
3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $X_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.
   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)
4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.
   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.
   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0, \delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.
5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \neq \pi/2 \\ 0,\ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.
6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.
7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.
8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Галина Ступникова

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3+1) \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;
   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8},\ x_0 = 2$.
2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.
   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)
3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.

Тест

1. Напишите определение числовой функции.
2. Что называется композицией функций $f : X \to f(X)$ и $g : f(X) \to \mathbb{R}$?
3. Является ли $f(x) = \sin x$ монотонной на $X = [0, \pi]$?
4. Как определяется проколотая δ-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$?
5. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Коши.
6. Сформулируйте определение того, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0, A \in \mathbb{R}$ по Гейне.
7. Может ли функция иметь в $x_0 \in \mathbb{R}$ предел по Коши, но не иметь предела по Гейне?
8. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0 + 0)$. Напишите определение предела $f(x)$ в точке x_0 справа.
9. Пусть $f(x) = 100x^2$, $g(x) = x^2$. Верно ли, что
$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?
10. Сформулируйте критерий Коши для функций.

Базовые задачи

1. 1) Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}, n = 2k \\ \cos\frac{\pi n}{2}, n = 2k+1 \end{cases}$.

   2) Используя критерий Коши исследовать на сходимость $x_n = n \cdot \cos^2 \pi n$.
2. Пусть $f(x) = \cos x,\ g(y) = y^2 + 3y^3$. Составить композиции: 1) $z(x) = g(f(x))$; 2) $z(y) = f(g(y))$.
3. Пусть $f(x) = \frac{\cos x}{x},\ X_1 = (0, \frac{\pi}{2}),\ X_2 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$. Исследовать $f(x)$ на ограниченность и монотонность на X_1 и X_2.

   (*Указание: Строго обосновывать не нужно, достаточно дать правильный ответ и пояснить его.*)
4. Пусть $f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

   1) Укажите $\delta_0 > 0$ такую, чтобы $f(x)$ была определена в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

   2) Пусть $\varepsilon = 0{,}5$. Укажите $\delta \in (0{,}\delta_0] :\ \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow |2 - f(x)| < \varepsilon$.
5. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \neq \pi/2 \\ 0,\ x = \pi/2 \end{cases}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2} g(x) = 1$.
6. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, используя определение предела по Коши.
7. Пусть $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$. Доказать, что f и g не имеют предела в нуле, используя определение предела по Гейне.
8. Пусть $f(x) \to A \in \mathbb{R}$ и $g(x) \to B \in \mathbb{R}$ при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также $\exists\ \overset{o}{U}_{\delta}(x_0) :$ $f(x) \leq g(x)$ в $\overset{o}{U}_{\delta}(x_0)$. Доказать, что $A \leq B$.

Студент: Андрей Тышевич

Дополнительные задачи

1. Найти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: 1) $f(x) = x^2 + 4x + 5,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

   3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 8},\ x_0 = 2$.
2. Доказать, что $x^p \to 0$ при $x \to 0$, где $p > 1$.

   (*Указание: использовать, что если* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$, *то* $|f(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |A|$.)
3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
4. Используя критерий Коши для функции, докажите , что $g(x) = sign(x) \cdot \sin\dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в нуле.