Программа экзамена по теории (матанализ).

Первый модуль.

1. Определения точной верхней и точной нижней граней числового множества. Теорема о существовании и единственности супремума. Определение счетности числового множества. Теорема о счетности множества рациональных чисел.

2. Определение числовой последовательности. Свойства последовательностей - монотонность и ограниченность. Определения предела последовательности и сходящейся последовательности. Теоремы о единственности предела и ограниченности сходящейся последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Определение числа e, обоснование существования предела из определения числа e *(без доказательства монотонности).*

3. Свойства предела последовательности, связанные с неравенствами - переход к пределу в неравенстве и теорема о двух милиционерах. Определение бесконечно малой последовательности, арифметические свойства бесконечно малых последовательностей. Арифметические свойства предела последовательности.

4. Определения последовательности вложенных отрезков и стягивающейся последовательности вложенных отрезков. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема о несчетности множества действительных чисел.

5. Определения подпоследовательности, частичного предела, верхнего и нижнего пределов последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

6. Определение фундаментальности последовательности, ограниченность фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

7. Определение числовой функции. Определения монотонной, ограниченной, периодической функций. Определение предела функции по Коши. Определения последовательности Гейне и предела функции по Гейне. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне *(без доказательства).* Определение односторонних пределов. Свойства предела функции, связанные с неравенствами. Арифметические свойства предела. Теорема о существовании односторонних пределов у монотонных функций. Критерий Коши для функций *(без доказательства).*

8. Определения непрерывности функции в точке, непрерывности справа и слева. Классификация точек разрыва. Определение сложной функции (композиции). Теорема о непрерывности композиции. Формулировка теоремы о пределе композиции.

9. Определение непрерывности функции на интервале, полуинтервале и отрезке. Теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Следствие из теорем Вейерштрасса и Больцано-Коши о переводе непрерывной функцией отрезка в отрезок *(без доказательства).*

10. Определение обратной функции. Теорема об обратной функции.

11. Тригонометрическое неравенство. Доказательство первого замечательного предела. Доказательство непрерывности синуса, косинуса и тангенса. Определение и обоснование непрерывности функций, обратных к тригонометрическим. Определение степенных функций с целым, рациональным и действительным показателями. Доказательство второго замечательного предела.

12. Определение эквивалентности функций в точке. Определение о-малого.

Второй модуль.

1. Определения производной функции в точке, односторонних производных. Геометрический смысл производной. Непрерывность функции, имеющей производную. Арифметические свойства производных. Теорема о производной обратной функции.

2. Определение дифференцируемости функции в точке. Эквивалентность дифференцируемости и существования производной в точке. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Определение дифференцируемости функции на интервале, полуинтервале и отрезке. Определение дифференциала функции в точке, формула связи дифференциала и производной. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

3. Определение второй производной функции в точке. Определение производной порядка n. Свойство линейности производной порядка n. Теорема о формуле Лейбница. Определение второго дифференциала функции в точке, неинвариантность формы второго дифференциала относительно замены переменной. Определение дифференциала порядка n. Формула связи дифференциала и производной порядка n.

4. Теоремы о среднем Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.

5. Определение и основное свойство многочлена Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Теоремы о единственности разложения функции по формуле Тейлора и о дифференцировании формулы Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

6. Теоремы о правиле Лопиталя для неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ *(случай* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *- без доказательства)*.

7. Критерий монотонности функции, достаточное условие строгой монотонности. Определение локального экстремума функции. Первое, второе и третье достаточные условия экстремума. Определения выпуклой вверх и выпуклой вниз функции. Критерий выпуклости *(без доказательства необходимости)*. Определение точки перегиба функции. Определение вертикальной и невертикальной асимптот графика функции.

8. Определение вектор-функции. Определение предела вектор-функции, теорема о связи предела вектор-функции с пределами компонент. Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функций.

9. Определение непрерывной кривой. Классификация кривых. Определение допустимой замены параметра на гладкой кривой. Определение допустимой замены параметра на гладкой *ориентированной* кривой.

10. Определение касательной к кривой. Уравнение касательной, записанное через производную вектор-функции, задающей кривую. Определение длины *ломаной*, вписанной в кривую. Определения длины кривой и спрямляемости. Теорема о спрямляемости непрерывно дифференцируемой кривой. Определение переменной длины дуги кривой. Формула для производной переменной длины дуги *без доказательства.*

11. Определения нормали и главной нормали к пространственной кривой. Определения кривизны и радиуса кривизны кривой. Вывод формулы для расчета кривизны кривой. Определение вектора бинормали в заданной точке кривой. Уравнения нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей.

12. Определения первообразной функции и неопределенного интеграла. Теорема о множестве первообразных заданной функции. Свойство линейности неопределенного интеграла. Методы замены переменной и интегрирования по частям *(знать и уметь применять)*.