Implémentations efficaces de calculs sur les polynômes à une variable : FFT

Pierre Lin, Enzo Roaldes

L2 DM-IM 2022, Sorbonne Université

13 Juillet 2022

Introduction

Les polynômes sont :

- un objet mathématique fondamental
- omniprésents dans notre quotidien

Plan de la soutenance :

- Algorithme Naïf & de Karatsuba
- Fast Fourier Transform (FFT)
- Vectorisation avec AVX2

Langage utilisé : C

Algorithme Naïf

Les polynômes sont représentés par des tableaux contenant leurs coefficients.

L'algorithme naïf est basé sur la formule :

$$R(X) = PQ(X) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j X^{i+j}$$

Complexité = nombre d'opérations élémentaires.

Complexité de l'algorithme naïf : $O(n^2)$

Algorithme de Karatsuba

Principe de l'algorithme de Karatsuba :

- Décomposition récursive de P et Q :
  $P = P_1 + X^{n/2} P_2$ $Q = Q_1 + X^{n/2} Q_2$
- Reconstruction du résultat R : $R = E_1 + X^{n/2}(E_3 - E_2 - E_1) + X^n E_2$
  avec $E_1 = P_1 Q_1$; $E_2 = P_2 Q_2$ *et* $E_3 = (P_1 + P_2)(Q_1 + Q_2)$

Complexité : $O(n^{1.58})$

Degré de P et Q	Naïf	Karatsuba
2^{15}	0.429183	0.085549
2^{16}	1.761229	0.242966
2^{17}	6.875559	0.645986
2^{18}	28.165627	2.023236

Tableau – Temps de l'algorithme naïf et de l'algorithme de Karatsuba.

Quelques notions fondamentales

1. $n = 2^k$ sera le degré du polynôme final $R = PQ$

Quelques notions fondamentales

1. $n = 2^k$ sera le degré du polynôme final $R = PQ$
2. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Quelques notions fondamentales

1. $n = 2^k$ sera le degré du polynôme final $R = PQ$
2. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
3. Racine primitive $p-1$-ième de l'unité r : $r^{p-1} \ \% \ p = 1$ et que $r^k \ \% \ p \neq 1$ pour tout k dans $\{1, \ldots, p-2\}$

Quelques notions fondamentales

1. $n = 2^k$ sera le degré du polynôme final $R = PQ$
2. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
3. Racine primitive $p-1$-ième de l'unité r : $r^{p-1} \ \% \ p = 1$ et que $r^k \ \% \ p \neq 1$ pour tout k dans $\{1, \ldots, p-2\}$
4. Racine principale n-ième de l'unité : $r\_principale = r^{\frac{p-1}{n}} \ \% \ p$
   $\Rightarrow p-1$ doit être divisible par n

Quelques notions fondamentales

1. $n = 2^k$ sera le degré du polynôme final $R = PQ$
2. Le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
3. Racine primitive $p-1$-ième de l'unité r : $r^{p-1} \ \% \ p = 1$ et que $r^k \ \% \ p \neq 1$ pour tout k dans $\{1, \ldots, p-2\}$
4. Racine principale n-ième de l'unité : $r\_principale = r^{\frac{p-1}{n}} \ \% \ p$
   $\Rightarrow p-1$ doit être divisible par n
5. Choix du nombre premier $p = 754974721 = 1 + 2^{24} * 3^2 * 5$
   $\Rightarrow deg_{max}(R) = 2^{24}$
   racine primitive $p-1$-ième de l'unité : $r = 11$

Algorithme de multiplication par FFT

Théorème *(Interpolation de Lagrange)*

Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec les a_i deux à deux distincts). Alors il existe un unique polynôme P de degré $< n$ tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ P(a_i) = b_i.$$

Algorithme de multiplication par FFT

Entrée. P et Q deux polynômes, n une puissance de 2 avec $n > deg(PQ)$ et ω une racine principale n-ième de l'unité.

Sortie. $R = PQ$

Algorithme.

1. *Pré-calcul.* Calculer les puissances $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1} \rightarrow O(n)$
2. *Évaluation (DFT).* Calculer les valeurs :
   $Eval(P) = (P(\omega^0), \ldots, P(\omega^{n-1}))$; $Eval(Q) = (Q(\omega^0), \ldots, Q(\omega^{n-1}))$.
3. *Produit point à point.* $Eval(R) = (PQ(\omega^0), \ldots, PQ(\omega^{n-1})) \rightarrow O(n)$
4. *Interpolation.* Retrouver R grâce à $Eval(R)$.

Discrete Fourier Transform (DFT)

Principe de la DFT (diviser pour régner) :

Soient $n = 2^k$ et $P(X) = p_n X^n + \cdots + p_1 X + p_0$.

Soient P_0, P_1 les polynômes composés des coefficients de rang respectivement pair et impair de P :
$P_0(X) = p_n X^{n/2} + \cdots + p_2 X + p_0$ *et* $P_1(X) = p_{n-1} X^{(n-2)/2} + \cdots + p_3 X + p_1$.

Nous avons alors que $P(X) = P_0(X^2) + X P_1(X^2)$.

$\rightarrow$ Algorithme récursif où nous divisons n par 2

DFT

Algorithme DFT

Entrée. $P = p_0 + \cdots + p_{n-1}X^{n-1}$, n une puissance de 2 et le tableau $racines = [1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}]$ où ω est une racine n-ième principale de l'unité.

Sortie. $P(1), \ldots, P(\omega^{n-1})$.

Algorithme.

1. Si $n = 1$, renvoyer p_0.
2. Sinon, soit $k = n/2$. Calculer :

$$R_0(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i + p_{i+k})X^i$$

$$R_1(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i - p_{i+k})\omega^i X^i$$

3. Calculer récursivement $R_0(1), R_0(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1})$ et $R_1(1), R_1(\omega^2), \ldots, R_1((\omega^2)^{k-1})$.
4. Renvoyer $R_0(1), R_1(1), R_0(\omega^2), R_1(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1}), R_1((\omega^2)^{k-1})$.

Opérations modulo p

Opération % beaucoup plus lente que les opérations $+$, $-$, $*$.

Addition modulo p :

$$(a+b)\ \%\ p = \begin{cases} a+b-p & si\ a+b \geq p \\ a+b & sinon \end{cases}$$

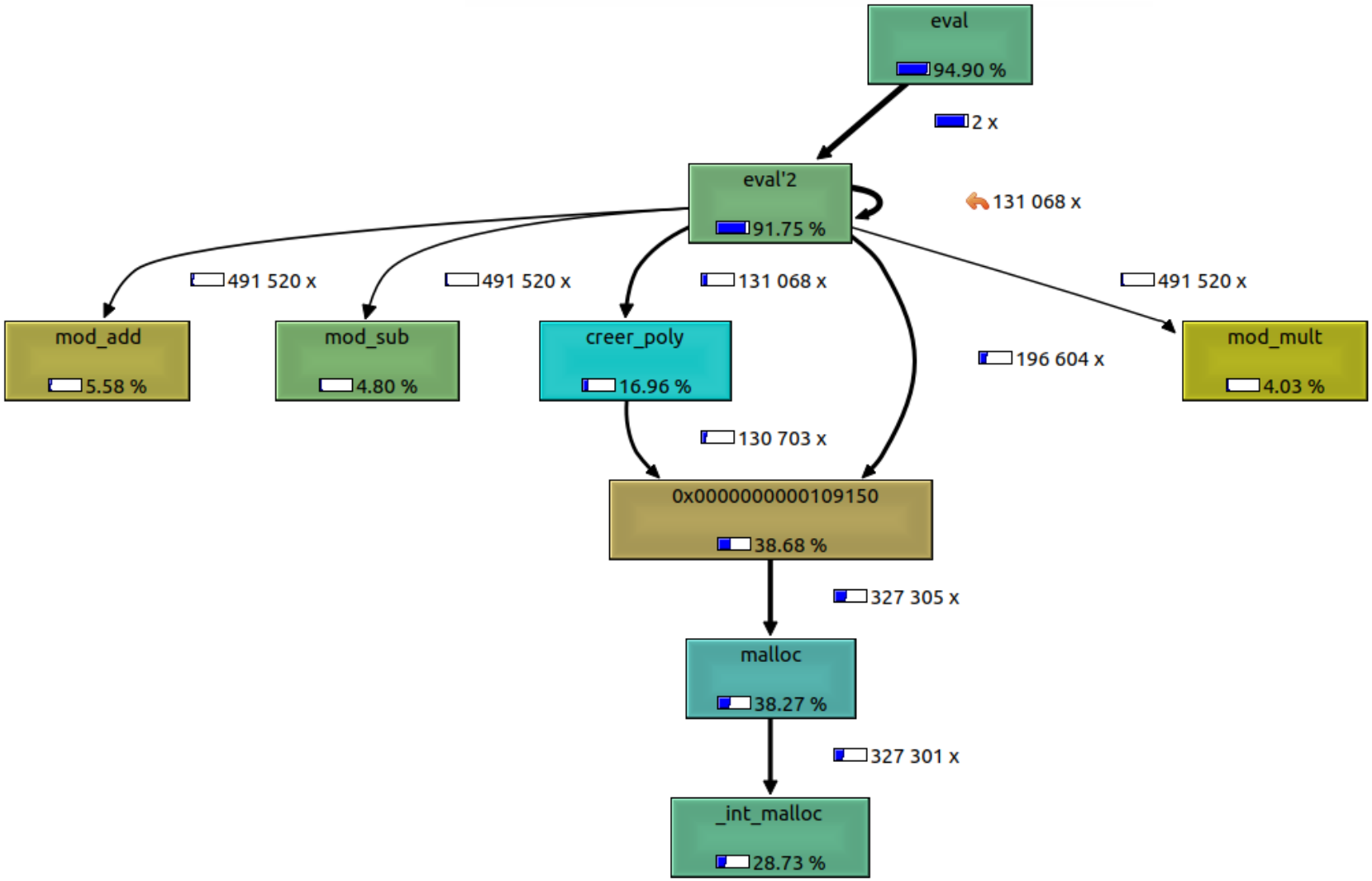
Soustraction modulo p :

$$(a-b)\ \%\ p = \begin{cases} p-(b-a) & si\ b > a \\ a-b & sinon \end{cases}$$

Multiplication modulo p : cast en *long* puis utilisation de l'opérateur %.

Première version DFT

Malloc des tableaux R_0, R_1 et *racines* à chaque récursion.



DFT

Algorithme DFT

Entrée. $P = p_0 + \cdots + p_{n-1}X^{n-1}$, n une puissance de 2 et le tableau $racines = [1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}]$ où ω est une racine n-ième principale de l'unité.

Sortie. $P(1), \ldots, P(\omega^{n-1})$.

Algorithme.

1. Si $n = 1$, renvoyer p_0.
2. Sinon, soit $k = n/2$. Calculer :

$$R_0(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i + p_{i+k})X^i$$

$$R_1(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i - p_{i+k})\omega^i X^i$$

3. Calculer récursivement $R_0(1), R_0(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1})$ et $R_1(1), R_1(\omega^2), \ldots, R_1((\omega^2)^{k-1})$.
4. Renvoyer $R_0(1), R_1(1), R_0(\omega^2), R_1(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1}), R_1((\omega^2)^{k-1})$.

AVX2

Vectorisation avec AVX2 :

- opérations élémentaires ($+$, $-$, $*$, ...) sur des "vecteurs" de données similaires à des tableaux.
- type *__mm256i* : stock 256 bits d'entiers $\rightarrow$ stockage de 8 entiers de 32 bits.
- opérations sur deux *__mm256i* aussi rapide que sur deux entiers *int*.
  $\rightarrow$ possibilité d'un gain de temps fois 8 en utilisant AVX2.

Exemple :

```
__m256i a = _mm256_set_epi32(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8);
__m256i b = _mm256_set_epi32(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0);
__m256i x = _mm256_add_epi32(a, b);
// nous avons x = [2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8]
```

Opérations modulo p avec AVX2

Pas d'opération modulo en AVX2 !

Comment faire le modulo sur des vecteurs ?

Soient $p = 7$, $\overrightarrow{a} = [6, 2]$, $\overrightarrow{b} = [4, 1]$ *et* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [10, 3]$. **Problème !**

Opérations modulo p avec AVX2

Pas d'opération modulo en AVX2 !

Comment faire le modulo sur des vecteurs ?

Soient $p = 7$, $\overrightarrow{a} = [6, 2]$, $\overrightarrow{b} = [4, 1]$ *et* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [10, 3]$. **Problème !**

$\rightarrow$ Fonction AVX2 *_mm256_min_epu32*($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$) : permet de prendre le minimum "positif" entre chaque élément de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

Exemple

$min\_pos([1, 4], [0, -10]) = min([1, 4], [0, UINT\_MAX-10]) = [0, 4]$.

Pour l'addition, avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, on a $\overrightarrow{x}$ % $\overrightarrow{p} = min\_pos(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{p})$.

Preuve

Si $\overrightarrow{x}[i] \geq p$, *alors l'appel retourne* $\overrightarrow{x}[i] - p$.

Sinon, $\overrightarrow{x}[i] < p$, *donc* $\overrightarrow{x}[i] - p < 0$, *et après conversion en Uint :* $\overrightarrow{x}[i] - p > \overrightarrow{x}[i]$ *et donc l'appel retourne* $\overrightarrow{x}[i]$.

De même, pour la soustraction, avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, on a :
$\overrightarrow{x}$ % $\overrightarrow{p} = min\_pos(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{p})$.

Opérations modulo p avec AVX2

```
void vect_mod_add(Uint *res1, Uint *tab1, Uint *tab2) {
    __m256i p = _mm256_set1_epi32(NB_P);
    __m256i a = _mm256_loadu_si256((__m256i *) tab1);
    __m256i b = _mm256_loadu_si256((__m256i *) tab2);
    __m256i x = _mm256_add_epi32(a, b);
    __m256i result = _mm256_min_epu32(x, _mm256_sub_epi32(x,
     p));
    _mm256_storeu_si256((__m256i *) res1, result);
}
```

Multiplication : Algorithme de réduction de Barrett

Opération	Sans AVX2	Avec AVX2
Addition	0.012610	0.006697
Soustraction	0.014247	0.007139
Multiplication	0.015053	0.007497

Tableau – Temps des opérations d'addition, soustraction et multiplication sans et avec AVX2.

DFT

Algorithme DFT

Entrée. $P = p_0 + \cdots + p_{n-1}X^{n-1}$, n une puissance de 2 et le tableau $racines = [1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}]$ où ω est une racine n-ième principale de l'unité.

Sortie. $P(1), \ldots, P(\omega^{n-1})$.

Algorithme.

1. Si $n = 1$, renvoyer p_0.
2. Sinon, soit $k = n/2$. Calculer :

$$R_0(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i + p_{i+k})X^i$$

$$R_1(X) = \sum_{i=0}^{k-1}(p_i - p_{i+k})\omega^i X^i$$

3. Calculer récursivement $R_0(1), R_0(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1})$ et $R_1(1), R_1(\omega^2), \ldots, R_1((\omega^2)^{k-1})$.
4. Renvoyer $R_0(1), R_1(1), R_0(\omega^2), R_1(\omega^2), \ldots, R_0((\omega^2)^{k-1}), R_1((\omega^2)^{k-1})$.

Suite de la multiplication par FFT

L'étape d'interpolation dans la multiplication par FFT :

1. Calculer les puissances successives de l'inverse de la racine principale : $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \ldots, \omega^{-(n-1)}$.
2. Appliquer la DFT à $Eval(R)$ avec ces inverses.
3. Diviser les coefficients obtenus suite à la DFT par n (c'est-à-dire multiplier par l'inverse de n dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Comment calculer ω^{-1} et n^{-1} dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

$\rightarrow$ Algorithme d'Euclide étendu appliqué à l'équation $au + pv = 1$.

Théorème de Bézout

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Preuve que u est l'inverse de a

1. *a et p sont premiers entre eux donc $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + pv = 1$*
2. *Si $au + pv = 1$, alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:*
   $au + pv = (au + pv)\%p = (au)\%p + (pv)\%p = (au)\%p = 1$.
3. *Donc $au = 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et u est l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Améliorations

n	FFT Sans AVX2	FFT Avec AVX2
2^{20}	0.158404	0.150727
2^{21}	0.503089	0.437402
2^{22}	1.240285	1.075995
2^{23}	3.028623	2.317684
2^{24}	7.108149	5.847869

Rechercher les cases désirées dans *racines* avec AVX2 prend trop de temps.

- Réutilisation du *malloc* pour le tableau *racines*.
- Gain de temps sur les polynômes de degré > 20.

n	FFT Sans AVX2	FFT Avec AVX2 (Version 2)
2^{20}	0.158404	0.180472
2^{21}	0.503089	0.355293
2^{22}	1.240285	0.706925
2^{23}	3.028623	1.504402
2^{24}	7.108149	2.939824

La bibliothèque NTL

Meilleure bibliothèque pour la FFT dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: NTL

Comparaison des temps obtenus :

n	No AVX2 (NTL)	No AVX2	AVX2 (NTL)	AVX2
2^{18}	0.00297	0.01017	0.00182	0.00944
2^{20}	0.01517	0.06008	0.01113	0.06168
2^{22}	0.08613	0.38058	0.07253	0.21169

NTL est 3 à 5 fois plus rapide que nous !

Temps finaux et Conclusion

n	Naïf	Karatsuba	FFT Sans AVX2	FFT Avec AVX2 V2
2^{18}	28.17	2.02	0.037	0.045
2^{19}	2 m	6.07	0.085	0.094
2^{20}	7.5 m	18.21	0.16	0.18
2^{21}	30 m	54.63	0.50	0.36
2^{22}	2 h	2.7 m	1.24	0.71
2^{23}	8 h	8.1 m	3.03	1.50
2^{24}	**32 h**	24.5 m	7.11	**2.94**

Tableau – Comparaison finale des algorithmes implémentés

Attention ! Le degré des polynômes multipliés par FFT est limité par le choix de p.
D'un autre côté : Karatsuba et Naïf peuvent multiplier n'importe quoi !

Temps de nos algorithmes ≈ 5 fois le temps sur NTL

Algorithmes plus performants d'ici là ? Dépassé par de nouvelles technologies ?